Современная математика. Фундаментальные направления. Том 51 (2013). С. 74–86

УДК 514.13+514.132

ОБ ОБЪЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ СИММЕТРИЯМИ

© 2013 г. **В. А. КРАСНОВ**

Аннотация. В настоящей статье с помощью формулы Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра получены явные интегральные формулы объема произвольных гиперболических октаэдров, обладающих mmm- и 2|m-симметриями, в терминах определяющих их двугранных углов.

1. Введение

Вычисление объемов многогранников в трехмерном пространстве является очень старой и трудной проблемой. По-видимому, первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16 веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер, хотя задачу нахождения объема тетраэдра через длины его ребер впервые решил, по-видимому, Пьеро де Франческа. Затем эта задача рассматривалась Л. Пачоли. Тарталья же повторил ее решение в работе «General trattato di numeri et misure» [7]. В настоящее время результат Тартальи известен как детерминантная формула Кэли—Менгера. Заметим, что аналогичная формула имеет место и для многомерных симплексов.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом случае был найден Л. Шлефли [17], а Н. И. Лобачевский [6] и Я. Бойяи [8] независимо друг от друга вычислили объем гиперболической ортосхемы. Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н. И. Лобачевским [6], а в 1982 году Дж. Милнор [13] представил этот результат в более элегантном виде. В свою очередь, Э. Б. Винбергом [3] были получены формулы объемов гиперболических тетраэдров, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности.

Что касается формулы объема произвольного гиперболического тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [9], Дж. Мураками и У. Яно [16], а также Дж. Мураками и А. Ушиджимы [15], но формулы, полученные вышеназванными математиками, являются довольно громоздкими и трудно обозримыми. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах объем выражался как алгебраическая сумма 16 значений дилогарифмов Эйлера или спецфункций Лобачевского. Геометрический смысл полученных формул удалось объяснить Г. Лейбону [12] с точки зрения симметрий Редже, а их полное геометрическое доказательство было дано Я. Моханти [14].

В 2004 году Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [10] была предложена более компактная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов. Нельзя не упомянуть, что еще в 1906 году итальянский герцог Г. Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. К сожалению, выдающаяся работа Г. Сфорца [18] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

В 2002 году Я. Моханти [14] был вычислен объем симметричного идеального октаэдра, а в 2008 году Н. В. Абросимовым, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [2] были получены формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и 2|m-октаэдров. Наконец, в 2011 году Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [4] вычислили объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации.

Статья представлена в редакцию 15 ноября 2012 года.
Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 12-01-31507 мол_а.

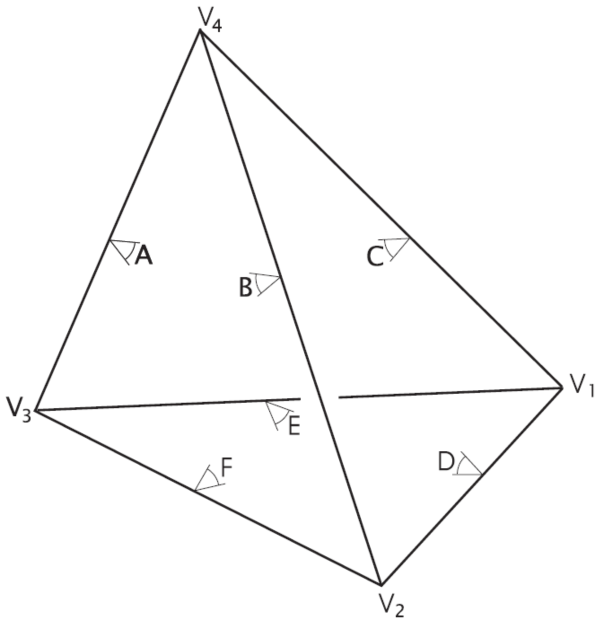

Рис. 1

В настоящей же статье с помощью формулы Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра получены явные интегральные формулы объема произвольных гиперболических октаэдров, обладающих mmm- и $2|\mathrm{m}$-симметриями.

