Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 1–17
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17
EDN: EMWUDQ

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ УСПОКОЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА НА ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ

А. Ш. Адхамова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа, задача об успокоении системы управления с последействием, задача Красовского, обобщенное решение, гладкость решения

Для цитирования: *А. Ш. Адхамова.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием нейтрального типа на всем интервале// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 1–17. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17`

1. Введение

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [7]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [11, 18] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [9, 14], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [2, 3]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [1, 8, 10]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [15, 17].

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится

Публикация подготовлена при поддержке гранта РФФИ № 20-31-90119.

задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа, рассмотренная в [2,3]. Гладкость обобщенных решений этих краевых задач может нарушаться внутри интервала при сколь угодно гладкой начальной функции. Однако, как показано в статье [1], гладкость решений сохраняется на некоторых подынтервалах. В данной статье получены достаточные условия сохранения гладкости на всем интервале.

Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последействием и связи между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последействием нейтрального типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В том же разделе сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Доказательство результатов, изложенных во втором разделе, можно найти в работе [2]. В третьем разделе содержатся свойства разностных операторов на конечном интервале. В четвертом разделе изучается гладкость обобщенных решений на подынтервалах [1]. Отметим, что вопросы гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами рассматривались в работах [12, 13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)=u(t), \quad 0<t<T. \tag{2.1}$$

Здесь $y(t)=(y_1(t),\dots,y_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t)=(u_1(t),\dots,u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t)=\{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}, B_m(t)=\{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n\times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau=\text{const}>0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t)=\varphi(t), \quad t\in[-M\tau,0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t\geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0<t<T$, что

$$y(t)=0, \quad t\in[T-M\tau,T], \tag{2.3}$$

где $T>(M+1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int\limits_0^T |u(t)|^2dt\to\min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y):=\int\limits_0^T\left|\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau)+\sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau)\right|^2dt\to\min. \tag{2.4}$$

Мы приведем без доказательства ряд результатов из [2,3], необходимых нам в дальнейшем для изучения гладкости обобщенных решений.

Чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0,\dots,k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b), \qquad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b), \qquad \mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{L_2(a,b)}, \qquad (v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\dots,v_n)^T,\ w = (w_1,\dots,w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)\},$$
$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0)\cup(T-M\tau,T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^n(0,T-M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y+sv$ принадлежит $W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s\in\mathbb{R}$.

Обозначим $J(y+sv) = F(s)$. Поскольку $J(y+sv) \geqslant J(y),\ s\in\mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0, \tag{2.5}$$

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t-m\tau)\right)^T \times$$
$$\times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t) v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t) v(t-l\tau)\right) dt. \tag{2.6}$$

Из равенства (2.5) следует, что

$$B(y,v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{2.7}$$

Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_0^T \big(A_m(t)y'(t-m\tau) + B_m(t)y(t-m\tau)\big)^T \big(A_l(t)v'(t-l\tau) + B_l(t)v(t-l\tau)\big)\, dt. \tag{2.8}$$

Проведем преобразование слагаемых, полученных при раскрытии скобок в правой части (2.8). В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau) + B_m(\xi+l\tau) \times \\ \times y(\xi+(l-m)\tau))^T(A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t = \xi$ и учитывая, что $v(t) = 0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$, имеем

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} (A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) + B_m(t+l\tau) \times \\ \times y(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t) + B_l(t+l\tau)v(t))dt. \quad (2.9)$$

Из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t)) + \\ + [(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau) - ((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T A_l(t+l\tau))' + \\ + (B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau)]v(t)\}dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.7), в силу (2.11) мы можем произвести интегрирование по частям. Поскольку $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ — произвольная функция, мы получим

$$\mathcal{A}_R y := -\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' + \\ + \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) = 0 \ (t \in (0, T-M\tau). \quad (2.12)$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (2.12) почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$.

Определение 2.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если выполняется условие (2.11), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (2.12), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt +$$

$$+\int\limits_0^{T-M\tau}\sum_{l,m=0}^{M}\{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T-$$
$$-((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T+$$
$$+(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt=0 \quad (2.13)$$

для всех $v\in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), см. [2]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. *Функционал* (2.4) *с краевыми условиями* (2.2), (2.3) *достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи* (2.12), (2.2), (2.3).

Имеет место следующий результат, см. [2].

Лемма 2.1. *Пусть* $\det A_0(t)\neq 0,\ t\in\mathbb{R}$. *Тогда для всех* $w\in\widetilde{W}$

$$J_0(w)\geqslant c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \tag{2.14}$$

где $c_1>0$ — *постоянная, не зависящая от* w,

$$J_0(v):=\int\limits_0^T\left(\sum_{k=0}^{M}A_k(t)v'(t-k\tau)\right)'dt. \tag{2.15}$$

Используя лемму 2.1, можно доказать следующее утверждение, см. [2].

