Современная математика. Фундаментальные направления. Том 54 (2014). С. 3–138

УДК 517.51

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СЖАТИЕМ И РАСТЯЖЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИИ

© 2014 г. **Л. Е. РОССОВСКИЙ**

СОДЕРЖАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ № 1.1974.2014/К «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена линейным уравнениям с частными производными четного порядка, содержащим сжатия и растяжения аргументов неизвестной функции под знаком старших производных. В основном изучаются краевые задачи для таких уравнений в ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$. Исключение составляет глава 4, где уравнение рассматривается во всем пространстве.

В теории эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами пространственных переменных в старших производных в настоящее время существует несколько направлений. Одно из них восходит к известной работе Т. Карлемана [66]. В 1932 году им была рассмотрена задача о нахождении голоморфной в ограниченной области Ω функции Φ, удовлетворяющей на границе условию

$$\Phi(z) + a(z)\Phi(g(z)) = \phi(z) \quad (z \in \partial\Omega),$$

связывающему значение функции в точке $z \in \partial\Omega$ с ее значением в точке $g(z) \in \partial\Omega$, где g — диффеоморфизм $\partial\Omega$ периода 2. При сведении такой задачи на границу возникает сингулярное интегральное уравнение со сдвигом. Его естественным обобщением является уравнение

$$\sum_{g\in G} a_g(x, D)u(g^{-1}(x)) = f(x) \quad (x \in M) \tag{1}$$

на гладком замкнутом многообразии M, в котором суммирование ведется по конечному числу элементов g некоторой группы G диффеоморфизмов многообразия M, а $a_g(x, D)$ — заданные дифференциальные или псевдодифференциальные операторы на M. При этом сама группа G может быть как конечной, так и бесконечной. К изучению уравнений вида (1) сводятся нелокальные краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений в областях $\mathbb{R}^n$, отвечающие диффеоморфизмам границы в краевых условиях [3, 5].

Существенные результаты по теории Фредгольма уравнений (1) (как для конечных, так и для бесконечных групп диффеоморфизмов) получены в работах А. Б. Антоневича [3–5], А. Б. Антоневича и А. В. Лебедева [6, 59]. Были предложены различные эквивалентные конструкции символа оператора (1) (эллиптичность в этой ситуации определялась как обратимость символа и влекла за собой фредгольмовость уравнения в подходящих пространствах Соболева); в случае конечной группы G при помощи вспомогательного эллиптического псевдодифференциального оператора на многообразии была установлена формула индекса. Следует отметить, что результаты, полученные в случае конечной группы диффеоморфизмов, близки к известным результатам для эллиптических дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие (случай бесконечной группы диффеоморфизмов) теория индекса операторов вида (1) получила в работах А. Ю. Савина [41], А. Ю. Савина и Б. Ю. Стернина [42] (см. также монографию [80]).

Кроме упомянутых работ, эллиптические уравнения со сдвигами по пространственным переменным в этом направлении рассматривались также в [28, 83] и ряде других работ.

В теории упругости [22, 82, 88], теории многомерных диффузионных процессов [50, 88], а также в связи с нелокальными краевыми задачами типа Бицадзе—Самарского [8, 45, 48] возникает необходимость рассматривать эллиптические функционально-дифференциальные уравнения в другой ситуации, когда присутствующие в старших производных преобразования аргументов могут отображать некоторые точки границы внутрь области. Так, например, упругие модели конструкций, содержащих многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем, могут быть сведены к сильно эллиптическим системам дифференциально-разностных уравнений вида

$$-\Delta R_\Omega u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{2}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega). \tag{3}$$

Здесь

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(x_1 - 1, x_2),$$

Δ — оператор Лапласа, $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\Omega)$. Понятно, что для корректного определения действия оператора R необходимо задавать краевые условия не только на границе, но и в некоторой окрестности $\partial\Omega$. Поэтому вводится оператор

$$R_\Omega = P_\Omega R I_\Omega,$$

где I_Ω — оператор продолжения функций нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$, P_Ω — оператор сужения функций на Ω. Решения краевой задачи (2), (3) следует искать в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ (обобщенные решения). Это отвечает ее исходной вариационной формулировке (о связи краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с задачами на минимум функционалов с отклоняющимся аргументом см. также [14]).

Отметим, что при $\gamma_1\gamma_2 \neq 1$ задача (2), (3) эквивалентна нелокальной краевой задаче для уравнения Пуассона

$$-\Delta w(x) = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 \quad (0 < x_1 < 2),$$

$$w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2),\ w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) \quad (0 < x_2 < 1).$$

Интенсивное изучение нелокальных задач такого сорта, вызванное их приложениями в физике (теория плазмы), началось с известной работы [8].

Впервые влияние сдвигов в старших производных, отображающих точки границы в область, на разрешимость эллиптических краевых задач и гладкость их обобщенных решений исследовалось А. Л. Скубачевским [44–49, 87]. В указанных работах были разработаны основы общей теории краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений: получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться в области даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений в некоторых точках как на границе, так и внутри области. Наиболее полно эти результаты представлены в монографии [88].

Дальнейшим исследованиям краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений посвящены работы [25–27, 52, 53, 56, 57].

Характерной чертой рассматриваемых в настоящей работе задач тоже является наличие преобразований, отображающих границу внутрь области. Вместо сдвигов на постоянные векторы уравнение содержит сжатия и растяжения аргументов

$$x \mapsto q^{-1}x, \quad x \mapsto qx \quad (q > 1)$$

в старших производных. Примером может служить задача вида (2), (3), в которой оператор R задан формулой

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(q^{-1}x) + \gamma_2 u(qx),$$

а Ω — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Существенные различия с теорией дифференциально-разностных уравнений проявляются в случае, когда в область Ω, где рассматривается уравнение, попадает начало координат, являющееся точкой сгущения орбит

$$\{q^{-k}x : k = 0, 1, \ldots\}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

С этим связаны принципиальные трудности в исследовании уравнений со сжатиями и растяжениями. Так, сведение к эллиптическим системам дифференциальных уравнений, использовавшееся в теории дифференциально-разностных уравнений, имеет здесь весьма ограниченное приложение. Теперь значения, которые решение принимает в окрестности $\mathcal{O}(x_0)$ произвольной точки $0 \neq x_0 \in \overline{\Omega}$, связаны уравнением с его значениями в счетном семействе окрестностей $q^{-k}\mathcal{O}(x_0)$, стягивающихся к началу координат (рис. 1).

Кроме того, известный метод локализации [1, 70, 88], применяющийся обычно в теории краевых задач для исследования гладкости решений, доказательства априорных оценок, «замораживания» коэффициентов и т. д., в рассматриваемой ситуации не работает. Основу этого метода составляет разбиение единицы $\{\varphi_j(x)\}$, подчиненное подходящему покрытию $\overline{\Omega}$ открытыми множествами (например, такими, в которых коэффициенты мало меняются), при этом в теории функционально-дифференциальных уравнений на разбиение единицы накладывается дополнительное алгебраическое условие: умножение на функции $\varphi_j(x)$ должно коммутировать или «почти» коммутировать

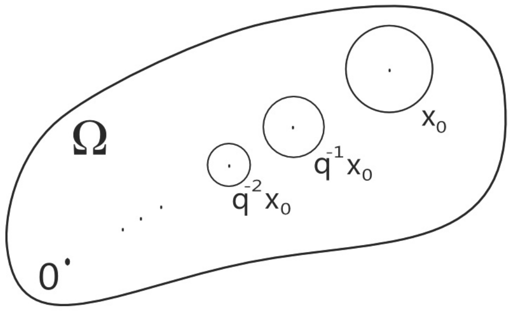

Рис. 1. Счетное семейство окрестностей

с действием функциональных операторов того или иного класса. Но из результатов работы [43] вытекает несуществование разбиения единицы такого, что

$$\varphi_j(qx) = \varphi_j(x),$$

если область содержит начало координат.

С другой стороны, уравнения со сжатиями и растяжениями обладают рядом новых свойств. Так, ядро краевой задачи для эллиптического уравнения со сжатием аргументов может быть бесконечномерным и содержать лишь негладкие функции. Гладкость решения краевой задачи во многих случаях равносильна его единственности. Имеет место и следующий интересный эффект: свойства краевой задачи в основном определяются значениями, которые коэффициенты при нелокальных членах (т. е. членах, содержащих преобразованные аргументы) принимают лишь в начале координат.

Исследование сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений (здесь им посвящена глава 2) имеет непосредственное отношение к известной проблеме Т. Като [75] о совпадении областей определения квадратных корней из m-аккретивного оператора и сопряженного к нему. Для абстрактных операторов этот вопрос изучался в [78, 79]. Дальнейшему исследованию проблемы Като в приложении к дифференциальным и функционально-дифференциальным операторам посвящены работы [58, 60, 61, 89]. Полученные в настоящей работе результаты позволяют выделить новый класс операторов, для которых гипотеза Като имеет положительное решение. Проблема Като тесно связана с описанием пространства начальных данных для соответствующих параболических уравнений [58, 89].

Подчеркнем, что по обыкновенным уравнениям со сжатием (растяжением) аргумента имеется довольно обширная библиография. Первые работы появились в литературе в 1940-х годах, еще до систематического изучения уравнений с отклоняющимся аргументом, начало которому было положено А. Д. Мышкисом [21].

Хорошо известное классическое *уравнение пантографа* выглядит следующим образом:

$$y'(t) = ay(t) + by(qt) \quad (t > 0), \tag{4}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$), $1 \neq q > 0$. Этот термин появился после статьи [81], в которой рассматривалась математическая модель динамики контактного провода электроснабжения подвижного состава (пантографом называют токоприемник на крыше трамвая или поезда). Однако, уравнение вида (4) можно найти еще в работе В. А. Амбарцумяна [2] 1944-го года, где описывалось поглощение света межзвездной материей. Через некоторое время уравнение пантографа возникло и в других приложениях, например, в биологии при моделировании процесса роста клеток [72]. При этом если в первом случае (техника) значимыми с физической точки зрения были значения $q < 1$, то во втором и третьем случаях (астрофизика, биология) уравнения выводились для $q > 1$.

Первой работой, в которой уравнение пантографа подверглось серьезному математическому исследованию, была статья Т. Като и Дж. Б. Маклеода [76], посвященная в основной своей части асимптотическому анализу решений при $t \to +\infty$. Позже в [73, 74] и ряде других работ изучалось *обобщенное уравнение пантографа*

$$y'(t) = ay(t) + by(qt) + cy'(qt) \quad (t > 0), \quad y(0) = y_0. \tag{5}$$

Были найдены различные формы представления решения, исследовались асимптотическое поведение и условия существования (почти) периодических решений. Показано, что разрешимость задачи (5) зависит от коэффициента c и класса гладкости решений. Так, при $c \neq 1, q^{-1}, q^{-2}, \ldots$ существует и единственно решение из $C^\infty[0, +\infty)$, но могут существовать (в зависимости от c) и другие C^1-решения, не принадлежащие $C^\infty[0, +\infty)$ (похожий эффект зависимости количества решений от выбора пространства решений установлен и для рассматриваемых в работе краевых задач, см. главу 1). На асимптотику же решений в основном влияют параметры $a, b \in \mathbb{C}$. Например, если $a \neq 0$ и $\operatorname{Re} a \leqslant 0$, то асимптотическое поведение решения определяется характеристическим уравнением

$$a + bq^\lambda = 0.$$

Стоит отметить, что теория уравнения (5) в корне отличается от хорошо известной теории [7] для дифференциально-разностного уравнения

$$y'(t) = ay(t) + by(t-\tau) + cy'(t-\tau) \quad (t > 0), \tag{6}$$

$$y(t) = y_0(t) \quad (-\tau < t \leqslant 0).$$

В то время как для (6) характерно нарушение гладкости решений в точках $\tau, 2\tau, \ldots$, решение (5) в случае единственности — обязательно бесконечно гладкое. Условие устойчивости для уравнения (6), состоящее в отсутствии в правой полуплоскости корней характеристического квазиполинома

$$z - a - e^{-\tau z}(b + cz),$$

существенно отличается от соответствующего условия для уравнения (5). Уравнение (6) порождает отображение в пространстве функций на отрезке $[-\tau, 0]$, в то время как (5) с точки зрения динамических систем ведет себя значительно сложней.

В настоящей работе впервые проводится подробное исследование краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов неизвестной функции под знаком старших производных. Рассматриваются вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в различных функциональных пространствах, гладкости обобщенных решений, спектральные свойства и др. Значительное внимание уделяется аспектам, связанным с определением эллиптичности и сильной эллиптичности функционально-дифференциального уравнения.

Построенная теория линейных краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями и растяжениями аргументов существовала в аналогичной общности лишь для дифференциально-разностных уравнений. При этом вопрос о спектральной устойчивости для функционально-дифференциальных операторов прежде вообще не рассматривался. Ранее известные результаты для уравнений со сжатиями и растяжениями аргумента относятся к одномерному случаю и связаны с разрешимостью начальных задач, асимптотическим поведением решений на бесконечности и т. д. в основном для уравнений первого порядка. В качестве приложения в настоящей работе рассмотрена задача об оптимальном успокоении системы управления для уравнения (5). Первые результаты по обобщенным решениям краевой задачи для уравнения со сжатием аргумента в одномерном случае,

$$-(y(t) + \alpha y(t/2))'' = f(t) \quad (0 < t < 1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

были получены в [18].

Опишем сейчас вкратце представленные в работе результаты. Глава 1 посвящена краевой задаче

$$-\Delta R u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{7}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{8}$$

для функционально-дифференциального уравнения с оператором R вида

$$Ru(x) = \sum_k a_k u(q^{-k}x), \tag{9}$$

где $q > 1$, $a_k \in \mathbb{C}$ — заданные числа, а суммирование ведется по конечному множеству целых индексов, причем среди них могут быть как неотрицательные, так и отрицательные. Таким образом, уравнение (7) может содержать как сжатия, так и растяжения аргументов искомой функции.

Уравнение (7) является наиболее простым по структуре в классе рассматриваемых в данной работе уравнений: оно содержит лишь один функциональный оператор под знаком старших производных и имеет непосредственный аналог в одномерном случае.

Через Ω обозначается произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условию $\overline{\Omega} \subset q\Omega$. Считаем $f \in L_2(\Omega)$.

Обобщенным решением краевой задачи (7), (8) называется всякая функция u из пространства Соболева $\mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая (после продолжения нулем в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$) интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla Ru(x)\overline{\nabla\phi(x)}\,dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\phi(x)}\,dx$$

при любой функции $\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Полученные в главе 1 результаты касаются вопросов существования и единственности обобщенного решения задачи (7), (8), гладкости обобщенных решений и их поведения при $q \to 1+0$. Кроме того, рассмотрено обобщение на случай переменных коэффициентов в операторе R, а также приложение к теории управления ($n = 1$).

Раздел 1.1 содержит вспомогательные результаты, связанные с действием функциональных операторов вида (9) в пространствах Соболева $H^s(\Omega)$ и $\mathring{H}^s(\Omega)$, $s = 0, 1, \ldots$.

В разделе 1.2 краевая задача (7), (8) рассматривается в предположении, что в уравнении (7) присутствуют лишь сжатия аргументов (все коэффициенты a_k, отвечающие отрицательным значениям индекса k в сумме (9), равны нулю). Показано (теоремы 1.1, 1.2), что в этом случае задача разрешима для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ при любых значениях коэффициентов a_k, одновременно не равных нулю, причем в зависимости от соотношения между коэффициентами реализуется одна из следующих двух ситуаций:

- для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ единственно, принадлежит $H^2(\Omega)$ и непрерывно по норме $H^2(\Omega)$ зависит от f;
- при $f = 0$ соответствующая однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений, не принадлежащих $H^2_{loc}(\Omega)$.

Таким образом, гладкость обобщенного решения краевой задачи для уравнения со сжатиями аргументов равносильна его единственности.

Упомянутое соотношение на коэффициенты уравнения формулируется в терминах корней «характеристического» полинома

$$r(\lambda) \equiv \sum_k a_k\lambda^k$$

на комплексной плоскости: первая ситуация имеет место, если $r(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| < q^{n/2-1}$; вторая ситуация имеет место, если внутрь круга $|\lambda| < q^{n/2-1}$ попадает хотя бы один корень $r(\lambda)$.

Важно отметить следующий эффект (теоремы 1.2, 1.3): одновременно с наличием бесконечного множества негладких обобщенных решений краевая задача (7), (8) может иметь единственное решение из $H^2(\Omega)$, непрерывно зависящее от правой части.

В разделе 1.3 рассматривается ситуация, когда уравнение (7) содержит растяжения аргументов (в сумме (9) могут быть слагаемые с неотрицательными индексами, но при этом обязательно присутствуют слагаемые с отрицательными индексами). В этом случае возможны три следующих варианта поведения краевой задачи (7), (8) (теорема 1.4):

- для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ задача имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, и это решение непрерывно по норме $H^1(\Omega)$ зависит от f;
- задача разрешима для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, но при $f = 0$ однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений;
- задача разрешима в том и только том случае, когда функция f ортогональна некоторому бесконечномерному подпространству в $L_2(\Omega)$, при этом однородная задача имеет единственное тривиальное решение.

Выбор варианта по-прежнему определяется расположением корней выражения $r(\lambda) \equiv \sum\limits_k a_k\lambda^k$ относительно окружности $|\lambda| = q^{n/2-1}$ на комплексной плоскости.

В отличие от раздела 1.2, гладкость обобщенного решения краевой задачи для уравнения с растяжениями аргументов может нарушаться даже в случае однозначной разрешимости задачи. Получены некоторые достаточные условия (теорема 1.5), при которых обобщенное решение принадлежит $H^2(\Omega)$. Эти условия включают условия на корни $r(\lambda)$, а также условия $L_2(\Omega)$-ортогональности, которым должна удовлетворять правая часть f.

При выполнении условий на $r(\lambda)$, равносильных однозначной разрешимости краевой задачи (7), (8) для всех значений параметра $q > 1$, близких к 1, показана сходимость в $H^1(\Omega)$ при $q \to 1 + 0$ семейства обобщенных решений краевых задач (7), (8) к решению предельной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f/r(1),$$

которое формально получается из уравнения (7), если положить $q = 1$.

В разделе 1.4 рассматривается краевая задача для более общего уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{10}$$

в предположении, что $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, а функциональный оператор R имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{k=0}^{l} b_k(x)u(q^{-k}x),$$

где $b_k(x)$ — комплекснозначные функции из $C^1(\overline{\Omega})$ и $l > 0$. На уравнение (10) накладывается условие

$$b_0(x)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n),$$

выражающее эллиптичность его «локальной» части в $\overline{\Omega}$.

Оказывается (теорема 1.7), что для фредгольмовой разрешимости краевой задачи (10), (8) достаточно дополнительно потребовать необращения в ноль выражения

$$r(x,\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{l} b_k(x)\lambda^k$$

в круге $|\lambda| \leqslant q^{n/2}$ и лишь при $x = 0$:

$$r(0,\lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2}).$$

Таким образом, значения коэффициентов $b_1(x), \dots, b_l(x)$ вне начала координат не влияют на фредгольмову разрешимость. Кроме того, показано, что всякое обобщенное решение краевой задачи (10), (8) в случае выполнения перечисленных условий принадлежит $H^2(\Omega)$.

Рассматриваемая в разделе 1.5 задача об оптимальном успокоении системы управления для обобщенного уравнения пантографа приводит к задаче минимизации функционала

$$J(y) = \int_0^{qT} \left(y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t)\right)^2 dt \longrightarrow \min$$

$$(a, b, c \in \mathbb{R},\ T > 0)$$

на множестве (вещественнозначных) функций $y(t)$, удовлетворяющих заданному начальному условию $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, а также условию $y(t) = 0$ $(t \geqslant T)$. В предположении

$$|a| \neq q^{-1/2},$$

означающем коэрцитивность функционала, устанавливаются существование и единственность решения данной вариационной задачи. Исследование вариационной задачи в значительной степени основано на ее сведении к краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения с растяжением и сжатием аргумента — одномерного аналога уравнения, изученного в предыдущих разделах главы. При $b = c = 0$ получена явная формула для оптимальной траектории $y(t)$.

Результаты главы опубликованы в [29, 32, 39].

