Современная математика. Фундаментальные направления. Том 51 (2013). С. 142–151

УДК 512.667.3

K-ГРУППЫ БРУНСА—ГУБЕЛАДЗЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

© 2013 г. **Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ, М. В. ПРИХОДЬКО**

Аннотация. В работе изучается относительно недавно построенное обобщение алгебраической K-теории, в котором в качестве дополнительного параметра используется сбалансированный многогранник. Для четырехугольной пирамиды изучается соответствующая группа Стейнберга и вычисляются K-группы.

1. Введение

Задачи, в которых так или иначе проявлялись связи алгебраической K-теории с многогранниками, всегда вызывали интерес. В этом направлении, пожалуй, наибольшее значение имеют работы по сравнению друг с другом различных версий высших алгебраических K-теорий ассоциативных колец с 1. Важной работой, заслуживающей отдельного упоминания, является работа Вагонера [9], в которой была доказана эквивалентность алгебраической K-теории Квиллена и K-теории Володина (см. также [1]). Конструкция Вагонера использовала комбинаторику системы корней A_n, а точнее, комбинаторную структуру комплекса P_n, индуцированную на сфере пересечением с камерами Вейля. В дальнейшем было получено более простое (точнее, более короткое) доказательство (см. [8]), в котором использование системы корней A_n несколько замаскировано. В работах А. И. Немытова и Ю. П. Соловьева [2, 3] с помощью других систем корней исследовались изоморфизмы для эрмитовой K-теории инволютивных ассоциативных алгебр с 1.

Другой аспект связи алгебраической K-теории с многогранниками исследован в серии работ В. Брунса и И. Губеладзе (например, см. [6, 7]). Отправной точкой их конструкции служит коммутативное кольцо R с 1 и многогранник P, удовлетворяющий некоторым свойствам. Брунс и Губеладзе построили $GL(R,P)$ — обобщение кольца $GL(R)$, в котором выполняется аналог теоремы о разложении обратимой матрицы в произведение элементарных матриц. Специфика их результатов состоит в том, что в этих кольцах проекторы и «детерминант» $GL(R,P)/[GL(R,P),GL(R,P)]$ не изучены в такой степени, чтобы можно было говорить об обобщении функторов K_0 и K_1. Вместе с тем им удалось определить аналог $E(R,P)$ подгруппы элементарных матриц $E(R) = [E(R),E(R))] = [GL(R),GL(R))] \subset GL(R)$. Стандартные соотношения в элементарных матрицах

$$[e_{ij}^a, e_{kl}^b] = \begin{cases} 1 & \text{для } j \neq k, i \neq l, \\ e_{il}^{ab} & \text{для } j = k, i \neq l, \\ e_{il}^{-ba} & \text{для } j \neq k, i = l. \end{cases}$$

для широкого класса так называемых сбалансированных многогранников переносятся на группу $E(R,P)$. Этот факт позволяет определить группу Стейнберга $St(E,P)$ и доказать, что она является универсальным центральным расширением $E(R,P)$. Тогда можно определить аналог K_2 Милнора как $K_2(R,P) = \ker(St(R,P) \to E(R,P))$. Применив $+$-конструкцию к $BE(R,P)$, получим аналог высших K-групп Квиллена:

$$K_i(R,P) = \pi_i(BE(R,P)^+), \ i \geqslant 2.$$

Возникает естественный вопрос: что из себя представляют группы $K_i(R,P)$ для различных многогранников? Брунс и Губеладзе получили ответ для сбалансированных многоугольников, а именно, они установили, что в действительности имеется всего шесть различных в определенном смысле вариантов, для каждого из которых было доказано, что группа $K_i(R,P)$ изоморфна либо $K_i(R)$ Квиллена, либо прямой сумме двух экземпляров $K_i(R)$ (для трех вариантов Брунс и Губеладзе накладывали на кольцо R дополнительное условие).

В настоящей работе исследуется K-теория Брунса—Губеладзе для четырехугольной пирамиды-многогранника, к которому неприменимы методы исследования работ [7]. Основными нашими результатами являются теоремы 3.2 и 4.1.

Связи K-теории Брунса—Губеладзе с конструкцией Вагонера—Володина будут исследованы с следующих работах.

2. Основные определения

Многогранники. Пусть P — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, все вершины которого принадлежат целочисленной решетке $\mathbb{Z}^n$. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать только такие многогранники, дополнительно предполагая, что размерность n минимальна, т. е. линейные оболочки граней P являются гиперплоскостями в $\mathbb{R}^n$. Тогда любой такой грани F можно поставить в соответствие единственный сюръективный гомоморфизм $\langle F, - \rangle \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$, ядром которого является множество векторов, параллельных грани F, и такой, что для любого вектора $u \in \mathbb{Z}^n$ с началом в F и концом в P выполняется неравенство

$$\langle F, u \rangle \geqslant 0.$$

Опорные векторы. Вектор $u \in \mathbb{Z}^n$ называется *опорным* для многогранника P, если существует такая грань $P_u \subset P$, что $\langle P_u, u \rangle = -1$, а для любой другой грани $F \subset P$ $\langle F, u \rangle \geqslant 0$. В этом случае грань P_u называется *базовой* (для опорного вектора u). Базовая грань для данного опорного вектора определена однозначно; наоборот, у двух различных опорных векторов базовые грани могут совпадать. Множество опорных векторов многогранника P обозначается $\mathrm{Col}\,(P)$.

