Современная математика. Фундаментальные направления. Том 51 (2013). С. 64–73

УДК 519.174

О БОЛЬШИХ ПОДГРАФАХ ГРАФА РАССТОЯНИЙ, ИМЕЮЩИХ МАЛЕНЬКОЕ ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

© 2013 г. **А. А. КОКОТКИН, А. М. РАЙГОРОДСКИЙ**

Аннотация. В настоящей работе доказано, что в каждом дистанционном графе на плоскости есть индуцированный подграф, содержащий более 91 процента вершин исходного графа и имеющий хроматическое число, не большее четырех. С помощью этого результата найден порядок роста пороговой вероятности для свойства случайного графа быть изоморфным некоторому дистанционному графу на плоскости. Предложены обобщения результатов на другие размерности.

1. Введение и формулировки геометрических результатов

Хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$ пространства $\mathbb{R}^d$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить $\mathbb{R}^d$, чтобы среди точек одного цвета не нашлось пары точек на расстоянии единица, т. е.

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min\{k \in \mathbb{N}: \exists V_1, \ldots, V_k,\ \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k,\ \forall i,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i,\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1\},$$

где ρ — обычное евклидово расстояние.

Легко показать, что для любого d величина $\chi(\mathbb{R}^d)$ конечна. Проблема отыскания хроматического числа пространства была впервые поставлена на рубеже 40-х — 50-х годов XX века (см. [3, 5, 8, 9, 12, 17, 20, 21]). Несмотря на значительный интерес, вызванный этой проблемой, она до сих пор, по существу, остается нерешенной. Конечно, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, однако уже для плоскости лучшее, что мы знаем, это оценка

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

Для трехмерного пространства мы имеем

$$6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$$

(см. [13, 19]), наконец для растущей размерности

$$(1.239\ldots + o(1))^d \leqslant \chi(\mathbb{R}^d) \leqslant (3 + o(1))^d$$

(см. [3, 4, 6, 18]).

Поставленная задача может быть переформулирована в терминах теории графов. Прежде всего, *дистанционным графом* (или *графом расстояний*) назовем конечный граф $G = (V, E)$, вершины которого суть точки евклидова пространства, а ребра соединяют только пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние единица. Иными словами,

$$V \subset \mathbb{R}^d,\ |V| < \infty,\ E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V:\ \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G = (V, E)$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы вершины одного цвета не соединялись ребром, т. е.

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N}:\ \exists V_1, \ldots, V_k,\ V = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_k,\ \forall i,\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i,\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

П. Эрдеш и Н. де Брёйн фактически доказали (см. [15]), что $\chi(\mathbb{R}^d) = \max \chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в $\mathbb{R}^d$. Таким образом, изучение хроматических чисел графов расстояний играет исключительную роль при исследовании проблемы отыскания хроматического числа пространства.

В основной части настоящей работы мы будем рассматривать только случай евклидовой плоскости. Тот факт, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, означает, конечно, что для любого графа расстояний $G = (V, E)$

на плоскости $\chi(G) \leqslant 7$. Как следствие, $\alpha(G) \geqslant \frac{|V|}{7}$, коль скоро через $\alpha(G)$ мы обозначили *число независимости* графа G, т. е. наибольшее количество его вершин, никакие две из которых не соединены ребром:

$$\alpha(G) = \max\{|V'|: \ V' \subset V, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V', \ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

Таким образом, в любом «двумерном» графе расстояний на n вершинах найдется индуцированный подграф, имеющий не менее $\frac{n}{7}$ вершин и хроматическое число 1. Это утверждение допускает ряд нетривиальных обобщений и уточнений. Нам удалось доказать следующие результаты для графов расстояний на плоскости.