2. Некоторые предварительные результаты

Будем рассматривать задачу вычисления объема многогранника на сфере $\mathbb{S}^3$ и в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Кроме того, для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с пространствами постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Пусть T — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F. Кроме того, будем полагать, что A, B, C — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы (см. рис. 1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij-й минор матрицы G. В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического тетраэдра.

Теорема 2.1. *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы* (*см. рис.* 1). *Кроме того, пусть l_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины v_i и v_j. Тогда*:

$$\begin{aligned} &(a)\quad \det G < 0;\\ &(b)\quad c_{ii} > 0;\\ &(c)\quad \operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Доказательство теоремы 2.1 приведено, например, в работе [19].

Основным инструментом при вычислении объемов трехмерных неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [17] доказал эту формулу для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [11] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 2.2 (дифференциальная формула Шлефли)**.** *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом, и его дифференциал выражается по формуле*:

$$K\,dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\,d\alpha_i, \tag{2.2}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

В дальнейшем нам также понадобится интегральная формула объема гиперболического тетраэдра, предложенная, как было сказано во введении, Д. А. Деревниным и А. Д. Медных в работе [10].

Теорема 2.3 (Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, 2004)**.** *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы. Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*:

$$\mathrm{V}(T) = -\frac{1}{4}\int\limits_{Z_2}^{Z_1}\ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right|d\xi, \tag{2.3}$$

где

$$Z_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$Z_2 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

а вещественные числа k_1, k_2, k_3 и k_4 имеют вид:

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) +$$

$$+\cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)),$$

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) +$$

$$+\sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F)),$$

$$k_3 = 2(\sin A\sin D + \sin B\sin E + \sin C\sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Заметим, что доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов-тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли (2.2). В работе [10] было показано, что из формулы Деревнина—Медных вытекает формула Мураками—Яно [16]. Однако формулу (2.3) можно легко получить и из формулы Мураками—Яно, осуществив тем самым ее обратный вывод.

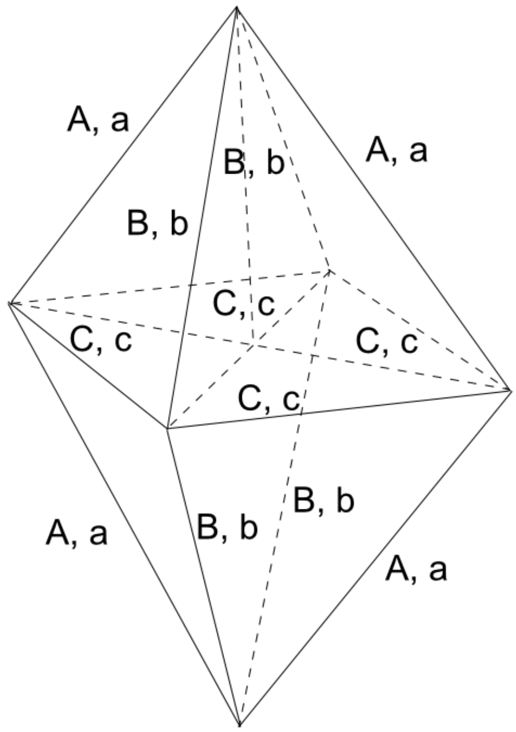

Рис. 2

3. Объем гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией

Рассмотрим октаэдр O, обладающий mmm-симметрией, то есть октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам (рис. 2). Заметим, что у такого октаэдра все восемь граней попарно конгруэнтны между собой. Обозначим через a, b, c длины ребер mmm-октаэдра, а через A, B, C — величины его двугранных углов. Таким образом, $O = O(a, b, c, A, B, C)$.

Замечание 3.1. В настоящем разделе мы будем рассматривать гиперболические mmm-октаэдры, у которых все вершины собственные. В самом деле, если предположить существование идеального октаэдра, обладающего mmm-симметрией, то очевидно, что в данном случае $A = B = C = \dfrac{\pi}{2}$, так как сумма двугранных углов при каждой вершине будет равна 2π (см., например, [3]). В свою очередь, такой октаэдр в силу теоремы Ушиджимы [19] не может быть реализован в пространстве Лобачевского.