Глава 2 посвящена задаче Дирихле

$$A_R u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{11}$$

$$D_\nu^\mu u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\mu = 0, \ldots, m-1) \tag{12}$$

для сильно эллиптического уравнения (11), в котором операторы $R_{\alpha\beta}$ определены формулой

$$R_{\alpha\beta} v(x) = \sum_j a_{\alpha\beta j}(x) v(q^{-j}x). \tag{13}$$

Здесь по-прежнему $q > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, индекс j в (13) пробегает конечное подмножество целых чисел, $a_{\alpha\beta j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $f \in L_2(\Omega)$ — заданные комплекснозначные функции. Перед действием операторов $R_{\alpha\beta}$ функции продолжаются нулем в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$.

Уравнение (11) называется сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$, если существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ такие, что неравенство

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{14}$$

выполняется для всех функций $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

В разделах 2.1, 2.2 решается проблема коэрцитивности, состоящая в нахождении алгебраических условий, обеспечивающих сильную эллиптичность уравнения (11). В разделе 2.1 это делается в случае постоянных коэффициентов $a_{\alpha\beta j}$ в операторах $R_{\alpha\beta}$, а в разделе 2.2 — для переменных коэффициентов.

Символом уравнения (11) с постоянными коэффициентами назовем выражение

$$a_R(\lambda, \xi) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_j a_{\alpha\beta j} \lambda^j \xi^{\alpha+\beta} \quad (\lambda \in \mathbb{C},\ \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Показано (теорема 2.1), что условие

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda, \xi) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1) \tag{15}$$

является достаточным для сильной эллиптичности уравнения (11) с постоянными коэффициентами в случае произвольной ограниченной области Ω. Если же дополнительно потребовать $0 \in \Omega$, то условие (15) будет и необходимым (теорема 2.2).

Для доказательства используются комбинация преобразований Фурье и Гельфанда, а также техника, развитая для дифференциально-разностных уравнений (сведение к сильно эллиптическим системам дифференциальных уравнений).

Методы и результаты раздела 2.1 на случай переменных коэффициентов непосредственно не переносятся. Необходимым условием сильной эллиптичности уравнения (11) с переменными коэффициентами, полученным в разделе 2.2 (теорема 2.3) в предположении $\overline{\Omega} \subset q\Omega$, является положительная определенность функционального оператора

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}(R_{\alpha\beta} + R^*_{\alpha\beta}) : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$$

с параметром ξ при $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$. В частности,

$$a(x, \xi) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \operatorname{Re} a_{\alpha\beta 0}(x) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad \left(x \in \overline{\Omega}, \xi \in S^{n-1}\right).$$

Для получения достаточных условий сильной эллиптичности в разделе 2.2 накладывается ограничение на количество слагаемых в операторах $R_{\alpha\beta}$ в старшей части уравнения (11):

$$R_{\alpha\beta} v(x) = a_{\alpha\beta 0}(x) v(x) + a_{\alpha\beta 1}(x) v(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x) v(qx) \quad (|\alpha| = |\beta| = m).$$

Кроме того, усиливается предположение относительно области Ω: считаем, что $\overline{\Omega} \subset \varkappa\Omega$ для всех $\varkappa > 1$. В рассматриваемой ситуации символом уравнения (11) назовем выражение

$$\rho(x, \xi) = \frac{b(x, \xi)}{\sqrt{a(x, \xi) a(q^{-1}x, \xi)}},$$

где

$$b(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(a_{\alpha\beta 1}(x) + q^{-n}\bar{a}_{\alpha\beta,-1}(q^{-1}x)\right)\xi^{\alpha+\beta}/2.$$

Из необходимого условия сильной эллиптичности, полученного в теореме 2.3, вытекает, что

$$q^n|\rho(x,\xi)|^2 < 1 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega},$$
$$q^n|\rho(0,\xi)|^2 < 1/4 \quad \text{при} \quad |\xi| = 1.$$

Выполнение любого из следующих двух различных условий (теоремы 2.5, 2.6) является достаточным для сильной эллиптичности уравнения (11) (с учетом наложенных выше на $R_{\alpha\beta}$ и Ω ограничений):

- $q^n|\rho(x,\xi)|^2 < 1/2$ при $x \in \overline{\Omega}$ и $q^n|\rho(x,\xi)|^2 < 1/4$ при $x \in q^{-1}\overline{\Omega}$ ($|\xi| = 1$);
- существует гладкая в $\overline{\Omega} \times \{|\xi| = 1\}$ функция $\delta(x,\xi)$ со значениями в интервале $(0,1)$ такая, что $q^n\,|\rho(x,\xi)|^2 < \delta(q^{-1}x,\xi)\,(1-\delta(x,\xi))$ при $x \in \overline{\Omega}$, $|\xi| = 1$.

Для получения этих достаточных условий строится специальное разложение функционально-дифференциального оператора с применением теории псевдодифференциальных операторов.

Стоит отметить, что все приведенные в разделе 2.2 необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (11) превращаются в критерий (15) (или, что то же самое, условие $q^n|\rho(0,\xi)|^2 < 1/4$), как только коэффициенты становятся постоянными. В то же время приведены примеры сильно эллиптических уравнений (11) с переменными коэффициентами, у которых величина $q^n|\rho(x,\xi)|^2$ сколь угодно близка к 1 в точках x, расположенных сколь угодно близко к началу координат.

Раздел 2.3 посвящен разрешимости и спектральным свойствам краевой задачи (11), (12) в случае, когда уравнение (11) сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$.

Под обобщенным решением задачи (11), (12) понимается всякая функция $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} (R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)}$$

при любой функции $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$. Вводится неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (11), (12), когда f пробегает все пространство $L_2(\Omega)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$.

Стандартными методами функционального анализа выводятся фредгольмовость оператора $\mathcal{A}_R$, дискретность и секториальная структура его спектра (теорема 2.7). Доказывается (следствие 2.3), что оператор $\mathcal{A}_R$, отвечающий сильно эллиптическому уравнению (11), является m-секториальным, ассоциированным с полуторалинейной формой

$$\mathfrak{a}_R[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} (R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^m(\Omega)).$$

В заключение раздела 2.3 исследуется вопрос о поведении обобщенных решений задачи (11), (12) при $q \to 1+0$. При некоторых дополнительных условиях, обеспечивающих однозначную разрешимость задачи для всех значений параметра $q > 1$, близких к 1, доказана сходимость в $H^m(\Omega)$ семейства обобщенных решений к решению задачи Дирихле для «предельного» сильно эллиптического дифференциального уравнения (лемма 2.11, теорема 2.10).

В разделе 2.4 исследуется гладкость обобщенных решений задачи (11), (12). Результаты здесь удается получить для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения второго порядка вида

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{16}$$

$$\overline{\Omega} \subset q\Omega, \quad a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}, \quad Rv(x) = \sum_k b_k v(q^{-k}x), \quad b_k \in \mathbb{C}.$$

Доказана (теорема 2.12) гладкость обобщенных решений $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ в подобластях

$$\Omega_p = q^{1-p}\left(\Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega}\right) \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

$u|_{\Omega_p} \in H^2(\Omega_p)$. Показано (теорема 2.11), что гладкость обобщенного решения сохраняется во всей области Ω лишь тогда, когда сильно эллиптическое уравнение (16) не содержит растяжений аргументов. Обнаружен эффект появления особенностей в начале координат у вторых производных решения: приведен пример сильно эллиптического уравнения (16) с растяжением аргументов, для которого обобщенное решение u принадлежит $H^2(\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon)$ для любой ε-окрестности B_ε начала координат, но не принадлежит $H^2(\Omega)$.

Методы, развитые в разделах 2.1–2.3 главы, применяются в разделе 2.5 для исследования дифференциально-разностного уравнения

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{17}$$

$$R_{\alpha\beta} v(x) = \sum_{j=-J}^{J} a_{\alpha\beta j} v(x_1 + j\varepsilon, x_2, \ldots, x_n) \quad (\varepsilon > 0,\ a_{\alpha\beta j} \in \mathbb{C}),$$

в цилиндрической области $\Omega = (0,1) \times G$ (G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$). Понятия сильной эллиптичности и обобщенного решения задачи Дирихле (17), (12) формулируются аналогично уравнению (16).

Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения (причем гораздо более общего вида, нежели (17)) к настоящему времени достаточно хорошо изучены [88]. Новым же здесь является то, что уравнение (17) рассматривается для всех (в том числе сколь угодно малых) значений параметра сдвига ε. Находятся условия на коэффициенты $a_{\alpha\beta j}$, обеспечивающие сильную эллиптичность уравнения (17) для всех $\varepsilon > 0$ (теорема 2.13). Эти условия (одновременно необходимые и достаточные) формулируются в виде положительности действительной части скалярного символа дифференциально-разностного оператора, который отличается от обычного и имеет вид

$$a_R(\eta, \xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_{|j|\leqslant J} a_{\alpha\beta j} \exp(ij\eta) \xi^{\alpha+\beta} \quad (\eta \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^n),$$

где i — мнимая единица. Переменная $\xi \in \mathbb{R}^n$, отвечающая дифференцированию, и переменная $\eta \in \mathbb{R}$, отвечающая сдвигу, изменяются независимо (обычным же символом будет $a_R(\varepsilon\xi_1, \xi)$).

Исследуется поведение обобщенных решений задачи (17), (12) при $\varepsilon \to 0$. При дополнительном условии, обеспечивающем однозначную разрешимость краевой задачи для всех достаточно малых значений параметра ε, доказана сходимость в $H^m(\Omega)$ семейства обобщенных решений к решению задачи Дирихле для «предельного» сильно эллиптического дифференциального уравнения (следствие 2.4).

Результаты главы опубликованы в [30, 31, 33, 35, 37–39, 86].

В главе 3 рассматривается общая краевая задача

$$Au \equiv \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_{j\alpha}(x) D^\alpha (u(q^{-j}x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{18}$$

$$T_j(x, D)u(x) = g_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m;\ x \in \partial\Omega). \tag{19}$$

Вновь считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию $\overline{\Omega} \subset q\Omega$; коэффициенты уравнения — гладкие в $\overline{\Omega}$ функции; $T_j(x, D)$ — дифференциальные операторы порядка m_j с гладкими на $\partial\Omega$ коэффициентами.

Задаче (18), (19) отвечает ограниченный оператор в соболевских пространствах

$$\mathbf{L} = [A, T_1, \ldots, T_m] : H^{s+2m}(\Omega) \to$$

$$\mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega) = H^s(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{s+2m-m_j-1/2}(\partial\Omega), \quad s \geqslant 0,\ s + 2m - \max m_j \geqslant 1.$$

Символом оператора A будем называть выражение

$$a(x,\xi,\lambda)=\sum_{j=0}^{l}\sum_{|\alpha|=2m}a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha\lambda^j\quad(x\in\Omega,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\in\mathbb{C}).$$

Целью главы 3 является доказательство фредгольмовости оператора $\mathbf{L}$. Это делается в предположении эллиптичности соответствующей «локальной» задачи

$$\mathbf{L}_0=[A_0,T_1,\ldots,T_m],\quad A_0=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_{0\alpha}(x)D^\alpha$$

(в ней собраны члены, не содержащие преобразований аргументов). Опираясь на существование регуляризатора

$$\mathbf{P}_0:\mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega)\to H^{s+2m}(\Omega)$$

«локальной» задачи и при условии

$$a(0,\xi,\lambda)\neq 0\quad(|\lambda|\leqslant q^{n/2-2m},\ 0\neq\xi\in\mathbb{R}^n)\tag{20}$$

на символ оператора A, мы строим регуляризатор $\mathbf{P}$ исходной задачи в форме $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0\mathbf{B}$, где

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}B&0\\0&E\end{bmatrix}:\mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega)\to\mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega),$$

$$Bv(x)=v(x)+\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x,D)\left((\phi v)(q^{-k}x)\right),\tag{21}$$

$B_k(x,D)$ — некоторые псевдодифференциальные операторы нулевого порядка, $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ — подходящая срезающая функция, E — единичная $m\times m$-матрица.

Основной результат (теорема 3.6) содержится в разделе 3.3. В разделах 3.1 и 3.2 получены вспомогательные результаты, связанные с построением операторов $B_k(x,D)$ и обоснованием сходимости ряда (21) по норме операторов, действующих в $H^s(\Omega)$.

Достаточное условие (20) свидетельствует о том, что на фредгольмовость оператора $\mathbf{L}$ (в предположении эллиптичности его «локальной» части $\mathbf{L}_0$) влияют значения коэффициентов $a_{j\alpha}(x)$ $(j=1,\ldots,l)$ при членах с преобразованными аргументами лишь в начале координат.

Результаты главы опубликованы в [32].

В главе 4 устанавливается разрешимость уравнения

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=2m}a_{k\alpha}D^\alpha\left(u(q^{-k}x)\right)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}^n)\tag{22}$$

(с однородной старшей частью и постоянными коэффициентами) в шкале весовых пространств В. А. Кондратьева $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ $(s,\beta\in\mathbb{R})$. Пространство $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ при целом неотрицательном s вводится как пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ функций по норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2(\beta-s+|\alpha|)}|D^\alpha u(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

При помощи преобразования Меллина данную норму можно распространить на случай произвольного вещественного s. Предполагается, что

$$\beta-s\neq n/2+p,\quad\beta-s-2m\neq-n/2-p\quad(p=0,1,\ldots).$$

Эти ограничения связаны с используемой в данной главе техникой работы с весовыми пространствами, а именно требованием изоморфности преобразования Фурье

$$F:H^s_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^\beta_s(\mathbb{R}^n),\quad F:H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^\beta_{s+2m}(\mathbb{R}^n).$$

При этом уравнению (22) отвечает ограниченный оператор

$$A:H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)\to H^s_\beta(\mathbb{R}^n).$$

Основной результат главы (теорема 4.1) приведен в разделе 4.4. Показано, что условие

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=2m} a_{k\alpha}\xi^\alpha\lambda^k \neq 0 \quad \left(0\neq\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\lambda|\leqslant q^{\beta-s+n/2-2m}\right) \tag{23}$$

гарантирует существование и единственность решения $u\in H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n)$ уравнения (22) при любой правой части $f\in H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$.

Метод получения основного результата близок к рассуждениям предыдущей главы: условие (23), означающее в том числе эллиптичность «локальной» части

$$A_0(D)=\sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha}D^\alpha$$

оператора A (достаточно положить $\lambda=0$) и, соответственно, существование ограниченного обратного оператора

$$A_0^{-1}: H_\beta^s(\mathbb{R}^n)\to H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n),$$

дает возможность построить ограниченный обратный оператор

$$A^{-1}: H_\beta^s(\mathbb{R}^n)\to H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n)$$

в форме $A^{-1}=A_0^{-1}\Psi$, где

$$\Psi v(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\Psi_k(D)\left(v(q^{-k}x)\right),$$

а $\Psi_k(D)$ суть операторы свертки с некоторыми однородными функциями. Предварительным построениям посвящены разделы 4.1–4.3.

Преимущество использования весовых пространств состоит в том, что в условие (23) включены параметры s и β. Уменьшая β и (или) увеличивая s, мы ослабляем условие на символ оператора: уменьшается круг, где символ не должен обращаться в ноль. За счет выбора β и s этот круг может быть сделан сколь угодно малым. В то же время, не обращаясь в ноль при $\lambda=0$, символ будет отличным от нуля и в некотором круге, так что эллиптичность «локальной» части уравнения (22) гарантирует однозначную разрешимость уравнения при всех функциях $f\in H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$.

Результаты главы опубликованы в [9, 34, 84].

В главе 5 рассматривается задача Неймана

$$-\operatorname{div}(R_\Omega\nabla u(x))=f(x)\quad (x\in\Omega), \tag{24}$$

$$R_\Omega\nabla u(x)\cdot\nu(x)=0\quad (x\in\partial\Omega), \tag{25}$$

где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x\in\partial\Omega$. Оператор R определен формулой

$$Rv(x)=av(x)+bv(q^{-1}x)+q^n\bar{b}v(qx),$$

а его коэффициенты удовлетворяют условию

$$a>2q^{n/2}|b|,$$

означающему положительную определенность R в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Использованием индекса Ω у R мы подчеркиваем, что производные u_{x_i} продолжены нулем в $\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega}$ перед применением оператора R.

Относительно области делаются следующие предположения:

$$\overline{\Omega}\subset q\Omega, \tag{26}$$

$$H^1(\Omega)\ \text{\textit{компактно вложено в}}\ L_2(\Omega). \tag{27}$$

Свойство (27) связано с регулярностью $\partial\Omega$ и выполнено, например, для всякой ограниченной области, удовлетворяющей хорошо известному условию конуса.

При заданной функции $f\in L_2(\Omega)$ интегральное тождество

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]\equiv\int\limits_\Omega R_\Omega\nabla u\cdot\overline{\nabla v}\,dx=(f,v)_{L_2(\Omega)}\quad (v\in H^1(\Omega)) \tag{28}$$

определяет обобщенное решение $u\in H^1(\Omega)$ задачи (24), (25).

В рассматриваемой ситуации задача (24), (25) порождает неотрицательный самосопряженный оператор с компактной резольвентой в пространстве $L_2(\Omega)$. Она имеет дискретный спектр. Собственные значения λ_m, $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \to +\infty$, и (обобщенные) собственные функции $\varphi_m \in H^1(\Omega)$ ($\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$), образующие ортонормированный базис $L_2(\Omega)$, удовлетворяют тождеству

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[\varphi_m, v] = \lambda_m(\varphi_m, v) \quad (v \in H^1(\Omega)).$$

В разделе 5.2 при дополнительном, более сильном условии на коэффициенты

$$a > q^{n/2}(q + q^{-1})|b| \tag{29}$$

доказывается, что всякое обобщенное решение задачи (24), (25) принадлежит $H^2_{loc}(\Omega)$. Соответственно, все собственные функции φ_m задачи (24), (25) также принадлежат $H^2_{loc}(\Omega)$ и удовлетворяют неравенству

$$\|\varphi_m\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C(\lambda_m + 1)$$

с постоянной $C > 0$, зависящей лишь от области. Условие (29) всюду далее в главе 5 считается выполненным.

Основные результаты главы 5 содержатся в разделе 5.3. Здесь изучается вопрос о поведении собственных значений λ_m при малых внутренних возмущениях области. Наряду с задачей (24), (25) в области Ω, при неизменных параметрах оператора R рассматривается аналогичная задача в возмущенной области $\Omega' \subset \Omega$, удовлетворяющей условиям, аналогичным (26) и (27). Форма $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u, v]$ и обобщенные решения возмущенной задачи вводятся аналогично (28) с заменой Ω на Ω'. Собственные значения возмущенной задачи обозначаются λ'_m. В качестве характеристики близости Ω и Ω' используется мера $|\Omega \setminus \Omega'|$.

На исходную область Ω накладывается дополнительное условие

$$H^1(\Omega) \ \textit{непрерывно вложено в} \ L_p(\Omega) \ \textit{для некоторого} \ p > 2 \tag{30}$$

(оно также выполняется, если область удовлетворяет условию конуса).

Доказано (теорема 5.2) существование постоянных $\delta_m > 0$ и $C_m > 0$, зависящих лишь от Ω и параметров оператора R, таких, что неравенство

$$\lambda'_m \leqslant \lambda_m + C_m|\Omega \setminus \Omega'|^{1-2/p}$$

выполнено для соответствующих собственных значений λ_m и λ'_m, как только $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_m$.

В основе рассуждений лежит известная вариационная формула для собственных значений неотрицательного самосопряженного оператора с компактной резольвентой. Ее использование строится на оценке выражения $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u, u]/\|u\|^2_{L_2(\Omega')}$ на конечномерном линейном подпространстве в $H^1(\Omega)$, натянутом на первые m собственных функций φ_i формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ в Ω. В случае $\Omega' \subset \Omega$ это возможно сделать, просто взяв сужения на Ω' функций из $H^1(\Omega)$. Полученный результат существенно использует внутреннюю гладкость собственных функций.

Для получения противоположного неравенства приходится накладывать дополнительные ограничения как на исходную область, так и на класс возмущений. В случае, когда исходная область Ω — звездная относительно шара, содержащего начала координат, доказано (следствие 5.2) существование постоянных $0 < \varepsilon_m < 1$ и $C'_m > 0$ таких, что для любой области Ω', звездной относительно шара, содержащего начало координат, диаметра не меньше $D > 0$, и удовлетворяющей условию

$$(1 - \varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_m,$$

выполняется неравенство

$$\lambda'_m \geqslant \lambda_m - C'_m\varepsilon^{1-2/p}.$$

При этом величины $C'_m > 0$, $0 < \varepsilon_m < 1$ не зависят от Ω', а определяются лишь (сколь угодно малым, но фиксированным) параметром $D > 0$, исходной областью Ω и параметрами оператора R. Заметим, что условие (30) (как для Ω, так и для Ω') гарантируется условием звездности.