Одним из основных свойств опорных векторов является следующее: для любой точки $p \in P \cap \mathbb{Z}^n$ существует такое целое неотрицательное число k, что $p + ku \in P_u$. Это число называется *высотой* точки p над гранью P_u и обозначается $ht_{P_u}(p)$. Высоту точки над гранью можно вычислить следующим образом: для любой точки $q \in F$

$$ht_F(p) = \langle F, p - q \rangle.$$

Это определение не зависит от выбора точки q, так как все векторы, соединяющие точки F, параллельны F.

На множестве опорных векторов можно ввести операцию частичного умножения: если $u, v \in \mathrm{Col}\,(P)$ и $u + v \in \mathrm{Col}\,(P)$ и $P_{u+v} = P_u$, то говорят, что определено произведение $uv = u + v$. Вообще говоря, не для всех пар опорных векторов существует их произведение. Кроме того, если определено uv, то не определено vu.

Приведем несколько примеров.

1. Δ_0^n — симплекс в $\mathbb{R}^n$, одна из вершин которого лежит в начале координат, а у каждой из остальных n вершин есть ровно одна ненулевая координата, равная 1. Для любых двух вершин p_i, p_j симплекса Δ_0^n вектор $\delta_i^j = p_j - p_i$ является опорным. Других опорных векторов нет. Все соотношения описываются формулой
$$\delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k.$$
2. $I \times I = \mathrm{conv}\ \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$ — квадрат со стороной 1. У него четыре опорных вектора:
$$\mathrm{Col}\,(I \times I) = \{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\},$$
между которыми соотношений нет.
3. Трапеция $T = \mathrm{conv}\ \{(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)\}$. Множество опорных векторов также состоит из четырех элементов
$$u = (0,-1), \quad v = (1,0), \quad -v = (-1,0), \quad w = (1,-1)$$
со следующими соотношениями:
$$uv = w \qquad \text{и} \qquad w(-v) = u.$$

Сбалансированные многогранники. Многогранник P называется *сбалансированным*, если $\langle P_u, v\rangle \leqslant 1$ для любых $u, v \in \mathrm{Col}\ (P)$. Примерами сбалансированных многогранников являются: симплекс, квадрат, трапеция из примера 3, четырехугольная пирамида, несбалансированных — прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2.

Проективная эквивалентность. Многогранники P и Q называются *проективно эквивалентными*, если они имеют одинаковые размерности и одинаковую комбинаторную структуру, причем после подходящего аффинного преобразования $\mathbb{R}^n$, сохраняющего $\mathbb{Z}^n$, грани P становятся параллельными соответствующим граням Q.

У проективно эквивалентных многогранников системы опорных векторов со структурой умножения совпадают, поэтому соответствующие K-теории естественно изоморфны.

Теорема 2.1 (см. [6,7]). *Сбалансированные многоугольники разбиваются на классы проективной эквивалентности со следующими представителями*:

a) $P_a = \Delta^2 = \mathrm{conv}\ \{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ — *двумерный симплекс*;
b) *трапеция* $P_b = \mathrm{conv}\ \{(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)\}$;
c) $P_c = \mathrm{conv}\ \{(0,0),(3,0),(1,2),(0,1)\}$, *здесь* $\mathrm{Col}\ (P_C) = \{u,v,w\}$ *с единственным соотношением* $uv = w$;
d_k) *серия многоугольников* $P_{d,k}$: *многоугольник* $P_{d,k}$ *имеет в точности* k *опорных векторов с общей базовой гранью, соотношений нет*;
e) *единичный квадрат* P_e;
f) *квадрат со стороной 2 и срезанным углом*: $P_f = \mathrm{conv}\ \{(0,0),(2,0),(2,1),(1,2),(0,2)\}$, *здесь* $\mathrm{Col}\ (P_f) = \{u,v\}$ *без соотношений.*

Подобной классификации в других размерностях не существует.

Простейшие примеры трехмерных многогранников с нетривиальной структурой опорных векторов получаются как конусы над многогранниками из теоремы 2.1. Более точно, вложим многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ как $P \times \{0\}$. Определим конус высоты k над P как $C_kP = \mathrm{conv}\ P \cup (\underbrace{0,\ldots,0}_{n},k)$.

Нетрудно видеть, что C_1P_a — это трехмерный симплекс; он приводит к классической K-теории Квиллена. Многогранники $C_1P_b, C_1P_c, C_1P_d, C_1P_f$ не являются сбалансированными.

Многогранник C_1P_e — это четырехугольная пирамида, которой посвящена эта работа.

Среди конусов высоты 2 особо следует выделить C_2P_f — он сбалансирован и имеет очень интересную структуру опорных векторов; этот случай будет разобран в другом месте.

Удвоение вдоль грани. Для любого многогранника P и его грани F можно определить новый многогранник $P^{\lrcorner F}$, называемый *удвоением* P вдоль грани F. Предположим, что начало координат принадлежит грани F, и рассмотрим стандартное вложение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$. В $\mathbb{R}^{n+1}$ многогранник P повернем на 90° вокруг грани F. Вершины повернутого многогранника, который мы обозначим $P^{|_F}$, могут оказаться вне узлов целочисленной решетки, но можно изменить базис в $\mathbb{R}^{n+1}$ так, что вершины и P и $P^{|_F}$ будут иметь целочисленные координаты в новом базисе (например, мы всегда можем сделать аффинно-целочисленную замену координат в $\mathbb{R}^n$ так, что грань F будет лежать в плоскости $x_n = 0$, и тогда образы всех вершин при повороте будут иметь целочисленные координаты). Теперь определим многогранник $P^{\lrcorner F}$ как выпуклую оболочку P и $P^{|_F}$. Если грань F является базовой для v, то будем также писать $P^{\lrcorner v}$.