Теорема 2.2. *Пусть* $\det A_0(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$. *Тогда для любой вектор-функции* $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$ *существует единственное обобщенное решение* $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ *краевой задачи* (2.12), (2.2), (2.3), *при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}\leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \tag{2.16}$$

где $c>0$ — *постоянная, не зависящая от* φ.

3. Свойства разностных операторов

Положим $d:=T-M\tau$. Пусть $d=(N+\theta)\tau$, где $N\in\mathbb{N},\ 0<\theta\leqslant 1$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0<\theta<1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,(s-1+\theta)\tau),\ s=1,\dots,N+1$ и $Q_{2s}=((s-1+\theta)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N$. Если $\theta=1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N+1$. Таким образом, мы имеем два семейства непересекающихся интервалов, если $0<\theta<1$, и одно семейство, если $\theta=1$; причем каждые два интервала одного семейства получаются друг из друга сдвигом на некоторое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать $M=N$.

Введем оператор $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ по формуле

$$(Rx)(t)=\sum_{l,m=0}^{M}A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau). \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Оператор* $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ *самосопряженный, т. е. для любых* $x,y\in L_2(\mathbb{R})$ *выполняется равенство*

$$(Rx,y)_{L_2^n(\mathbb{R})}=(x,Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Действительно, при любых $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$, делая замену $t' = t+(l-m)\tau$, получим

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau) \right) y(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t') \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_m^T(t'+m\tau)A_l(t'+m\tau)y(t'+(m-l)\tau) \right) dt'.$$

Обозначая t' через t и меняя местами индексы l, m, имеем

$$(Rx, y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) \right) dt = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

□

Запишем оператор R в виде

$$(Ry)(t) := \sum_{s=-M}^{M} C_s(t)y(t+s\tau), \tag{3.2}$$

где

$$C_s(t) := \sum_{l,m: l-m=s} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau) \tag{3.3}$$

— матрица порядка $n \times n$ с элементами $c_s^{ij}(t)$, $i, j = 1, \ldots, n$. По построению $c_s^{ij}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$.

Обозначим $Q := (0, d)$. Введем ограниченные операторы $I_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(Q)$ следующим образом: $(I_Q x)(t) = x(t)$, $t \in (0, d)$, $(I_Q x)(t) = 0$, $t \notin (0, d)$ и $(P_Q y)(t) = y(t)$, $t \in (0, d)$. Обозначим $R_Q = P_Q R I_Q$. Из леммы 3.1 вытекает следующий результат.

Лемма 3.2. *Оператор $R_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный и самосопряженный.*

Пусть $P_\alpha : L_2^n(Q) \to L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — оператор ортогонального проектирования из пространства $L_2^n(Q)$ на пространство $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$, где $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) = \left\{ y \in L_2^n(Q) : y(t) = 0,\ t \in (0, d) \setminus \bigcup\limits_s Q_{\alpha s} \right\}$, $\alpha = 1, 2$, если $\theta < 1$; $\alpha = 1$ и P_α — единичный оператор, если $\theta = 1$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3.3. $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — *инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем оператор $U_\alpha : L_2(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{N(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha y)_k(t) = y(t+(k-1)\tau), t \in Q_{\alpha 1}, \tag{3.4}$$

где $k = 1, \ldots, N(\alpha)$; $N(\alpha) = M+1$, если $\alpha = 1$; $N(\alpha) = M$, если $\alpha = 2$.

Введем теперь изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $\widetilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{nM}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(\widetilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y_1)^T, \ldots, (U_\alpha y_n)^T)^T(t), \tag{3.5}$$

где

$$y = (y_1, \ldots, y_n)^T \in L_2^n(0, d), \qquad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), \ldots, (U_\alpha y_j)_M(t))^T.$$

Для каждого $\alpha = 1, 2$ рассмотрим блочную матрицу

$$R_\alpha(t) = \{R_{\alpha ij}(t)\}_{i,j=1}^n. \tag{3.6}$$

Здесь R_{1ij} — квадратные матрицы порядка $(M+1) \times (M+1)$ с элементами

$$r_{kl}^{1ij} = c_{l-k}^{ij}(t+(k-1)\tau), \quad k, l = 1, \ldots, M+1, \tag{3.7}$$

R_{2ij} — квадратные матрицы порядка $M \times M$ с элементами

$$r_{kl}^{2ij} = c_{l-k}^{ij}(t + (k-1)\tau), \quad k, l = 1, \dots, M. \tag{3.8}$$

Лемма 3.4. *Оператор* $R_{Q\alpha} = \widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ *является оператором умножения на симметричную матрицу* $R_\alpha(t)$.

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Обозначим $v = \widetilde{U}_\alpha^{-1} V \in L_2^n(\bigcup\limits_l Q_{sl})$. В силу формулы (3.4) и определения оператора R_Q мы имеем

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q v)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^n \sum_s C_s^{ij}(t + (k-1)\tau) v_j(t + (k-1+s)\tau) \quad (t \in Q_{\alpha 1}). \tag{3.9}$$

Здесь мы суммируем по s таким, что $1 \leqslant k + s \leqslant N(\alpha)$.