Теорема 1. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') = 1$, где $\varkappa = 4.36\ldots$*

Теорема 2. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{2n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 2$.*

Теорема 3. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{3n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 3$.*

Теорема 4. *В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geqslant \left[\frac{4n}{\varkappa}\right]$ и $\chi(G') \leqslant 4$.*

Наиболее интересной является теорема 4. Фактически в ней утверждается, что в каждом графе расстояний на плоскости есть индуцированный подграф, который почти целиком совпадает с исходным графом (содержит не менее 91.7% его вершин) и допускает раскраску в 4 цвета. Если бы в этом утверждении величину 91.7 удалось заменить на 100, то, ввиду теоремы Эрдеша—де Брёйна, это бы означало, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

Заметим, что, конечно, теоремы 1–3 являются следствиями теоремы 4. Однако мы будем доказывать их именно в таком порядке из соображений удобства. Заметим также, что теорема 1 встречалась ранее в литературе, но мы начнем именно с ее доказательства в разделе 3: так проще будет описывать общий подход.

Итак, дальнейшая структура статьи следующая. В разделе 2 мы сформулируем задачу о реализации случайного графа графом расстояний на плоскости. Там же мы приведем соответствующие основные утверждения — теоремы 5 и 6. В третьем разделе мы докажем теоремы 1–4, а также новую теорему 8, являющуюся главным инструментом в наших доказательствах. В разделе 4 мы докажем теоремы 5, 6. Пятый раздел мы посвятим обобщениям полученных результатов на другие размерности.

2. Постановка вероятностной задачи и формулировки соответствующих результатов

Зачастую задачи теории графов допускают нетривиальную интерпретацию в терминах *случайного графа*. Напомним, что одной из наиболее популярных моделей случайного графа является модель, предложенная П. Эрдешем и А. Реньи на рубеже 50-х — 60-х годов XX века (см. [1, 7, 10, 11, 16]). Речь идет о вероятностном пространстве $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$. Здесь

$$\Omega_n = \{G = (V, E): \ |V| = n\}$$

— множество всевозможных графов на n вершинах (без петель и кратных ребер), сигма-алгебра $\mathcal{B}_n$ представляет собой множество всех подмножеств Ω_n, а

$$P_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}.$$

Иначе говоря, можно считать, что ребра случайного графа появляются независимо друг от друга с вероятностью p. Заметим, что в модели Эрдеша—Реньи величина p может зависеть от n.

Нас будет интересовать в дальнейшем, с какой вероятностью случайный граф в модели $G(n, p)$ допускает реализацию на плоскости в качестве графа расстояний. Как это часто бывает в науке о случайных графах, при одних значениях p эта вероятность будет стремиться к нулю, а при других — к единице. Определим некоторую критическую величину p, отвечающую за вышеупомянутый «фазовый переход», следующим образом:

$$p^*(n) = \sup\left\{p \in [0,1]: \ P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) > \frac{1}{2}\right\}.$$

Такая величина называется *пороговой вероятностью*, и она определена корректно ввиду классических результатов о существовании пороговых вероятностей для монотонных свойств случайных графов (см. [11]).

Мы можем доказать следующие результаты.

Теорема 5. *При $p = \frac{c}{n}$, где $c < 1$, выполнено*

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 1, \ n \to \infty.$$

Теорема 6. *При $p = \frac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14.797\ldots$, выполнено*

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \to 0, \ n \to \infty.$$

Теоремы 5 и 6 означают, что $\frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant p^*(n) \leqslant \frac{t_0+\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$. Тем самым, мы знаем порядок роста пороговой вероятности.

3. Доказательства геометрических результатов

3.1. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Прежде всего напомним, что *верхней плотностью* измеримого множества $S \subset \mathbb{R}^d$ называется величина

$$\nu = \nu(S) = \varlimsup_{s\to\infty} \sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)},$$

где супремум берется по всем кубам со стороной s, а μ — это мера Лебега.

Будем говорить, далее, что *на множестве S реализуется расстояние a*, если найдутся такие точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a$.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная Д. Ларманом и К. А. Роджерсом в 1972 году (см. [18]).