При удвоении многогранника вдоль грани F количество его граней увеличивается на 1. При этом для любой грани G, кроме F, выпуклую оболочку G и $G^{|}$ (образ G при повороте) мы будем рассматривать как образ G при удвоении и обозначать $G^{\lrcorner F}$. Для F положим по определению $F^{\lrcorner F} = P^{|}$. Так как соответствие $G^{\lrcorner F} \leftrightarrow G$ является взаимно-однозначным, иногда мы будем отождествлять $G^{\lrcorner F}$ с G.

Пусть теперь P — сбалансированный многогранник и $v \in \mathrm{Col}\ (P)$ — опорный вектор с базовой гранью G. Тогда v также является опорным и в $P^{\lrcorner F}$ с базовой гранью $G^{\lrcorner F}$. Кроме того, при любом удвоении возникает два новых опорных вектора δ и $-\delta$ с базовыми гранями P и $P^{|}$. Для любого $v \in \mathrm{Col}\ (P)$ повернутый вектор $v^{|}$ является опорным в $P^{\lrcorner F}$ (при этом, если v параллелен F, то

$v^{|}$ совпадает с v). При удвоении сбалансированного многогранника вдоль базовой грани получающийся многогранник также будет сбалансированным, причем множество его опорных векторов состоит только из перечисленных выше, т. е.

$$\mathrm{Col}\,(P^{\lrcorner F}) = \mathrm{Col}\,(P) \cup \mathrm{Col}\,(P^{|}) \cup \{\delta, -\delta\}.$$

Последовательность вложенных многогранников

$$\mathfrak{P} = (P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots)$$

называется *последовательностью удвоений*, если, во-первых, каждый следующий многогранник является удвоением предыдущего вдоль базовой грани и, во-вторых, для любых $i \in \mathbb{Z}_+$, $v \in \mathrm{Col}\,(P_i)$ найдется такой индекс $j \geqslant i$, что $P_{j+1} = P_j^{\lrcorner v}$.

Так как имеется естественное вложение $\mathrm{Col}\,(P_i) \subset \mathrm{Col}\,(P_{i+1})$, можно определить прямой предел $\lim \mathrm{Col}\,(P_i)$, который мы будем обозначать $\mathrm{Col}\,(\mathfrak{P})$.

Группа Стейнберга. Для сбалансированного многогранника P и последовательности удвоений $\mathfrak{P} = (P \subset P_1 \subset \ldots)$ определим *группу Стейнберга* $St(R, P)$ как группу с образующими x_v^λ, $v \in \mathrm{Col}\,(\mathfrak{P})$, $\lambda \in R$, удовлетворяющими соотношениям:

$$x_v^\lambda x_v^\mu = x_v^{\lambda+\mu}$$

и

$$[x_u^\lambda, x_v^\mu] = \begin{cases} x_{uv}^{-\lambda\mu}, & \text{если определено } uv, \\ 1, & \text{если } u + v \notin \mathrm{Col}\,(\mathfrak{P}) \cup \{0\}. \end{cases}$$

Можно показать, что это определение не зависит от выбора последовательности удвоений $\mathfrak{P}$. Подгруппу в группе $St(R, P)$, порожденную x_v^λ, где $v \in \mathrm{Col}\,(P_i)$, будем обозначать $St_i(R, P)$ (это определение при $i \neq 0$ уже зависит от выбора последовательности удвоений).

В качестве примера вычислим группу Стейнберга для симплекса Δ_0^n. Обозначим его грани $F_1, \ldots F_{n+1}$. Для каждой пары граней F_i, F_j определены два опорных вектора $\delta_i^j \in F_i$ и $\delta_j^i \in F_j$ такие, что $\delta_i^j = -\delta_j^i$ и для любых трех граней F_i, F_j, F_k выполняется соотношение $\delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k$ (ср. с примером 1). При удвоении вдоль любой грани $(\Delta_0^n)^{\lrcorner} = \Delta_0^{n+1}$. При этом все существующие грани и соотношения сохраняются, и возникают новая грань F_{n+2} и новые опорные векторы δ_i^{n+2} и δ_{n+2}^i для всех $i = 1, \ldots, n+1$. Таким образом определено естественное вложение

$$\mathfrak{I}\colon St_k(R, \Delta_0^n) \to St_{k+1}(R, \Delta_0^n).$$

Пусть теперь $St_k(R)$ — классическая группа Стейнберга кольца R. Можно проверить, что отображение

$$\phi\colon St_{k+n+1}(R) \to St_0(R, \Delta_0^{k+n}) \cong St_k(R, \Delta_0^n),$$

определенное по формуле

$$\phi(x_{ij}^\lambda) = x_{\delta_j^i}^\lambda,$$

является изоморфизмом. Более того, ϕ коммутирует с вложениями $\mathfrak{I}\colon St_k(R, \Delta_0^n) \to St_{k+1}(R, \Delta_0^n)$ и стандартным вложением $St_k(R) \to St_{k+1}(R)$, поэтому прямые пределы $St(R, \Delta_0^n)$ и $St(R)$ также изоморфны.