Пусть $l := k + s$. Тогда из (3.9) и (3.8) следует, что

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} C_{l-k}^{ij}(t + (k-1)\tau) v_j(t + (l-1)\tau) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^{N(\alpha)} r_{kl}^{\alpha ij}(t) V_{(j-1)N(\alpha)+l}(t).$$

Таким образом, мы доказали, что оператор $R_{Q\alpha}$ является умножением на матрицу R_α в пространстве $L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Отсюда из леммы 3.2 следует симметричность матрицы R_α. $\square$

Также отметим следующее равенство:

$$\widetilde{U}_\alpha R_Q y = R_\alpha \widetilde{U}_\alpha y, \quad y \in L_2(Q). \tag{3.10}$$

Пусть $B_{mp}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента r_{mp} матрицы R_1, $m, p = 1, \dots, n \times (M+1)$. Будем записывать индексы следующим образом: $B_{j+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(t)$, где $i, j = 1, \dots, M+1$, $k, l = 1, \dots, n$. Таким образом, $B_{j+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(t)$ соответствует элементу R_{lk1}, находящемуся в i-й строке и j-м столбце. Аналогичным образом обозначим через $r_{j+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)} = r_{ij}^{lk}$ элемент матрицы R_1, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы R_{1lk}.

Обозначим через $\mathcal{B}_1$ матрицу, полученную вычеркиванием первой строки и первого столбца из каждой матрицы $R_{ij1}, i, j = 1, \dots, n$. Важно, что матрица $\mathcal{B}_1$ совпадает с матрицей, полученной вычеркиванием последней строки и последнего столбца в каждой матрице $R_{ij1}, i, j = 1, \dots, n$.

Лемма 3.5. *Оператор* $R_Q : \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau) \to W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *является непрерывным, причем* $(R_Q\overline{y})' = R_Q\overline{y}' + R_Q'\overline{y}$ *для любых* $\overline{y} \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство очевидно.

Обозначим через $W_{2,\Gamma}^{1,n}$ подпространство функций $w \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) w_l(i - \tau) = 0, \tag{3.11}$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{M+1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) w_l(\theta + i - \tau) = 0, \tag{3.12}$$

где $k = 1, \dots, n$.

Лемма 3.6. *Предположим, что* $\det R_1(t) \neq 0$, $t \in Q_{11}$ *и* $\det \mathcal{B}_1(t) \neq 0$, $t \in Q_{21}$. *Тогда оператор* R_Q *отображает* $W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *на пространство* $W_{2,\Gamma}^{1,n}(0, T - M\tau)$ *непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. Докажем, что $R_Q(W_2^{1,n}(0,T-M\tau))\subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$,

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (R_Qy)_l(i-1)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \left(\sum_{m=1}^{n}R_{lmQ}y_m\right)(i-1)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}(\widetilde{U}_1R_{lmQ}y_m)_i(0)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}(R_{lm}\widetilde{U}_1y_m)_i(0)=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{M+1}r_{ij}^{lm}y_m(j-\tau)=$$

$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{M+1}y_m(j-\tau)\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ r_{j+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}=0.$$

Получаем, что если $y\in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, равенство (3.11) выполняется. Следовательно, $R_Qy\subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$. Равенство (3.12) рассматривается аналогично.

Теперь докажем обратное вложение: $W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)\subset R_Q(\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau))$. Пусть $\overline{w}\in W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$. Согласно лемме 3.4 оператор $R_Q:L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})\to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ имеет ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1}:L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})\to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Покажем, что $\overline{y}=R_Q^{-1}\overline{w}\in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$. Без потери общности предположим, что $\theta=1$. Очевидно, что $y\in W_2^{1,n}((s-1)\tau,s\tau)$. Таким образом, достаточно показать, что $y_m(0+0)=y_m(0-0)$ и $y_m(0)=y_m(d)=0$, $l=1,\dots,M$, $m=1,\dots,n$. Используя (3.11), получим

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (R_Qy)_l(i-\tau)=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (\sum_{m=1}^{n}R_{lmQ}y_m)(i-\tau)=$$

$$=\sum_{m,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{M+1}B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)r_{j+(m-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}y_m(j-\tau)=\det R_1(0)\times y_k(0)=0,$$

$k=1,\dots,n$. Так как $\det R_1(t)\neq 0$, получаем, что $y_k(0)=0$, $k=1,\dots,n$. Используя (3.12), получим $y_k(T-M\tau)=0$, $k=1,\dots,n$. Теперь покажем, что $R_Qy\subset W_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, т. е. $(R_Qy)(\tau+0)=(R_Qy)(\tau-0)$, $l=1,\dots,M$, $m=1,\dots,n$.