Теорема 7. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ существует граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$, с числом независимости $\alpha(G) < D$. Тогда, если измеримое множество в $\mathbb{R}^d$ имеет верхнюю плотность $\nu \geqslant D/n$, то все расстояния $a > 0$ на этом множестве реализуются.*

Сами Ларман и Роджерс формулировали теорему в несколько иных терминах, но нам потребуется именно такая переформулировка. Из нее мы немедленно получаем

Следствие 1. *Если в $\mathbb{R}^d$ найдется такое измеримое множество с верхней плотностью $\nu \geqslant \nu_0$, что на нем какое-либо расстояние $a > 0$ не реализуется, то для любого графа расстояний G в $\mathbb{R}^d$, имеющего n вершин, выполнено $\alpha(G) \geqslant \nu_0 n$.*

В действительности следствие 1 — это просто еще одна переформулировка теоремы 7.

Х. Крофт в своей работе (см. [14, 18]) 1967 года приводит пример измеримого множества на плоскости с верхней плотностью $\nu = \nu_0 = 0.2293\ldots$ и без расстояния единица. Из этого примера и следствия 1 немедленно получаем существование в каждом n-вершинном дистанционном графе на плоскости индуцированного подграфа $G' = (V', E')$, у которого $|V'| \geqslant \nu_0 n$ и $\chi(G') = 1$. Замечая, что $\nu_0 = \frac{1}{\varkappa}$, завершаем доказательство теоремы 1.

□

Подчеркнем, что результат Крофта по-прежнему остается лучшим из известных, а потому в рамках предложенного подхода теорема 1 дает наиболее точную оценку. Поскольку конструкция Крофта нам еще понадобится, опишем ее подробнее.

Пусть на плоскости дана правильная треугольная решетка Λ_ε, в которой расстояние между ближайшими узлами равно $2-2\varepsilon$. Здесь ε — достаточно маленькое число, которое будет оптимально подобрано позднее. Рассмотрим круг B_ε радиуса $\dfrac{1}{2}-\varepsilon$ и правильный шестиугольник H, центр симметрии которого совпадает с центром B_ε и длина диагонали которого равна единице. Положим $T_\varepsilon=(B_\varepsilon\cap H)\setminus\partial(B_\varepsilon\cap H)$ — открытая «черепаха». Для каждого $\mathbf{x}\in\Lambda_\varepsilon$ обозначим через $\varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$ копию множества T_ε, получающуюся в результате параллельного переноса, при котором центр симметрии T_ε переходит в $\mathbf{x}$. Множество Крофта — это $K_\varepsilon=\bigcup\limits_{\mathbf{x}\in\Lambda}\varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$. Выбор величины ε осуществляется так, чтобы значение $\nu(K_\varepsilon)$ было наибольшим.

3.2. Доказательства теорем 2–4.

Доказательство. Для доказательства нам потребуется новый результат, являющийся усилением теоремы Лармана-Роджерса.

Теорема 8. *Пусть в $\mathbb{R}^d$ задан некоторый граф расстояний $G=(V,E)$, $|V|=n$. Предположим, что существуют такие числа $k\in\mathbb{N}$ и $\nu_0\in(0,1)$, что для любого индуцированного подграфа $G'=(V',E')$ с $|V'|\geqslant[\nu_0 n]$ выполнено $\chi(G')>k$. Тогда для всякого набора измеримых множеств $S_1,S_2,\ldots,S_k$ в $\mathbb{R}^d$ с условием, что множество $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$ имеет верхнюю плотность $\nu\geqslant\nu_0$, верно, что каково бы ни было $a>0$, найдется S_i, на котором реализуется расстояние a.*

Следствие 2. *Если для данного $\nu_0\in(0,1)$ найдутся такие k множеств $S_1,S_2,\ldots,S_k$ в $\mathbb{R}^d$, что верхняя плотность множества $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$ не меньше ν_0 и некоторое расстояние $a>0$ не достигается ни на одном из S_i, то для любого графа расстояний G в $\mathbb{R}^d$, имеющего n вершин, найдется индуцированный подграф $G'=(V',E')$ с $|V'|\geqslant[\nu_0 n]$, для которого выполнено $\chi(G')\leqslant k$.*

Следствие очевидно (собственно, оно является переформулировкой теоремы), а теорему 8 мы докажем в пункте 3.3. Сейчас мы с помощью следствия завершим доказательства теорем 2–4.