Элементарные автоморфизмы. Пусть $S(P)$ — полугруппа, порожденная парами $(p, 1)$, где $p \in P \cap \mathbb{Z}^n$, $d \in \mathbb{N}$, относительно поэлементного сложения. Для данного ассоциативного, коммутативного кольца с единицей R определено полугрупповое градуированное кольцо $R[P] = R[S(P)]$, группу сохраняющих градуировку автоморфизмов которого мы будем обозначать $\mathrm{Gr.aut}\,(R[P])$. Элемент этой группы ϕ называется *элементарным автоморфизмом*, если найдутся такой опорный вектор $v \in \mathrm{Col}\,(P)$ и такой элемент кольца $\lambda \in R$, что

$$\phi(x) = (1 + \lambda v)^{ht_{P_v}(x)} x$$

для любого $x \in S(P)$. Обозначим этот автоморфизм как e_v^λ, а подгруппу в группе $\mathrm{Gr.aut}\,(R[P])$, порожденную элементарными автоморфизмами — как $E_0(R, P)$. В работах [6, 7] было показано, что для сбалансированных многогранников элементарные автоморфизмы удовлетворяют соотношениям, аналогичным соотношениям между элементарными матрицами:

$$e_v^\lambda e_v^\mu = e_v^{\lambda+\mu},$$

$$[e_u^\lambda, e_v^\mu] = \begin{cases} e_{uv}^{-\lambda\mu}, & \text{если определено } uv, \\ 1, & \text{если } u+v \notin \mathrm{Col}\,(P)\cup\{0\}. \end{cases}$$

Как и в случае группы Стейнберга, для фиксированной последовательности удвоений

$$\mathfrak{P} = (P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots)$$

определено кольцо $R[\mathfrak{P}] = \lim\limits_{i\to\infty} R[S(P_i)]$. В группе его автоморфизмов, сохраняющих градуировку, выделяется подгруппа $E(R,\mathfrak{P})$, порожденная элементарными автоморфизмами. При другом выборе последовательности удвоений получается естественно изоморфная группа, поэтому в дальнейшем вместо $E(R,\mathfrak{P})$ мы будем использовать обозначение $E(R,P)$.

3. Последовательность удвоений четырехугольной пирамиды

Теорема 3.1. *Пусть* $P = \mathrm{conv}\ \{(0,0,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *— четырехугольная пирамида,* $\mathfrak{P} = (P \subset P_1 \subset \ldots)$ *— её последовательность удвоений. Тогда для любого t множество базовых граней P_t можно разбить на три семейства* $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(t), \mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$, *количество граней в каждом из которых соответственно равно a, b и c, так что*:

1. *Для любых двух граней S_i и S_j одного семейства $\mathbf{S}$ определены два вектора $\delta_i^j(\mathbf{S}) \in \mathrm{Col}\,(S_i)$ и $\delta_j^i(\mathbf{S}) \in \mathrm{Col}\,(S_j)$ такие, что*
$$\delta_j^i(\mathbf{S}) = -\delta_i^j(\mathbf{S}).$$
2. *Для любых трёх различных граней S_i, S_j и S_k одного семейства $\mathbf{S}$*
$$\delta_i^j(\mathbf{S})\delta_j^k(\mathbf{S}) = \delta_i^k(\mathbf{S}).$$
3. *Для любой грани A_k семейства $\mathbf{A}$, кроме указанных выше δ-векторов, существует еще $b \times c$ опорных векторов u_k^{ij} таких, что*
$$u_k^{ij}\delta_i^l(\mathbf{B}) = u_k^{lj}, \quad u_k^{ij}\delta_j^l(\mathbf{C}) = u_k^{il} \quad \text{и} \quad \delta_l^k(\mathbf{A})u_k^{ij} = u_l^{ij}.$$
4. *Для любого семейства $\mathbf{S}(t)$*
$$\mathbf{S}(t) \subseteq \mathbf{S}(t+1).$$

Все указанные выше векторы различны, и других опорных векторов и соотношений между опорными векторами в P_t нет.

Доказательство. Доказывать эту теорему мы будем индукцией по t.

При $t = 0$ семейство $\mathbf{A}$ состоит из единственной грани A, являющейся основанием пирамиды, семейство $\mathbf{B}$ состоит из двух боковых граней, параллельных вектору $(1,0,0)$, а семейство $\mathbf{C}$ состоит из двух боковых граней, параллельных вектору $(0,1,0)$. Все требуемые соотношения, очевидно, выполняются.

Для индукционного перехода нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. *Пусть множество граней некоторого многогранника можно разбить на три семейства, удовлетворяющих свойствам* 1, 2 *и* 3 *из теоремы* 3.1. *Тогда*:

1. *Для любой грани $A_i \in \mathbf{A}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{A})$, $\delta_j^i(\mathbf{A})$ и u_i^{jk}, параллельны ей.*
2. *Для любой грани $B_i \in \mathbf{B}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{B})$, $\delta_j^i(\mathbf{B})$ и u_k^{ij}, параллельны ей.*
3. *Для любой грани $C_i \in \mathbf{C}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{C})$, $\delta_j^i(\mathbf{C})$ и u_k^{ji}, параллельны ей.*