Наконец, если гиперболический mmm-октаэдр имеет две или четыре вершины на абсолюте, то посредством очевидных разбиений вычисление его объема сводится к задаче об объеме четырехугольной пирамиды с бесконечно удаленной вершиной, полностью решенной Э. Б. Винбергом в [3].

В евклидовом случае имеет место следующая теорема [5].

Теорема 3.1 (Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, 2004). *Пусть $O(a, b, c, A, B, C)$ — евклидов октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ может быть найден из уравнения*

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2). \tag{3.1}$$

Что касается неевклидовых случаев, то здесь длины ребер mmm-октаэдра могут быть выражены через двугранные углы по правилу синусов-тангенсов (см. [2, 4]).

Теорема 3.2 (правило синусов-тангенсов). *Пусть $O = O(a, b, c, A, B, C)$ — неевклидов октаэдр, обладающий* mmm-*симметрией. Тогда*

1. *для* $\mathbb{S}^3$:
$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \bar{T}, \tag{3.2}$$
где $\bar{T}$ *— положительное число, удовлетворяющее уравнению*
$$\bar{T}^2 + \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0;$$
2. *для* $\mathbb{H}^3$:
$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \bar{T}, \tag{3.3}$$
где $\bar{T}$ *— положительное число, удовлетворяющее уравнению*
$$\bar{T}^2 - \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0.$$

Таким образом, формулы (3.2) и (3.3) показывают, что неевклидов октаэдр, обладающий mmm-симметрией, однозначно с точностью до изометрии определяется лишь набором двугранных углов, то есть $O = O(A, B, C)$.

Для сферического пространства задача вычисления объема октаэдра, обладающего mmm-симметрией, полностью решена в работе [2]. А именно, имеет место

Теорема 3.3. *Пусть* $O = O(A, B, C)$ *— сферический октаэдр, обладающий* mmm*-симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *задается следующим выражением*:
$$V(O) = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\operatorname{arth}(\cos A\cos t) + \operatorname{arth}(\cos B\cos t) + \operatorname{arth}(\cos C\cos t) + \operatorname{arth}(\cos t)\right)\frac{dt}{\cos t}, \tag{3.4}$$
где $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *— корень уравнения*
$$\operatorname{tg}^2\theta + \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 0.$$
Кроме того, θ *может быть найдено из правила синусов-тангенсов*
$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \operatorname{tg}\theta.$$

Доказательство формулы (3.4) основано на проверке того, что выполнена формула (2.2), что для сферического mmm-октаэдра равносильно проверке системы равенств:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial A} = 2a, \\ \dfrac{\partial V}{\partial B} = 2b, \\ \dfrac{\partial V}{\partial C} = 2c. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что объем V является единственным решением данной системы, удовлетворяющим начальному условию $V \to 0$ при $a = b = c \to 0$. Полное доказательство теоремы 3.3 приведено в работе [2].

Для вычисления объема гиперболического mmm-октаэдра прежде всего заметим, что его в силу mmm-симметрии можно разбить на 8 попарно конгруэнтных между собой тетраэдров $\tilde{T}$, двугранные углы которых равны $\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{C}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 2.3).

Такое разбиение можно получить, «разрезав» октаэдр вдоль трех плоскостей симметрии. При этом три двугранных угла тетраэдра разбиения в силу попарной ортогональности плоскостей симметрии будут прямыми. В свою очередь, три других двугранных угла будут равны половинам двугранных углов исходного октаэдра $O = O(A, B, C)$, так как отражение относительно плоскости является движением гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$ и, следовательно, сохраняет двугранные углы.