Сделаем параллельный перенос множества Крофта K_ε вдоль линий решетки на расстояние $1-\varepsilon$. Получим четыре конгруэнтных непересекающихся множества. Берем 2, 3, 4 из них и получаем, с помощью следствия, доказательство теоремы 2, 3, 4 соответственно.

□

3.3. Доказательство теоремы 8.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ — вершины данного графа. Зафиксируем измеримые множества S_1, S_2, $\ldots$, S_k, удовлетворяющие условию теоремы. Тогда для $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_k$ выполнено

$$\varlimsup_{s\to\infty}\sup_{C_s}\frac{\mu(S\cap C_s)}{\mu(C_s)}\geqslant\nu_0>\nu_0-\frac{1}{n},$$

где супремум, напомним, берется по всем кубам со стороной s.

Значит, по определению верхнего предела существует $\delta>0$, при котором для любого s_0 найдется такое $s>s_0$, что

$$\sup_{C_s}\frac{\mu(S\cap C_s)}{\mu(C_s)}>\nu_0-\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n}.$$

Далее по определению супремума получаем, что при прежних ограничениях на δ,s_0 и s существует такой куб C_s, что

$$\frac{\mu(S\cap C_s)}{\mu(C_s)}>\nu_0-\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n}.\qquad(*)$$

Пусть $a>0$ — произвольное фиксированное число. Мы хотим доказать, что найдется S_i, на котором реализуется расстояние a. Рассмотрим векторы $a\mathbf{x}_1,a\mathbf{x}_2,\ldots,a\mathbf{x}_n$. Покажем теперь, что существуют такие s и C_s, с которыми для любого $i=1,\ldots,n$ выполнено

$$\frac{\mu(\{S+a\mathbf{x}_i\}\cap C_s)}{\mu(C_s)}>\nu_0-\frac{1}{n}.$$

Введем обозначения: $a\mathbf{x}_i = (x_i^1, \ldots, x_i^d)$, $b = \max\limits_{i,j}\{x_i^j\}$, где $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, d$.

Возьмем s_0 настолько большим, что

$$\frac{s_0^d - (s_0 - 2b)^d}{s_0^d} < \frac{\delta}{n}.$$

Это, конечно, можно сделать, так как выражение в левой части неравенства с ростом s_0 стремится к нулю. Мы знаем (см. (*)), что для этого s_0 найдутся такие $s > s_0$ и C_s, что

$$\frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}.$$

Положим

$$B = \{\mathbf{y} \in C_s : \ \rho(\mathbf{y}, \partial C_s) < b\}, \ \tilde{C}_s = C_s \setminus B.$$

Заметим, что та часть S, которая содержалась в $\tilde{C}_s$, после сдвига на $a\mathbf{x}_i$ останется в C_s. Тогда для каждого i получаем:

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} \geqslant \frac{\mu(S \cap \tilde{C}_s)}{\mu(C_s)} = \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(S \cap B)}{\mu(C_s)} \geqslant \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(B)}{\mu(C_s)} >$$

$$> \left(\nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}\right) - \frac{s^d - (s - 2b)^d}{s^d} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Итак, мы доказали, что существуют такие s и C_s, с которыми для любого i выполнено

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Суммируем полученные неравенства по i:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s) > (\nu_0 n - 1)\mu(C_s).$$

Стало быть, найдется такая точка $\mathbf{x}^* \in C_s$, что $\mathbf{x}^*$ принадлежит по крайней мере $[\nu_0 n]$ множествам вида $\{S + a\mathbf{x}_i\}$. Без ограничения общности можно считать, что найдется m, не меньшее $[\nu_0 n]$, для которого имеет место $\mathbf{x}^* \in \{S + a\mathbf{x}_i\}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Или, что то же самое,

$$\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i \in S \text{ при } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Но по условию индуцированный подграф G' на вершинах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ имеет хроматическое число $\chi(G') > k$. Рассмотрим изоморфный ему граф $G^* = (V^*, E^*)$, где

$$V^* = \{\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i : \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

$$E^* = \{(\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2}) : \ (\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}) \in E\}.$$

Поскольку его хроматическое число также больше k, то найдется множество S_j и точки $\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2} \in S_j$, соединенные ребром. Но тогда на множестве S_j реализуется расстояние a. Теорема доказана.