Пусть $\phi_{l+(k-1)(M+1)}=y_k(\tau+0)$, $l=0,\dots,M$; $\psi_{l+(k-1)(M+1)}=y_k(\tau-0)$, $l=0,\dots,M+1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1}r_{i+1,l}^{p,k}\phi_{l-1+(k-1)(M+1)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1}r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(M+1)},$$

$i=1,\dots,M$, $p=1,\dots,n$. Согласно краевым условиям $\phi_{0+(k-1)(M+1)}=\psi_{M+1+(k-1)(M+1)}=0$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1}r_{i+1,l+1}^{p,k}\phi_{l+(k-1)(M+1)}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1}r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(M+1)}.$$

Используя равенство $r_{i,l}^{p,k}=r_{i+1,l+1}^{p,k}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1}r_{i,l}^{p,k}(\phi_{l+(k-1)(M+1)}-\psi_{l+(k-1)(M+1)})=0,$$

$i=1,\dots,M$, $p=1,\dots,n$. Неравенство $\det\mathcal{B}_1(0)\neq 0$ означает, что $\phi_{l+(k-1)(M+1)}=\psi_{l+(k-1)(M+1)}$, $l=1,\dots,M$, $k=1,\dots,n$. $\square$

4. Гладкость обобщенных решений на подынтервалах

Как известно [4, 5, 18], гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение. С другой стороны, гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Приведем теорему о гладкости обобщенного решения на подынтервалах из [1].

Теорема 4.1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *задачи* (2.12), (2.2), (2.3) *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0, d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \dots, M+1)$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ $(j = 1, \dots, M+1)$ *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \dots, M)$, *если* $\theta < 1$.

Доказательство.

1. По теореме о продолжении функций в пространстве Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-M\tau, 0)$, $\Phi(t) = 0$ при $t \in (T - M\tau, T)$ и

$$||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leqslant k_1 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{4.1}$$

где константа $k_1 > 0$ не зависит от φ.

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Поскольку $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$, то в силу (2.11) $x(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) x'(t + (l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{4.2}$$

Таким образом, вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$ системе дифференциально-разностных уравнений

$$\mathcal{A}_R^0 x := -(R_Q x')'(t) = F(t), \quad t \in (0, T - M\tau) \tag{4.3}$$

и краевым условиям

$$x(0) = x(T - M\tau) = 0. \tag{4.4}$$

Здесь

$$F(t) := -\mathcal{A}_R \Phi - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l-m)\tau) +$$
$$+ \Big(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l-m)\tau)\Big)' -$$
$$- \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l-m)\tau) \in L_2^n(0, T - M\tau).$$

2. Повторяя в обратном порядке выкладки раздела 2, сделанные при выводе системы дифференциально-разностных уравнений (2.12) из интегрального тождества (2.7), в силу леммы 2.1 мы получим неравенство

$$(\mathcal{A}_R^0 w, w)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = J_0(w) \geqslant c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \tag{4.5}$$

для любых $w \in C_0^{\infty,n}(0, T - M\tau) := \prod_{j=1}^{n} C_0^\infty(0, T - M\tau)$.

Будем предполагать, что $\operatorname{supp} w \subset \bigcup_s Q_{\alpha s}$. Обозначим $W_\alpha = U_\alpha w$. Тогда из равенства (3.5) и лемм 3.2, 3.4 следует, что

$$-((R_\alpha W_\alpha')', W_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})} \geqslant c_1 ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}. \tag{4.6}$$

Из (4.3) и формулы Лейбница следует, что вектор-функция $U_\alpha x \in W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ удовлетворяет почти всюду в $Q_{\alpha 1}$ системе дифференциальных уравнений

$$-R_\alpha(t)(U_\alpha x)''(t) = F_0(t), \quad t \in Q_{\alpha 1}, \tag{4.7}$$

где $F_0(t) = F(t) - R'_\alpha(t)(U_\alpha x)'(t) \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$.

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно убедиться, что $\det R_1(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, поскольку тогда из (4.7) мы получим $U_\alpha x \in W_2^{2,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$, т. е. $y = x - \Phi \in W_2^{2,n}(Q_{\alpha 1}),\ s = 1, \ldots, N(\alpha)$.

Для доказательства того, что $\det R_1(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, мы используем неравенство (4.5).