В разделе 5.4 вопрос спектральной устойчивости при малых внутренних возмущениях области рассматривается для более общего функционально-дифференциального оператора. Задаче Неймана отвечает непрерывная на $H^1(\Omega)$ полуторалинейная форма

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij\Omega} u_{x_i}) \bar{v}_{x_j} dx \quad (u, v \in H^1(\Omega)), \tag{31}$$

$$R_{ij} v(x) = \sum_{k} a_{ijk} v(q^{-k} x)$$

(суммы конечны). Форма $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]$ предполагается эрмитовой:

$$R_{ji} = R_{ij}^*,$$

или, что то же самое,

$$r_{ji}(\omega) = \overline{r_{ij}(\omega)} \quad (|\omega| = q^{n/2}), \quad \text{где} \quad r_{ij} = \sum_k a_{ijk} \omega^k.$$

Выполнение же условия

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\omega) \eta_i \bar{\eta}_j > 0 \quad \left(0 \neq \eta \in \mathbb{C}^n,\ |\omega| = q^{n/2}\right)$$

гарантирует коэрцитивность формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ (следствие 5.3):

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] \geqslant \gamma \| |\nabla u| \|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in H^1(\Omega)). \tag{32}$$

(Из результатов раздела 2.1 главы 2 видно, что выполнение оценки (32) на более узком классе $u \in C_0^\infty(\Omega)$ эквивалентно более слабому условию

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\omega) \xi_i \xi_j > 0 \quad \left(0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\omega| = q^{n/2}\right),$$

т. е. вещественная часть эрмитовой матрицы должна быть положительно определена.)

В этом случае при тех же предположениях относительно области вновь можно говорить о собственных значениях λ_m задачи Неймана и использовать для них вариационный принцип. Однако, внутреннюю гладкость обобщенных собственных функций в этой более общей по сравнению с предыдущими разделами главы ситуации доказать не удается. Получен ослабленный вариант теоремы о полунепрерывности собственных значений, не использующий внутреннюю гладкость собственных функций (теорема 5.4): для любого $\varepsilon > 0$ и для каждого натурального m существует $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\lambda'_m \leqslant \lambda_m + \varepsilon$$

выполняется для соответствующих собственных значений в Ω и любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$ такой, что $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta$.

В то же время отметим, что все утверждения разделов 5.2 и 5.3 непосредственно переносятся на случай, когда операторы R_{ij} пропорциональны одному и тому же оператору R,

$$R_{ij} = a_{ij} R,$$

т. е. форма $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]$ имеет вид

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (R_\Omega u_{x_i}) \bar{v}_{x_j} dx,$$

где

$$Rv(x) = \sum_k a_k v(q^{-k} x) \quad (a_k \in \mathbb{C}),$$

матрица $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ *положительно определенная эрмитова*

и

$$r(\omega) \equiv \sum_k a_k \omega^k \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{k_0} \left(a_k \omega^k + q^{kn} \bar{a}_k \omega^{-k} \right) \neq 0 \quad (q^{n/2} \leqslant |\omega| \leqslant q^{1+n/2}).$$

Последнее условие, более сильное, нежели требование коэрцитивности формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$, накладывается для того, чтобы гарантировать внутреннюю гладкость собственных функций.

Результаты главы опубликованы в [36].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору А. Л. Скубачевскому за полезные обсуждения изложенных здесь результатов, а также профессору Т. А. Суслиной за ценные советы, способствовавшие улучшению качества данной работы.

Глава 1

МОДЕЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

1.1. Класс функциональных операторов

Всюду в работе Ω обозначает ограниченную область в $\mathbb{R}^n$. Через $H^s(\Omega)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными до порядка s включительно, и $\mathring{H}^s(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^s(\Omega)$. Пространство $H^s(\Omega)$ — гильбертово со скалярным произведением

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int\limits_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1}\ldots(-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

Известно, что в $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u,v)'_{\mathring{H}^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=s} \int\limits_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx.$$

Пространство $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$, равных нулю вне Ω.

Зафиксируем число $q>1$ и рассмотрим ограниченный оператор P, действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$Pu(x) = u(q^{-1}x) = u\left(\frac{x_1}{q},\ldots,\frac{x_n}{q}\right).$$

Обратный и сопряженный операторы имеют вид

$$P^{-1}u(x) = u(qx), \quad P^*u(x) = q^n u(qx).$$

Отсюда следует, что оператор $q^{-n/2}P$ унитарен, а сам оператор P — нормальный. При этом спектр $\sigma(P)$ оператора P, очевидно, лежит на окружности $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = q^{n/2}\}$. Покажем, что $\sigma(P)$ занимает всю окружность.

Лемма 1.1. *Имеет место соотношение* $\sigma(P) = \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| = q^{n/2}\}$.

Доказательство. Убедимся, что не существует ограниченного обратного оператора $(P-\lambda I)^{-1}$, если $|\lambda| = q^{n/2}$. Достаточно построить последовательность u_k $(k=1,2,\ldots)$ такую, что последовательность $(P-\lambda I)u_k$ ограничена, в то время как $\|u_k\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}\to\infty$ при $k\to\infty$.

Положим

$$u_k(x) = \begin{cases} \lambda^{j-1} & (q^{-j} < |x| < q^{-j+1}),\ j=1,\ldots,k, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Тогда

$$\|u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^k q^{n(j-1)}\mathrm{mes}\left(q^{-j} < |x| < q^{-j+1}\right) = \\ = k\,\mathrm{mes}\left(q^{-1} < |x| < 1\right) \to \infty,\ k\to\infty.$$

При этом

$$(P-\lambda I)u_k(x)=\begin{cases} -\lambda^k & (q^{-k}<|x|<q^{-k+1}),\\ 1 & (1<|x|<q),\\ 0 & \text{для остальных } x,\end{cases}$$

и

$$\|(P-\lambda I)u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}=2\,\mathrm{mes}\,(1<|x|<q)\,.$$

Лемма доказана. □

В работе мы будем в основном иметь дело с функциональными операторами $R=R(P)$ вида

$$Ru=\sum_{j=-J}^{J}a_jP^ju=\sum_{j=-J}^{J}a_ju(q^{-j}x_1,\ldots,q^{-j}x_n),\quad a_j\in\mathbb{C}, \tag{1.1}$$

рассматривая их в $\mathbb{R}^n$, а также в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Во втором случае, как правило, действует соглашение: вначале продолжаем функцию нулем в $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, затем действуем оператором (1.1), а от того, что получилось в результате применения (1.1), берем сужение на Ω. Позднее нам придется рассматривать суммы с переменными коэффициентами $a_j=a_j(x)$ — заданными в Ω функциями, а также суммы, состоящие из бесконечного числа слагаемых.

Сопряженным к оператору R в $L_2(\mathbb{R}^n)$ (и в $L_2(\Omega)$) будет оператор

$$R^*=\sum_{j=-J}^{J}\overline{a}_jP^{j*}=\sum_{j=-J}^{J}\overline{a}_jq^{nj}P^{-j}=\sum_{j=-J}^{J}\overline{a}_{-j}q^{-nj}P^j.$$

Нетрудно видеть, что преобразование Фурье $u(x)\mapsto\tilde{u}(\xi)$ превращает P в P^*. Поэтому оператор (1.1) в образах Фурье заменяется оператором

$$\widetilde{R}=\sum_{j=-J}^{J}a_jP^{j*}=\sum_{j=-J}^{J}a_{-j}q^{-nj}P^j$$

того же вида.

Для проверки алгебраических свойств (обратимость, положительность и т. д.) таких операторов $R:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ удобно пользоваться преобразованием Гельфанда. Оператору R, заданному формулой (1.1), ставится в соответствие функция (символ оператора)

$$r(\lambda)=\sum_{j=-J}^{J}a_j\lambda^j,\quad \lambda\in\sigma(P), \tag{1.2}$$

на спектре оператора P. По теореме Гельфанда—Наймарка [40, теорема 11.19] это соответствие однозначно продолжается до сохраняющего инволюцию изометрического изоморфизма между коммутативной B^*-алгеброй $\mathfrak{A}_R$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$, порожденной операторами P и P^* (это минимальная замкнутая подалгебра банаховой алгебры $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$ ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$, содержащая операторы P и P^*; операторы вида (1.1) всюду плотны в $\mathfrak{A}_R$), и алгеброй $C(\sigma(P))$ всех непрерывных комплекснозначных функций на спектре оператора P. Отсюда и из того факта, что спектр операторов в $\mathfrak{A}_R$ совпадает с их спектром в $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$ [40, теорема 11.29], следует, что спектр оператора $R:L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$ совпадает с множеством значений его символа $r(\lambda)$.

Символами операторов R^* и $\widetilde{R}$ будут выражения $\overline{r(\lambda)}$ и $r(\overline{\lambda})$, соответственно.

Элементарно вычисляется резольвента $(P-\lambda_0I)^{-1}$ оператора P. Пусть, например, $|\lambda_0|>q^{n/2}$. Тогда при малом $\varepsilon>0$ функция $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ аналитична в круге $\{|\lambda|<q^{n/2}+\varepsilon\}$ и, следовательно, на окружности $\{|\lambda|=q^{n/2}\}$ представляется равномерно сходящимся рядом Тейлора:

$$(\lambda-\lambda_0)^{-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_0^{-(k+1)}\lambda^k.$$

Используя описанное выше соответствие между операторами и их символами, получаем представление резольвенты в виде сходящегося по операторной норме ряда

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} P^k.$$

Таким образом,

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} u(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} u(q^{-k}x) \quad (|\lambda_0| > q^{n/2}). \tag{1.3}$$

Если же $|\lambda_0| < q^{n/2}$, то функция $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$ аналитична на множестве $\{|\lambda| > q^{n/2} - \varepsilon\}$, и на окружности $\{|\lambda| = q^{n/2}\}$ представляется равномерно сходящимся рядом Лорана:

$$(\lambda - \lambda_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{k-1} \lambda^{-k}.$$

Значит,

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{k-1} P^{-k},$$

т. е.

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{k-1} u(q^k x) \quad (|\lambda_0| < q^{n/2}) \tag{1.4}$$

(ряд вновь сходится по операторной норме).

Норма оператора

$$(P - \lambda_0 I)^{-1} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

равна, очевидно,

$$\max_{|\lambda| = q^{n/2}} |\lambda - \lambda_0|^{-1} = \Big| |\lambda_0| - q^{n/2} \Big|^{-1}.$$

Получим на основе формул (1.3), (1.4) некоторые свойства оператора $P - \lambda_0 I$ в пространствах Соболева в ограниченной области Ω. На область Ω будут накладываться различные дополнительные условия. Основным условием этой главы будет следующее условие геометрического характера:

$$\overline{\Omega} \subset q\Omega. \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что область Ω обязательно содержит начало координат. С другой стороны, всякая выпуклая область, содержащая начало координат, удовлетворяет условию (1.5), в то время как обратное, конечно, неверно. Кроме того, это условие напоминает условие звездности относительно начала координат (область Ω называется звездной относительно точки $x \in \Omega$, если для любой точки $y \in \Omega$ отрезок $[x, y]$ целиком содержится в Ω), но на самом деле значительно слабее: звездность Ω относительно начала координат равносильна тому, что $\Omega \subset \varkappa\Omega$ для всех $\varkappa > 1$ — в условии же (1.5) соотношение выполняется лишь при фиксированном $q > 1$. Поэтому и с регулярностью границы $\partial\Omega$ области Ω условие (1.5) никак не связано, в отличие от условия звездности. Примеры области, удовлетворяющей условию (1.5), изображены на рис. 1.1, 1.2.

Лемма 1.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (1.5). *Тогда*

а). *если $|\lambda_0| > q^{n/2}$, то оператор $P - \lambda_0 I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H^s(\Omega)$ на $H^s(\Omega)$ для всех $s = 0, 1, \dots$;*

б). *если $|\lambda_0| < q^{n/2-s}$ для некоторого $s = 0, 1, \dots$, то оператор $P - \lambda_0 I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{H}^s(\Omega)$ на $\mathring{H}^s(q\Omega)$.*

Доказательство.

а). Очевидно, оператор

$$P - \lambda_0 I : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$$

ограничен. При помощи почленного дифференцирования ряда в формуле (1.3) убеждаемся в том, что оператор $(P - \lambda_0 I)^{-1}$ также ограничен в $H^s(\mathbb{R}^n)$ для любого $s = 0, 1, \dots$. Таким образом,

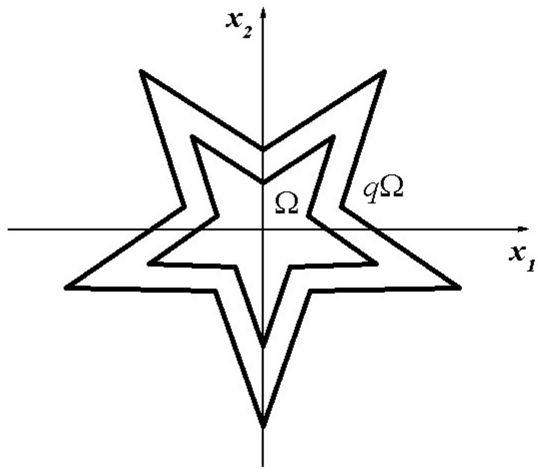

Рис. 1.1. «Звездная» область

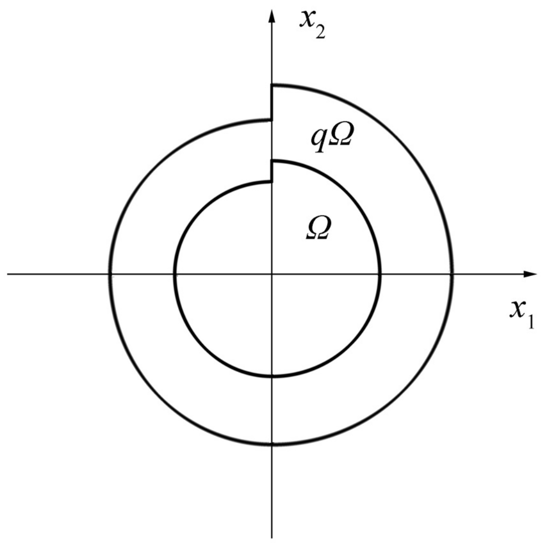

Рис. 1.2. «Звездная» область

$P-\lambda_0 I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H^s(\mathbb{R}^n)$ на себя. Возьмем $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ и положим

$$v=(P-\lambda_0 I)u \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

В силу условия (1.5) на область Ω сужение $v|_\Omega$ однозначно определяется сужением $u|_\Omega$, так что оператор $P-\lambda_0 I$ корректно определен и из $H^s(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$. Из формулы (1.3) следует обратное: сужение прообраза $u|_\Omega$ однозначно определяется сужением $v|_\Omega$. Другими словами, ограниченный оператор из формулы (1.3) является обратным к оператору $P-\lambda_0 I : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$.

б). Аналогично предыдущему пункту, почленное дифференцирование ряда (1.4) s раз в случае

$$|\lambda_0| < q^{n/2-s}$$

показывает, что $P-\lambda_0 I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает $H^s(\mathbb{R}^n)$ на себя и для таких λ_0. Более того, из формулы (1.4) видно, что условия $u(x)=0$ $(x \notin \Omega)$ и $v(x)=0$ $(x \notin q\Omega)$ равносильны. Лемма доказана. □

В случае $|\lambda_0| > q^{n/2}$ норма оператора $(P-\lambda_0 I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ не превосходит нормы оператора $(P-\lambda_0 I)^{-1} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, которая равна

$$(|\lambda_0| - q^{n/2})^{-1}.$$

Действительно,

$$\sup\left\{\|(P-\lambda_0 I)^{-1}u\|_{L_2(\Omega)} : u\in L_2(\Omega),\ \|u\|_{L_2(\Omega)}=1\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\|(P-\lambda_0 I)^{-1}u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} : u\in L_2(\mathbb{R}^n), \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=1, u(x)=0\,(x\notin\Omega)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\|(P-\lambda_0 I)^{-1}u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} : u\in L_2(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}=1\right\}.$$

Следствие 1.1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (1.5). *Если*

$$|\omega|>q^{s-n/2}$$

для некоторого $s=0,1,\ldots$, то оператор $P^{-1}-\omega I$ непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathring{H}^s(\Omega)$ на себя, и обратный оператор имеет вид

$$(P^{-1}-\omega I)^{-1}u(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\omega^{-(k+1)}u(q^k x). \tag{1.6}$$

Доказательство. Оператор $P^{-1}-\omega I$ можно представить в виде

$$P^{-1}-\omega I=(I-\omega P)P^{-1}=-\omega(P-\omega^{-1}I)P^{-1},$$

причем

$$|\omega^{-1}|<q^{n/2-s}.$$

Остается заметить, что оператор P^{-1} является изоморфизмом $\mathring{H}^s(\Omega)$ на $\mathring{H}^s(q^{-1}\Omega)$ (здесь и далее в аналогичной ситуации допускается вольность в употреблении термина «изоморфизм»; имеется в виду линейный гомеоморфизм, поскольку речь не идет о сохранении скалярного произведения), а оператор $(P-\omega^{-1}I)$ по лемме 1.2 (б) (с заменой Ω на $q^{-1}\Omega$) непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{H}^s(q^{-1}\Omega)$ на $\mathring{H}^s(\Omega)$. При этом, опираясь на (1.4), получим выражение для обратного оператора:

$$(P^{-1}-\omega I)^{-1}=-\omega^{-1}P(P-\omega^{-1}I)^{-1}=-\omega^{-1}P\sum_{k=1}^{\infty}\omega^{-(k-1)}P^{-k}=-\sum_{k=0}^{\infty}\omega^{-(k+1)}P^{-k}.$$

□

Понятно, что в лемме 1.2 (б) и следствии 1.1 при $s=0$ речь идет о пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(q\Omega)$.

В случае $|\omega|>q^{-n/2}$ норма оператора $(P^{-1}-\omega I)^{-1}: L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)$ не превосходит, очевидно, нормы оператора $(P^{-1}-\omega I)^{-1}: L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$, которая равна

$$\max_{|\lambda|=q^{n/2}}|\lambda^{-1}-\omega|^{-1}=(|\omega|-q^{-n/2})^{-1}.$$

Лемма 1.3. *Пусть $|\lambda_0|=q^{n/2}$, $u\in L_2(\Omega)$, $v=(P-\lambda_0 I)u\in L_2(\Omega)$. Тогда функцию $u(x)$ можно представить в виде сходящегося в $L_2(\Omega)$ ряда*

$$u(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_0^{-(k+1)}v(q^{-k}x)\quad(x\in\Omega). \tag{1.7}$$

Кроме того, из принадлежности функции v пространству $H^s(\Omega)$ следует, что функция u также принадлежит $H^s(\Omega)$, $s=1,2,\ldots$.

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда (1.7). Подставляя вместо $v(x)$ выражение $u(q^{-1}x)-\lambda_0 u(x)$, получим

$$-\sum_{k=0}^{M-1}\lambda_0^{-(k+1)}v(q^{-k}x)=u(x)-\lambda_0^{-M}u(q^{-M}x)\quad(x\in\Omega).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\|\lambda_0^{-M} P^M u\|^2_{L_2(\Omega)} = |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_{\Omega} |u(q^{-M}x)|^2\, dx =$$

$$= q^{nM} |\lambda_0|^{-2M} \int\limits_{q^{-M}\Omega} |u(y)|^2\, dy = \|u\|^2_{L_2(q^{-M}\Omega)} \to 0, \quad M \to \infty.$$

Второе утверждение леммы следует из (1.7) путем дифференцирования ряда. □

Отметим, что ограниченность области Ω является существенным условием в лемме 1.3. Кроме того, ряд в правой части (1.7) не обязан сходиться для всех $v \in L_2(\Omega)$, если $|\lambda_0| = q^{n/2}$.

1.2. Разрешимость модельной краевой задачи. Уравнение со сжатиями

В ограниченной области Ω, удовлетворяющей условию (1.5), рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение

$$-\Delta Ru(x) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{1.8}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.9}$$

где функциональный оператор R определен по формуле

$$Ru(x) = \sum_{k=0}^{l} a_k u(q^{-k}x), \quad a_k \in \mathbb{C},\, k = 0, \dots, l,$$

а $f \in L_2(\Omega)$ — произвольная комплексная функция. Без ограничения общности считаем $a_l \neq 0$.