Доказательство леммы 3.1. Будем доказывать от противного. Предположим, для двух (возможно одинаковых) семейств $\mathbf{T},\mathbf{S}$ выполняется $\langle T_i, \delta_k^j(\mathbf{S})\rangle = 1$, тогда $\langle T_i, \delta_j^k(\mathbf{S})\rangle = -1$, то есть $\delta_j^k(\mathbf{S}) \in \mathrm{Col}\,(T_i)$. Но это невозможно, так как все векторы из $\mathrm{Col}\,(T_i)$ имеют вид $\delta_i^p(\mathbf{T})$, если $\mathbf{T} \neq \mathbf{A}$, или $\delta_i^p(\mathbf{T})$ и u_i^{pq}, если $\mathbf{T} = \mathbf{A}$. Теперь пусть $\langle A_i, u_l^{jk}\rangle = 1$ и $l \neq i$, тогда $\langle A_i, \delta_i^l(\mathbf{A})u_l^{jk}\rangle = 0$, то есть $u_i^{jk} \notin \mathrm{Col}\,(A_i)$, что противоречит второму условию. Осталось проверить, что не может выполняться равенство $\langle B_i, u_l^{jk}\rangle = 1$. В этом случае $\langle B_i, u_l^{ik}\rangle = \langle B_i, u_l^{jk}\delta_j^i(\mathbf{B})\rangle = 2$, что невозможно, так как многогранник сбалансированный. □

(*Продолжение доказательства теоремы* 3.1.)

Рассмотрим удвоение P_t до P_{t+1}. Удвоение может происходить вдоль одной из граней семейств $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, но последние два варианта полностью идентичны, поэтому рассмотрим первые два случая.

Пусть удвоение происходит вдоль грани $A_i \in \mathbf{A}$. Для краткости обозначим $n = a + 1$. При удвоении возникает новая грань, которую мы обозначим A_n, и новые δ-векторы $\delta_i^n(\mathbf{A}) \in \mathrm{Col}\ (A_i)$ и $\delta_n^i(\mathbf{A}) \in \mathrm{Col}\ (A_n)$. Теперь изучим, что происходит с остальными векторами при удвоении. Векторы $\delta_i^j(\mathbf{A})^|$ обозначим как $\delta_n^j(\mathbf{A})$, $\delta_j^i(\mathbf{A})^|$ — как $\delta_j^n(\mathbf{A})$, а $u_i^{jk|}$ — как u_n^{jk}. Остальные опорные векторы параллельны грани A_i, поэтому их образы при удвоении совпадают с ними самими. Значит, других новых опорных векторов нет, а для перечисленных выше все условия теоремы проверяются непосредственно.

Пусть теперь удвоение происходит вдоль грани $B_i \in \mathbf{B}$. Обозначим $n = b + 1$. При удвоении возникает новая грань, которую мы обозначим B_n, и новые δ-векторы $\delta_i^n(\mathbf{B}) \in \mathrm{Col}\ (B_i)$ и $\delta_n^i(\mathbf{B}) \in \mathrm{Col}\ (B_n)$. Теперь изучим, что происходит с остальными векторами при удвоении. Векторы $\delta_i^j(\mathbf{B})^|$ обозначим как $\delta_n^j(\mathbf{B})$, $\delta_j^i(\mathbf{B})^|$ — как $\delta_j^n(\mathbf{B})$, а $u_k^{ij|}$ — как u_k^{nj}. Остальные опорные векторы параллельны грани B_i, поэтому их образы при удвоении совпадают с ними самими. Условия теоремы опять же проверяются непосредственно.

Удвоение вдоль грани семейства $\mathbf{C}$ рассматривается аналогично. □

Доказанная теорема полностью описывает структуру группы Стейнберга четырехугольной пирамиды. Множество опорных векторов разбивается на 4 группы: 3 группы δ-векторов и векторы вида u_k^{ij}, причем δ-векторы перемножаются только внутри одной группы и действуют умножением слева или справа на векторы последней группы. Основываясь на этом наблюдении, мы построим матричное представление группы Стейнберга.

Напомним, что для двух матриц $A \in M_{m,n}(R)$ и $B \in M_{p,q}(R)$ их тензорным произведением называется такая матрица $A \otimes B \in M_{mp,nq}(R)$, что её элемент, находящийся на пересечении строки с номером $m(i-1)+j$ и столбца с номером $n(k-1)+l$, равен $A_{jl}B_{ik}$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Элементарные матрицы, отличающиеся от единичной одним недиагональным элементом, мы будем обозначать e_{ij}^{λ}, а матрицы, отличающиеся от нулевой одним элементом, — $\tilde{e}_{ij}^{\lambda}$.

Пусть $M_k = M_k(R, n)$ — подгруппа в $GL_n(R)$ такая, что для любой матрицы $X \in M_k$:

1. $X_{ii} = 1$ для любого индекса i,
2. для различных индексов i и j неравенство $X_{ij} \neq 0$ выполняется, только если $i < k$ и $j \geqslant k$.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство группы M_k:

Утверждение 3.1. *Для любых* $e_{ij}^{\lambda}, X \in M_k$

$$e_{ij}^{\lambda} X = X e_{ij}^{\lambda} = X + \tilde{e}_{ij}^{\lambda},$$

и, следовательно, $M_k \subset E_n(R)$.