3. Пусть $t^0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$ — произвольная точка. Выберем t^1 и r так, что $[t^1 - r, t^1 + r] \subset \overline{Q_{\alpha 1}} \cap (t^0 - \delta, t^0 + \delta)$, где $\delta > 0$ будет определено ниже. Предположим, что $W_\alpha \in C_0^{\infty,nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)$. Из (4.6) следует, что

$$b_1 + b_2 \geqslant k_2 ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}, \tag{4.8}$$

где

$$b_1 = (R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$
$$b_2 = ((R_\alpha(t) - R_\alpha(t^0))W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Поскольку коэффициенты матрицы $R_\alpha(t)$ равномерно непрерывны на $[0, T - M\tau]$, мы имеем

$$|b_2| \leqslant \varepsilon(\delta) ||W_\alpha||_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)},$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\varepsilon(\delta) < k_2/2$. Тогда из (4.8) мы получим

$$(R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geqslant \frac{k_2}{2} ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)}.$$

Получим теперь аналогичную оценку для функции $V_\alpha \in C_0^{\infty,nN(\alpha)}(-R, R)$, где $\varkappa = R/r > 1$. Сделаем замену переменной $\eta = \varkappa(t - t^1)$. Обозначим $V_\alpha(\eta) = W_\alpha(t(\eta))$. Тогда из последнего неравенства мы получим

$$(R_\alpha(t^0)V'_\alpha(\eta), V'_\alpha(\eta))_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)} = \varkappa^{-1}(R_\alpha(t^0)W'_\alpha(t), W'_\alpha(t))_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{k_2}{2}\varkappa^{-1}||W'_\alpha(t)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1-r,t^1+r)} = \frac{k_2}{2}||V'_\alpha(\eta)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)}. \tag{4.9}$$

Предположим, что $V_\alpha = v_\alpha Y$, где $v_\alpha \in C_0^\infty(-R, R)$, $Y \in \mathbb{C}^{nN(\alpha)}$. Пусть функция v_α продолжена нулем в $\mathbb{R}\backslash(-R, R)$. Тогда, используя преобразование Фурье, из (4.9) в силу теоремы Планшереля мы получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (R_\alpha(t^0)\xi^2 Y, Y)|\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{k_2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 |Y|^2 |\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi. \tag{4.10}$$

Здесь

$$\hat{v}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} v_\alpha(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

— преобразование Фурье функции $v_\alpha(\eta)$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, из (4.10) следует, что

$$(R_\alpha(t^0)Y, Y) \geqslant \frac{k_2}{2}|Y|^2.$$

Таким образом, симметрическая матрица $R_\alpha(t^0)$ положительно определена для любого $t_0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. Следовательно, $\det R_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. □

Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$-(R_Q y)''(t) = F(t), \quad F \in L_2^n(0, T - M\tau), \tag{4.11}$$
$$y(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T). \tag{4.12}$$

Ее обобщенное решение определяется аналогично решению (2.12), (2.2), (2.3).

Задача (4.11), (4.12) также обладает гладкостью на подынтервалах, поэтому определены значения $y'(0+0)$ и $y'(d-0)$.

Пусть

$$\mathfrak{L}y = -(R_Q y)''.$$

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$ *и* y *— обобщенное решение задачи* (4.11), (4.12). *Тогда если*

$$y'(0+0) = y'(d-0) = 0,$$

то $y \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. Для простоты предположим, что $\theta = 0$. Случай $\theta \in (0,1)$ рассматривается аналогично. Докажем, что $\mathcal{D}(\mathfrak{L}) \subset \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$. Пусть $y \subset D(\mathfrak{L})$. Тогда $w = R_Q y \subset W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$, т. е. $\widetilde{U}_1 w_l \subset W_2^{2,M+1}(0,1)$. Так как $w_l = \sum\limits_{k=1}^{n} R_{lkQ} y_k$, получаем $\widetilde{U}_1 w_l = \sum\limits_{k=1}^{n} R_{lki} \widetilde{U}_1 y_k$, $l = 1, \ldots, n$. Следовательно, $(\widetilde{U}_1 y_k)$ — линейная комбинация функций, принадлежащих $W_2^{2,M+1}(0,1)$, т. е. $\widetilde{U}_1 y_k \in W_2^{2,M+1}(0,1)$ (воспользуемся тем фактом, что $\det R_1(0) \neq 0$) и $y_k \in W_2^2(l-1, l)$, $l = 1, \ldots, M+1$. Этого достаточно, чтобы доказать, что $y_k'(l-0) = y_k'(l+0)$, $l = 1, \ldots, N$.

Из равенства $(R_Q y)_l = w_l \in W_2^2(0,d)$ получаем

$$\sum_{k=1}^{n} (R_{lkQ} y_k)'(m-0) = \sum_{k=1}^{n} (R_{lkQ} y_k)'(m+0),$$

$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$. Применим $\widetilde{U}_1$ к обеим сторонам равенства.