Обобщенным решением краевой задачи (1.8), (1.9) назовем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega} \nabla Ru(x) \overline{\nabla\phi(x)}\, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\overline{\phi(x)}\, dx$$

при любой функции $\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Замечание 1.1. В силу условия (1.5) преобразования аргументов неизвестной функции в уравнении (1.8) отображают область Ω в себя. В этом случае нет необходимости доопределять искомую функцию в окрестности области Ω, как это делается для, скажем, дифференциально-разностных уравнений (см. [88]), а достаточно задать лишь ее граничные значения. Поэтому (1.8), (1.9) выглядит как задача Дирихле для возмущенного нелокальными членами уравнения Пуассона. Принципиальным, однако, является тот факт, что, как и в случае дифференциально-разностных уравнений [88], функциональный оператор R, отвечающий преобразованиям аргументов искомой функции, применяется к u внутри лапласиана — такой вид уравнения связан с приложениями к исследованию вариационных задач для квадратичных функционалов с отклоняющимися аргументами. Поэтому естественно рассматривать обобщенные решения задачи (1.8), (1.9) из класса $\mathring{H}^1(\Omega)$ без предположения принадлежности пространству $H^2(\Omega)$. Более того, ниже будет показано, что задача (1.8), (1.9) может иметь обобщенные решения, не принадлежащие даже $H^2_{loc}(\Omega)$. Нарушение гладкости обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений было вызвано тем, что преобразования аргументов отображают некоторые точки области Ω в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ (см. [88]). Здесь же причина появления негладких решений иная и связана с наличием в области начала координат — неподвижной точки для преобразования сжатия.

Замечание 1.2. В этом и последующих двух разделах мы предполагаем, что область Ω удовлетворяет основному геометрическому условию (1.5). Чтобы сделать отдельные утверждения более содержательными, предположим также, что граница области $\partial\Omega$ является достаточно регулярной. Так, для теорем, связанных с гладкостью решений (теоремы 1.1, 1.3, 1.5, 1.7), удобно считать, что всякое обобщенное решение из $\mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Ω с правой частью из $H^s(\Omega)$ (s — неотрицательное целое число) принадлежит $H^{s+2}(\Omega)$. Так будет, конечно, в случае $\partial\Omega \in C^{s+2}$, но последнее условие может быть ослаблено: хорошо известно, например, что для плоской области Ω, гладкость границы которой нарушается в конечном числе угловых точек, всякое обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью из $L_2(\Omega)$ принадлежит $H^2(\Omega)$, если все углы лежат в промежутке $(0,\pi]$.

В то же время отсутствие регулярности $\partial\Omega$ не оказывает принципиального влияния на суть результатов настоящей главы. Это будет хорошо видно из доказательства теорем 1.1–1.7, так что читатель без труда скорректирует все утверждения в случае негладкой границы.

С уравнением (1.8) связывается полином

$$r(\lambda) = \sum_{k=0}^{l} a_k \lambda^k$$

комплексного переменного λ. Этот полином естественно назвать символом уравнения (1.8). Определяющим для разрешимости краевой задачи (1.8), (1.9) будет расположение корней $r(\lambda)$ относительно окружности $\left\{|\lambda| = q^{n/2-1}\right\}$ на комплексной плоскости.

Теорема 1.1. *Пусть $r(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| < q^{n/2-1}$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ краевой задачи* (1.8), (1.9). *Если $f \in H^s(\Omega)$, то $u \in H^{s+2}(\Omega)$.*

Доказательство. В случае уравнения с постоянными коэффициентами (1.8) рассуждения основаны на возможности разложения функционального оператора R в произведение двучленных операторов вида $P - \lambda_j I$:

$$R = R(P) = a_l(P - \lambda_1 I)\dots(P - \lambda_l I),$$

где $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ — корни $r(\lambda)$. По условию теоремы корни удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1} \quad (j = 1,\dots,l).$$

Будем считать вначале, что $R = P - \lambda_0 I$ и $|\lambda_0| \geqslant q^{n/2-1}$. Пусть $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — обобщенное решение задачи (1.8), (1.9). Обозначим

$$v = (P - \lambda_0 I)u \in H^1(\Omega).$$

Тогда

$$v_{x_i} = (q^{-1}P - \lambda_0 I)u_{x_i} = q^{-1}(P - q\lambda_0 I)u_{x_i},$$

причем

$$|q\lambda_0| \geqslant q^{n/2}.$$

В силу лемм 1.2 (a), 1.3 имеем

$$u_{x_i} = -q\sum_{k=0}^{\infty}(q\lambda_0)^{-(k+1)} v_{x_i}(q^{-k}x)$$

(ряд сходится в $L_2(\Omega)$). Из определения обобщенного решения следует, что

$$(\nabla v, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (f,\phi)_{L_2(\Omega)}$$

для любой функции $\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Функция

$$P^{-k}\phi(x) = \phi(q^k x)$$

также принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$. Подставим ее в интегральное тождество вместо ϕ:

$$\Big(\nabla v, \nabla(P^{-k}\phi)\Big)_{L_2^n(\Omega)} = (f, P^{-k}\phi)_{L_2(\Omega)}.$$

Дифференцируя $P^{-k}\phi$ и перенося оператор P^{-k} в левые части скалярных произведений, получим

$$(P^k\nabla v, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (q^{-k}P^k f, \phi)_{L_2(\Omega)}.$$

Просуммировав по всем $k = 0, 1, \dots$ с коэффициентами $-q(q\lambda_0)^{-(k+1)}$, будем иметь

$$(\nabla u, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (q^2(P - q^2\lambda_0 I)^{-1} f, \phi)_{L_2(\Omega)}$$

с ограниченным оператором $(P - q^2\lambda_0 I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$.

Итак, в случае $R = P - \lambda_0 I$, $|\lambda_0| \geqslant q^{n/2-1}$, обобщенное решение задачи (1.8), (1.9) является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = q^2(P - q^2\lambda_0 I)^{-1} f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{1.10}$$

Аналогично убеждаемся в обратном: всякое обобщенное решение задачи (1.10), (1.9) есть обобщенное решение задачи (1.8), (1.9).

Повторяя процедуру для одного двучленного оператора, после l итераций в случае

$$R = a_l(P - \lambda_1 I)\dots(P - \lambda_l I), \quad |\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1} \quad (j = 1, \dots, l),$$

приходим к эквивалентной (1.8), (1.9) задаче Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = g(x) \quad (x \in \Omega) \tag{1.11}$$

с правой частью

$$g(x) = a_l^{-1} q^{2l} (P - q^2\lambda_1 I)^{-1} \dots (P - q^2\lambda_l I)^{-1} f(x)$$

из $L_2(\Omega)$. Задача (1.11), (1.9) имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ для любой функции $g \in L_2(\Omega)$. С учетом замечания 1.2 это решение принадлежит $H^{s+2}(\Omega)$, если $g \in H^s(\Omega)$. При этом

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c\|g\|_{H^s(\Omega)},$$

где положительная постоянная c не зависит от g. Остается заметить, что все операторы

$$(P - q^2\lambda_j I)^{-1}$$

ограничены не только в $L_2(\Omega)$, но и в $H^s(\Omega)$ по лемме 1.2, что дает оценку

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c_1\|f\|_{H^s(\Omega)}$$

с не зависящей от f положительной постоянной c_1. □

Замечание 1.3. Фактически решение задачи (1.8), (1.9) свелось к тому, что в уравнении (1.8) мы «продифференцировали» функциональный оператор $R(P)$, а затем, применив ограниченный обратный оператор $\big(R(q^{-2}P)\big)^{-1}$ к обеим частям уравнения, пришли к уравнению Пуассона. Для этого пришлось, однако, производить соответствующие выкладки в интегральном тождестве, поскольку гладкость обобщенного решения заранее не была известна.

Понятно, что требование $a_0 \neq 0$ является необходимым для выполнения условия теоремы 1.1. Кроме того, ключевое условие отсутствия малых по абсолютной величине корней полинома

$$r(\lambda) = a_0\left(1 + \frac{a_1}{a_0}\lambda + \dots + \frac{a_l}{a_0}\lambda^l\right)$$

в определенной степени свидетельствует о том, что коэффициенты при членах с преобразованными аргументами (нелокальных членах) достаточно малы по сравнению с коэффициентом a_0 локальной части оператора. Это хорошо иллюстрируется следующим примером.

Пример 1.1. Рассмотрим уравнение

$$-\Delta\left(u(x) + a_1 u(q^{-1}x)\right) = f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{1.12}$$

Символ уравнения (1.12) имеет вид

$$r(\lambda) = 1 + a_1\lambda$$

и обращается в ноль при $\lambda = \lambda_1 = -1/a_1$. Условие $|\lambda_1| \geqslant q^{n/2-1}$ означает, что $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. По теореме 1.1 краевая задача (1.12), (1.9) имеет единственное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, если $|a_1| \leqslant q^{1-n/2}$. При этом обязательно $u \in H^2(\Omega)$.

Пример 1.2. Краевая задача

$$-\Delta(2u(x_1, x_2) - u(x_1/2, x_2/2)) = x_1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1), \tag{1.13}$$

$$u(x) = 0 \quad (|x| = 1)$$

удовлетворяет условию теоремы 1.1 и имеет единственное обобщенное решение u. Кроме того, $u \in C^\infty(|x| \leqslant 1)$. Выпишем это решение в явном виде. Из доказательства теоремы 1.1 видно, что уравнение (1.13) равносильно уравнению Пуассона $\Delta u = g$, в котором правая часть g вычисляется по формуле

$$g(x) = 4(P - 8I)^{-1} f(x), \quad f(x_1, x_2) = x_1.$$

Пользуясь формулой (1.3), находим g:

$$g(x_1, x_2) = -\frac{x_1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} = -\frac{8}{15} x_1.$$

Решая полученную задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге методом разделения переменных, находим

$$u(x_1, x_2) = -\frac{1}{15}(x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_1).$$

В следующей теореме устанавливается разрешимость задачи (1.8), (1.9), когда условие теоремы 1.1 нарушается.

Теорема 1.2. *Предположим, что хотя бы один из корней полинома $r(\lambda)$ попадает внутрь круга $|\lambda| < q^{n/2-1}$. Тогда задача* (1.8), (1.9) *имеет обобщенные решения для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, причем при $f = 0$ существует бесконечно много линейно независимых обобщенных решений соответствующей однородной задачи, не принадлежащих $H^2_{loc}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — корни полинома $r(\lambda)$. Будем считать, что

$$|\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1} \ (j = 1, \ldots, k_0), \quad |\lambda_j| < q^{n/2-1} \ (j = k_0 + 1, \ldots, l),$$

причем $k_0 < l$. Будем пользоваться представлением оператора R в виде произведения

$$R = R_2 R_1$$

операторов R_1, R_2, отвечающих этим двум группам корней,

$$R_1 = R_1(P) = (P - \lambda_{k_0+1} I) \ldots (P - \lambda_l I),$$
$$R_2 = R_2(P) = a_l (P - \lambda_1 I) \ldots (P - \lambda_{k_0} I).$$

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta R_2 v_2(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.14}$$
$$v_2|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.15}$$

Для нее выполнено условие теоремы 1.1 — это следует из соответствующего расположения нулей символа $r_2(\lambda)$ оператора R_2. Следовательно, задача (1.14), (1.15) имеет единственное обобщенное решение $v_2 \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Далее возьмем произвольную функцию $v_1 \in \mathring{H}^1(q^{l-k_0}\Omega \setminus \overline{\Omega})$ и определим функцию $v(x)$ в области $q^{l-k_0}\Omega$ следующим образом:

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x), & x \in q^{l-k_0}\Omega \setminus \overline{\Omega}, \\ v_2(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Очевидно, $v \in \mathring{H}^1(q^{l-k_0}\Omega)$.

Для двучленных операторов $P - \lambda_j I$, входящих в состав оператора R_1, выполнено условие части (б) леммы 1.2 с $s = 1$. Применяя эту лемму $l - k_0$ раз, убеждаемся в существовании ограниченного обратного оператора

$$R_1^{-1} : \mathring{H}^1(q^{l-k_0}\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega).$$

Положим теперь

$$u = R_1^{-1} v \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Мы утверждаем, что u есть обобщенное решение задачи (1.8), (1.9). Действительно, для любой функции $\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\nabla Ru, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (\nabla R_2 R_1 u, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (\nabla R_2 v, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (\nabla R_2 v_2, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что функция $R_2 v$ на Ω совпадает с функцией $R_2 v_2$, а последнее выражает тот факт, что функция v_2 есть обобщенное решение задачи (1.14), (1.15).

Кроме того, из формулы (1.4), участвующей в задании обратного оператора R_1^{-1}, следует, что

$$u(x) = v_1(q^{l-k_0} x) \quad \left(x \in \Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega}\right).$$

Поэтому если $v_1 \notin H^2(q^{l-k_0}\Omega \setminus q^{l-k_0-1}\overline{\Omega})$, то и $u \notin H^2(\Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega})$, т. е. по произвольной и никак не связанной с f негладкой функции v_1 строится обобщенное решение краевой задачи (1.8), (1.9), гладкость которого нарушается в $\Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega}$. Аналогичным образом на основании формулы (1.4) нетрудно убедиться, что при соответствующем выборе v_1 будут получаться обобщенные решения u, гладкость которых нарушается во всех подобластях вида

$$q^{-p}\Omega \setminus q^{-p-1}\overline{\Omega}, \quad p = 0, 1, \ldots .$$

□

Теорема 1.3. *Пусть $r(\lambda)$ не обращается в ноль при $|\lambda| \leqslant q^{n/2-2}$. Тогда для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (1.8), (1.9), *принадлежащее пространству $H^2(\Omega)$. Если $f \in H^s(\Omega)$, то это решение u принадлежит $H^{s+2}(\Omega)$ и имеет место оценка*

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{H^s(\Omega)}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от f.

Доказательство. Если обобщенное решение u задачи (1.8), (1.9) принадлежит $H^2(\Omega)$, то оно является решением почти всюду в Ω уравнения (1.8), которое можно теперь переписать в виде

$$-\sum_{k=0}^{l} a_k q^{-2k}(\Delta u)(q^{-k}x) = f(x),$$

или, короче,

$$-R(q^{-2}P)\Delta u = f \tag{1.16}$$

(см. замечание 1.3). По условию теоремы все корни λ_j полинома $r(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$|\lambda_j| > q^{n/2-2}.$$

Корнями полинома $r(q^{-2}\lambda)$ будут тогда числа $q^2\lambda_j$, причем

$$|q^2\lambda_j| > q^{n/2}.$$

В силу леммы 1.2 оператор

$$R(q^{-2}P) = a_l q^{-2l}(P - q^2\lambda_1 I)\ldots(P - q^2\lambda_l I)$$

есть изоморфизм пространства $L_2(\Omega)$. Поэтому уравнение (1.16) равносильно уравнению (1.11).

Итак, в условиях теоремы всякое гладкое решение задачи (1.8), (1.9) является решением задачи (1.11), (1.9). Очевидно, верно и обратное. Из свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ограниченности оператора $\big(R(q^{-2}P)\big)^{-1}$ в $H^s(\Omega)$ при любом $s = 0, 1, \ldots$ следует утверждение теоремы. □

Теорема 1.3 в сочетании с теоремой 1.2 означает, что при соответствующем расположении корней полинома $r(\lambda)$ одновременно с наличием бесконечного множества негладких обобщенных решений существует единственное гладкое решение задачи (1.8), (1.9), непрерывно зависящее от правой части.

Пример 1.3. Выясним, при каких значениях параметра $q > 1$ всякое обобщенное решение краевой задачи

$$-\Delta\left(u(x) + 2qu(x/q) - q^2u(x/q^2)\right) = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\partial\Omega \in C^\infty$, удовлетворяющей условию 1.5, принадлежит пространству $H^2(\Omega)$, если $f \in L_2(\Omega)$.

В соответствии с теоремами 1.1, 1.2 так происходит тогда и только тогда, когда внутрь круга радиуса $q^{3/2-1} = q^{1/2}$ не попадают корни $\lambda_{1,2} = q^{-1}(1 \pm \sqrt{2})$ квадратного трехчлена $1 + 2q\lambda - q^2\lambda^2$. Приходим к неравенству

$$q < (\sqrt{2} - 1)^{2/3},$$

противоречащему условию $q > 1$. Следовательно, краевая задача обязательно имеет негладкие решения.

Предположим теперь, что $r(\lambda) \neq 0$ в замкнутом круге $|\lambda| \leqslant 1$. Если $n \geqslant 3$, то, очевидно, существует число $q_0 > 1$ такое, что $r(\lambda) \neq 0$ и при $|\lambda| < q_0^{n/2-1}$. По теореме 1.1 задача (1.8), (1.9) однозначно разрешима для всех значений параметра сжатия $q \in (1, q_0]$ при фиксированных коэффициентах a_k в операторе R. В случае же $n = 2$ теорема 1.1 гарантирует однозначную разрешимость вообще для всех $q > 1$, если только $r(\lambda) \neq 0$ при $|\lambda| < 1$. Обозначим соответствующее решение u_q. В такой ситуации естественно поставить вопрос о поведении семейства решений u_q при $q \to 1$. Значению $q = 1$ отвечает (формально) задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f/r(1),$$

где

$$r(1) = \sum_{k=0}^{l} a_k \neq 0.$$

Ее решение обозначим u_1. Имеем $u_q \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $q \in [1, q_0]$.

Лемма 1.4. *Пусть* $r(\lambda) \neq 0$ *при* $|\lambda| \leqslant 1$. *Тогда* $\|u_q - u_1\|_{H^2(\Omega)} \to 0$, $q \to 1$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $a_l = 1$. При доказательстве теоремы 1.1 было установлено, что u_q, $q \in (1, q_0]$, есть решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u_q(x) = f_q(x)$$

с правой частью

$$f_q(x) = \left(R(q^{-2}P_q)\right)^{-1} f(x) = q^{2l}(P_q - q^2\lambda_l I)^{-1} \ldots (P_q - q^2\lambda_1 I)^{-1} f(x),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ — корни $r(\lambda)$ (чтобы подчеркнуть зависимость от параметра сжатия, мы добавили индекс q к оператору P). Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\|f_q - f/r(1)\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad q \to 1.$$

Начнем со случая двучленного оператора

$$R(P_q) = P_q - \lambda_0 I.$$

Для λ_0 в условиях леммы имеем $|\lambda_0| \geqslant q_0^{n/2-1}$, если $n \geqslant 3$, и $|\lambda_0| > 1$, если $n = 2$. Получается $r(\lambda) = \lambda - \lambda_0$ и $r(1) = 1 - \lambda_0$. Можем записать

$$f_q(x) = q^2(P_q - q^2\lambda_0 I)^{-1} f(x) = -q^2 \sum_{k=0}^{\infty} (q^2\lambda_0)^{-(k+1)} f(q^{-k}x),$$

принимая во внимание формулу (1.3). При подстановке $q = 1$ правая часть дает

$$-f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)} = -\frac{\lambda_0^{-1}}{1 - \lambda_0^{-1}} f(x) = \frac{f(x)}{1 - \lambda_0} = \frac{f(x)}{r(1)},$$

так что

$$f_q(x) - f(x)/r(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_0^{-(k+1)} f(x) - q^2(q^2\lambda_0)^{-(k+1)} f(q^{-k}x)\right) =$$

$$= f(x) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_0^{-(k+1)}(1 - q^{-2k}) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(q^2(q^2\lambda_0)^{-(k+1)} \left(f(x) - f(q^{-k}x)\right)\right) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

Осталось убедиться, что

$$\|\Sigma_1\|_{L_2(\Omega)} \to 0, \quad \|\Sigma_2\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \quad \text{при} \quad q \to 1.$$

С одной стороны, $L_2(\Omega)$-норма общего члена каждого из этих рядов мажорируется убывающей геометрической прогрессией со знаменателем, не зависящим от q. Так, например, для Σ_2 имеем

$$q^2(q^2|\lambda_0|)^{-(k+1)} \|f - P_q^k f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|P_q^k f\|_{L_2(\Omega)}}{q^{2k}|\lambda_0|^{k+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1 + q^{nk/2})\|f\|_{L_2(\Omega)}}{q^{2k} q_0^{(n/2-1)(k+1)}} \leqslant \frac{2q^{(n/2-1)k}\|f\|_{L_2(\Omega)}}{q_0^{(n/2-1)k}} \leqslant 2\|f\|_{L_2(\Omega)} \left(\frac{1 + q_0}{2q_0}\right)^{(n/2-1)k}$$

при $q \in [1, (1+q_0)/2]$, если $n \geqslant 3$. Если же $n = 2$, то

$$q^2(q^2|\lambda_0|)^{-(k+1)}\|f - P_q f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{(1+q^k)\|f\|_{L_2(\Omega)}}{q^{2k}|\lambda_0|^{k+1}} \leqslant \frac{2\|f\|_{L_2(\Omega)}}{|\lambda_0|^{k+1}}$$

для всех $q \geqslant 1$. Поэтому k-е остатки рядов стремятся к нулю при $k \to \infty$ равномерно по q из рассматриваемого диапазона.