Пусть теперь P_t — многогранник из последовательности удвоений четырехугольной пирамиды. Подгруппа $St_t(R, P)$ зависит только от значений a, b и c, поэтому можно обозначить её $S(R, a, b, c)$. Пусть, кроме того, $E(R, a, b, c)$ — группа блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

где $X \in E_b(R) \otimes E_c(R)$, $Y \in M_{bc,a}(R)$ и $Z \in E_a(R)$. Обозначим соответствующие вложения

$$E_b(R) \otimes E_c(R) \xrightarrow{\phi_X} E(R, a, b, c),$$

$$M_{1,a}(R) \otimes M_{b,1}(R) \otimes M_{c,1}(R) \xrightarrow{\hat{\phi}_Y} M_{bc,a}(R) \xrightarrow{\phi_Y} E(R,a,b,c),$$
$$E_a(R) \xrightarrow{\phi_Z} E(R,a,b,c).$$

Теперь определим отображение

$$\phi_{a,b,c}\colon S(R,a,b,c) \to E(R,a,b,c)$$

по формулам

$$\phi_{a,b,c}(x^{\lambda}_{\delta^i_j}(\mathbf{A})) = \phi_Z(e^{\lambda}_{ji}),$$
$$\phi_{a,b,c}(x^{\lambda}_{\delta^i_j}(\mathbf{B})) = \phi_X(e^{\lambda}_{ji} \otimes I),$$
$$\phi_{a,b,c}(x^{\lambda}_{\delta^i_j}(\mathbf{C})) = \phi_X(I \otimes e^{\lambda}_{ji}),$$
$$\phi_{a,b,c}(x^{\lambda}_{u^{ij}_k}) = \phi_Y \circ \hat{\phi}_Y(\tilde{e}^{\lambda}_{1k} \otimes \tilde{e}^{1}_{i1} \otimes \tilde{e}^{1}_{j1}).$$

Для доказательства корректности достаточно заметить, что образы всех образующих группы Стейнберга в $E(R,a,b,c)$ выражаются через элементарные матрицы и все необходимые соотношения легко проверяются.

Удвоение вдоль грани индуцирует одно из отображений $E(R,a,b,c) \to E(R,a+1,b,c)$, $E(R,a,b,c) \to E(R,a,b+1,c)$ или $E(R,a,b,c) \to E(R,a,b,c+1)$. В каждом из этих случаев диаграмма вида

$$\begin{tikzcd}
E(R,a,b,c) \arrow[r] & E(R,a,b,c+1) \\
S(R,a,b,c) \arrow[r] \arrow[u, "\phi_{a,b,c}"] & S(R,a,b,c+1) \arrow[u, "\phi_{a,b,c+1}"]
\end{tikzcd}$$

является коммутативной, поэтому существуют прямой предел $\varinjlim E(R,a,b,c)$, который мы обозначим $E_\infty(R,P)$, и отображение $\phi_\infty\colon St(R,P) \to E_\infty(R,P)$.

Теорема 3.2. *Группы $E_\infty(R,P)$ и $E(R,P)$ изоморфны.*

Доказательство. Достаточно показать, что существуют сюръективные гомоморфизмы из группы Стейнберга $St(R,P)$ в $E_\infty(R,P)$ и $E(R,P)$ с одинаковыми ядрами. Для $E(R,P)$ таким гомоморфизмом является канонический эпиморфизм $\phi\colon St(R,P) \to E(R,P)$, ядро которого изоморфно центру группы Стейнберга (см. [6,7]). Мы докажем, что ϕ_∞ обладает теми же свойствами.

Проверим, что отображение $\phi_{a,b,c}$ сюръективно. Для любого семейства $\mathbf{T}$ образ подгруппы в группе Стейнберга, порожденной $\delta^i_j(\mathbf{T})$, совпадает с соответствующей подгруппой, порожденной элементарными матрицами, в силу сюръективности канонического отображения $St(R) \to E(R)$. Таким образом, остается проверить, что для любой матрицы $Y \in M_{bc,a}(R)$ для элемента $\phi_Y(Y)$ существует прообраз в группе Стейнберга. С помощью утверждения 3.1 его можно выписать явно:

$$\phi_{a,b,c}\left(\prod_{i,j,k} x^{Y aj+k,i}_{u^{jk}_i}\right) = \phi_Y(Y).$$

Теперь докажем, что $\ker\phi_\infty = Z(St(R,P))$. В силу того, что $Z(E_\infty(R,P)) = 0$, выполняется включение

$$Z(St(R,P)) \subset \ker\phi_\infty.$$

Для доказательства обратного включения воспользуемся утверждением, использованным в доказательстве предложения 8.2 из [6].

Утверждение 3.2. *Пусть*

1. $\mathfrak{Q} = (Q = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots)$ — *последовательность удвоений некоторого многогранника* Q;
2. $U^{i+1} = \{u \in \mathrm{Col}\,(Q_{i+1}) | \langle Q_i, u\rangle = 1\}$ *и* $V^{i+1} = \{v \in \mathrm{Col}\,(Q_{i+1}) | \langle Q_i, v\rangle = -1\}$;
3. *подгруппы* $\mathfrak{U}^{i+1}, \mathfrak{V}^{i+1} \subset St_{i+1}(R,Q)$ *порождены* x^{λ}_u *и* x^{μ}_v *соответственно*;
4. *для некоторой группы* G *определен эпиморфизм* $\pi\colon St(R,Q) \to G$, *инъективный на* $\mathfrak{U}^{i+1}$ *и* $\mathfrak{V}^{i+1}$ *для всех* i.