Используя (3.10), получим

$$\sum_{k=1}^{n} (R_{1lk} \widetilde{U}_1 y_k')_m (\tau - 0) = \sum_{k=1}^{n} (R_{1lk} \widetilde{U}_1 y_k')_{m+1} (0+0),$$

$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Пусть $\phi_{mk} = (\widetilde{U}_1 y_k')_m (1-0), \psi_{mk} = (\widetilde{U}_1 y_k')_{m+1}(0+0)$. Так как $y_k'(0+0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_1 (0+0) = 0$ и $y_k'(d-0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_{M+1}(1-0) = 0$, можем записать

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} r_{m,j}^{l,k} \phi_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{M+1} r_{m+1,i}^{l,k} \psi_{i-1,k},$$

$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Так как $r_{m,j}^{l,k} = r_{m+1,j+1}^{l,k}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{M+1} r_{m+1,j}^{l,k} (\phi_{j-1,k} - \psi_{j-1,k}) = 0, \tag{4.13}$$

$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что $r_{m+1,j}^{l,k} = r_{j+(k-1)(M+1)}^{m+1+(l-1)(M+1)}$, где $m = 1, \ldots, M$; $j = 2, \ldots, M+1$; $l, k = 1, \ldots, M$. Введем две вспомогательные функции. Пусть $\phi_{j-1+(k-1)(N+1)} = \phi_{j-1,k}$, $\psi_{j-1+(k-1)(M+1)} = \psi_{j-1,k}$, $j = 2, \ldots, M+1$, $k = 1, \ldots, n$.

Теперь с помощью этих функций можем переписать (4.13) в виде

$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=2}^{M+1} r_{j+(k-1)(M+1)}^{m+1+(l-1)(M+1)} (\phi_{j-1+(k-1)(M+1)} - \psi_{j-1+(k-1)(M+1)}) = 0, \tag{4.14}$$

$m = 1, \ldots, M$.

С учетом того, что $\mathcal{B}_1(0) \neq 0$, можем сделать вывод, что система (4.13) имеет только тривиальные решения, т. е. $\phi_{j-1+(k-1)(M+1)} = \psi_{j-1+(k-1)(M+1)}$, $j = 2, \ldots, M+1, k = 1, \ldots, n$. Другими словами, $y_k'(l-0) = y_k'(l+0), l = 1, \ldots, M$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $y \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

□

Рассмотрим вектор $w = R_Q y$, где y — решение системы уравнений $\mathfrak{L}y = F$. В силу леммы 3.6 w является решением системы уравнений

$$-w''(x) = F(x), \quad x \in (0, d) \tag{4.15}$$

и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (3.11) и (3.12). И обратно: если w обладает этими свойствами, то функция $y = R_Q^{-1} w$ является обобщенным решением уравнения (4.11) с краевым условием (4.12).

Общее решение уравнения (4.13) принимает следующий вид:

$$w(t) = C_1 + C_2 t + \int\limits_0^t (t-\tau)F(\tau)d\tau. \tag{4.16}$$

Если мы подставим $w(t)$ в (3.11) и (3.12), благодаря (4.16) мы получим следующие системы $2n$ уравнений для C_1 и C_2 :

$$\sum_{l=1}^{n} C_1^l \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) + \sum_{l=1}^{n} C_2^l \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau) B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) =$$
$$= -\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) \int\limits_0^{i-1} (i-\tau) F_l(\tau) d\tau = 0, \tag{4.17}$$

$$\sum_{l=1}^{n} C_1^l \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) + \sum_{l=1}^{n} C_2^l \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau+\theta) B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) =$$
$$= -\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) \int\limits_0^{i-1+\theta} (i+\theta-\tau) F_l(\tau) d\tau = 0, \tag{4.18}$$

где $k = 1, \ldots, n$.

Используя $y_k'(0+0) = y_k'(d-0) = 0$, $k = 1, \ldots, n$, получаем

$$y_k'(0+0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_1(0+0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} \times B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0)(\widetilde{U}_1 w_l')_i(0+0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) \times (\det R_1(0))^{-1} w_l'(i-\tau-0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0)(C_2^l + \int\limits_0^{i-1} F_l(\tau)d\tau) = 0, \tag{4.19}$$

$k = 1, \ldots, M$.

Аналогично,

$$u_k'(d-0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta)(C_2^l + \int\limits_0^{\theta+i-1} F_l(\tau)d\tau) = 0, \tag{4.20}$$

$k = 1, \ldots, M$.

Система уравнений $\mathfrak{L}y = F$ разрешима, значит, система линейных алгебраических уравнений (4.17), (4.18) разрешима. Решения $y \in \mathcal{D}(\mathfrak{L})$ принадлежат пространству $W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.19) и (4.20).

Матрицу, соответствующую (4.17), (4.18), обозначим через $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \left\| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{G} & \mathrm{D} \end{array} \right\|, \tag{4.21}$$

где

$$A = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) \right\|_{k,l=1}^{n}, \qquad B = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau) B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) \right\|_{k,l=1}^{n},$$

$$G = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) \right\|_{k,l=1}^{n}, \qquad D = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau+\theta) B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) \right\|_{k,l=1}^{n}.$$

Замечание. Условием однозначной разрешимости модельной задачи (4.11), (4.12) является невырожденность матрицы $\mathfrak{R}$: $\det \mathfrak{R} \neq 0$. В дальнейшем будем полагать его выполненным. Эта задача отличается от исходной задачи с оператором A_R^0, которая разрешима, младшими членами, поэтому накладываемое условие не лишнее, однозначная разрешимость модельной задачи не следует из однозначной разрешимости краевой задачи.