С другой стороны, общий член каждого ряда стремится к нулю при $q \to 1$ по норме $L_2(\Omega)$. Для Σ_1 это совсем очевидно, а для Σ_2 следует из непрерывности $f(x)$ в среднем квадратичном.

Случай многочленного оператора рассматривается по индукции. Обозначим

$$f_{q,j}(x) = q^{2j}(P_q - q^2\lambda_j I)^{-1} \dots (P_q - q^2\lambda_1 I)^{-1} f(x),$$
$$r_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)\dots(\lambda - \lambda_1), \quad j = 1, \dots, l.$$

Предположим, что имеет место сходимость

$$f_{q,j} \to f/r_j(1)$$

(для $j = 1$ она уже показана). Можем записать

$$f_{q,j+1}(x) = q^2(P_q - q^2\lambda_{j+1}I)^{-1} f_{q,j}(x) =$$
$$= q^2(P_q - q^2\lambda_{j+1}I)^{-1}\left(f_{q,j} - f/r_j(1)\right)(x) + q^2(P_q - q^2\lambda_{j+1}I)^{-1} f(x)/r_j(1).$$

Второе слагаемое по уже доказанному стремится в $L_2(\Omega)$ при $q \to 1$ к функции

$$\frac{f(x)}{(1-\lambda_{j+1})r_j(1)} = \frac{f(x)}{r_{j+1}(1)}.$$

Из результатов раздела 1.1 получается оценка для первого слагаемого:

$$\left\|q^2(P_q - q^2\lambda_{j+1}I)^{-1}\left(f_{q,j} - f/r_j(1)\right)\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \frac{q^2\left\|f_{q,j} - f/r_j(1)\right\|_{L_2(\Omega)}}{q^2|\lambda_{j+1}| - q^{n/2}}.$$

Поскольку $|\lambda_{j+1}| > 1$, правая часть стремится к нулю при $q \to 1$, обеспечивая

$$f_{q,j+1} \to f/r_{j+1}(1).$$

Лемма доказана. □

1.3. Разрешимость модельной краевой задачи. Уравнение со сжатиями и растяжениями

В случае, когда преобразования аргументов отображают некоторые точки области Ω в $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, краевые условия для функционально-дифференциального уравнения по аналогии с дифференциально-разностными уравнениями задаются в окрестности области Ω.

Рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta R u = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.17}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \notin \Omega), \tag{1.18}$$

где теперь функциональный оператор действует по формуле

$$Ru(x) = \sum_{k=-l_2}^{l_1} a_k u(q^{-k}x), \quad a_k \in \mathbb{C},$$

причем $l_2 > 0$, $-l_2 \leqslant l_1$, $a_{-l_2} \neq 0$ и $a_{l_1} \neq 0$. Символом уравнения (1.17) будет выражение

$$r(\lambda) = \sum_{k=-l_2}^{l_1} a_k \lambda^k.$$

Как и прежде, под обобщенным решением краевой задачи понимаем функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ (продолженную нулем в $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(\nabla R u, \nabla \phi)_{L_2^n(\Omega)} = (f, \phi)_{L_2(\Omega)} \quad (\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Установим связь между расположением нулей выражения $r(\lambda)$ и разрешимостью задачи (1.17), (1.18). Для этого представим $r(\lambda)$ в виде

$$r(\lambda) = \lambda^{-l_2} \sum_{k=0}^{l_1+l_2} a_{k-l_2}\lambda^k = a_{l_1}\lambda^{-l_2}(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{l_1+l_2}),$$

где $\lambda_1,\ldots,\lambda_{l_1+l_2}$ — корни полинома $\lambda^{l_2}r(\lambda)$. Без ограничения общности можно считать, что

$$|\lambda_j| \geqslant q^{n/2-1}\ (j=1,\ldots,k_0), \quad |\lambda_j| < q^{n/2-1}\ (j=k_0+1,\ldots,l_1+l_2),$$

где $0 \leqslant k_0 \leqslant l_1+l_2$. Введем отвечающие этим группам корней операторы

$$R_1 = (P-\lambda_{k_0+1}I)\ldots(P-\lambda_{l_1+l_2}I)P^{-l_2},\ R_2 = a_{l_1}(P-\lambda_1 I)\ldots(P-\lambda_{k_0}I),$$

имея $R=R_2R_1$. Оператор P^{-l_2} есть изоморфизм $\mathring{H}^1(\Omega)$ на $\mathring{H}^1(q^{-l_2}\Omega)$, а оператор

$$(P-\lambda_{k_0+1}I)\ldots(P-\lambda_{l_1+l_2}I)$$

— изоморфизм $\mathring{H}^1(q^{-l_2}\Omega)$ на $\mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ (по лемме 1.2 (б)), поэтому оператор R_1 непрерывно и взаимно однозначно отображает $\mathring{H}^1(\Omega)$ на $\mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$.

Теорема 1.4.

а). *Если $k_0 = l_1$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение задачи* (1.17), (1.18).

б). *Если $k_0 < l_1$, то для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ существуют обобщенные решения задачи* (1.17), (1.18); *при $f=0$ однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых решений.*

в). *Если $k_0 > l_1$, то обобщенное решение задачи* (1.17), (1.18) *существует в том и только том случае, когда функция f ортогональна некоторому бесконечномерному подпространству в $L_2(\Omega)$; при $f=0$ однородная задача имеет единственное тривиальное решение.*

Доказательство. Существование ограниченного обратного оператора

$$R_1^{-1} : \mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$$

позволяет сделать замену $R_1u = v$. Интегральное тождество для функции v (из пространства $\mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$!) примет вид

$$(\nabla R_2 v, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (f,\phi)_{L_2(\Omega)}.$$

Последнее, учитывая расположение корней $\lambda_1,\ldots,\lambda_{k_0}$ (см. доказательство теоремы 1.1), равносильно тождеству

$$(\nabla v, \nabla\phi)_{L_2^n(\Omega)} = (g,\phi)_{L_2(\Omega)} \quad (\phi \in \mathring{H}^1(\Omega)) \tag{1.19}$$

с функцией $g = \left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} f \in L_2(\Omega)$.

Рассмотрим задачу нахождения функции $v \in \mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ из интегрального тождества (1.19) при различных значениях k_0.

а). В случае $k_0 = l_1$ тождество (1.19) означает, что функция $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta v = g$$

в области Ω. Такое решение существует и единственно для любой правой части и, кроме того, принадлежит $H^2(\Omega)$. При этом

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_1\|g\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_2\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, задача (1.17), (1.18) имеет единственное обобщенное решение $u = R_1^{-1}v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, непрерывно зависящее от правой части:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Отметим, что непрерывная зависимость гарантируется лишь по норме H^1, поскольку оператор R_1^{-1} может быть и неограниченным относительно H^2-нормы.

б). В случае $k_0 < l_1$, повторяя в точности рассуждения из доказательства теоремы 1.2, получаем утверждение второго пункта теоремы.

в). Пусть $k_0 > l_1$. Функция $v(x)$ в интегральном тождестве (1.19) обращается в ноль на множестве $\Omega \setminus q^{l_1-k_0}\overline{\Omega}$. Следовательно, $g(x) = 0$ $(x \in \Omega \setminus q^{l_1-k_0}\overline{\Omega})$ и равенство

$$(\nabla v, \nabla \phi)_{L_2^n(q^{l_1-k_0}\Omega)} = (g, \phi)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)} \tag{1.20}$$

должно выполняться уже для любой функции $\phi \in H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$.

Покажем, что для существования функции $v \in \mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$, удовлетворяющей интегральному тождеству (1.20) (при любой $\phi \in H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$), необходимо и достаточно, чтобы правая часть g была ортогональна в скалярном произведении в $L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)$ бесконечномерному подпространству, состоящему из гармонических функций, принадлежащих $H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$. Действительно, пусть $\phi_1 \in H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ — гармоническая функция. В этом случае при подстановке $\phi = \phi_1$ в тождество (1.20) левая часть обратится в ноль. Следовательно,

$$(g, \phi_1)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)} = 0.$$

Обратно, пусть g такова, что $(g, \phi_1)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)} = 0$ для всех гармонических функций $\phi_1 \in H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$. Легко видеть, что множество гармонических функций есть ортогональное дополнение к подпространству $\mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ в эквивалентном скалярном произведении

$$(\phi, \psi)_{H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)} = (\nabla \phi, \nabla \psi)_{L_2^n(q^{l_1-k_0}\Omega)} + (\phi, \psi)_{L_2(\partial(q^{l_1-k_0}\Omega))}.$$

Таким образом, произвольную функцию $\phi \in H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ можно единственным образом разложить в сумму

$$\phi = \phi_1 + \phi_2,$$

где функция ϕ_1 — гармоническая, а

$$\phi_2 \,|_{\partial(q^{l_1-k_0}\Omega)} = 0.$$

Но тогда

$$(\nabla v, \nabla \phi)_{L_2^n(q^{l_1-k_0}\Omega)} = (\nabla v, \nabla \phi_2)_{L_2^n(q^{l_1-k_0}\Omega)},$$

$$(g, \phi)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)} = (g, \phi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)},$$

в результате чего (1.20) сводится к

$$(\nabla v, \nabla \phi_2)_{L_2^n(q^{l_1-k_0}\Omega)} = (g, \phi_2)_{L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)}, \tag{1.21}$$

где функция $\phi_2 \in \mathring{H}^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$ произвольна. Последнее соотношение определяет решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в области $q^{l_1-k_0}\Omega$, которое существует и единственно для любой функции g.

Итак, в случае $k_0 > l_1$ задача (1.17), (1.18) разрешима только при тех $f \in L_2(\Omega)$, для которых функция

$$g = \left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} f \in L_2(\Omega)$$

обращается в ноль вне $q^{l_1-k_0}\Omega$, а в $L_2(q^{l_1-k_0}\Omega)$ ортогональна всем гармоническим функциям из $H^1(q^{l_1-k_0}\Omega)$.

При $f = 0$ имеем $g = 0$, откуда следует в силу (1.21), что $v = 0$, а значит, $u = R_1^{-1}v = 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае решение задачи (1.17), (1.18) единственно. Теорема доказана. □

Пример 1.4. Решим краевую задачу

$$-\Delta(5u(x_1, x_2) + u(3x_1, 3x_2)) = 2(x_1^2 + x_2^2) - 1 \quad (|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 < 1), \tag{1.22}$$

$$u(x_1, x_2) = 0 \quad (|x| \geqslant 1). \tag{1.23}$$

Символ

$$r(\lambda) = \lambda^{-1} + 5$$

обращается в ноль при $\lambda = \lambda_1 = -1/5$, поэтому $k_0 = 0 = l_1$ в условиях теоремы 1.4. Следовательно, краевая задача (1.22), (1.23) имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(|x| < 1)$. Кроме того, из доказательства теоремы 1.4 видно, что это решение находится по формуле

$$u = (P^{-1} + 5I)^{-1}v,$$

где v есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta v(x) = 2|x|^2 - 1$$

в круге $\{|x| < 1\}$,

$$v(x) = -\frac{1}{8}|x|^4 + \frac{1}{4}|x|^2 - \frac{1}{8} \quad (|x| < 1)$$

и $v(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$ (ср. с примером 1.2).

Поскольку $5 > 3^{2-2/2}$, оператор $P^{-1} + 5I$ является изоморфизмом пространства $\mathring{H}^2(|x| < 1)$ в силу следствия 1.1. Учитывая то, что нормальная производная функции v на единичной окружности также обращается в ноль, получаем, что обобщенное решение u принадлежит $\mathring{H}^2(|x| < 1)$. Выпишем решение в явном виде. Для этого воспользуемся формулой (1.6):

$$u(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}(-5)^{-(k+1)}v(3^k x).$$

В каждом из колец $3^{-(p+1)} < |x| < 3^{-p}$ $(p = 0, 1, \ldots)$ эта формула приводит к конечной сумме

$$u(x) = -\sum_{k=0}^{p}(-5)^{-(k+1)}v(3^k x) = \frac{1}{5}\left(v(x) - \frac{v(3x)}{5} + \frac{v(9x)}{25} - \ldots + \frac{v(3^p x)}{(-5)^p}\right),$$

поскольку у всех последующих членов ряда аргумент функции v лежит во внешности круга. После элементарных преобразований получаем

$$u(x) = -\frac{\bigl(1 - (-81/5)^{p+1}\bigr)}{688}|x|^4 + \frac{\bigl(1 - (-9/5)^{p+1}\bigr)}{56}|x|^2 - \frac{\bigl(1 - (-1/5)^{p+1}\bigr)}{48}$$
$$(3^{-(p+1)} < |x| < 3^{-p};\ p = 0, 1, \ldots).$$

Наконец,

$$u(0) = -\sum_{k=0}^{\infty}(-5)^{-(k+1)}v(0) = -1/48.$$

В рассмотренном примере обобщенное решение задачи для уравнения с растяжением аргументов принадлежало $H^2(\Omega)$. Рассмотрим вопрос гладкости обобщенных решений в общей ситуации, когда задача (1.17), (1.18) однозначно разрешима, т. е. $k_0 = l_1$. Прежде всего покажем, что для решения $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи (1.17), (1.18) условие $u \in H^2(\Omega)$ равносильно условию $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$. Предположим противное: $u \in H^2(\Omega)$, в то время как для нормальной производной имеем

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} \neq 0.$$

Это приведет к несовпадению следов нормальной производной функции

$$v = R_1 u = (P - \lambda_{l_1+1}I)\ldots(P - \lambda_{l_1+l_2}I)P^{-l_2}u$$

с внутренней и внешней сторон многообразия $q^{-l_2}\partial\Omega \subset \Omega$, т. е. $v \notin H^2_{loc}(\Omega)$. Действительно, при таком предположении нормальная производная функции $P^{-l_2}u$ терпит разрыв вдоль многообразия $q^{-l_2}\partial\Omega$, последующее же действие операторов

$$(P - \lambda_{l_1+l_2}I), \ldots, (P - \lambda_{k_0+1}I)$$

этот разрыв сохраняет, поскольку числа $\lambda_{k_0+1}, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}$ отличны от нуля.

С другой стороны, как видно из доказательства теоремы 1.4, функция v является в Ω решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью из $L_2(\Omega)$, а значит, принадлежит $H^2_{loc}(\Omega)$. Полученное противоречие означает, что гладкие решения обязательно принадлежат $\mathring{H}^2(\Omega)$, т. е. имеют равную нулю нормальную производную на границе $\partial\Omega$.

Итак, пусть $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$ — решение задачи (1.17), (1.18) и $v = R_1 u$. Тогда функция v принадлежит $\mathring{H}^2(\Omega)$ и является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью

$$g = \left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} f.$$

Это означает, что интегральное тождество

$$(\nabla v, \nabla \phi)_{L_2^n(\Omega)} = (g, \phi)_{L_2(\Omega)}$$

выполняется уже для произвольной функции $\phi \in H^1(\Omega)$ (интеграл по $\partial\Omega$ при интегрировании по частям в данном случае аннулируется за счет того, что $\left.\dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$). Последнее, как мы убедились ранее, равносильно тому, что для всех гармонических функций $\phi_1 \in H^1(\Omega)$ выполняется соотношение

$$(g, \phi_1)_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Получается, что для гладкости решения задачи (1.17), (1.18) необходимо выполнение бесконечного числа условий ортогональности

$$(g, \phi_1)_{L_2(\Omega)} = \left(\left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} f, \phi_1\right)_{L_2(\Omega)} = (f, B\phi_1)_{L_2(\Omega)} = 0,$$

где $\phi_1 \in H^1(\Omega)$ — произвольная гармоническая функция, а B обозначает сопряженный к ограниченному оператору $\left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$. Если же еще дополнительно потребовать

$$|\lambda_j| < q^{n/2-2} \quad (j = k_0 + 1, \ldots, l_1 + l_2),$$

то по лемме 1.2 (б) оператор R_1^{-1} будет ограниченным и в $\mathring{H}^2(\Omega)$, обеспечивая принадлежность обобщенного решения $u = R_1^{-1} v$ задачи (1.17), (1.18) пространству $\mathring{H}^2(\Omega)$. Оформим полученные результаты.

Теорема 1.5. *Краевая задача* (1.17), (1.18) *имеет единственное обобщенное решение и для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда из $l_1 + l_2$ корней полинома $\lambda^{l_2} r(\lambda)$ ровно l_1 корней удовлетворяют условию*

$$|\lambda| \geqslant q^{n/2-1}.$$

Если $u \in H^2(\Omega)$, то $u \in \mathring{H}^2(\Omega)$.

Если вдобавок все оставшиеся корни полинома $\lambda^{l_2} r(\lambda)$ удовлетворяют условию

$$|\lambda| < q^{n/2-2},$$

то для принадлежности обобщенного решения пространству $H^2(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условиям ортогональности

$$(f, B\phi_1)_{L_2(\Omega)} = 0$$

с произвольной гармонической функцией $\phi_1 \in H^1(\Omega)$ и оператором B, сопряженным оператору

$$\left(R_2(q^{-2}P)\right)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega).$$

Конечно, для теоремы 1.5 существенно, чтобы $l_1 \geqslant 0$. В то же время теорема 1.4 остается содержательной и без этого предположения.

Лемма 1.5. *Пусть расположение корней полинома $\lambda^{l_2} r(\lambda)$ таково, что l_1 корней лежат вне замкнутого единичного круга $|\lambda| \leqslant 1$, а оставшиеся l_2 корней — внутри этого круга. Тогда имеет место соотношение*

$$\|u_q - u_1\|_{H^1(\Omega)} \to 0, \quad q \to 1,$$

где u_q — обобщенные решения краевой задачи (1.17), (1.18), *отвечающие произвольной фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ и значениям параметра $q \geqslant 1$* (*близким к* 1).