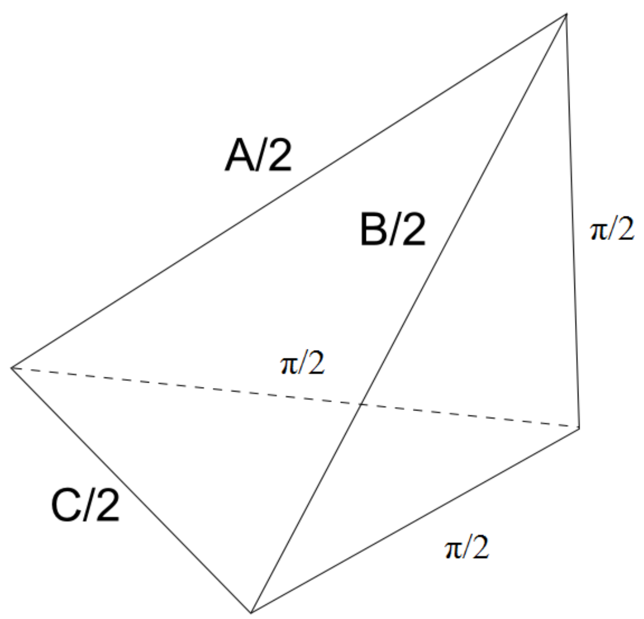

Рис. 3

Таким образом,

$$V(O) = 8V(\tilde{T}). \tag{3.5}$$

В свою очередь, объем тетраэдра $\tilde{T}$ может быть легко вычислен по формуле (2.3). Имеем:

$$V(\tilde{T}) = -\frac{1}{4}\int\limits_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{3.6}$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} + \mathrm{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

а числа $\tilde{k_1}$, $\tilde{k_2}$, $\tilde{k_3}$ и $\tilde{k_4}$ имеют вид:

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Таким образом, из формул (3.5) и (3.6) получаем теорему.

Теорема 3.4. *Пусть $O = O(A,B,C)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* mmm*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = -2\int\limits_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \qquad (3.7)$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_2}}{\tilde{k_1}} + \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k_4}}{\tilde{k_3}},$$

а вещественные числа $\tilde{k_1}$, $\tilde{k_2}$, $\tilde{k_3}$ и $\tilde{k_4}$ имеют вид

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$

$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Таким образом, (3.7) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического mmm-октаэдра в терминах определяющих его двугранных углов A, B, C.

Замечание 3.2. К формуле (3.7) можно прийти и обратным путем. А именно, используя результаты теорем 2.1 и 3.2, элементарными вычислениями можно легко установить, что длины ребер двугранных углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ тетраэдра $\tilde{T}$ равны длинам ребер двугранных углов A, B, C октаэдра O соответственно. Значит, если подходящим образом склеить 8 одинаковых экземпляров $\tilde{T}$, то получится в точности гиперболический mmm-октаэдр $O(A,B,C)$.

Замечание 3.3. В работе [4] показано, что если в (3.3) $\bar{T} = 1$, то формула объема гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, имеет очень простой вид:

$$V(O) = 2\left(\int\limits_0^{\operatorname{arth}(\sin A)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x} + \int\limits_0^{\operatorname{arth}(\sin B)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x} - \int\limits_0^{\operatorname{arth}(\sin C)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x}\right)$$

при $a \leqslant b \leqslant c$.

В той же работе получены компактные формулы, выражающие двугранные углы гиперболического mmm-октаэдра через длины его ребер, то есть $O = O(a,b,c)$:

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \frac{2\sqrt{(xy-z)(yz-x)(xz-y)}}{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}, \qquad (3.8)$$

где $x = \operatorname{ch} a, y = \operatorname{ch} b, z = \operatorname{ch} c$.

Выразив из формул (3.8) величины двугранных углов A, B, C через длины ребер a, b, c и подставив полученные выражения в (3.7), можно получить интегральную формулу объема произвольного гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, в терминах длин его ребер.