□

4. Доказательства вероятностных результатов

4.1. Доказательство теоремы 5.

Доказательство. Нам понадобится теорема, доказанная в [11] в несколько более общей формулировке.

Теорема 9. *Пусть* $p = \dfrac{c}{n}, c < 1$. *Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, все компоненты случайного графа в* $G(n, p)$ *суть деревья или одноцикловые графы.*

Осталось заметить, что любое дерево или одноцикловый граф очевидным образом реализуются на плоскости как графы расстояний, и тем самым завершить доказательство теоремы.

□

4.2. Доказательство теоремы 6.

Доказательство. В теореме 4 утверждается, что в любом графе расстояний $G = (V, E)$ на плоскости найдется большой индуцированный подграф с хроматическим числом, не превосходящим четырех. Иными словами, в таком графе всегда есть четверка непересекающихся независимых множеств вершин большой суммарной мощности. В связи с этим рассмотрим случайную величину $Z_s = Z_s(G)$, равную количеству упорядоченных четверок непересекающихся независимых множеств вершин суммарной мощности s в графе G:

$$Z_s(G) = |\{(V_1, V_2, V_3, V_4) : \; V_i \subset V, \; V_i \cap V_j = \varnothing, \; \forall \; i, \; \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, \; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E, \; |V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_4| = s\}|.$$

Мы доказали, что для любого плоского графа расстояний $Z_{4k}(G) > 0$, где $k = [\nu n] - 1$, $\nu = 0,2293\ldots$. Стало быть, если $Z_{4k}(G) = 0$, то G не реализуется на плоскости как граф расстояний. Это означает, что если мы покажем, что при $p = \dfrac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14,797\ldots$ и $n \to \infty$, выполнено $MZ_{4k} \to 0$, то мы докажем теорему.

Нетрудно видеть, что

$$MZ_{4k} = \sum_{k_1 + \ldots + k_4 = 4k} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4} (1-p)^{\sum_{i=1}^{4} C_{k_i}^2}.$$

В силу выпуклости биномиального коэффициента

$$\sum_{i=1}^{4} C_{k_i}^2 \geqslant 4C_k^2.$$

Очевидно также, что максимальное значение величины

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4}$$

достигается тогда и только тогда, когда максимален полиномиальный коэффициент

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{(4k)!}{k_1! k_2! k_3! k_4!},$$

т. е. при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$. Отсюда

$$MZ_{4k} \leqslant n^3 C_n^k C_{n-k}^k C_{n-2k}^k C_{n-3k}^k (1-p)^{4C_k^2} =$$

$$= n^3 \frac{n!}{(k!)^4 (n-4k)!} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{2k^2 - 2k} = Q_1(n) \frac{(\frac{n}{e})^n \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{(2n^2\nu^2 - 2n\nu)}}{(\frac{n\nu}{e})^{4n\nu} (\frac{n-4n\nu}{e})^{n-4n\nu}} = f(n),$$

где $Q_1(n)$ — функция, растущая не быстрее некоторого полинома. Далее, очевидно,

$$f(n) = Q_2(n) \frac{e^{-2cn\nu^2}}{\nu^{4n\nu}(1-4\nu)^{n-4n\nu}} = Q_2(n) e^{-n(4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu) + 2c\nu^2)},$$

где $Q_2(n)$ — тоже функция, имеющая полиномиальный порядок роста.

Для того, чтобы последнее выражение стремилось к нулю, достаточно, чтобы

$$4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu) + 2c\nu^2 > 0 \Leftrightarrow c > \frac{4\nu \ln \nu + (1-4\nu)\ln(1-4\nu)}{-2\nu^2}.$$

Подставляя значение ν, убеждаемся, что при $c > t_0$ это условие выполнено. Теорема доказана. □

5. Обобщения вероятностных результатов

В этом разделе мы сначала поговорим про обобщения полученных нами вероятностных результатов на случай $d \geqslant 3$. Затем мы отдельно рассмотрим случай $d = 1$.