Доказательство. Ровно l_2 корней полинома $\lambda^{l_2}r(\lambda)$, которые мы обозначим $\lambda_{l_1+1},\dots,\lambda_{l_1+l_2}$, удовлетворяют условию
$$|\lambda_j|<1.$$
Если $n\geqslant 3$, то находим число $q_0>1$ такое, что оставшиеся корни $\lambda_1,\dots,\lambda_{l_1}$ удовлетворяют условию
$$|\lambda_j|\geqslant q_0^{n/2-1}.$$
Если же $n=2$, то достаточно иметь
$$|\lambda_j|>1$$
для $j=1,\dots,l_1$. Кроме того, $r(1)\neq 0$ (единичная окружность свободна от корней). Все это гарантирует однозначную разрешимость в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ задачи (1.17), (1.18) для всех значений $q\in(1,q_0]$ (теорема 1.4), а также задачи Дирихле для «предельного» уравнения
$$-\Delta u=f/r(1).$$
Воспользуемся установленным выше алгоритмом (см. начало этого раздела и доказательство теоремы 1.4) нахождения решения u_q, $q\in(1,q_0]$. Обозначим $v_q\in\mathring{H}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ решение задачи Дирихле для уравнения
$$-\Delta v_q(x)=f_q(x)\quad(x\in\Omega)$$
с правой частью
$$f_q(x)=\big(R_2(q^{-2}P_q)\big)^{-1}f(x)=q^{2l_1}(P_q-q^2\lambda_{l_1}I)^{-1}\dots(P_q-q^2\lambda_1 I)^{-1}f(x)$$
(без ограничения общности считаем $a_{l_1}=1$). Из леммы 1.4 следует, что
$$\|v_q-v_1\|_{H^2(\Omega)}\to 0,\quad q\to 1,$$
где v_1 отвечает функции
$$f_1(x)=\frac{f(x)}{(1-\lambda_1)\dots(1-\lambda_{l_1})}.$$
Решения u_q исходной задачи для $q>1$ находятся по функциям v_q при помощи формулы
$$u_q(x)=(R_1(P_q))^{-1}v_q(x)=\Big((P_q-\lambda_{l_1+1}I)\dots(P_q-\lambda_{l_1+l_2}I)P_q^{-l_2}\Big)^{-1}v_q(x).$$
Легко видеть, что на функциях из $\mathring{H}^1(\Omega)$ оператор $R_1(P_q)$ совпадает с оператором
$$(I-\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})\dots(I-\lambda_{l_1+l_2}P_q^{-1})=$$
$$=(-1)^{l_2}\lambda_{l_1+1}\dots\lambda_{l_1+l_2}(P_q^{-1}-\lambda_{l_1+1}^{-1}I)\dots(P_q^{-1}-\lambda_{l_1+l_2}^{-1}I).$$
Поскольку
$$|\lambda_j^{-1}|>1,\quad j=l_1+1,\dots,l_1+l_2,$$
операторы $P_q^{-1}-\lambda_j^{-1}I$ удовлетворяют условиям следствия 1.1 ($s=1$) для всех $q>1$ и обращаются в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ по формуле
$$(P_q^{-1}-\lambda_j^{-1}I)^{-1}=-\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_j^{k+1}P_q^{-k}.$$
Таким образом,
$$(R_1(P_q))^{-1}=(I-\lambda_{l_1+l_2}P_q^{-1})^{-1}\dots(I-\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1}=\prod_{j=l_1+1}^{l_1+l_2}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_j^kP_q^{-k}.$$
Обозначив
$$u_{q,j}(x)=(I-\lambda_jP_q^{-1})^{-1}\dots(I-\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1}v_q(x)\quad(j=l_1+1,\dots,l_1+l_2),$$
можем записать
$$u_q(x)=u_{q,l_1+l_2}(x),$$
$$u_{q,l_1+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{l_1+1}^kv_q(q^kx),\quad u_{q,j+1}(x)=(I-\lambda_{j+1}P_q^{-1})^{-1}u_{q,j}(x).$$

Покажем вначале, что

$$u_{q,l_1+1} \overset{\mathring{H}^1(\Omega)}{\longrightarrow} v_1 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{l_1+1}^k = \frac{v_1}{1-\lambda_{l_1+1}}, \quad q \to 1.$$

Достаточно установить $L_2(\Omega)$-сходимость для производных. Итак,

$$(u_{q,l_1+1})_{x_i}(x) - \frac{v_{1x_i}(x)}{1-\lambda_{l_1+1}} = (I - q\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1} v_{qx_i}(x) - \frac{v_{1x_i}(x)}{1-\lambda_{l_1+1}} =$$

$$= (I - q\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1} \left(v_{qx_i} - v_{1x_i}\right)(x) + \sum_{k=0}^{\infty} (q\lambda_{l_1+1})^k v_{1x_i}(q^k x) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{l_1+1}^k v_{1x_i}(x) =$$

$$= (I - q\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1} \left(v_{qx_i} - v_{1x_i}\right)(x) + v_{1x_i}(x) \sum_{k=0}^{\infty} (q^k - 1)\lambda_{l_1+1}^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (q\lambda_{l_1+1})^k \Big(v_{1x_i}(q^k x) - v_{1x_i}(x)\Big). \tag{1.24}$$

Из результатов раздела 1.1 следует, что норма оператора $(I - q\lambda_{l_1+1}P_q^{-1})^{-1}$, действующего в $L_2(\Omega)$, не превосходит

$$\frac{1}{|q\lambda_{l_1+1}| \left(|q\lambda_{l_1+1}|^{-1} - q^{-n/2}\right)} = \frac{1}{1 - q^{1-n/2}|\lambda_{l_1+1}|} \to \frac{1}{1-|\lambda_{l_1+1}|}, \; q \to 1.$$

Поэтому первое слагаемое в правой части соотношения (1.24) стремится к нулю в $L_2(\Omega)$. Поскольку $|\lambda_{l_1+1}| < 1$, стремление к нулю второго слагаемого очевидно. Относительно третьего слагаемого заметим, что общий член ряда стремится в $L_2(\Omega)$ к нулю при $q \to 1$ в силу непрерывности v_{1x_i} в среднем квадратичном. С другой стороны, этот общий член мажорируется выражением

$$|q\lambda_{l_1+1}|^k (1 + q^{-nk/2}) \|v_{1x_i}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2\|v_{1x_i}\|_{L_2(\Omega)} \left(\frac{1+|\lambda_{l_1+1}|}{2}\right)^k,$$

если

$$1 \leqslant q \leqslant \frac{1+|\lambda_{l_1+1}|}{2|\lambda_{l_1+1}|},$$

что означает равномерное по q убывание остатка ряда. Получаем, что и третье слагаемое в правой части (1.24) стремится к нулю при $q \to 1$ в $L_2(\Omega)$.

Предположим теперь, что для некоторого номера j доказана сходимость

$$u_{q,j} \overset{\mathring{H}^1(\Omega)}{\longrightarrow} \frac{v_1}{(1-\lambda_j)\ldots(1-\lambda_{l_1+1})}, \quad q \to 1.$$

Тогда, записывая $u_{q,j+1}$ в виде

$$\left(I - \lambda_{j+1}P_q^{-1}\right)^{-1} \left(u_{q,j} - \frac{v_1(x)}{(1-\lambda_j)\ldots(1-\lambda_{l_1+1})}\right) + \frac{(I - \lambda_{j+1}P_q^{-1})^{-1} v_1(x)}{(1-\lambda_j)\ldots(1-\lambda_{l_1+1})},$$

легко убедиться в сходимости

$$u_{q,j+1} \overset{\mathring{H}^1(\Omega)}{\longrightarrow} \frac{v_1}{(1-\lambda_{j+1})(1-\lambda_j)\ldots(1-\lambda_{l_1+1})}, \quad q \to 1.$$

Достаточно вновь заметить, что нормы операторов

$$\left(I - q\lambda_{j+1}P_q^{-1}\right)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

ограничены в совокупности для всех q, близких к 1. Это обеспечивает стремление в $\mathring{H}^1(\Omega)$ к нулю первого слагаемого в представлении для $u_{q,j+1}$. При помощи тех же рассуждений, что и для $j = l_1 + 1$, показываем, что второе слагаемое дает нужный предел.

В итоге получаем, что

$$u_q = u_{q,l_1+l_2} \overset{\mathring{H}^1(\Omega)}{\longrightarrow} \frac{v_1}{(1-\lambda_{l_1+l_2})\ldots(1-\lambda_{l_1+1})}, \quad q \to 1,$$

при этом предельная функция является решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью

$$\frac{f_1(x)}{(1-\lambda_{l_1+l_2})\dots(1-\lambda_{l_1+1})} = \frac{f(x)}{(1-\lambda_{l_1+l_2})\dots(1-\lambda_{l_1+1})(1-\lambda_{l_1})\dots(1-\lambda_1)},$$

т. е. $f(x)/r(1)$. □

Подчеркнем, что в лемме 1.5 речь идет о сходимости семейства u_q к функции $u_1 \in H^2(\Omega)$ в пространстве $H^1(\Omega)$, в отличие от леммы 1.4, где имела место сходимость $u_q \to u_1$ в $H^2(\Omega)$. Более того, выше мы убедились, что обобщенные решения u_q краевой задачи для уравнения, содержащего растяжения аргументов, вообще говоря, не принадлежат пространству $H^2(\Omega)$.

Замечание 1.4. Интересно отметить, что в плоском случае ($n=2$) пропадает зависимость от q критического значения

$$|\lambda| = q^{n/2-1} = 1$$

для корней символа. Получается, что вопрос о разрешимости задачи в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ (теоремы 1.1, 1.2 и 1.4) приводит к одним и тем же условиям на коэффициенты уравнения для всех $q>1$.

1.4. Уравнение с переменными коэффициентами

Переход к переменным коэффициентам при получении глобальных результатов для дифференциальных уравнений (например, оценки во всей области, доказательство фредгольмовой разрешимости путем построения регуляризатора и др.) обычно основан на принципе локализации, впервые примененном в работе [70]. Важным элементом принципа локализации является построение разбиения единицы, подчиненного специальному покрытию $\overline{\Omega}$ открытыми множествами (такими, в которых коэффициенты мало меняются). Аналогичное применение локализации в теории функционально-дифференциальных уравнений сопровождается необходимостью накладывать дополнительные условия на разбиение единицы. Эти условия являются существенными и носят алгебраический характер: умножение на функции $\varphi_j(x)$, составляющие разбиение единицы, должно коммутировать или «почти» коммутировать с действием функциональных операторов того или иного класса. В случае разностных операторов с соизмеримыми сдвигами доказано существование разбиения единицы, состоящего из периодических функций [87]. Это позволило применить принцип локализации для дифференциально-разностных уравнений с гладкими переменными коэффициентами и получить достаточные условия сильной эллиптичности, обобщающие соответствующие условия в случае постоянных коэффициентов. Если же рассматривать операторы со сжатиями и растяжениями аргументов, то, напротив, можно убедиться (см. [43]) в несуществовании q-периодического разбиения единицы для $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ (т. е. такого, что $\varphi_j(qx) = \varphi_j(x)$). Продемонстрируем, как можно преодолеть возникающие трудности, на примере исследования краевой задачи

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.25}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.26}$$

в предположении, что $\overline{\Omega} \subset q\Omega$, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, а функциональный оператор $R = R(x,P)$ имеет вид

$$Ru(x) = \sum_{k=0}^{l} b_k(x) u(q^{-k}x), \tag{1.27}$$

где $b_k(x)$ — комплекснозначные функции из $C^1(\overline{\Omega})$ и $l>0$. С уравнением (1.25) связывается переменный (по x) символ

$$a_R(x,\lambda,\xi) = a(\xi) r(x,\lambda), \quad a(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad r(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{l} b_k(x)\lambda^k.$$

На уравнение (1.25) накладывается условие

$$a_R(x,0,\xi) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_0(x)\xi_i\xi_j \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n), \tag{1.28}$$

выражающее эллиптичность его «локальной» части в $\overline{\Omega}$.

Оказывается, для фредгольмовой разрешимости краевой задачи (1.25), (1.26) достаточно дополнительно потребовать необращения в ноль символа в круге $|\lambda| \leqslant q^{n/2}$ и лишь при $x=0$:

$$r(0,\lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2}). \tag{1.29}$$

Таким образом, значения коэффициентов $b_1(x),\ldots,b_l(x)$ вне начала координат не влияют на фредгольмову разрешимость. Кроме того, будет показано, что всякое обобщенное решение краевой задачи (1.25), (1.26) в случае выполнения (1.28), (1.29) принадлежит $H^2(\Omega)$.

Для более общего уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f(x)$$

с переменными коэффициентами в операторах R_{ij} (а также для уравнения $2m$-го порядка с краевыми условиями общего вида) фредгольмова разрешимость краевой задачи будет доказана в главе 3 путем построения регуляризатора с привлечением техники псевдодифференциальных операторов. В случае же уравнения (1.25) с одним оператором вида (1.27) приведенное ниже доказательство основано на исследовании обратимости функционального оператора.

Вначале введем алгебру операторов $R(x,P)$ с переменными коэффициентами. Пусть B есть банахово пространство. Пространство всех аналитических в открытом множестве $Q \subset \mathbb{C}$ функций со значениями в B обозначается $\mathcal{H}(Q,B)$. Когда

$$Q = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \rho\}, \quad B = C^s(\overline{\Omega}),$$

а s — целое неотрицательное число, будем для краткости писать

$$\mathcal{H}(Q,B) = \mathcal{H}(\rho,s),$$

а всякую функцию r из пространства $\in \mathcal{H}(\rho,s)$ рассматривать как функцию двух аргументов

$$r = r(x,\lambda), \quad x \in \Omega,\ |\lambda| < \rho.$$

Для любой фиксированной последовательности

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho, \quad \rho_j \to \rho,$$

счетный набор полунорм

$$\max_{|\lambda|=\rho_j} \|r(\cdot,\lambda)\|_{C^s(\overline{\Omega})}$$

задает на пространстве $\mathcal{H}(\rho,s)$ топологию пространства Фреше.

Опираясь на интегральную формулу Коши, легко показать аналогично скалярному случаю ($B=\mathbb{C}$), что функции $r \in \mathcal{H}(\rho,s)$ суть в точности суммы степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\lambda^k$$

с коэффициентами $a_k \in C^s(\overline{\Omega})$, удовлетворяющими условию: для любого $\rho' < \rho$ найдется постоянная $M_s(\rho') > 0$ такая, что

$$\|a_k\|_{C^s(\overline{\Omega})} \leqslant M_s(\rho')\rho'^{-k} \quad (k=0,1,\ldots). \tag{1.30}$$

При этом коэффициенты ряда a_k связаны с его суммой ρ привычной формулой

$$a_k(x) = (1/k!) r_\lambda^{(k)}(x,0),$$

а в качестве постоянной $M_s(\rho')$ можно взять $\max\limits_{|\lambda|=\rho'} \|r(\cdot,\lambda)\|_{C^s(\overline{\Omega})}$.

Лемма 1.6. *Пусть $r \in \mathcal{H}(\rho, s)$, где $\rho > q^{n/2}$, s — целое неотрицательное число. Тогда формулой*

$$R(x,P)u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} r_{\lambda}^{(k)}(x,0) u(q^{-k}x) \tag{1.31}$$

определен ограниченный оператор $R(x,P) : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ для всякой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\overline{\Omega} \subset q\Omega$.

Доказательство. Вначале докажем ограниченность оператора (1.31) в пространстве $L_2(\Omega)$. Если r есть полином от λ, то для области Ω указанного вида оператор $R(x,P)$ корректно определен, и утверждение очевидно. Докажем сходимость ряда (1.31) по операторной норме. Прежде всего заметим, что норма оператора P^k в $\mathcal{B}(L_2(\Omega))$ не превосходит его нормы в $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$, которая равна $q^{kn/2}$. Далее,

$$\|gu\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{C(\overline{\Omega})} \|u\|_{L_2(\Omega)}$$

при $g \in C(\overline{\Omega})$, $u \in L_2(\Omega)$. Теперь из принадлежности $r \in \mathcal{H}(\rho, s)$ и оценки (1.30) получается оценка для члена ряда

$$\|a_k P^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\Omega))} \leqslant M_0(\rho')(q^{n/2}/\rho')^k \quad (\rho' < \rho).$$

Но по условию леммы можно взять

$$q^{n/2} < \rho' < \rho,$$

откуда вытекает оценка

$$\|R\|_{\mathcal{B}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{\rho'}{\rho' - q^{n/2}} \max_{|\lambda| = \rho'} \|r(\cdot, \lambda)\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Для доказательства ограниченности оператора $R(x,P)$ в $H^s(\Omega)$ в силу теоремы о замкнутом графике достаточно показать, что $Ru \in H^s(\Omega)$, если $u \in H^s(\Omega)$. Для мультииндекса α, $|\alpha| \leqslant s$, по формуле Лейбница будем иметь

$$D^{\alpha} R(x,P)u(x) = \sum_{\beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta} R_{\alpha-\beta}(x, q^{-|\beta|}P) D^{\beta} u(x),$$

где $R_{\alpha}(x,P)$ означает оператор с символом $D_x^{\alpha} r(x,\lambda)$ (результат дифференцирования коэффициентов). Очевидно, символ

$$D_x^{\alpha-\beta} r(x, q^{-|\beta|}\lambda)$$

принадлежит классу

$$\mathcal{H}\left(q^{|\beta|}\rho, s - |\alpha| + |\beta|\right) \subset \mathcal{H}(\rho, |\beta|).$$

Поэтому по уже доказанному оператор $R_{\alpha-\beta}(x, q^{-|\beta|}P) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ ограничен. Учитывая $D^{\beta}u \in L_2(\Omega)$, получаем $D^{\alpha}Ru \in L_2(\Omega)$. $\square$

Операторы с символами из $\mathcal{H}(\rho, s)$ также образуют алгебру (обозначим ее $\mathfrak{A}_{\rho,s}$), но уже не коммутативную. Перемножая соответствующие ряды, мы получаем формулу композиции. Если

$$R_1(x,P) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) P^k, \quad R_2(x,P) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) P^k,$$

где $r_1, r_2 \in \mathcal{H}(\rho, s)$, то композиция $R_1 R_2$ представляет собой оператор

$$R_3(x,P) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) P^k$$

с коэффициентами

$$c_k(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x) b_{k-j}(q^{-j}x), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{1.32}$$

Легко проверить, что символ

$$r_3(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x) \lambda^k$$

также принадлежит классу $\mathcal{H}(\rho, s)$.

Центральным местом этого раздела является следующая ниже теорема об обратимости.

Теорема 1.6. *Пусть*

$$r(x,\lambda) = \sum_{k=0}^{l} a_k(x)\lambda^k,$$

где $a_k \in C^s(\overline{\Omega})$ *для некоторого* $s \geqslant 1$, *и выполнены следующие условия*:

$$r(x,0) \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega}), \tag{1.33}$$

$$r(0,\lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| < \rho). \tag{1.34}$$

Тогда существует обратный оператор $R^{-1}(x,P) \in \mathfrak{A}_{\rho,s}$.

Доказательству теоремы предпошлем лемму, которая понадобится и в главе 3.

Лемма 1.7. *Пусть* $\mathcal{B}$ *— банахова алгебра и последовательность* $g_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, \ldots$, *экспоненциально сходится к элементу* $g \in \mathcal{B}$:

$$\|g_n - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant cd^n \quad (c > 0,\ 0 < d < 1).$$

Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \|g_n g_{n-1} \ldots g_1\|_{\mathcal{B}}^{1/n} \leqslant \rho(g),$$

где $\rho(g)$ *обозначает спектральный радиус элемента* g *в* $\mathcal{B}$.

Доказательство. Обозначим

$$g_n - g = \Delta g_n, \quad g_n g_{n-1} \ldots g_1 - g^n = \Delta_n.$$

Надо оценить величину $\|\Delta_n\|$ (здесь и далее в доказательстве $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{B}}$). Сгруппируем

$$\Delta_n = (g + \Delta g_n)(g + \Delta g_{n-1}) \ldots (g + \Delta g_1) - g^n$$

в n сумм $\Delta_{n,m}$ $(m = 1, \ldots, n)$ так, что в $\Delta_{n,m}$ в каждом слагаемом m сомножителей составляют Δg_i:

$$\Delta_n = \sum_{m=1}^{n} \Delta_{n,m},$$

$$\Delta_{n,m} = \sum_{i_1=m}^{n} g^{n-i_1}(\Delta g_{i_1}) \sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} g^{i_1-1-i_2}(\Delta g_{i_2}) \times \ldots \times \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} g^{i_{m-1}-1-i_m}(\Delta g_{i_m}) g^{i_m-1}.$$

Из формулы спектрального радиуса

$$\rho(g) = \lim_{n\to\infty} \|g^n\|^{1/n}$$

следует, что

$$\|g^n\| \leqslant M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1}$$

для произвольного $\bar\rho > \rho(g)$. Приходим к неравенству

$$\|g^{n-i_1}\|\,\|g^{i_1-1-i_2}\| \times \ldots \times \|g^{i_{m-1}-1-i_m}\|\,\|g^{i_m-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant [M(\bar\rho)]^{m+1}\bar\rho^{n-i_1+1+i_1-1-i_2+1+\ldots+i_{m-1}-1-i_m+1+i_m-1+1} = [M(\bar\rho)]^{m+1}\bar\rho^{n+1}.$$

Отсюда и из условия леммы получаем

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant [M(\bar\rho)]^{m+1}\bar\rho^{n+1}c^m \sum_{i_1=m}^{n}\sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} d^{i_1+i_2+\ldots+i_m}.$$

Последняя сумма оценивается непосредственно:

$$\sum_{i_1=m}^{n}\sum_{i_2=m-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}-1} d^{i_1+i_2+\ldots+i_m} \leqslant \sum_{i_1=m}^{\infty} d^{i_1} \sum_{i_2=m-1}^{\infty} d^{i_2} \ldots d^{i_{m-1}} \sum_{i_m=1}^{\infty} d^{i_m} = \frac{d^{m(m+1)/2}}{(1-d)^m}.$$

Таким образом,

$$\|\Delta_{n,m}\| \leqslant \left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1}$$

и

$$\|\Delta_n\| \leqslant \sum_{m=1}^{n} \|\Delta_{n,m}\| \leqslant M(\bar\rho)\bar\rho^{n+1} \sum_{m=1}^{n} \left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m .$$

Последовательность

$$\left[\frac{cM(\bar\rho)d^{(m+1)/2}}{1-d}\right]^m$$

мажорируется убывающей геометрической прогрессией, так что

$$\|\Delta_n\| \leqslant M_{c,d}(\bar\rho)\bar\rho^n.$$

Окончательно

$$\|g_n g_{n-1}\dots g_1\| = \|g^n + \Delta_n\| \leqslant \|g^n\| + \|\Delta_n\| \leqslant \tilde M(\bar\rho)\bar\rho^n.$$

Отсюда следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \|g_n g_{n-1}\dots g_1\|^{1/n} \leqslant \bar\rho.$$

Но $\bar\rho > \rho(g)$ произвольно, и лемма доказана. □

Замечание 1.5. Доказанное утверждение в определенном смысле обобщает известное свойство непрерывности сверху спектрального радиуса:

$$\|g_n - g\| \to 0 \implies \limsup_{n\to\infty} \rho(g_n) \leqslant \rho(g).$$

Замечание 1.6. Из доказательства леммы 1.7 видно, что постоянная $\tilde M(\bar\rho)$ зависит (помимо $\bar\rho$) лишь от предельного элемента g и параметров c, d в оценке сходимости, но не зависит от начального элемента последовательности. Поэтому с той же постоянной верно неравенство

$$\|g_{j+n} g_{j+n-1}\dots g_{j+1}\| \leqslant \tilde M(\bar\rho)\bar\rho^n$$

для любых натуральных n и j.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.6.