Теперь рассмотрим модельную задачу в пространстве гладких функций. Ей будет отвечать ограниченный оператор $\mathfrak{L}_0 : \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau) \to L_2^n(0, T - M\tau)$. Из гладкости обобщенных решений на подынтервалах и из [16, лемма 4.1] следует, что гладкость обобщенного решения связана с проверкой равенств $y'(0+0) = y'(d-0) = 0$. Для анализа этих равенств мы сводим рассматриваемую задачу к задаче для уравнения $-w''(t) = F(t)$ с нелокальными краевыми условиями, что обеспечивается леммой 3.6 об изоморфизме. Заметим, что подстановкой общего решения в краевые условия (4.17) и (4.18) и анализом получившейся системы алгебраических линейных уравнений относительно столбцов C_1 и C_2 мы решаем вопрос существования и единственности обобщенного решения. Таким образом, предположение об однозначной разрешимости задачи может быть записано как $\det \mathfrak{R} \neq 0$. Дополнительные условия $y'(0+0) = y'(d-0)$ в случае однозначно определенных выше столбцов C_1 и C_2 имеют вид $2n$ условий на правую часть F. Из доказательства [16, лемма 4.1] следует, что они представляют собой условия ортогональности набору $2n$ линейно независимых функций из $L_2^n(0, T - M\tau)$. Таким образом, $\dim \operatorname{Coker} \mathfrak{L}_0 = 2n$, $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L}_0 = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\det \mathfrak{R} \neq 0$ *и* $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$. *Тогда* $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L}_0 = 0$, $\dim \operatorname{Coker} \mathfrak{L}_0 = 2n$.

Доказательство. Ядро тривиально в силу $\det \mathfrak{R} \neq 0$. В силу теоремы 4.2 достаточно проверить следующие условия для обобщенного решения:

$$y_k'(0+0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) \left(C_2^l + \int_0^{i-1} F_l(\tau) d\tau \right) = 0,$$

$$u_k'(d-0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) \left(C_2^l + \int_0^{\theta+i-1} F_l(\tau) d\tau \right) = 0,$$

$k = 1, \ldots, M$, в которых столбец C_2 находится однозначно из системы (4.17), (4.18). В этом случае системы (4.19) и (4.20) принимают вид условий на правую часть уравнения. Из доказательства теоремы 4.3 получим, что (4.19), (4.20) являются условиями ортогональности в системе из $2n$ линейно независимых функций ψ в $L_2^n(-M\tau, 0)$.

Введем пространство вектор-функций

$$\widetilde{H} = L_2^n(0, T - M\tau) \times W_2^{2,n}(-M\tau, 0) \times W_2^{2,n}(T - M\tau, T)$$

и определим линейный непрерывный оператор $G : W_2^{2,n}(-M\tau, T) \to \widetilde{H}$, отвечающий гладким решениям, по следующей формуле:

$$Gy = ((\mathfrak{L}y), (y|_{(-M\tau,0)}), 0),$$

где $\mathfrak{L} : W_2^{2,n}(-M\tau, T) \to L_2^M(-M\tau, T)$ действует по формуле

$$\mathfrak{L}y = -(R_Q y')' + \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l-m)\tau) +$$

$$+\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau).$$

Определение 4.1. Функция $y \in W_2^{2,n}(-M, d+M)$ называется *гладким решением* краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), если $Gy = (0, \varphi_1, 0)$.

Теорема 4.4. *Пусть* $\det \mathfrak{R}(0) \neq 0$, $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$. *Тогда для гладкости обобщенного решения задачи* (2.12), (2.2), (2.3) *необходимо и достаточно, чтобы функция* ϕ *удовлетворяла в пространстве* $W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ *конечному числу* p *условий ортогональности, где* $p \leqslant 2n$.

Ядро G тривиально, поэтому достаточно показать, что его индекс больше или равен $-2n$.

Оператор $\mathfrak{L}$ отличается от оператора $\mathfrak{L}_0$ младшими членами, представляющими собой компактный оператор из $W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ в $L_2^n(0, T-M\tau)$, что не меняет индекс оператора, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{L}y = -(R_Q y)''$, $\operatorname{ind} \mathfrak{L}_0 = \operatorname{ind} \mathfrak{L} = -2n$.