5.1. Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерностях $d \geqslant 3$. Положим

$$p_d^*(n) = \sup\left\{p \in [0,1]:\ P_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2}\right\}.$$

В частности, $p^*(n) = p_2^*(n)$. Сразу ясно, что для любого $d \geqslant 3$ выполнен аналог теоремы 5, откуда $p_d^*(n) \geqslant \dfrac{1-\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geqslant n_0(\varepsilon)$.

Для получения верхних оценок величины $p_d^*(n)$ нам понадобятся обобщения теоремы 4. Как мы помним, доказательство теоремы 4 основано на результате Крофта и теореме 8. Понятно, что и сейчас мы сможем использовать последнюю теорему; нам лишь нужны аналоги результата Крофта в размерностях $d \geqslant 3$. Эти аналоги недавно были получены в работе [2]. А именно, пусть $m_1(\mathbb{R}^d)$ — это супремум верхних плотностей таких измеримых множеств $S \subset \mathbb{R}^d$, что в S не реализуется расстояние 1. В этих терминах конструкция Крофта дает неравенство $m_1(\mathbb{R}^2) \geqslant 0.2293\ldots$. Подобные неравенства установлены в статье [2] для $d \in \{3,\ldots,8\}$:

$$m_1(\mathbb{R}^3) \geqslant 0.09877, \quad m_1(\mathbb{R}^4) \geqslant 0.04413,$$
$$m_1(\mathbb{R}^5) \geqslant 0.01833, \quad m_1(\mathbb{R}^6) \geqslant 0.00806,$$
$$m_1(\mathbb{R}^7) \geqslant 0.00352, \quad m_1(\mathbb{R}^8) \geqslant 0.00165.$$

Напомним, что в конце пункта 3.2 мы использовали 4 конгруэнтных копии множества Крофта. На самом деле конструкции из работы [2] устроены совершенно аналогично: они тоже имеют решетчатую природу, и для каждого d в $\mathbb{R}^d$ умещаются 2^d их конгруэнтных копий. В итоге обобщением теоремы 4 служит следующий результат.

Теорема 10. *Положим*

$$\nu_3 = 0.09877, \quad \nu_4 = 0.04413, \quad \nu_5 = 0.01833,$$

$$\nu_6 = 0.00806, \quad \nu_7 = 0.00352, \quad \nu_8 = 0.00165.$$

Тогда для любого $d \in \{3,\ldots,8\}$ в любом n-вершинном графе расстояний $G=(V,E)$ в $\mathbb{R}^d$ найдется такой индуцированный подграф $G'=(V',E')$, что $|V'| \geqslant [2^d\nu_d n]$ и $\chi(G') \leqslant 2^d$.

Дальнейшая технология полностью совпадает с той, что была разработана в пункте 4.2 для доказательства теоремы 6. Теперь для данного d нужно брать $k = [\nu_d n] - 1$ и добиваться того, чтобы величина $MZ_{2^d k}$ стремилась к нулю (или хотя бы была меньше $1/2$ при больших n).

Пусть $p = \dfrac{c}{n}$. Тогда выкладки из пункта 4.2 преобразуются к виду

$$MZ_{2^d k} \leqslant Q_1(n)\frac{n!}{(k!)^{2^d}\,(n-2^d k)!}\left(1-\frac{c}{n}\right)^{2^{d-1}k^2 - 2^{d-1}k} =$$

$$= Q_2(n)e^{-n\left(2^d\nu_d\ln\nu_d + \left(1-2^d\nu_d\right)\ln\left(1-2^d\nu_d\right) + 2^{d-1}c\nu_d^2\right)}.$$

В итоге нам нужно

$$c > \frac{2^d\nu_d\ln\nu_d + \left(1-2^d\nu_d\right)\ln\left(1-2^d\nu_d\right)}{-2^{d-1}\nu_d^2}.$$