Тогда

$$\ker \pi \subset Z(St(R,Q)).$$

Пусть удвоение происходит вдоль грани семейства $\mathbf{A}$. Тогда $U^{i+1} = \{\delta_j^{a+1}(\mathbf{A})\}$ (a векторов) и $V^{i+1} = \{\delta_{a+1}^{j}(\mathbf{A})\} \cup \{u_{a+1}^{jk}\}$ ($a + b \times c$ векторов). Для доказательства инъективности достаточно заметить, что после вложения $E(R,a,b,c) \to E_{a+bc}(R)$ образы всех образующих $\mathfrak{U}^{i+1}$ лежат в одной строке, а образующих $\mathfrak{V}^{i+1}$ — в одном столбце.

Пусть теперь удвоение происходит вдоль грани семейства $\mathbf{C}$ (случай $\mathbf{B}$ отличается лишь перестановкой индексов). Тогда $U^{i+1} = \{\delta_j^{c+1}(\mathbf{C})\} \cup u_k^{j,c+1}$ ($c + a \times b$ векторов) и $V^{i+1} = \{\delta_{c+1}^{j}(\mathbf{C})\}$ (c векторов). Группа $E(R,a,b,c+1)$ отличается от $E(R,a,b,c)$ добавлением блоков из b новых строк и столбцов в правый нижний угол блока X и добавлением блока из b новых строк снизу к блоку Y. После замены индексов мы можем считать, что новые блоки были добавлены в левый верхний угол X и сверху к Y. В этом случае образы $\mathfrak{U}^{i+1}$ и $\mathfrak{V}^{i+1}$ лежат в $M_{b+1}(R)$ и $M_{b+1}(R)^T$ соответственно, поэтому отображения на них инъективны в силу утверждения 3.1. $\square$

4. Вычисление K-групп для пирамиды

Как говорилось во введении, высшие K-группы для коммутативного кольца R и сбалансированного многогранника P определяются как

$$K_i(R,P) = \pi_i(BE(R,P)^+),\ i \geqslant 2.$$

В случае, когда P является симплексом, $K_i(R,P)$ совпадает с классической K-теорией Квиллена.

Основным результатом этого раздела является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть P — четырехугольная пирамида и R — коммутативное кольцо с* 1. *Тогда*

$$K_i(R,P) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R),\ i \geqslant 2.$$

Доказательство. С учетом теоремы 3.2 нужно доказать, что имеет место изоморфизм

$$\pi_i(BE_\infty(R,P)^+) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R)$$

для $i \geqslant 2$.

Рассмотрим группу $G(R,a,b,c)$ блочных матриц $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где $X \in GL_b(R) \otimes GL_c(R)$, $Y \in M_{bc,a}(R)$ и $Z \in GL_a(R)$. Положим $G(R) = \lim G(R,a,b,c)$, где предел берется относительно вложений, описанных при построении группы $E_\infty(R)$. Нетрудно проверить, что $[G(R),G(R)] = E_\infty(R)$. Отсюда получаем изоморфизм

$$\pi_i(BE_\infty(R,P)^+) = \pi_i(BG(R)^+), i \geqslant 2.$$

Остается доказать, что

$$\pi_i(BG(R)^+) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R); \qquad (*)$$

обратим внимание, что этот факт мы докажем для $i \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что

$$\pi_1(BG(R)^+) = (G(R))^{ab} = (GL(R) \times GL(R) \times GL(R)^{ab}) = \\ = K_1(R) \times K_1(R) \times K_1(R) = \pi_1(B(GL(R) \times GL(R) \times GL(R))^+).$$

Теперь чтобы доказать изморфизм (*) для $i \geqslant 2$, достаточно установить изоморфизм в целочисленных гомологиях

$$H_*(G(R),\mathbb{Z}) = H_*(GL(R) \times GL(R) \times GL(R),\mathbb{Z})$$

и воспользоваться теоремой Уайтхеда. $\square$

Теорема 4.2.

$$H_*(G(R),\mathbb{Z}) = H_*(GL(R) \times GL(R) \times GL(R),\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Рассмотрим группу $D(R,a,b,c)$ блочных матриц вида $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где $X \in GL_b(R) \otimes GL_c(R)$ и $Z \in GL_a(R)$. Положим $D(R) = \lim D(R,a,b,c)$. Нетрудно видеть, что $D(R) = GL(R) \times GL(R) \times GL(R)$. Рассмотрим отображение $\pi : G(R) \to D(R)$, которое задается формулой $\pi : \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$. Для очевидного вложения $i : D(R) \to G(R)$ в гомологиях имеет место равенство $\pi_* \circ i_* = id_{H_*(D(R),\mathbb{Z})}$. Чтобы доказать теорему 4.2, остается проверить, что $i_* \circ \pi_* = id_{H_*(G(R),\mathbb{Z})}$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 4.1 (см. [4, лемма 3.11], а также [5]). *Пусть группа H является пределом своих подгрупп H_λ по включению. Пусть для эндоморфизма $\rho : H \to H$ выполняется $\rho(H_\lambda) \subseteq H_\lambda$. Предположим, что для любой H_λ найдутся подгруппа $H_\mu \supseteq H_\lambda$, элемент $a \in H_\mu$ и гомоморфизм $\phi : H_\lambda \to C_{H_\mu}(H_\lambda)$ такие, что для произвольного элемента $h \in H_\lambda$ выполняется равенство $h \cdot \phi(h) = a \cdot \rho(h) \cdot \phi(h) \cdot a^{-1}$. Тогда $\rho_* = id$ в целочисленных гомологиях группы H.*

Здесь через $C_{H_\mu}(H_\lambda)$ обозначен централизатор группы H_λ в H_μ. Также обратим внимание, что в доказательстве леммы 3.11 в книге [4] имеется неточность, которая была указана и исправлена в работе [5].