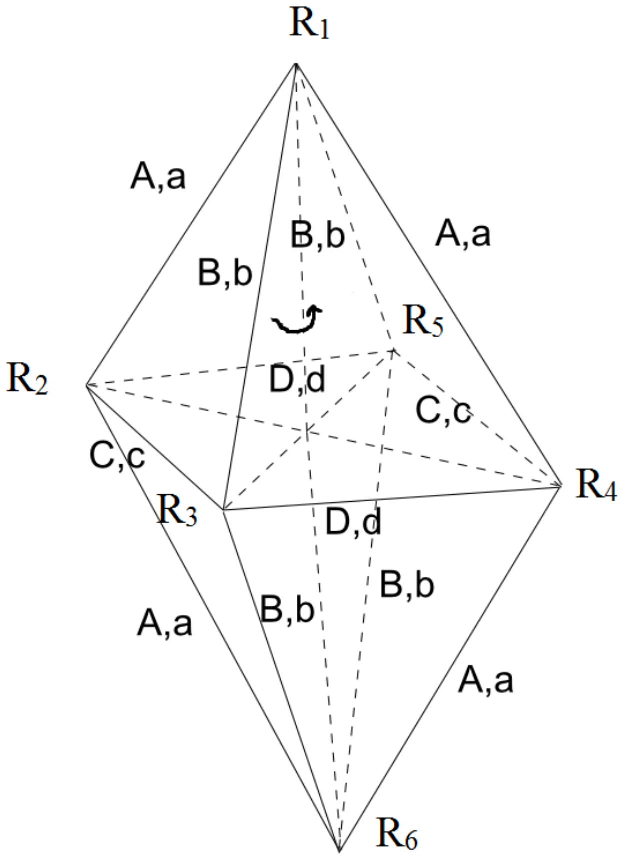

Рис. 4

4. Объем гиперболического октаэдра, обладающего $2|m$-симметрией

А теперь рассмотрим гиперболический октаэдр $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$, допускающий $2|\mathrm{m}$-симметрию, то есть вращение вокруг оси на угол π и отражение относительно перпендикулярной ей плоскости (рис. 3.1).

Замечание 4.1. Как и в разделе 3, мы будем предполагать, что все вершины гиперболического $2|\mathrm{m}$-октаэдра собственные. Действительно, если октаэдр $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ имеет вершины на абсолюте, то подходящими разбиениями задачу вычисления его объема можно также свести к задаче об объеме пирамид с бесконечно удаленными вершинами [3].

В евклидовом случае формула объема октаэдра, обладающего $2|\mathrm{m}$-симметрией, была получена в работе [5]. Имеет место

Теорема 4.1 (Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, 2004)**.** *Пусть* $O(a, b, c, A, B, C)$ — *евклидов октаэдр, обладающий* $2|\mathrm{m}$*-симметрией. Тогда его объем* $V = V(O)$ *может быть найден как положительный корень уравнения*

$$9V^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2)(a^2 - b^2 + cd)(b^2 - a^2 + cd). \tag{4.1}$$

В свою очередь, объем сферического $2|\mathrm{m}$-октаэдра был вычислен в работе [2]. Попутно в [2] показано, что длины ребер сферического октаэдра, обладающего $2|\mathrm{m}$-симметрией, равно как и mmm-октаэдра (см. раздел 3), могут быть выражены через двугранные углы. Таким образом, $O = O(A, B, C, D)$. Для объема сферического $2|\mathrm{m}$-октаэдра справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в [2].

Теорема 4.2. *Пусть $O = O(A, B, C, D)$ — сферический октаэдр, обладающий $2|\mathrm{m}$-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ задается следующим выражением*:

$$V(O) = 2\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\biggl(\operatorname{arth}(\cos A\cos t) + \operatorname{arth}(\cos B\cos t) + \operatorname{arth}(\cos\frac{C+D}{2}\cos t) + \\ + \operatorname{arth}(\cos\frac{C-D}{2}\cos t)\biggr)\frac{dt}{\cos t}, \quad (4.2)$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ — корень уравнения

$$\cos^2\theta + \frac{\cos A + \cos B + \cos\frac{C+D}{2} + \cos\frac{C-D}{2}}{\cos A\cos B\left(\cos\frac{C+D}{2} + \cos\frac{C-D}{2}\right) + (\cos A + \cos B)\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}} = 0.$$

Кроме того, θ может быть найдено из правила синусов-тангенсов для сферического $2|\mathrm{m}$-октаэдра

$$\frac{\sin A}{\mathrm{tg} a} = \frac{\sin B}{\mathrm{tg} b} = \frac{\sin\frac{C+D}{2}}{\mathrm{tg}\frac{c+d}{2}} = \frac{\sin\frac{C-D}{2}}{\mathrm{tg}\frac{c-d}{2}} = \mathrm{tg}\theta.$$

Для вычисления объема $2|\mathrm{m}$-октаэдра $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ в гиперболическом случае разобьем O в силу $2|m$-симметрии на две конгруэнтные пирамиды $R_1R_2R_3R_4R_5$ и $R_6R_2R_3R_4R_5$, «разрезав» исходный многогранник плоскостью симметрии $R_2R_3R_4R_5$.

В свою очередь, каждую из пирамид можно разбить на два равных тетраэдра, проведя диагональ основания пирамиды. Например, объем пирамиды $R_1R_2R_3R_4R_5$ можно представить в виде суммы объемов тетраэдров $R_1R_2R_3R_4$ и $R_1R_2R_4R_5$, которые, как видно из рис. 5, конгруэнтны между собой.

Следовательно,

$$V(O) = 4V(R_1R_2R_3R_4). \quad (4.3)$$

Таким образом, вычисление объема октаэдра O сводится к нахождению двугранного угла x при ребре R_1R_2.

Для нахождения двугранного угла x будем использовать технику, которая применялась еще Н. И. Лобачевским в [6], а позднее была использована в работах [2, 4]. Обозначим плоский угол при вершине R_2 грани $R_1R_2R_3$ через α и рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1R_2R_4R_5$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в вершине R_2. Как известно, в малом пространство Лобачевского устроено так же, как и евклидово [6]. Поэтому, не нарушая общности, предположим, что полученное пересечение — сферический прямоугольный треугольник с гипотенузой α и внутренними непрямыми углами $\dfrac{C}{2}$ и x (рис. 6).

Применяя формулу котангенсов для данного сферического прямоугольного треугольника, получаем

$$\cos\alpha = \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\operatorname{ctg} x,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}. \quad (4.4)$$

Наконец, чтобы выразить $\cos\alpha$ через двугранные углы исходного октаэдра $O = O(a,\ b,\ c,\ d,\ A,\ B,\ C,\ D)$, рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1R_2R_3R_5$ со сферой бесконечно малого радиуса. Предварительно обозначив плоский угол при вершине R_2 грани $R_1R_2R_5$ через β, получим, что рассматриваемое пересечение представляет собой сферический треугольник с углами $\dfrac{C}{2}$, $\dfrac{D}{2}$, A и длинами сторон α и β, образующих между собой угол A (рис. 7).

Применим к полученному сферическому треугольнику вторую теорему косинусов. Имеем:

$$\cos\frac{D}{2} = -\cos\frac{C}{2}\cos A + \sin\frac{C}{2}\sin A\cos\alpha,$$

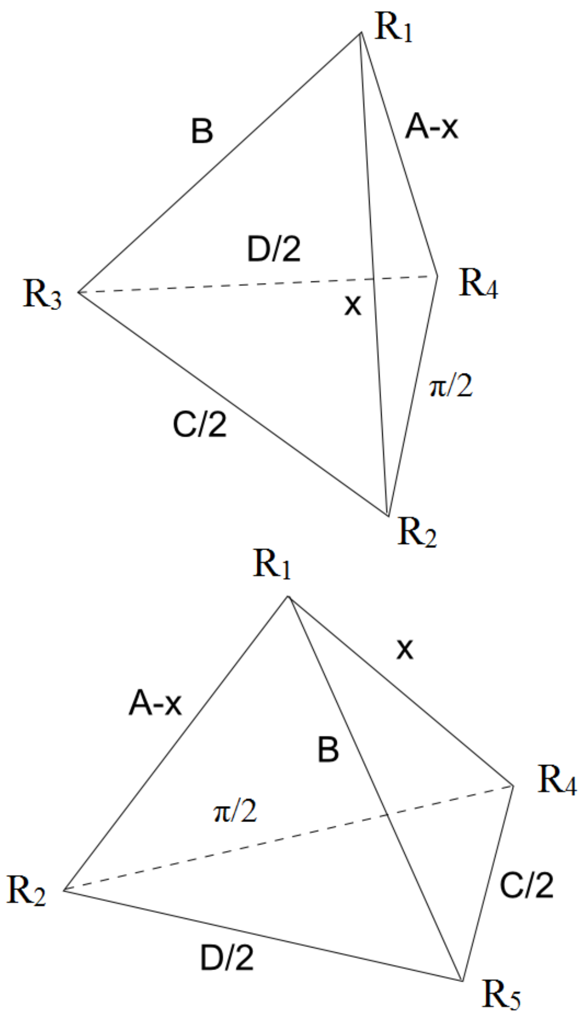
R1
B
A-x
D/2
R3
x
R4
π/2
C/2
R2
R1
x
A-x
B
R4
π/2
R2
C/2
D/2
R5

Рис. 5

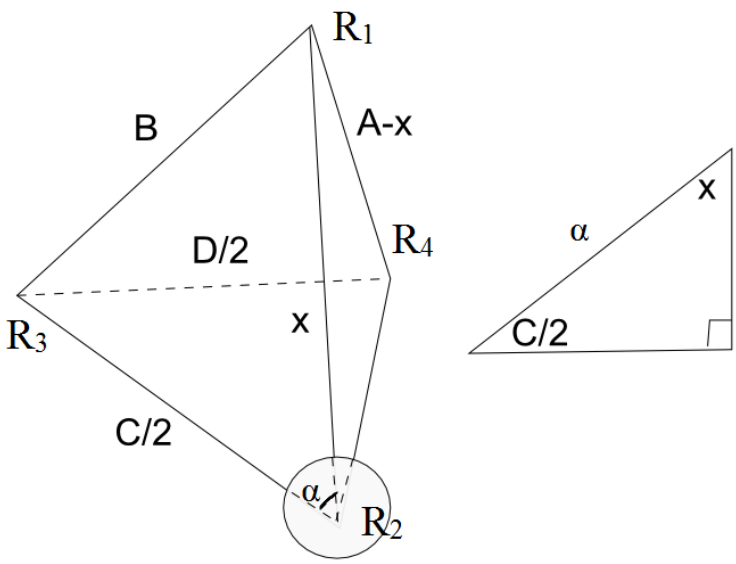
R1
B
A-x
R4
D/2
x
R3
C/2
α
R2
x
α
C/2

Рис. 6

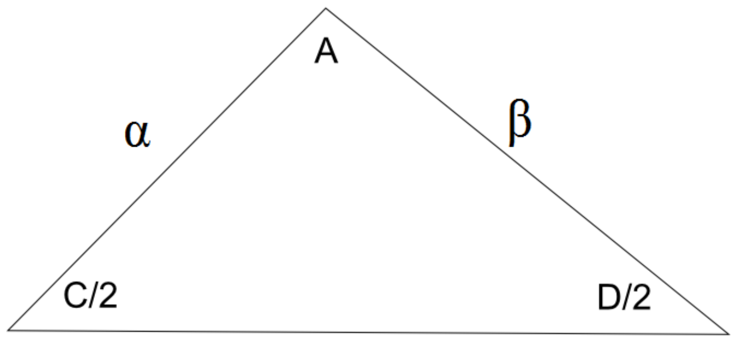

Рис. 7

откуда

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\sin\frac{C}{2}\sin A}. \tag{4.5}$$

Следовательно,

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A}. \tag{4.6}$$

Замечание 4.2. Формула (4.6) показывает, что двугранные углы тетраэдров разбиения могут быть выражены через двугранные углы исходного октаэдра O. Поэтому в силу пункта (c) теоремы 2.1 длины ребер октаэдра O являются функциями от его двугранных углов. Следовательно, $O = O(A, B, C, D)$.