Рассмотрим уравнение

$$-(R_Q y)''(t) = F(t) \tag{4.22}$$

с краевыми условиями

$$y(t) = \varphi_1(t), \quad t \in (-M\tau, 0), \tag{4.23}$$

$$y(t) = 0, \quad t \in (T-M\tau, T). \tag{4.24}$$

Введем функцию

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in (-M\tau, 0), \\ \psi_2(t), & t \in (T-M\tau, T), \\ (\psi_1(0) + \psi_1'(0))\eta(t) + & \\ \quad + (\psi_2(T-M\tau) + \psi_2'(T-M\tau)(t-T+M\tau))\eta(t-T+M\tau), & t \in (0, T-M\tau), \end{cases}$$

где $\eta(t)$ — срезающая функция такая, что $\eta(t) = 1$, если $|t| < \dfrac{\tau}{4}$, и $\eta(t) = 0$, если $|t| > \dfrac{\tau}{3}$. Представим $v = y - \widetilde{\psi}$, таким образом краевую задачу (4.22)–(4.24) можно переписать в виде

$$\mathfrak{L}_0 v = F - (R\widetilde{\psi})''. \tag{4.25}$$

В силу теоремы 4.3 уравнение (4.25) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$(F - (R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{4.26}$$

где $\xi_i \in L_2^n(0,d)$, $i = 1, \ldots, 2n$, линейно независимы. Введем линейные функционалы $\Phi_i\widetilde{\psi} = ((R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)}$, $i = 1, \ldots, 2n$. В силу выбора $\widetilde{\psi}$ имеем

$$\Phi_i(\widetilde{\psi}) \leqslant C||\psi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)} ||\xi_i||_{L_2^n(0,T-M\tau)}, \quad i = 1, \ldots, 2n,$$

где $C > 0$. По теореме Рисса существует линейный ограниченный оператор B_1 такой, что

$$-((R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = (\psi, B_1\xi_i)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}.$$

Таким образом, условие (4.26) примет вид

$$(\widetilde{F}, K_i)_{\widetilde{H}} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{4.27}$$

где $\widetilde{F} = (F, \varphi_1, 0)$, вектор-функции $K_i = (\xi_i, (B_1\xi_i), 0) \in \widetilde{H}$ линейно независимы в силу линейной независимости функций ξ_i. Для задачи (2.12), (2.2), (2.3) при $F = 0$ условие (4.27) принимает вид $(\varphi_1, B_1\xi_i)_{W_2^{2n}(-M\tau,0)} = 0$, $i = 1, \ldots, 2n$. Некоторые из функций $B_1\xi$ могут быть линейно зависимыми, поэтому число условий ортогональности не превышает $2n$.

Таким образом, индекс задачи (4.22)–(4.24), совпадающий с индексом оператора G, больше или равен $-2n$. Учитывая, что ядро оператора G тривиально, получаем утверждение теоремы.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — *68*, № 1. — С. 14–24.
2. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 547–556.
3. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа// Докл. РАН. — 2020. — *490*, № 1. — С. 81–84.
4. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *10*, № 5. — С. 815–824.
5. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
6. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа// Укр. мат. ж. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–585.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
9. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
10. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
11. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
12. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — *500*, № 1. — С. 74–77.
13. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.
14. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// Distrib. Comput. Commun. Networks. — 2016. — *678*. — С. 612–623.
15. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
16. *Baumstein A. I., Skubachevskii A. L.* On smooth solutions of the boundary-value problems for the systems of differential-difference equations// Nonlinear Anal. — 1995. — *25*, № 7. — С. 655–668.
17. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
18. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17
EDN: EMWUDQ

Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval

A. Sh. Adkhamova

RUDN University, Moscow, Russia

We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. This problem is equivalent to the boundary-value problem for a system of second-order differential-difference equations, which has a unique generalized solution. It is proved that the smoothness of this solution can be violated on the considered interval and is preserved only on some subintervals. Sufficient conditions for the initial function are obtained to ensure the smoothness of the generalized solution over the entire interval.

Keywords: neutral-type differential-difference equation, damping problem for control system with aftereffect, Krasovskii problem, generalized solution, smoothness of solution

For citation: A. Sh. Adkhamova, "Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 1–17. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova, "Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay" [Gladkost' resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 1, 14–24 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem" [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
3. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa" [On damping of the control system with aftereffect of a neutral-type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
4. A. G. Kamenskii, "Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **10**, No. 5, 815–824 (in Russian).
5. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol'kimi starshimi chlenami" [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several leading terms], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
6. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, "O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnogo uravneniya neytral'nogo tipa" [On smooth solutions of the boundary-value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukrainian Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
7. N. N. Krasovskii, *Teoriya Upravleniya Dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, "O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh" [On positional modeling in dynamical systems], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. D. D. Leonov, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
10. Yu. S. Osipov, "O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem" [On stabilization of control systems with delay], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, No. 1, 74–77 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, "Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
14. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Damping problem for multidimensional control system with delays," *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
15. H. T. Banks and G. A. Kent, "Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space," *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
16. A. I. Baumstein and A. L. Skubachevskii, "On smooth solutions of the boundary-value problems for the systems of differential-difference equations," *Nonlinear Anal.*, 1995, **25**, No. 7, 655–668.
17. G. A. Kent, "A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
18. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru