

ИНВАРИАНТ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2013 г. М. В. ЗЕНКИНА

Аннотация. В настоящей работе строится инвариант узлов в утолщенной сфере с g ручками, зависящий от $2g + 3$ переменных. При построении инварианта используются копредставление Виртингера группы узла, а также понятие четности, введенное Мантуровым [7]. В настоящей статье будут также рассмотрены примеры узлов в утолщенном торе, которые рассматривались в [8] и неэквивалентность которых доказывается с помощью построенного полинома.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важным обобщением теории классических узлов является теория виртуальных узлов, разработанная Кауфманом в [10]. Виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных двумерных поверхностях, рассмотренных с точностью до изотопии и стабилизации/дестабилизации (см. [12]). На теорию виртуальных узлов были обобщены многочисленные инварианты классических узлов (см., например, [6]), в том числе гомологии Хованова, а также различные модификации полинома Александера, связанные с копредставлением Виртингера (см. [5]). Стандартное копредставление Виртингера группы узла сопоставляет дугам образующие, а перекресткам — соотношения.

В [2] был построен инвариант z' зацеплений, который является обобщением полинома Александера для узлов в утолщенном торе и использует копредставление Дена группы узла. В настоящей статье будет построен полином s , который является обобщением полинома Александера для узлов в S_g . При построении инварианта будем использовать копредставление Виртингера группы узла, а также понятие четности перекрестков, введенное Мантуровым [7]. В статье будет доказана неэквивалентность узлов на торе, изображенных на рис. 1. Вопрос об эквивалентности данных узлов ранее ставился в работе [8] и не был решен.

Благодарности. Я благодарна В. О. Мантурову за полезные замечания при подготовке настоящего текста и за ценные советы.

2. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Мы рассматриваем ориентированные узлы K в $S_g \times I$, где S_g — сфера с g ручками, I — отрезок. Каждый такой узел естественным образом задается своей проекцией на S_g , которая в общем положении представляет собой четырехвалентный граф, каждая вершина которого снабжена структурой проход-переход, при этом два графа являются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них получается из другого стандартными движениями Рейдемейстера (см. рис. 2).

Представим поверхность S_g в виде склейки $4g$ -угольника L_g . Далее мы будем изображать диаграмму узла на L_g . Фиксируем ориентацию на S_g . Пусть дана диаграмма K ориентированного узла на S_g с n перекрестками, $V(K)$ — множество перекрестков диаграммы K в S_g . Поставим в соответствие каждому перекрестку, принадлежащему $V(K)$, либо 0 и назовем его четным, либо 1 и в этом случае будем говорить, что перекресток нечетный, следующим образом. Построим хордовую диаграмму $H(K)$, соответствующую диаграмме K . $H(K)$ состоит из окружности и набора хорд, соединяющих точки узла с одинаковыми проекциями на плоскость диаграммы узла (рис. 3). Хорда a хордовой диаграммы называется *зацепленной* с некоторой хордой b , если концы хорды b лежат в разных компонентах $S^1 \setminus a$. Четность перекрестка v диаграммы K полагаем равной четности числа хорд $H(K)$, зацепленных с хордой, соответствующей перекрестку v [7]. Назовем *дугой* диаграммы узла проекцию ветви узла от прохода перекрестка до следующего прохода. В четных перекрестках мы будем ставить локальные метки на дугах так, как показано на рис. 4, а в нечетных перекрестках — так, как показано на рис. 5.