В качестве H рассмотрим в $G(R)$ подгруппу, состоящую из матриц вида $h = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где I — единичная матрица. В качестве H_n рассмотрим подгруппы $G(R,n,n,n) \cap H$; ясно, что $H = \lim H_n$. Образ матрицы $h = \begin{pmatrix} I_{n^2,n^2} & Y_{n^2,n} \\ 0_{n,n^2} & Z_{n,n} \end{pmatrix}$ в H_{2n} при стабилизации $H_n \hookrightarrow H_{2n}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{4n^2,4n^2} & Y'_{4n^2,n} & 0_{4n^2,n} \\ 0_{n,4n^2} & Z_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,4n^2} & 0_{n,n} & I_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Здесь индексами обозначены размерности матриц. Матрица Y' получается из Y добавлением нулевых элементов определенным, но для доказательства несущественным, образом. Так же легко видеть, что после стабилизации матрица $i \circ \pi(h)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{4n^2,4n^2} & 0_{4n^2,n} & 0_{4n^2,n} \\ 0_{n,4n^2} & Z_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,4n^2} & 0_{n,n} & I_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Для применения леммы 4.1 нужно построить отображение $\phi : H_n \to C_{H_{2n}}(H_n)$ и элемент $a \in H_{2n}$, удовлетворяющие нужным условиям. Положим

$$\phi(h) = \begin{pmatrix} I_{4n^2,4n^2} & 0_{4n^2,n} & Y'_{4n^2,n} \\ 0_{n,4n^2} & I_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,4n^2} & 0_{n,n} & Z_{n,n} \end{pmatrix}$$

и

$$a = \begin{pmatrix} I_{4n^2,4n^2} & 0_{4n^2,n} & 0_{4n^2,n} \\ 0_{n,4n^2} & I_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,4n^2} & -I_{n,n} & Z_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями с блочными матрицами можно проверить, что $\phi(h)$ коммутирует с образом $s(h)$ любой матрицы $h' \in H_n$ при стабилизации $s : H_n \hookrightarrow H_{2n}$, т. е. $\phi(h) \in C_{H_{2n}}(H_n)$. Аналогично проверяется равенство $s(h) \cdot \phi(h) = a \cdot (i \circ \pi(h)) \cdot \phi(h) \cdot a^{-1}$. Таким образом, по лемме 4.1, примененной к $\rho = i \circ \pi$, в целочисленных гомологиях группы H отображение $i \circ \pi$ индуцирует изоморфизм.

Далее рассмотрим спектральную последовательность Линдона—Хохшильда—Серра с $E^2_{p,q} = H_p(G(R)/H; H_q(H,\mathbb{Z}))$, сходящуюся к гомологиям группы $G(R)$. Отображение $i \circ \pi$ действует на $G(R)/H$ тождественно, поэтому с учетом вышесказанного $(i \circ \pi)_*$ тождественно на $E^2_{p,q}$. Отсюда следует, что оно тождественно на E^∞.

Теперь, вообще говоря, возникает стандартная проблема, связанная с присоединенностью при переходе от E^∞ к гомологиям $H_*(E(R),\mathbb{Z})$, поскольку отображение, тождественное на последовательных факторах фильтрации в $H_*(E(R),\mathbb{Z})$, не обязано быть тождественным на $H_*(E(R),\mathbb{Z})$.

Однако в нашем случае $(i\circ\pi)_*$ обязано быть тождественным и на $H_*(E(R),\mathbb{Z})$, что можно вывести из соотношения $(i\circ\pi)_* = (i\circ\pi)_*^2$. Теорема 4.2 доказана. □

Работа поддержана грантами НШ1410.2012.1 и РФФИ 11-01-00057 и 13-01-00664.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васерштейн Л. Н.* Основы алгебраической K-теории// Усп. мат. наук. — 1976. — *31*, № 4. — С. 87–149.
2. *Немытов А. И., Соловьев Ю. П.* BN-пары и эрмитова K-теория. — Алгебра. Сб., посвящ. 90-лет. О. Ю. Шмидта. — М.: Изд. МГУ, 1982. — С. 102–118.
3. *Немытов А. И., Соловьев Ю. П.* Гомотопическое умножение в представляющем пространстве эрмитовой K-теории// Докл. АН СССР. — 1982. — *258*, № 1. — С. 30–34.
4. *Berrick A. J.* An approach to algebraic K-theory. — London: Pitman, 1982.
5. *Berrick A. J., Keating M. E.* The K-theory of triangular matrix rings, K-theory// Contemp. Math. — 1986. — *55*, part I. — C. 69–74.
6. *Bruns W., Gubeladze J.* Polyhedral K_2// Manuscripta Math. — 2002. — *109*. — C. 367–404.
7. *Bruns W., Gubeladze J.* Higher polyhedral K-groups// J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — *184*. — C. 175–228.
8. *Suslin A. A.* On equivalence of algebraic K-theories// Comm. Algebra. — 1981. — *9*, № 15. — C. 1559–1566.
9. *Wagoner J. B.* Equivalence of algebraic K-theories// J. Pure Appl. Algebra. — 1977. — *11*. — C. 245–269.

Ф. Ю. Попеленский
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: popelens@mech.math.msu.su

М. В. Приходько
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: anxieux@gmail.com