Теорема 11. *Положим*

$$c_3 = 55.272\ldots, \quad c_4 = 164.528\ldots, \quad c_5 = 504.285\ldots,$$

$$c_6 = 1365.170\ldots, \quad c_7 = 3624.758\ldots, \quad c_8 = 8675.785\ldots$$

Тогда при каждом d и $p = \dfrac{c}{n}$, где $c > c_d$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) \to 0,\ n \to \infty.$$

Иными словами,

$$\frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant p_d^*(n) \leqslant \frac{c_d+\varepsilon}{n}.$$

Из выкладок, приведенных в статье [2], а также из неравенства, определяющего величины c_d через величины ν_d, следует, что c_d растет как экспонента. В этой связи интересно установить более сильные нижние оценки пороговой вероятности, нежели не зависящая от d нынешняя оценка $p_d^* \geqslant \frac{1-\varepsilon}{n}$.

5.2. Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерности $d = 1$.

Здесь мы изучим величину $p_1^*(n)$. Любопытно, что ее поведение будет разительно отличаться от поведения всех остальных величин $p_d^*(n)$. А именно, зависимость от n будет другой.

Теорема 12. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ выполнено*

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{12}+\varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства нижней оценки. Пусть $p = \frac{c}{n^{4/3}}$, где $c < \sqrt[3]{3}$. Хорошо известно, что при любом $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ случайный граф с асимптотической вероятностью 1 не содержит циклов, т. е. является лесом. Значит, и при нашем p случайный граф — «почти наверняка» лес. Допустим, мы доказали, что к тому же степень каждой вершины случайного графа не превосходит двойки с вероятностью, которая при больших n строго больше половины. Тогда нужная оценка получена: лес, у которого каждая вершина имеет степень 0, 1 или 2, — это линейный лес, т. е. граф, компоненты которого суть простые цепи или изолированные вершины; ясно, что такой граф реализуется как граф расстояний на прямой.

Итак, пусть Y_3 — случайная величина, равная количеству вершин случайного графа, имеющих степень не ниже тройки. В силу классического неравенства Маркова нам достаточно убедиться в том, что $MY_3 < \frac{1}{2} + o(1)$. В самом деле,

$$MY_3 = n\sum_{i=3}^{n-1} C_{n-1}^i p^i (1-p)^{n-1-i} =$$

$$= n\left(1-(1-p)^{n-1}-(n-1)p(1-p)^{n-2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2(1-p)^{n-3}\right) =$$

$$= n\left(1-\left(1-(n-1)p+\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)-\right.$$

$$-(n-1)p\left(1-(n-2)p+\frac{(n-2)(n-3)}{2}p^2-\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)-$$

$$\left.-\frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2\left(1-(n-3)p+\frac{(n-3)(n-4)}{2}p^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6}p^3+O\left(n^4p^4\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6}p^3+O\left(n^5p^4\right) = \frac{n^4p^3}{6}+o(1) = \frac{n^4c^3}{6n^4}+o(1) < \frac{1}{2}+o(1).$$

Нижняя оценка доказана.

Для доказательства верхней оценки применим неравенство Чебышёва:

$$P_n(Y_3 = 0) = P_n(Y_3 \leqslant 0) = P_n(-Y_3 \geqslant 0) = P_n(MY_3 - Y_3 \geqslant MY_3) \leqslant \frac{DY_3}{(MY_3)^2}.$$

Допустим, мы показали, что $\frac{DY_3}{(MY_3)^2} < \frac{1}{2} + o(1)$. Тогда с вероятностью, большей половины при больших n, в случайном графе есть вершины степени 3 или выше. Но графы с такими вершинами нельзя реализовать на прямой.