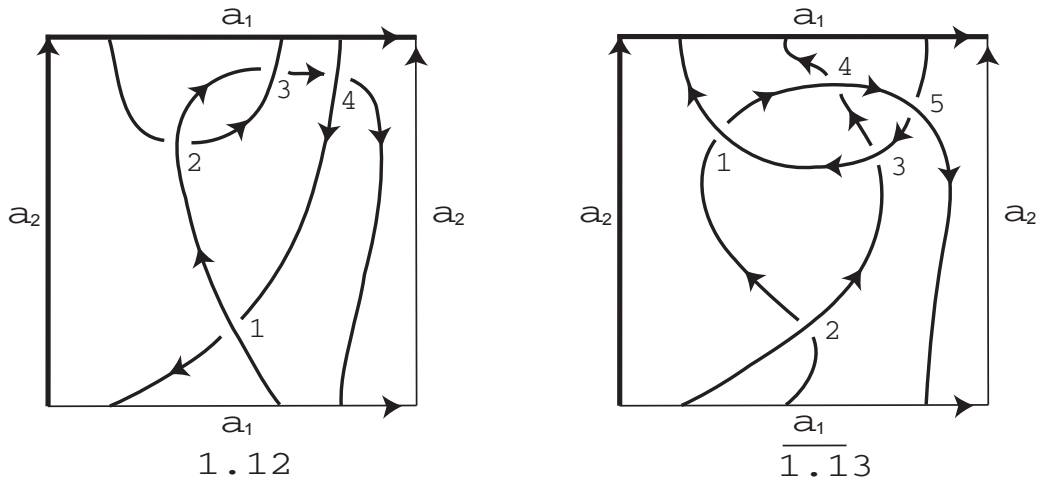


Рис. 1. Диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

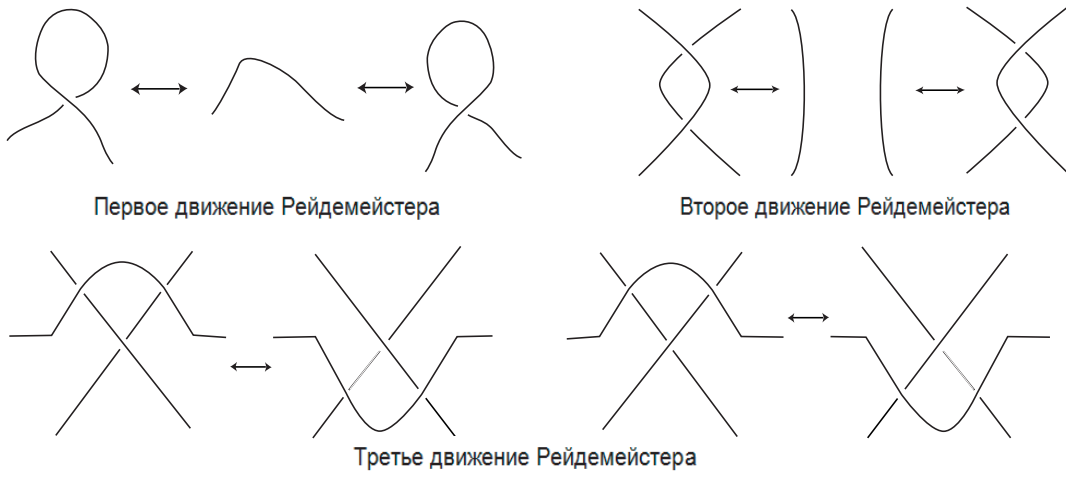


Рис. 2. Движения Рейдемейстера.

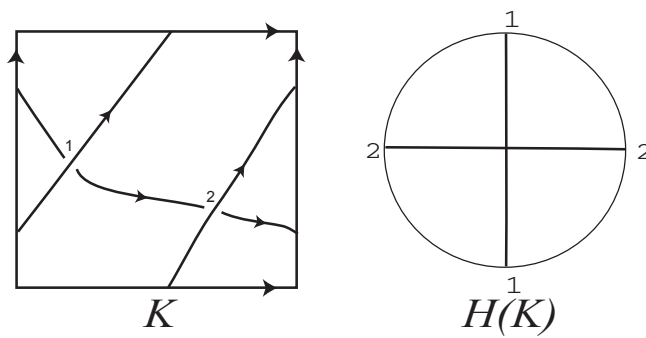


Рис. 3. Построение хордовой диаграммы.

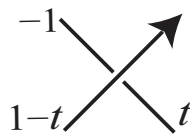


Рис. 4. Построение локальных меток в четных перекрестках.

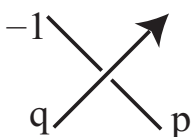


Рис. 5. Построение локальных меток в нечетных перекрестках.

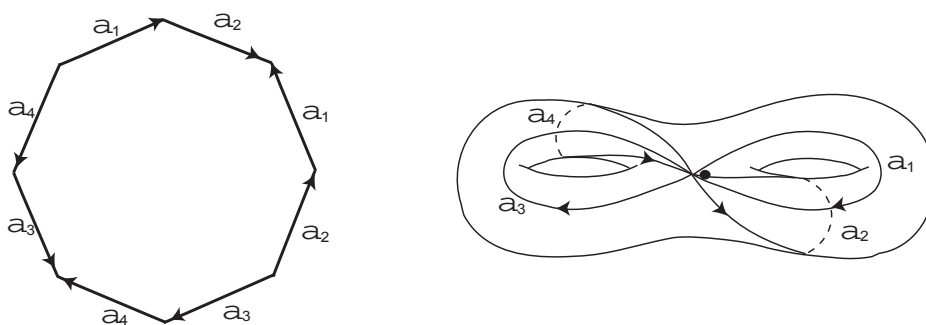


Рис. 6. Фундаментальный восьмиугольник и крендель.