Доказательство. Благодаря условию (1.33) можно без ограничения общности считать, что

$$r(x,0) = a_0(x) = 1$$

(в противном случае на коэффициент $a_0(x)$ следует предварительно разделить). Воспользуемся формулой композиции (1.32) для построения обратного оператора $R^{-1}(x,P)$ в виде

$$R^{-1}(x,P) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x)P^m.$$

Равенство $RR^{-1} = I$ приводит к системе

$$\begin{cases} b_0(x) = 1, \\ b_k(x) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{\min(l,k)} a_j(x) b_{k-j}(q^{-j}x), \quad k = 1,2,\dots, \end{cases} \tag{1.35}$$

а равенство $R^{-1}R = I$ дает

$$\begin{cases} b_0(x) = 1, \\ b_k(x) = -\displaystyle\sum_{j=1}^{\min(l,k)} a_j(q^{j-k}x) b_{k-j}(x), \quad k = 1,2,\dots. \end{cases} \tag{1.36}$$

Покажем, что обе системы определяют одну и ту же последовательность коэффициентов $b_k(x)$, $k = 1,2,\dots$.

Введем матрицы $A_k(x)$ $(x \in \overline{\Omega})$ порядка $k \times k$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$A_k(x) = \begin{pmatrix} a_1(x) & a_2(x) & \ldots & a_{k-1}(x) & a_k(x) \\ 1 & a_1(q^{-1}x) & \ldots & a_{k-2}(q^{-1}x) & a_{k-1}(q^{-1}x) \\ 0 & 1 & \ldots & a_{k-3}(q^{-2}x) & a_{k-2}(q^{-2}x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1(q^{1-k}x) \end{pmatrix}.$$

Мы утверждаем, что функции $b_k(x)$ в (1.35) и (1.36) вычисляются по формуле

$$b_k(x) = (-1)^k \det A_k(x).$$

Докажем это индукцией по $k = 1, 2, \ldots$. При $k = 1$ равенство очевидно. Предполагая, что оно имеет место для всех номеров вплоть до некоторого k, проверим его и для номера $k+1$.

Раскрывая $\det A_{k+1}(x)$ по первому столбцу и используя предположение индукции, получим

$$\begin{gathered} b_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} \big(a_1(x) \det A_k(q^{-1}x) - a_2(x) \det A_{k-1}(q^{-2}x) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1} a_k(x) \det A_1(q^{-k}x) + (-1)^k a_{k+1}(x)\Big) = \\ = -a_1(x)(-1)^k \det A_k(q^{-1}x) - a_2(x)(-1)^{k-1} \det A_{k-1}(q^{-2}x) - \ldots \\ \ldots - a_k(x)(-1) \det A_1(q^{-k}x) - a_{k+1}(x) = -\sum_{j=1}^{k+1} a_j(x) b_{k+1-j}(q^{-j}x), \end{gathered}$$

что совпадает с (1.35). Чтобы прийти к (1.36), надо раскрыть $\det A_{k+1}(x)$ по последней строке:

$$\begin{gathered} b_{k+1}(x) = (-1)^{k+1} \Big(a_1(q^{-k}x) \det A_k(x) - a_2(q^{1-k}x) \det A_{k-1}(x) + \ldots \\ \ldots + (-1)^{k-1} a_k(q^{-1}x) \det A_1(x) + (-1)^k a_{k+1}(x)\Big) = \\ = -a_1(q^{-k}x)(-1)^k \det A_k(x) - a_2(q^{1-k}x)(-1)^{k-1} \det A_{k-1}(x) - \ldots \\ \ldots - a_k(q^{-1}x)(-1) \det A_1(x) - a_{k+1}(x) = -\sum_{j=1}^{k+1} a_j(q^{j-k-1}x) b_{k+1-j}(x). \end{gathered}$$

Из (1.35) следует, что $b_k \in C^s(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1, \ldots$. Необходимо убедиться, что для любого $\rho' < \rho$ найдется постоянная $M_s = M_s(\rho') > 0$ такая, что

$$\|b_k\|_{C^s(\overline{\Omega})} \leqslant M_s(\rho') \rho'^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Введем матрицу $G(x)$ порядка $l \times l$:

$$G(x) = \begin{pmatrix} -a_1(q^{1-l}x) & -a_2(q^{2-l}x) & \ldots & -a_{l-1}(q^{-1}x) & -a_l(x) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и вектор-столбец

$$B_k(x) = (b_{k+l}(x), \ldots, b_{k+1}(x))^T, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Положим

$$G_k(x) = G(q^{-k}x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Система (1.36) равносильна рекуррентным соотношениям $B_k = G_k B_{k-1}$, или

$$B_k = G_k G_{k-1} \ldots G_1 B_0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{1.37}$$

Очевидно, теорема будет доказана, если для всех мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leqslant s$, будет получена оценка

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \|D^\alpha (G_k \ldots G_1)(x)\| \leqslant c_s(\rho') \rho'^{-k} \quad (\rho' < \rho;\ k = 1, 2, \ldots) \tag{1.38}$$

(здесь $\|\cdot\|$ означает матричную норму).

Докажем (1.38) индукцией по α. Вначале пусть $|\alpha| = 0$. Сейчас через $\mathcal{B}$ обозначим банахову алгебру непрерывных на компакте $\overline{\Omega}$ матричных функций порядка $l \times l$. Если $g_k = G_k$, $g = G(0)$, то $g, g_k \in \mathcal{B}$ и, как нетрудно видеть,
$$\|g_k - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant cq^{-k}.$$
Это следует из гладкости коэффициентов $a_j(x)$ — достаточно применить дифференциальную теорему о среднем. По лемме 1.7 для всякого $\bar{\rho} > \rho(g)$ найдется постоянная $\tilde{M} = \tilde{M}(\bar{\rho})$ такая, что
$$\|g_k \ldots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant \tilde{M}(\bar{\rho})\bar{\rho}^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$
Оценим спектральный радиус $\rho(g)$ элемента $g \in \mathcal{B}$. Он совпадает с наибольшим из модулей собственных значений постоянной матрицы $G(0)$. Характеристическое уравнение для определения этих собственных значений имеет вид
$$z^l + a_1(0)z^{l-1} + \ldots + a_l(0) = 0 \tag{1.39}$$
(достаточно раскрыть $\det(G(0) - zE)$ по первому столбцу). Делая замену $z = \lambda^{-1}$, получаем уравнение
$$1 + a_1(0)\lambda + \ldots + a_l(0)\lambda^l = 0,$$
т. е. $r(0, \lambda) = 0$. Условие (1.34) означает, что все корни λ_j многочлена $r(0, \lambda)$ таковы, что $|\lambda_j| \geqslant \rho$. Следовательно, все корни z_j уравнения (1.39) удовлетворяют условию $|z_j| \leqslant \rho^{-1}$. Итак, имеем $\rho(g) \leqslant \rho^{-1}$. Поэтому если $\rho' < \rho$, то
$$\bar{\rho} = \rho'^{-1} > \rho^{-1} \geqslant \rho(g)$$
и
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} \|(G_k \ldots G_1)(x)\| = \|g_k \ldots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant c_0(\rho')\rho'^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$
с постоянной $c_0(\rho') = \tilde{M}(\bar{\rho})$. Для $|\alpha| = 0$ оценка (1.38) доказана.

Предположим, что оценка (1.38) справедлива для всех мультииндексов α таких, что $|\alpha| \leqslant s'$ при $s' < s$. Рассмотрим
$$\frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha (G_k \ldots G_1)(x) = D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i} (G_k \ldots G_1)(x) \quad (|\alpha| = s';\ i = 1, \ldots, n).$$
По формуле Лейбница
$$D^\alpha \frac{\partial}{\partial x_i}(G_k \ldots G_1) = D^\alpha \sum_{j=1}^{k} G_k \ldots G_{j+1} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} G_{j-1} \ldots G_1 =$$
$$= \sum_{\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha} \binom{\alpha}{\beta}\binom{\beta}{\gamma} \sum_{j=1}^{k} D^\gamma (G_k \ldots G_{j+1}) \left(D^{\beta-\gamma} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right) D^{\alpha-\beta} (G_{j-1} \ldots G_1).$$
Понятно, что величина $\|D^\gamma G_j(x)\|$ ограничена для всех γ, $|\gamma| \leqslant s$, равномерно относительно $x \in \overline{\Omega}$ и $j = 1, 2, \ldots$. Опираясь на предположение индукции, с учетом замечания 1.6 будем при $\rho' < \rho$ иметь
$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} D^\alpha (G_k \ldots G_1)(x) \right\| \leqslant c_1(s) \sum_{\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha} \sum_{j=1}^{k} \|D^\gamma (G_k \ldots G_{j+1})(x)\| \times$$
$$\times \|D^{\alpha-\beta}(G_{j-1} \ldots G_1)(x)\| \leqslant c_1(s) \sum_{\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha} \sum_{j=1}^{k} c_{s'}(\rho')\rho'^{j-k} c_{s'}(\rho')\rho'^{1-j} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha} [c_1(s)\rho' c_{s'}^2(\rho')] k\rho'^{-k} \leqslant [c_2(s)\rho c_{s'}^2(\rho')] k\rho'^{-k}$$
для всех $x \in \overline{\Omega}$. Заменим в правой части полученного неравенства величину ρ' на $\rho' + \varepsilon$, где ε достаточно мало (чтобы $\rho' + \varepsilon < \rho$), и воспользуемся неравенством
$$k(\rho' + \varepsilon)^{-k} = k\left(\frac{\rho'}{\rho' + \varepsilon}\right)^k \rho'^{-k} \leqslant \frac{\rho'^{-k}}{e[\ln(\rho' + \varepsilon) - \ln \rho']}$$

(максимум функции $f(t) = th^{-t}$ на полупрямой $t > 0$ при $h > 1$ равен $(e\ln h)^{-1}$). В результате получаем (1.38) и для $|\alpha| = s' + 1$ с постоянной

$$c_{s'+1}(\rho') = c_2(s)\rho(c_{s'}(\rho'+\varepsilon))^2 e^{-1}[\ln(\rho'+\varepsilon) - \ln\rho']^{-1}.$$

Оценка (1.38), а вместе с ней и теорема доказаны. □

Из теоремы 1.6 и леммы 1.6 вытекает

Следствие 1.2. *Пусть* $r(x,\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_k(x)\lambda^k$, *где* $a_k \in C^s(\overline{\Omega})$ *при некотором* $s \geqslant 1$, *и выполнены следующие условия*:

$$r(x,0) \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega}),$$

$$r(0,\lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2}).$$

Тогда для всякой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *такой, что* $\overline{\Omega} \subset q\Omega$, *оператор*

$$R(x,P) : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$$

является изоморфизмом.

Пример 1.5. Решим функциональное уравнение

$$\frac{1}{1+|x|^2}\,u(x) + \frac{e^{x_1^2-x_2^2}}{3}\,u(x/2) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \ln|x|, & 1 < |x| < 4 \end{cases} \tag{1.40}$$

в $H^1(\Omega)$, где $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 4\}$.

Вначале убедимся в существовании и единственности решения. Для этого запишем символ оператора в левой части уравнения:

$$r(x,\lambda) = \frac{1}{1+|x|^2} + \frac{e^{x_1^2-x_2^2}}{3}\lambda.$$

Условия

$$r(x,0) \equiv \frac{1}{1+|x|^2} \neq 0 \quad \text{и} \quad r(0,\lambda) \equiv 1 + \frac{\lambda}{3} \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant 2),$$

очевидно, выполнены. По следствию 1.2 уравнение (1.40) имеет единственное решение из $H^1(\Omega)$ (стоящая справа функция пространству $H^1(\Omega)$ принадлежит).

Удобно переписать уравнение (1.40) в виде

$$u(x) + a(x)u(x/2) = v(x),$$

где

$$a(x) = \frac{1}{3}(1+|x|^2)e^{x_1^2-x_2^2}, \quad v(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ (1+|x|^2)\ln|x|, & 1 < |x| < 4. \end{cases}$$

Его решение тогда выражается формулой (см. (1.35) или (1.36))

$$u(x) = v(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a(x)a(2^{-1}x)\cdot\ldots\cdot a(2^{1-k}x)v(2^{-k}x).$$

Учитывая, что $v(2^{-k}x)$ дает ноль в круге Ω при $k \geqslant 2$, будем иметь

$$u(x) = v(x) - a(x)v(x/2),$$

или

$$u(x) = (1+|x|^2)\begin{cases} 0, & |x| < 1, \\ \ln|x|, & 1 < |x| < 2, \\ \ln|x| - e^{x_1^2-x_2^2}(4+|x|^2)(\ln|x| - \ln 2)/12, & 2 < |x| < 4. \end{cases}$$

Перейдем теперь к краевой задаче (1.25), (1.26). По-прежнему, под ее обобщенным решением будем понимать функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{1.41}$$

Если ввести неограниченный оператор $A_R : D(A_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, действующий по формуле

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} (R u_{x_j})_{x_i},$$

с областью определения

$$D(A_R) = \{u \in \mathring{H}^1(\Omega) : A_R u \in L_2(\Omega)\}$$

(вторая производная берется в смысле обобщенных функций), то приходим к эквивалентному определению обобщенного решения задачи (1.25), (1.26) как решения операторного уравнения $A_R u = f$ в $L_2(\Omega)$.

Теорема 1.7. *Пусть ограниченная область Ω удовлетворяет условию $\overline{\Omega} \subset q\Omega$; $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, коэффициенты $b_0(x), \ldots, b_l(x)$ оператора R, заданного формулой* (1.27)*, принадлежат пространству $C^1(\overline{\Omega})$, и выполнены основные условия* (1.28) *и* (1.29).

Тогда оператор A_R фредгольмов и $D(A_R) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Доказательство. Аналогично теореме 1.1, доказательство проводим путем сведения уравнения (1.25) к уравнению с эллиптической локальной старшей частью. Формально мы выносим функциональный оператор $R(x, P)$ за знак второй производной, а затем, применяя ограниченный обратный оператор $[R(x, q^{-1}P)]^{-1}$ к обеим частям уравнения, приходим к эллиптическому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, возмущенному нелокальными, но достаточно регулярными младшими членами. Для этого приходится, однако, проводить соответствующие преобразования через пробную функцию в интегральном тождестве.

Условие (1.28) означает, что $b_0(x)$ не обращается в ноль на $\overline{\Omega}$, а квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

не равна нулю нигде в $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Условия на оператор $R = R(x, P)$ позволяют применить теорему 1.6, по которой этот оператор обратим в алгебре $\mathfrak{A}_{\rho,1}$ для некоторого $\rho > q^{n/2}$. Обратный к R оператор $R^{-1}(x, P)$ можно представить в виде ряда

$$T(x, P) = R^{-1}(x, P) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) P^k$$

с коэффициентами $h_k \in C^1(\overline{\Omega})$. По лемме 1.6 оператор $T(x, P)$ ограничен в $L_2(\Omega)$ и в $H^1(\Omega)$.

Вместо функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ подставим в интегральное тождество (1.41) функцию $P^{-k} \overline{h}_k v$, также принадлежащую $\mathring{H}^1(\Omega)$. Получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} R u_{x_j}, q^k P^{-k} \left(\overline{h}_k v \right)_{x_i} \right)_{L_2(\Omega)} = (f, P^{-k} \overline{h}_k v)_{L_2(\Omega)}$$

или, после очевидных преобразований,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} h_k P^k R u_{x_j}, v_{x_i} \right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij} h_{k x_i} P^k R u_{x_j}, v \right)_{L_2(\Omega)} = (q^{-k} h_k P^k f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{1.42}$$

Отметим, что операторы

$$T_{x_i}(x, P) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{k x_i}(x) P^k \quad (i = 1, \ldots, n).$$

также являются ограниченными в $L_2(\Omega)$. Поэтому, суммируя (1.42) по всем $k = 0, 1, \ldots$, в пределе получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} + \Big(\sum_{j=1}^{n} R_j u_{x_j}, v \Big)_{L_2(\Omega)} = (\widetilde{T} f, v)_{L_2(\Omega)}$$

для произвольной функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, где операторы

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T_{x_i}(x, P) R, \quad \widetilde{T} = T(x, q^{-1} P)$$

ограничены в $L_2(\Omega)$, причем оператор $\widetilde{T}$ является обратным к $\widetilde{R} = R(x, q^{-1} P)$.

Таким образом, всякое обобщенное решение краевой задачи (1.25), (1.26) является и обобщенным решением краевой задачи для уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} R_i u_{x_i} = \widetilde{T} f \quad (x \in \Omega) \tag{1.43}$$

с эллиптическим дифференциальным оператором в старшей части. Проводя аналогичным образом выкладки в обратном направлении, убеждаемся в эквивалентности задач (1.25), (1.26) и (1.43), (1.26) (с точки зрения обобщенного решения). Поэтому, если стандартным образом связать с задачей (1.43), (1.26) неограниченный оператор $A_0 : D(A_0) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, действующий по формуле

$$A_0 u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} R_i u_{x_i},$$

с областью определения

$$D(A_0) = \{ u \in \mathring{H}^1(\Omega) : A_0 u \in L_2(\Omega) \},$$

то можно будет записать $A_R = \widetilde{R} A_0$. Утверждение теоремы теперь следует из соответствующих свойств оператора A_0. □

В конце раздела еще раз отметим, что на фредгольмову разрешимость задачи (1.25), (1.26) в предположении эллиптичности локальной части уравнения (1.25) влияют лишь значения коэффициентов в начале координат. Так, $b_1(x), \ldots, b_l(x)$ могут быть сколь угодно велики (по сравнению с $b_0(x)$) вне сколь угодно малой окрестности начала координат.

Пример 1.6. Исследуем гладкость обобщенных решений краевой задачи

$$-\Delta \left[\cos(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u(x) + \mu(x_1^2 + x_2^2) u(x/2) \right] = f(x) \quad (x \in \Omega = \{ x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| < 1 \}),$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

с параметром $\mu \in \mathbb{C}$.

Чтобы воспользоваться результатами этого раздела, перепишем уравнение в следующем виде:

$$-\left(\cos(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u_{x_1}(x) + \mu((x_1^2 + x_2^2)/2) u_{x_1}(x/2) \right)_{x_1} -$$
$$-\left(\cos(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u_{x_2}(x) + \mu((x_1^2 + x_2^2)/2) u_{x_2}(x/2) \right)_{x_2} = F(x),$$

где

$$F(x) = f(x) + ((-\pi/3) \sin(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u(x) + 2\mu x_1 u(x/2))_{x_1} +$$
$$+ ((\pi/3) \sin(\pi(x_1 - x_2)/3)\, u(x) + 2\mu x_2 u(x/2))_{x_2},$$

причем $F \in L_2(\Omega)$, если $f \in L_2(\Omega)$, а $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — обобщенное решение. В текущих обозначениях

$$r(x, \lambda) = \cos\left(\frac{\pi(x_1 - x_2)}{3} \right) + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \lambda, \quad a_R(x, \xi, \lambda) = (\xi_1^2 + \xi_2^2) r(x, \lambda).$$

Проверим выполнение условий (1.28) и (1.29). Если $x \in \Omega$, то

$$\left| \frac{\pi(x_1 - x_2)}{3} \right| < \frac{\pi}{3}(|x_1| + |x_2|) < \frac{\pi}{3} \Longrightarrow r(x, 0) = \cos\left(\frac{\pi(x_1 - x_2)}{3} \right) > \frac{1}{2}.$$

Далее, $r(0,\lambda)=1$, так что условие (1.29) выполнено при любом значении параметра μ. По теореме 1.7 всякое обобщенное решение краевой задачи принадлежит $H^2(\Omega)$.