Итак, мы уже знаем, что при $p = \frac{c}{n^{4/3}}$ выполнено $MY_3 = \frac{n^4p^3}{6} + o(1)$. В книге [11] на с. 69 (лемма 3.10) приведено неравенство

$$DY_3 \leqslant MY_3 + n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2.$$

Заметим, что

$$0 < n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2 < n^2p\left(\frac{n^2}{2}p^2\right)^2 = \frac{n^6p^5}{4} = o(1).$$

Значит, с учетом условия $c > \sqrt[3]{12}$ имеем

$$\frac{DY_3}{(MY_3)^2} \leqslant \frac{MY_3 + n^2p(1-p)\left(C_{n-2}^2 p^2(1-p)^{n-4}\right)^2}{(MY_3)^2} =$$
$$= \frac{MY_3 + o(1)}{(MY_3)^2} = \frac{6}{n^4p^3} + o(1) = \frac{6}{c^3} + o(1) < \frac{1}{2} + o(1).$$

Теорема доказана.

□

Теорема 12 допускает уточнение. А именно, можно показать, что

$$\frac{\sqrt[3]{6\ln 2} - \varepsilon}{n^{4/3}} \leqslant p_1^*(n) \leqslant \frac{\sqrt[3]{6\ln 2} + \varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Иными словами, в одномерном случае мы знаем точное значение пороговой вероятности. Этот факт является прямым следствием теоремы 3.5 из книги [11]. В нашем случае теорема 3.5 утверждает, что при $p \sim \frac{x}{n^{4/3}}$ вероятность того, что максимальная степень вершины случайного графа не больше двух, асимптотически равна $e^{-x^3/6}$. В частности, если $x = \sqrt[3]{6\ln 2}$, то последняя величина — это 1/2. Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями из доказательства теоремы 12.

Стоит отметить, что, когда мы говорим о реализации графа G дистанционным графом H, мы не просто требуем наличия гомоморфизма из G в H, мы хотим, чтобы в образе не было совпадающих вершин. Для случаев $d \geqslant 2$ это замечание не является принципиальным. Однако для текущего случая это имеет значение. Если бы мы разрешили совпадающие вершины, то реализация графа на прямой была бы просто равносильна двудольности, и тогда пороговая вероятность снова имела бы порядок $\frac{1}{n}$.

Благодарности. Авторы очень признательны рецензенту за полезные замечания.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта 12-01-00683 Российского Фонда Фундаментальных Исследований и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колчин В. Ф.* Случайные графы. — М.: Физматлит, 2002.
2. *Купавский А. Б., Райгородский А. М., Титова М. В.* О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей// Тр. МФТИ. — *4*, № 1. — 2012. — С. 91–110.
3. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств// Усп. мат. наук. — 2001. — *56*, № 1. — С. 107–146.
4. *Райгородский А. М.* О хроматическом числе пространства// Усп. мат. наук. — 2000. — *55*, № 2. — С. 147–148.
5. *Райгородский А. М.* Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.
6. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
7. *Райгородский А. М.* Модели случайных графов. — М.: МЦНМО, 2011.
8. *Сойфер А.* Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее// Мат. просвещ. — 2004. — *8*.
9. *Agarwal P. K., Pach J.* Combinatorial geometry. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
10. *Alon N., Spencer J.* The probabilistic method. — Wiley-Interscience Ser. Discr. Math. Optim., 2000.
11. *Bollobás B.* Random graphs. — Cambridge Univ. Press, 2001.
12. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Springer, 2005.

13. *Coulson D.* A 15-colouring of 3-space omitting distance one// Discrete Math. — 2002. — *256.* — С. 83–90.
14. *Croft H. T.* Incident incidents// Eureka (Cambridge). — 1967. — *30.* — С. 22–26.
15. *De Bruijn N. G., Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations// Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A. — *54*, № 5. — 1951. — С. 371–373.
16. *Janson S., Luczak T., Ruciński A.* Random graphs. — New York: Wiley, 2000.
17. *Klee V., Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. — Math. Association of America, 1991.
18. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space// Mathematika. — 1972. — *19.* — С. 1–24.
19. *Nechushtan O.* Note on the space chromatic number// Discrete Math. — 2002. — *256.* — С. 499–507.
20. *Soifer A.* The mathematical coloring book. — Springer, 2009.
21. *Székely L. A., Erdős P.* On unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems// Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11. — 2002. — С. 649–666.

А. А. Кокоткин
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.
E-mail: kokocan@yandex.ru

А. М. Райгородский
141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.
E-mail: mraigor@yandex.ru