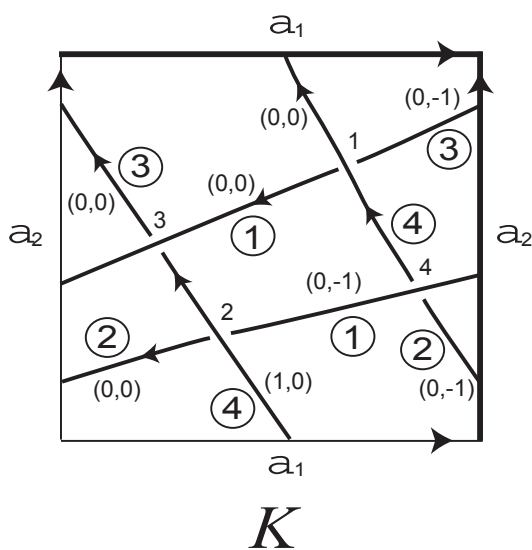


Рис. 7. Разметка дуг на примере T^2 .

Занумеруем перекрестки полученной диаграммы числами от 1 до n произвольным образом, где n — количество перекрестков. Как известно [4], количество дуг в этом случае равно n . Занумеруем дуги диаграммы теми же числами, что и перекрестки, таким образом, чтобы дуга с номером k выходила из перекрестка с номером k . Обозначим систему меридианов S_g через a_1, a_2, \dots, a_{2g} (рис. 6).

В $4g$ -угольнике L_g из каждой пары склеиваемых сторон выберем одну сторону, которую будем на чертеже выделять жирной линией. Меридианы разделяют дуги диаграммы на поддуги. Построим разметку поддуг следующим образом. Каждой поддуге, выходящей из k -го перекрестка, ставим в соответствие метку $(0, 0, \dots, 0)$ длины $2g$. Если дуга делится на поддуги меридианом a_m , где $m = 1, 2, \dots, 2g$, то при переходе через фиксированную сторону a_m число под номером m , стоящее в метке, увеличивается на 1, то есть метка меняется на $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, а если дуга переходит через меридиан, который не зафиксировали, то m -ое число в метке уменьшается на 1 (рис. 7).

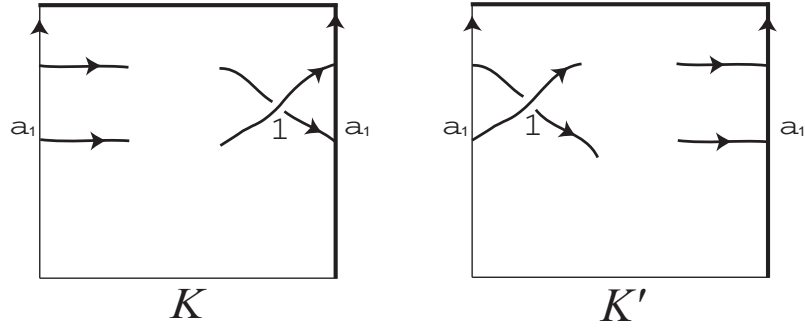


Рис. 8. Проход перекрестка через меридиан (первый случай).

Построим квадратную матрицу размера $n \times n$ следующим образом. В матрице $M(K)$ каждой дуге диаграммы K соответствует столбец, а каждому перекрестку — строка. Если некоторая дуга j не инцидентна перекрестку i (не проходит через него и не заканчивается в нем), поставим на пересечении i -ой строки и j -го столбца ноль. В случае, если лишь одна поддуга j -ой дуги инцидентна i -ому перекрестку, элемент M_{ij} будет равен моному $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{2g}^{\alpha_{2g}}$, умноженному на локальную метку, то есть на один из мономов $-1, 1 - t, t$ в четном перекрестке и $-1, p, q$ в нечетном, где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g})$ — метка, соответствующая поддуге в данном перекрестке [1]. Если таких поддуг несколько, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным поддугам.

Мы получили матрицу $M(K)$, зависящую от диаграммы K . Положим $s(K) = \det(M(K))$, где

$$s(K) \in \mathbb{Z}[t, q, p, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_{2g}^{\pm 1}] / (q(p - t) = 0, q^2 = (1 - t)(1 - p)),$$

g — количество ручек.

Центральным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Если две диаграммы K и K' узлов в $S_g \times I$ эквивалентны, то*

$$s(K) = \pm s(K') t^\alpha p^\beta q^\gamma$$

для некоторых целых чисел α, β, γ .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Заметим сначала, что произвол в нумерации перекрестков приводит к тому, что строки и столбцы будут меняться местами, то есть определитель либо не будет меняться, либо будет умножаться на -1 . Таким образом, мы можем нумеровать перекрестки произвольным образом.

Так как на сфере с g ручками выделена система меридианов, то помимо движений Рейдемейстера нужно проверить инвариантность также относительно движений, при которых один из перекрестков проходит через сторону фундаментального многоугольника. Пусть даны две диаграммы K и K' , которые отличаются друг от друга этим движением, причем перекресток 1 является четным (рис. 8).

Рассмотрим следующую операцию. Пусть K — диаграмма узла в $S_g \times I$, l — некоторая дуга. Мы разобьем дугу l на две дуги l_1 и l_2 добавлением вершины v (см. [4]). Вершина v инцидентна только дугам l_1 и l_2 . Все перекрестки, инцидентные дуге l , делятся на перекрестки, инцидентные дуге l_1 , и перекрестки, инцидентные дуге l_2 . Рассмотрим матрицу $M'(K)$ для полученной диаграммы. Будем считать, что новые дуги имеют номера 1 и 2. Строка, соответствующая вершине v , имеет два ненулевых элемента в 1-ом и 2-ом столбцах (рис. 9). Заметим, что столбец, соответствующий дуге l , разобьется на два столбца, сумма которых равна столбцу, соответствующему дуге l . Таким образом, определители матриц $M(K)$ и $M'(K)$ равны с точностью до умножения на t^α , $\alpha \in \mathbb{Z}$, то есть полином s инвариантен при таком разбиении дуги диаграммы K .

Вернемся к доказательству теоремы. Разобьем дугу 1 диаграмм K и K' на две дуги так, как показано на рис. 10. Полученным новым вершинам присвоим номер 2.

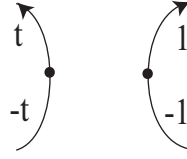


Рис. 9. Локальные метки в добавленной вершине.

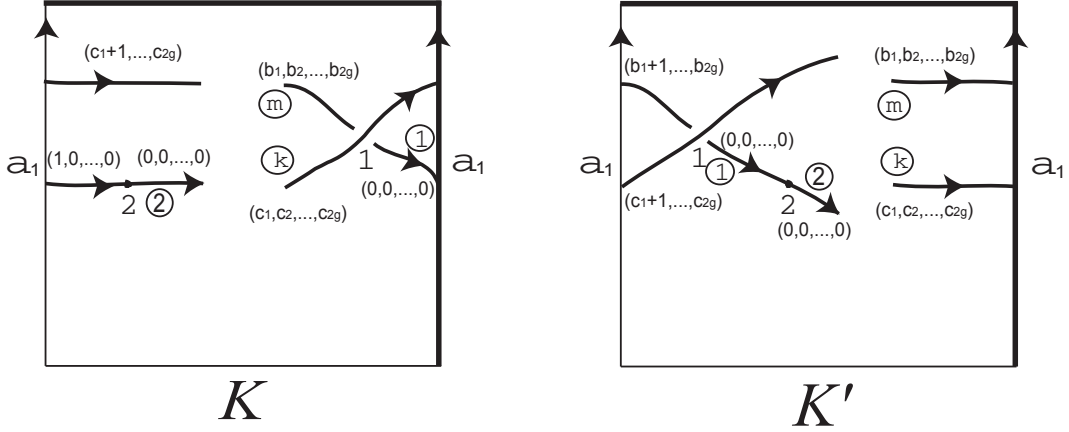


Рис. 10. Изменение меток при добавлении вершины.

Замечание 1. Вершину, полученную при разбиении дуги, будем считать четной, так как на хордовой диаграмме данная вершина не будет образовывать хорды, то есть пересечения с другими хордами нет.

Как видно из рис. 10, все строки, кроме первых двух, совпадают. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -x_1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$M'(K') = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1+1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1+1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Заметим, что в первом столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме элементов M_{11} и M_{21} . В матрице (1) первый столбец умножим на x_1^{-1} , а первую строку умножим на x_1 . В результате получим матрицу, которая совпадет с матрицей (2).

Рассмотрим также случай, который изображен на рис. 11, где перекресток 1 — четный. Соответствующие матрицы диаграмм тогда будут иметь вид:

$$M'(K) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \dots 0 & tx_1^{b_1-1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$M'(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \dots 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1+1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -x_1^{-1} & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что так же как и в предыдущем случае, в первом столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме элементов M_{11} и M_{21} . В матрице (4) первый столбец умножим на x_1 , а первую строку умножим на x_1^{-1} . В результате получим матрицу, которая совпадет с матрицей (3).

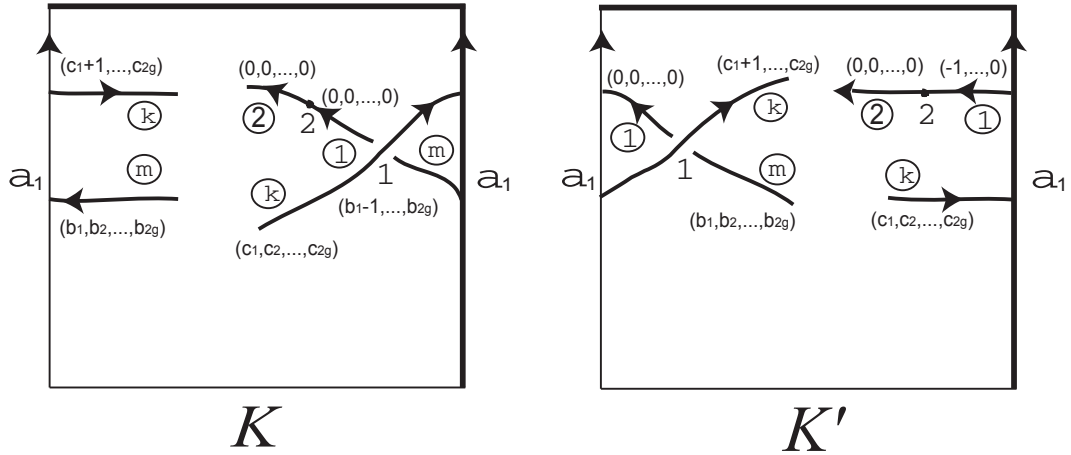


Рис. 11. Проход перекрестка через меридиан (второй случай).

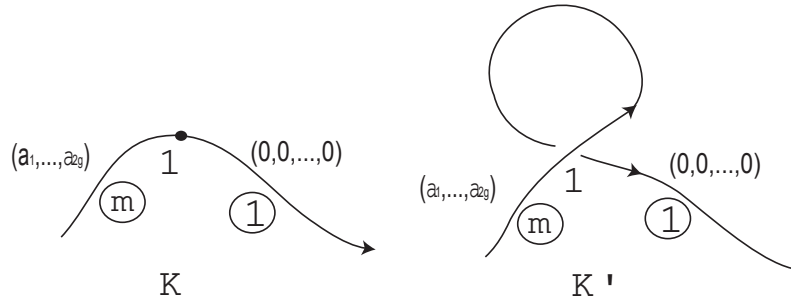


Рис. 12. Первое движение Рейдемейстера.

Аналогично можно доказать инвариантность во всех остальных случаях. Таким образом, полином инвариантен относительно движений, при которых один из перекрестков проходит через меридиан.

Для доказательства теоремы проверим инвариантность относительно движений Рейдемейстера.

Как известно (см., например, [14]), для установления эквивалентности двух диаграмм достаточно использовать лишь одну версию третьего движения Рейдемейстера, а также все версии первого и второго движений Рейдемейстера.

Докажем инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K , которая имеет n перекрестков, добавлением петли (см. рис. 12). Как известно из четной аксиоматики [7], участвующий в первом движении перекресток диаграммы K' является четным. Присвоим ему номер 1, а остальные перекрестки занумеруем произвольным образом номерами от 2 до $n + 1$. Разобьем дугу диаграммы K на две дуги и полученной вершине присвоим номер 1, а остальные перекрестки занумеруем так же, как в диаграмме K' (рис. 12).

Таким образом, все строки матриц, соответствующих диаграммам K и K' , будут совпадать, кроме первой. Записав первые строки этих матриц, видим, что определители равны с точностью до умножения на t^α , $\alpha \in \mathbb{Z}$:

$$M'(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & -x_1^{a_1} \dots x_{2g}^{a_{2g}} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} t & 0 \dots 0 & -tx_1^{a_1} \dots x_{2g}^{a_{2g}} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается инвариантность относительно трех оставшихся версий первого движения.

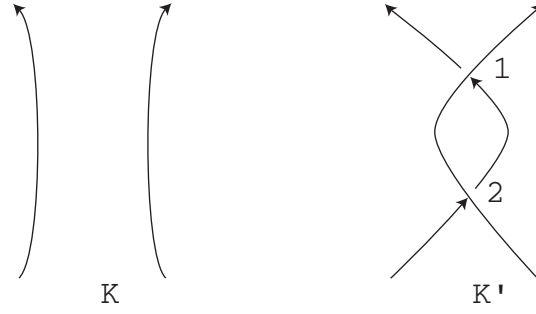


Рис. 13. Второе движение Рейдемейстера: первый случай.