Таким образом, в силу формулы Деревнина—Медных (2.3), объем тетраэдра $R_1R_2R_3R_4$ равен:

$$V(R_1R_2R_3R_4) = -\frac{1}{4}\int\limits_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4}\sin\frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos\frac{\xi+A+B}{2}\cos\frac{2\xi+2B+C+D}{4}\cos\frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{4.7}$$

где

$$z_1 = \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1} - \operatorname{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$
$$z_2 = \operatorname{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$
$$\lambda = \operatorname{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A},$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид:

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) -$$
$$-\cos\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right),$$
$$p_2 = \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) +$$
$$+\cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) + \cos A + \cos B,$$
$$p_3 = 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right),$$
$$p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Окончательно, подставив (4.7) в (4.3), получим следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть $O = O(A, B, C, D)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* $2|\mathrm{m}$*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*:

$$V(O) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \ln \left| \frac{\sin\frac{\xi}{2} \sin\frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin\frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin\frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos\frac{\xi+A+B}{2} \cos\frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos\frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos\frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi, \qquad (4.8)$$

где

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} - \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$
$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{p_2}{p_1} + \mathrm{arctg}\frac{p_4}{p_3},$$
$$\lambda = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{D}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos A}{\cos\frac{C}{2}\sin A},$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид

$$p_1 = \sin A + \sin B + \sin\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \sin\left(\frac{C+D}{2}\right) -$$
$$- \cos\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) - \cos\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right),$$
$$p_2 = \sin\left(\frac{2A+C-2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{D+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2B+C+2\lambda}{2}\right) + \sin\left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2}\right) +$$
$$+ \cos\left(\frac{2A+2B+C+D}{2}\right) + \cos\left(\frac{C+D}{2}\right) + \cos A + \cos B,$$
$$p_3 = 2\left(\sin B + \sin\frac{D}{2}\sin\lambda + \sin\frac{C}{2}\sin(A-\lambda)\right),$$
$$p_4 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}.$$

Таким образом, формула (4.8) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического октаэдра, обладающего $2|\mathrm{m}$-симметрией, через величины двугранных углов.

Замечание 4.3. В работе [15] приведены компактные формулы, выражающие двугранные углы произвольного тетраэдра через длины ребер. Поэтому объем тетраэдра $R_1R_2R_3R_4$, а значит и $2|\mathrm{m}$-октаэдра O, можно при желании выразить через длины ребер a, b, c, d. Значит, $O = O(a, b, c, d)$.

Автор благодарит своего научного руководителя В. П. Лексина за полезные советы и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В.* Об объемах многогранников в пространстве постоянной кривизны// Вестн. Кемеров. гос. ун-та. — 2011. — *3/1* (*47*). — С. 7–13.
2. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями// Соврем. мат. и ее прилож. — 2008. — *60*. — С. 3–12.
3. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — *29*. — С. 1–146.
4. *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией// Вестн. Кемеров. гос. ун-та. — 2011. — *3/1* (*47*). — С. 13–18.
5. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра// Мат. заметки. — 2004. — *1* (*76*). — С. 27–43.
6. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия. Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949.
7. *Сабитов И. Х.* Объемы многогранников. — М.: МЦНМО, 2009.
8. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space. — Janos Bolyai (F. Karteszi ed.). — Budapest, 1987.
9. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — С. 347–366.

10. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Rus. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 2. — C. 346.
11. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — *1*. — C. 337–340.
12. *Leibon G.* The symmetries of hyperbolic volume. — Preprint, 2002.
13. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Amer. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — C. 307–332.
14. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space// Algebr. Geom. Topol. — 2003. — *3*. — C. 1–31.
15. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — C. 153–163.
16. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Comm. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — C. 379–400.
17. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität. In: Gesammelte mathematische Abhandlungen. — Basel: Birkhäuser, 1950.
18. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Different. Ser. — 1906. — *8*, № 3. — C. 3–66.
19. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — *581*. — C. 249–265.

В. А. Краснов
Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, Коломна
Российский университет дружбы народов, Москва
E-mail: `vladimir.krasnov3107@gmail.com`