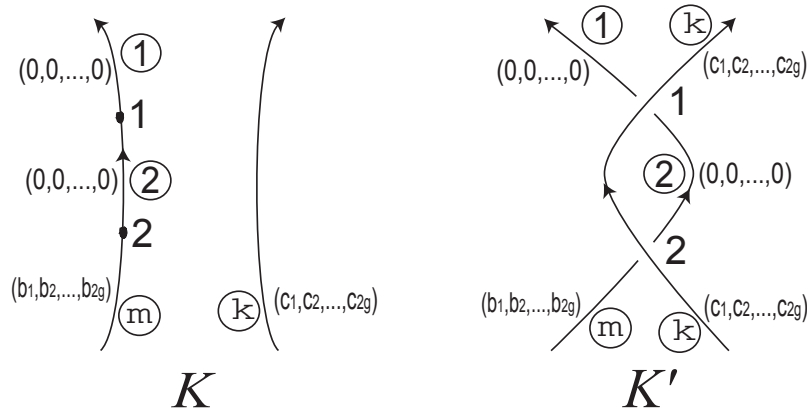


Рис. 14. Разбиение дуги и построение локальных меток.

Рассмотрим теперь доказательство инвариантности полинома относительно второго движения Рейдемейстера. Рассмотрим сначала его сонаправленную версию. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K добавлением двух классических перекрестков так, как показано на рис. 13.

Согласно четной аксиоматике [7] оба перекрестка, участвующие во втором движении, имеют одинаковую четность. Таким образом, мы получаем в случае сонаправленного движения Рейдемейстера два подслучая. В первом мы будем считать перекрестки 1 и 2 четными, а во втором — нечетными.

Рассмотрим первый подслучай. Разобьем дугу диаграммы K двумя вершинами на три дуги и перенумеруем перекрестки диаграмм K и K' следующим образом: в качестве первой и второй вершины в диаграмме K' возьмем перекрестки, участвующие во втором движении, в диаграмме K — добавленные вершины, а все остальные перекрестки диаграмм K и K' занумеруем одинаково (рис. 14).

Заметим, что все строки матриц совпадают, кроме двух первых. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Заметим, что во втором столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме M_{12} и M_{22} . В матрице (5) прибавим первую строку ко второй, а в матрице (6) первую строку умножим на -1 и прибавим ко второй. Получим:

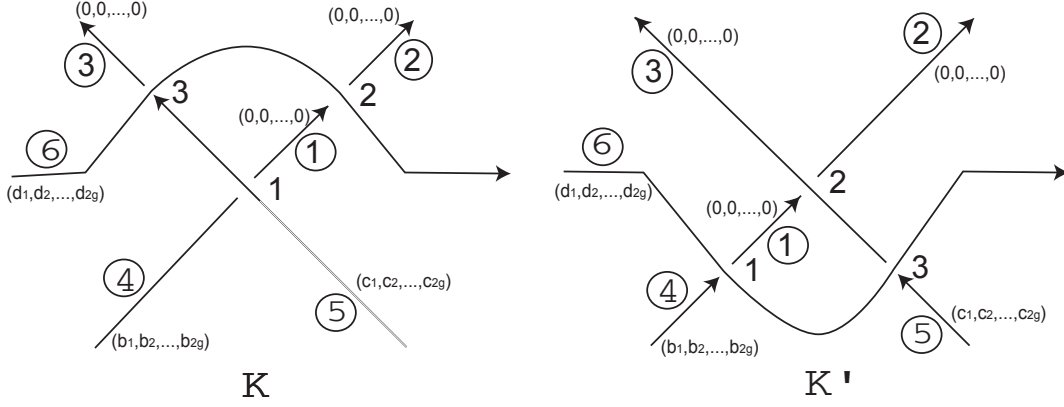


Рис. 15. Третье движение Рейдемейстера.

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Разлагая матрицы (7) и (8) по второму столбцу, мы видим, что определитель матрицы (7) равен определителю матрицы (8), умноженному на $-t$.

Рассмотрим второй подслучай, то есть перекрестки 1 и 2 являются нечетными (рис. 14). Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что во втором столбце в обеих матрицах, как и в предыдущем случае, все элементы равны 0, кроме M_{12} и M_{22} . В матрице (9) первую строку прибавим ко второй, а в матрице (10) первую строку умножим на -1 и прибавим ко второй. Получим:

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Разлагая матрицы (11) и (12) по второму столбцу, мы видим, что определитель матрицы (12) равен определителю матрицы (11), умноженному на $-\frac{p}{t^2}$.

Аналогично доказывается инвариантность в двух подслучаях сонаправленной версии второго движения Рейдемейстера и четырех подслучаях противонаправленной версии.

Рассмотрим третье движение Рейдемейстера. Занумеруем перекрестки диаграмм K и K' так, чтобы номера перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, имели номера от 1 до 3, а номера остальных перекрестков были такими, чтобы дуги, участвующие в третьем движении, имели номера от 1 до 6 (см. рис. 15).

Как известно [7], среди перекрестков 1, 2 и 3 количество нечетных перекрестков четно. Рассмотрим сначала случай, когда все три перекрестка четные. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M(K) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ t & -1 & 0 & 0 & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & t & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

У обеих матриц в первом столбце стоят нули, начиная с третьей строки. Все строки этих матриц устроены одинаково, за исключением первых двух строк.

В обеих матрицах умножим первую строку на -1 и прибавим ко второй:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (t-1)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 1-t & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (t-1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В матрицах (13) и (14) прибавим второй столбец к третьему. В итоге получим две матрицы:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & -1 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (t-1)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 1 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (t-1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Теперь в (15) умножим третью строку на -1 и прибавим ко второй, а в (16) прибавим третью строку ко второй. Имеем:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Разлагая определители матриц (17) и (18) по первому столбцу, видим, что они равны.

Рассмотрим теперь случай, когда перекрестки 1 и 3 на диаграмме K являются нечетными, а перекресток 2 — четным (рис. 15). В соответствии с четной аксиоматикой на диаграмме K'

перекрестки 2 и 3 — нечетные, а 1 — четный. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M(K) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ t & -1 & 0 & 0 & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

У обеих матриц в первом столбце стоят нули, начиная с третьей строки. Все строки этих матриц устроены одинаково, за исключением первых двух строк.

В первой матрице умножим первую строку на $-\frac{t}{p}$ и прибавим ко второй, а во второй матрице третью строку умножим на q и прибавим ко второй. Получим:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{t}{p}x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -\frac{tq}{p}x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & p & 0 & 0 & qpx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & q^2x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В матрице (19) умножим первый столбец на $\frac{1}{p}$, а вторую строку — на p :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -p & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -tqx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & p(1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В матрице (20) умножим первую строку на -1 и прибавим ее ко второй:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & p & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qpx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (q^2 + t - 1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Так как выполняются соотношения $q(p-t) = 0$, $q^2 = (1-t)(1-p)$, то матрица (22) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & p & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & tqx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & -p(1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Разлагая определители матриц (21) и (23) по первому столбцу, видим, что они равны.

Рассуждая аналогично для других подслучаев третьего движения Рейдемейстера, получим, что определители, соответствующие диаграммам K и K' , равны. Теорема доказана.

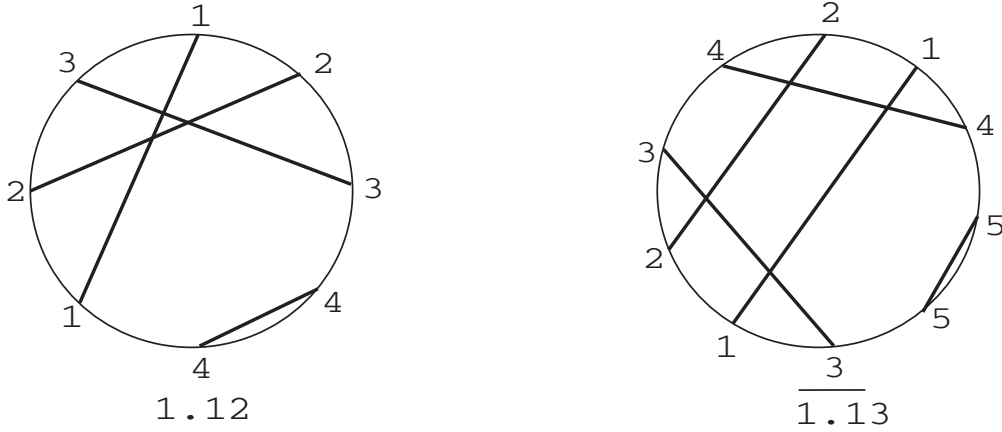
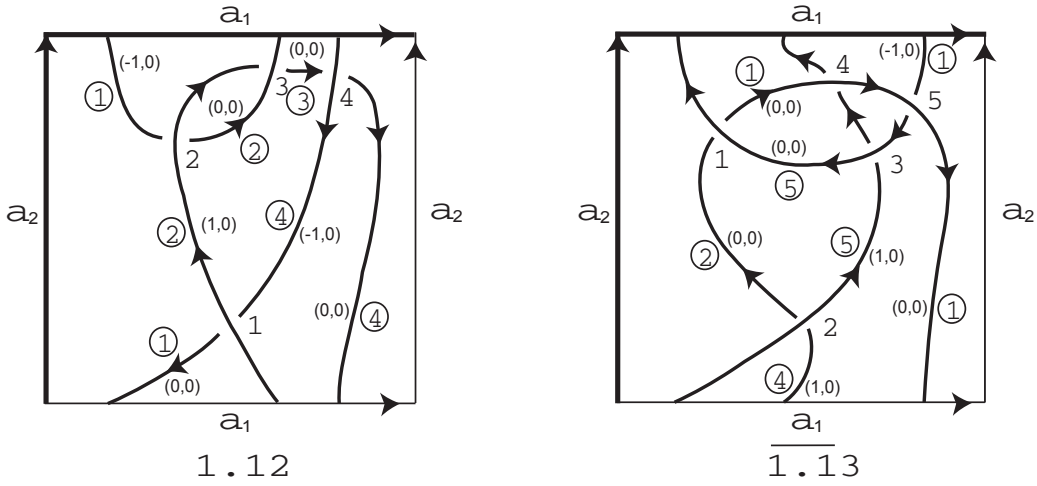
Рис. 16. Хордовые диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

Рис. 17. Расстановка меток на диаграммах.

Пример 1. Рассмотрим диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$ на торе T^2 , рассмотренные в [8] (рис. 1). Найдем четность перекрестков этих диаграмм (рис. 16). Видим, что все перекрестки обеих диаграмм четные. Поставим метки на дугах данных диаграмм (рис. 17).

Составим матрицы $M_{1.12}$ и $M_{\overline{1.13}}$, соответствующие диаграммам узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

$$M_{1.12} = \begin{pmatrix} -1 & (1-t)x_1 & 0 & tx_1^{-1} \\ -x_1^{-1} & t + (1-t)x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t-x_1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & (1-t)x_1^{-1} - 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\overline{1.13}} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & -1 & 0 & tx_1 & (1-t)x_1 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1-t-x_1 \\ 1-t & 0 & t & -1 & 0 \\ 1-t-x_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Найдем определители полученных матриц:

$$s(1.12) = \det(M_{1.12}) = -2t + 4t^2 - t^3 + \frac{t^2}{x_1^2} - \frac{t^3}{x_1^2} + \frac{t}{x_1} - \frac{4t^2}{x_1} + \frac{2t^3}{x_1} + tx_1 - t^2x_1,$$

$$s(\overline{1.13}) = \det(M_{\overline{1.13}}) = -2t + 4t^2 - t^3 + \frac{t}{x_1} - \frac{t^2}{x_1} + tx_1 - 4t^2x_1 + 2t^3x_1 + t^2x_1^2 - t^3x_1^2.$$

Таким образом, построенный полином доказывает неэквивалентность диаграмм 1.12 и $\overline{1.13}$ на торе T^2 .

Заметим, что инвариант также доказывает неэквивалентность диаграмм 1.13 и $\overline{1.12}$, которые являются зеркальными отражениями, то есть получаются из рассматриваемых диаграмм $\overline{1.13}$ и 1.12 заменой всех типов перекрестков (проходов на переходы и наоборот) [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев Д. М.* Об усилении инвариантов виртуальных узлов с помощью четности // *Мат. сб.* — 2010. — 201, № 6. — С. 3–18.
2. *Зенкина М. В.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // *Мат. заметки.* — 2011. — 90, № 2. — С. 242–253.
3. *Зенкина М. В., Мантуров В. О.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2009. — 372. — С. 5–18.
4. *Мантуров В. О.* Лекции по теории узлов и их инвариантов. — М.: УРСС, 2001.
5. *Мантуров В. О.* О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений // *Тр. Моск. Мат. об-ва.* — 2004. — 65, № 1. — С. 175–200.
6. *Мантуров В. О.* Теория узлов. — М.—Ижевск: РХД, 2005.
7. *Мантуров В. О.* Четность в теории узлов // *Мат. сб.* — 2010. — 201, № 5. — С. 65–110.
8. *Grishanov S. A., Meshkov V. R., Vassiliev V. A.* Recognizing textile structures by finite type knot invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18, № 2. — С. 209–235.
9. *Grishanov S. A., Vassiliev V. A.* Invariants of links in 3-manifolds and splitting problem of textile structures // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2011. — 20, № 3. — С. 345–370.
10. *Kauffman L. H.* Virtual knot theory // *Eur. J. Combinatorics.* — 1999. — 20, № 7. — С. 662–690.
11. *Kauffman L. H.* Formal knot theory. — Dover Publ., 2006.
12. *Manturov V. O., Ilyutko D. P.* Virtual knots: the state of the art. — Singapore: World Scientific, 2012.
13. *Morton H. R., Grishanov S.* Doubly periodic textile patterns // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18. — С. 1597–1622.
14. *Ohtsuki T.* Quantum invariants. — Singapore: World Scientific, 2002.

М. В. Зенкина

Московский педагогический государственный университет,
математический факультет, кафедра геометрии

E-mail: zenkina-m@mail.ru