1.5. Приложение к задаче об успокоении системы управления с запаздыванием, пропорциональным времени

Рассмотрим линейную систему управления с запаздыванием, описываемую уравнением

$$y'(t)+ay'(q^{-1}t)+by(t)+cy(q^{-1}t)=u(t) \quad (t>0), \tag{1.44}$$

где $a,b,c\in\mathbb{R}, q>1$; $u(t)$ — управляющее воздействие. Функции $y(t)$ и $u(t)$ считаем вещественнозначными. Состояние системы в начальный момент времени задается условием

$$y(0)=y_0\in\mathbb{R}. \tag{1.45}$$

Требуется привести систему (1.44), (1.45) в состояние равновесия к моменту времени $T>0$. Если управлять системой на промежутке $(0,qT)$ так, чтобы иметь

$$y(t)=0 \quad (T\leqslant t\leqslant qT), \tag{1.46}$$

а затем сбросить управление, положив $u(t)\equiv 0$ $(t>qT)$, то решение задачи (1.44)–(1.46) окажется тождественно равным нулю и при $t>qT$. При этом из всех возможных управлений требуется найти управление, обладающее минимальной энергией

$$\int\limits_0^{qT} u^2(t)\,dt.$$

В результате приходим к задаче минимизации квадратичного функционала

$$J(y)=\int\limits_0^{qT}\left(y'(t)+ay'(q^{-1}t)+by(t)+cy(q^{-1}t)\right)^2\,dt\longrightarrow\min \tag{1.47}$$

на множестве функций $y(t)$, удовлетворяющих заданному начальному условию (1.45), а также условию $y(t)=0$ $(t\geqslant T)$. Решение полученной вариационной задачи естественно искать в пространстве

$$H^1_T=\{y\in H^1(0,+\infty): y(t)=0\ (t\geqslant T)\}.$$

Мы покажем далее, что при $|a|\neq q^{-1/2}$ и для любых значений параметров b и c функционал (1.47) удовлетворяет на пространстве

$$\mathring{H}^1_T=\{y\in H^1_T: y(0)=0\}=\mathring{H}^1(0,T)$$

оценке снизу

$$J(w)\geqslant\gamma\|w\|^2_{H^1(0,T)} \quad (w\in\mathring{H}^1(0,T)).$$

Это неравенство, в свою очередь, позволяет сделать вывод о существовании единственного решения вариационной задачи. Сейчас же выпишем необходимое условие экстремума функционала (1.47) (оно будет и достаточным). Это условие представляет собой интегральное тождество, определяющее обобщенное решение краевой задачи для функционально-дифференциального уравнения.

Пусть функция $y\in H^1_T$ принимает заданное начальное значение и минимизирует функционал (1.47). Для произвольной фиксированной функции $v\in\mathring{H}^1(0,T)$ рассмотрим сужение функционала (1.47) на прямую $\{y+sv\in\mathring{H}^1(0,T): s\in\mathbb{R}\}$. Это сужение будет квадратным трехчленом относительно параметра s:

$$J(y+sv)=J(y)+2sB(y,v)+s^2J(v),$$

где билинейная форма $B(y,v)$ имеет вид

$$B(y,v)=\int\limits_0^{qT}\left(y'(t)+ay'(q^{-1}t)+by(t)+cy(q^{-1}t)\right)\left(v'(t)+av'(q^{-1}t)+bv(t)+cv(q^{-1}t)\right)dt.$$

Согласно нашему предположению, минимум функции $J(y+sv)$ достигается при $s=0$, что, очевидно, равносильно требованию $B(y,v)=0$. Таким образом, решение y вариационной задачи должно удовлетворять условию $B(y,v)=0$ для любой функции $v\in \mathring{H}^1(0,T)$.

Преобразуем теперь выражение для $B(y,v)$. Слагаемые, содержащие $v'(q^{-1}t)$ и $v(q^{-1}t)$, после замены переменных $q^{-1}t=\tau$ примут вид

$$\int\limits_0^T \big(y'(q\tau)+ay'(\tau)+by(q\tau)+cy(\tau)\big)\big(av'(\tau)+cv(\tau)\big)\,qdt.$$

В оставшихся слагаемых можно также перейти к интегралу по $(0,T)$ в силу условия $v(t)=0$ $(t\geqslant T)$. После приведения подобных членов будем иметь

$$B(y,v)=\int\limits_0^T \big((1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\big)\,v'(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T \big((b+acq)y(t)+cy(q^{-1}t)+abqy(qt)\big)\,v'(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T \big((b+acq)y'(t)+aby'(q^{-1}t)+cqy'(qt)\big)\,v(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T \big((b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)\big)\,v(t)dt.$$

Если проинтегрировать по частям во второй строке полученного выражения, то интегральное тождество $B(y,v)=0$ примет вид

$$\int\limits_0^T \big((1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\big)\,v'(t)dt+$$
$$+\int\limits_0^T \big((ab-cq^{-1})y'(q^{-1}t)+(cq-abq^2)y'(qt)+(b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)\big)\,v(t)dt=0. \tag{1.48}$$

Оно выполняется для всех v из $\mathring{H}^1(0,T)$ и, следовательно, определяет обобщенное решение $y\in H^1_T$ краевой задачи

$$-\big((1+a^2q)y'(t)+ay'(q^{-1}t)+aqy'(qt)\big)'+$$
$$+(ab-cq^{-1})y'(q^{-1}t)+(cq-abq^2)y'(qt)+(b^2+c^2q)y(t)+bcy(q^{-1}t)+bcqy(qt)=0 \quad (t\in(0,T)), \tag{1.49}$$
$$y(0)=y_0,\qquad y(t)=0\quad (t\geqslant T). \tag{1.50}$$

Наоборот, пусть $y\in H^1_T$ является обобщенным решением задачи (1.49), (1.50), т. е. $B(y,v)=0$ для всех $v\in\mathring{H}^1(0,T)$. Тогда

$$J(y+v)=J(y)+2B(y,v)+J(v)=J(y)+J(v)\geqslant J(y)$$

для любой функции $v\in\mathring{H}^1(0,T)$, поскольку функционал J неотрицателен. Это означает, что y доставляет минимум функционалу (1.47). Установлена равносильность вариационной задачи (1.47), (1.45) и краевой задачи (1.49), (1.50).

Наряду с функционалом (1.47) рассмотрим соответствующий функционал без младших членов

$$J_0(w)=\int\limits_0^{qT}\big(w'(t)+aw'(q^{-1}t)\big)^2\,dt\quad (w\in\mathring{H}^1_T)$$

на пространстве $\mathring{H}^1_T$.

Лемма 1.8. *Пусть* $|a| \neq q^{-1/2}$. *Тогда существует константа* $\gamma_0 > 0$ *такая, что*

$$J_0(w) \geqslant \gamma_0 \|w\|^2_{H^1(0,T)} \tag{1.51}$$

для всех $w \in \mathring{H}^1_T$.

Доказательство. Преобразуя выражение для J_0 аналогично проделанному выше для билинейной формы B, получим

$$J_0(w) = \int_0^T \big((1+a^2q)w'(t) + aw'(q^{-1}t) + aqw'(qt)\big)\, w'(t)\, dt.$$

Учитывая, что w обращается в ноль при $t > T$, можем записать

$$J_0(w) = \big(((1+a^2q)I + aP + aqP^{-1})w', w'\big)_{L_2(0,+\infty)}.$$

Символ оператора

$$((1+a^2q)I + aP + aqP^{-1}) : L_2(0,+\infty) \to L_2(0,+\infty)$$

равен

$$r(\lambda) = 1 + a^2q + a\lambda + aq\lambda^{-1}$$

(возможность переноса всех рассуждений и результатов раздела 1.1 с $\mathbb{R}^n$ на ситуацию $(0,+\infty)$ очевидна). Вспомним, что $a \in \mathbb{R}$, а $\lambda = \sqrt{q}e^{i\theta}$, где θ пробегает $\mathbb{R}$. Поэтому

$$r(\lambda) = 1 + a^2q + 2a\sqrt{q}\cos\theta$$

есть вещественнозначная функция, минимум которой равен $(1-|a|\sqrt{q})^2$. Так что если $|a| \neq q^{-1/2}$, то

$$r(\lambda) \geqslant (1-|a|\sqrt{q})^2 > 0.$$

В силу описанного в разделе 1.1 алгебраического изоморфизма получаем, что оператор $(1+a^2q)I + aP + aqP^{-1}$ является в $L_2(0,+\infty)$ самосопряженным и положительно определенным:

$$\big(((1+a^2q)I + aP + aqP^{-1})w', w'\big)_{L_2(0,+\infty)} \geqslant (1-|a|\sqrt{q})^2 \|w'\|^2_{L_2(0,+\infty)}.$$

Остается заметить, что

$$\|w'\|_{L_2(0,+\infty)} = \|w'\|_{L_2(0,T)},$$

а $\|w'\|_{L_2(0,T)}$ задает эквивалентную норму в $\mathring{H}^1(0,T)$. □

Вернемся к исходному функционалу с младшими членами

$$J(y) = \int_0^{qT} \big(y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t)\big)^2\, dt.$$

Лемма 1.9. *Пусть* $|a| \neq q^{-1/2}$. *Тогда существует константа* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$J(w) \geqslant \gamma \|w\|^2_{H^1(0,T)} \tag{1.52}$$

для всех $w \in \mathring{H}^1_T$.

Доказательство. Из леммы 1.8 при помощи элементарного алгебраического неравенства

$$(\alpha+\beta)^2 \geqslant \alpha^2/2 - \beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

легко вытекает существование константы $\gamma_1 > 0$ такой, что

$$J(w) \geqslant \frac{\gamma_0}{2}\|w\|^2_{H^1(0,T)} - \gamma_1 \|w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{1.53}$$

для любой функции $w \in \mathring{H}^1_T$. В то же время предположим, что оценка (1.52) не имеет места. Это означает, что для любого натурального n найдется функция $w_n \in \mathring{H}^1_T$ такая, что

$$J(w_n) < \frac{1}{n}\|w_n\|^2_{H^1(0,T)}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\|w_n\|_{H^1(0,T)} = 1$ (в противном случае обе части неравенства надо разделить на $\|w_n\|^2_{H^1(0,T)}$ и перейти к $w_n/\|w_n\|_{H^1(0,T)}$) и

$$J(w_n) < \frac{1}{n}. \tag{1.54}$$

В силу компактности вложения $H^1(0,T)$ в $L_2(0,T)$, перейдем к подпоследовательности w_{n_k}, фундаментальной в $L_2(0,T)$. Но из (1.53) и (1.54) тогда будет следовать и фундаментальность w_{n_k} в $H^1(0,T)$:

$$\frac{\gamma_0}{2}\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{H^1(0,T)} \leqslant \gamma_1\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{L_2(0,T)} + J(w_{n_k} - w_{n_m}) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma_1\|w_{n_k} - w_{n_m}\|^2_{L_2(0,T)} + \frac{2}{n_k} + \frac{2}{n_m} \longrightarrow 0, \quad k,m \to \infty.$$

Таким образом, w_{n_k} сходится к некоторой функции w_0 в $\mathring{H}^1_T$. Очевидно, $\|w_0\|_{H^1(0,T)} = 1$, а предельный переход в (1.54) дает

$$J(w_0) = \int\limits_0^{qT} \left(w_0'(t) + aw_0'(q^{-1}t) + bw_0(t) + cw_0(q^{-1}t)\right)^2 \, dt = 0,$$

т. е. $w_0 \in \mathring{H}^1_T$ удовлетворяет уравнению

$$w_0'(t) + aw_0'(q^{-1}t) + bw_0(t) + cw_0(q^{-1}t) = 0 \tag{1.55}$$

почти всюду на $(0,qT)$. Поскольку $w_0(t) = 0$ $(t \geqslant T)$, уравнение (1.55) на интервале (T,qT) превращается в уравнение

$$aw_0'(q^{-1}t) + cw_0(q^{-1}t) = 0,$$

или

$$aw_0'(t) + cw_0(t) = 0 \quad (q^{-1}T < t < T)$$

(конечно, считаем, что $a^2 + c^2 \neq 0$). Отсюда с учетом $w_0(T) = 0$ следует, что $w_0(t) = 0$ $(t \geqslant q^{-1}T)$. Продолжая дальше влево аналогичным образом, получаем $w_0 = 0$ и приходим к противоречию. □

Однозначная разрешимость вариационной и соответствующей краевой задач выводится теперь стандартным образом. Надо перейти к однородным краевым условиям (это делается заменой неизвестной функции) и воспользоваться оценкой (1.52).

Теорема 1.8. *Пусть* $|a| \neq q^{-1/2}$. *Тогда задача* (1.49)*,* (1.50) *имеет единственное обобщенное решение* $y \in H^1_T$.

Доказательство. Напомним, что искомая функция y удовлетворяет при всех $v \in \mathring{H}^1_T$ интегральному тождеству (1.48), которое коротко может быть записано как $B(y,v) = 0$. Введем функцию

$$\Phi(t) = \begin{cases} y_0(t/T - 1)^2, & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Очевидно,

$$\Phi \in H^2_T = \{y \in H^2(0,+\infty) : y(t) = 0 \quad (t \geqslant T)\}$$

и $\Phi(0) = y_0$. Положим $x = y - \Phi \in \mathring{H}^1_T$. Интегральное тождество примет вид

$$B(\Phi,v) + B(x,v) = 0. \tag{1.56}$$

Но $B(x,x) = J(x)$, а тогда по лемме 1.9 непрерывная симметрическая билинейная форма $B(x,v)$ задает на $\mathring{H}^1_T = \mathring{H}^1(0,T)$ эквивалентное скалярное произведение

$$B(x,v) = (x,v)'_{\mathring{H}^1(0,T)}.$$

Понятно, что

$$|B(\Phi,v)| \leqslant k_1|y_0|\|v\|_{H^1(0,T)} \leqslant k_2|y_0|\|v\|'_{\mathring{H}^1(0,T)}.$$

Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в вещественном гильбертовом пространстве существует единственная функция $F \in \mathring{H}^1_T$ такая, что

$$B(\Phi,v) = (F,v)'_{\mathring{H}^1(0,T)}, \quad \|F\|'_{\mathring{H}^1(0,T)} \leqslant k_2|y_0|.$$

Теперь (1.56) можно переписать в виде

$$(x, v)'_{\mathring{H}^1(0,T)} + (F, v)'_{\mathring{H}^1(0,T)} = 0,$$

откуда и получаем, что функция $y = \Phi - F \in H_T^1$ является решением задачи (1.49), (1.50). $\square$

Конечно, исследовать существование и единственность решения краевой задачи (1.49), (1.50), рассматривая ее отдельно от задачи (1.47), (1.45), т. е. игнорируя ее вариационную природу, было бы затруднительно из-за наличия громоздких младших членов. Но если $b = c = 0$, то однозначная разрешимость задачи (1.49), (1.50) при $|a| \neq q^{-1/2}$ непосредственно следует из теоремы 1.4. Действительно, после описанной выше замены $y = \Phi + x$ относительно x получается задача вида (1.17), (1.18) с правой частью из $L_2(0, T)$ (поскольку $\Phi \in H_T^2$) и оператором

$$R = (1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1},$$

причем корни $\lambda_1 = -aq$ и $\lambda_2 = -1/a$ символа

$$r(\lambda) = 1 + a^2 q + a\lambda + aq\lambda^{-1}$$

таковы, что всегда один из них по абсолютной величине больше, а другой меньше, чем $\sqrt{q}$.

Кроме того, опираясь на результаты разделов 1.1–1.3, легко выписать в этом случае решение задачи (1.49), (1.50) в явном виде. Проинтегрировав (1.49) один раз, получаем

$$\big((1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1}\big)\, y' = c_1 \quad (0 < t < T), \tag{1.57}$$

где c_1 — произвольная постоянная. Воспользуемся разложением

$$(1 + a^2 q)I + aP + aqP^{-1} = (P + aqI)(P^{-1} + aI).$$

Предположим вначале, что $|a| > q^{-1/2}$. Тогда $|aq| > q^{1/2}$, в то время как $|1/a| < q^{1/2}$. Из леммы 1.2 и формулы (1.3) следует, что (1.57) равносильно соотношению

$$(P^{-1} + aI)y' = c_2 \quad (0 < t < T)$$

с некоторой постоянной c_2. Учитывая тот факт, что $y'(t) = 0$ при $t > T$, последнее равенство можно переписать в виде

$$(P^{-1} + aI)y' = c_2 h_T(t) \quad (t > 0),$$

где $h_T(t) = 1$ для $t < T$ и $h_T(t) = 0$ для $t > T$. Обращая оператор при y' в соответствии с формулой (1.6), получаем

$$y'(t) = -c_2 \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-(m+1)} h_T(q^m t) \quad (t > 0)$$

и

$$y(t) = y_0 - c_2 \int_0^t \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-(m+1)} h_T(q^m s)\, ds = y_0 - c_2 \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-(m+1)} \min(t, q^{-m}T).$$

Постоянная c_2 находится из условия $y(T) = 0$:

$$c_2 = -ay_0 \left(\sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^{-m} T \right)^{-1} = -\frac{y_0(aq + 1)}{qT}.$$

Окончательно получаем формулу для оптимальной траектории:

$$y(t) = y_0 \left(1 + \frac{aq + 1}{qT} \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-(m+1)} \min(t, q^{-m}T) \right). \tag{1.58}$$

Соответственно, оптимальное управление имеет вид

$$u(t) = \frac{y_0(aq + 1)}{qT} \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^{-(m+1)} (h_T(q^m t) + a h_T(q^{m-1} t)). \tag{1.59}$$

В случае $|a| < q^{-1/2}$, который рассматривается совершенно аналогично, будем иметь

$$y(t) = y_0 \left(1 - \frac{a+1}{T} \sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^m \min(t, q^{-m}T)\right), \tag{1.60}$$

$$u(t) = -\frac{y_0(a+1)}{T} \sum_{m=0}^{\infty} (-aq)^m (h_T(q^m t) + a h_T(q^{m-1}t)). \tag{1.61}$$

Нетрудно видеть, что формулы (1.58), (1.59) и (1.60), (1.61) задают кусочно-линейную траекторию и кусочно-постоянное управление с особенностями в точках $q^{-i}T$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Таким образом, решение вариационной задачи не принадлежит $H^2(0, T)$.

Замечание 1.7. Уравнение (1.44) в случае нулевой правой части называется обобщенным уравнением пантографа (а при $a = 0$ — просто уравнением пантографа). Уравнение пантографа возникает в астрофизике [2] (поглощение света межзвездной материей), технике [81] (динамика навесного провода электроснабжения локомотива), биологии [72] (моделирование процесса роста клеток), и имеет приложения в ряде других областей. Математическому исследованию уравнения пантографа и его обобщений посвящены работы [69, 73, 76].

Замечание 1.8. Впервые задача об успокоении системы управления с запаздыванием, сводившаяся к задаче на экстремум функционала с отклоняющимся аргументом, изучалась Н. Н. Красовским [17]. Для системы, содержащей отклонение аргумента под знаком производной (уравнение нейтрального типа), аналогичная задача рассматривалась в [51]. Теории вариационных задач для функционалов с отклоняющимся аргументом и связанных с ними краевых задач посвящены работы [13, 14].

Следующий пример посвящен многомерному аналогу вариационной задачи (1.47). Он приводит к краевой задаче для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения. Этот класс уравнений подробно изучается во второй главе.

Пример 1.7. Найдем минимум функционала

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} \big[5u_{x_1}^2(x_1, x_2) + 5u_{x_2}^2(x_1, x_2) + 2u_{x_1}(x_1/2, x_2/2)u_{x_1}(x_1, x_2) +$$
$$+ 2u_{x_2}(x_1/2, x_2/2)u_{x_2}(x_1, x_2) + u(x_1, x_2)\big]\, dx_1 dx_2$$

на (вещественном) пространстве функций $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, равных нулю в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, где Ω — это круг $x_1^2 + x_2^2 < 1$.

Квадратичную часть $J_0(u)$ данного функционала можно записать в виде

$$J_0(u) = ((5I + 2P)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} = ((5I + P + P^*)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} =$$
$$= ((5I + P + 4P^{-1})\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla(5I + 2P + 2P^{-1})u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)}.$$

Оператор $5I + P + P^*$ положительно определен в $L_2(\mathbb{R}^n)$, поскольку его символ положителен:

$$5 + \lambda + \bar{\lambda} = 5 + 4\cos\theta \geqslant 1 > 0, \quad \lambda = 2e^{i\theta}.$$

Отсюда следуют коэрцитивность функционала на $\mathring{H}^1(\Omega)$, $J_0(u) \geqslant \||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)}^2$, и существование единственного решения вариационной задачи. Для нахождения решения надо найти производную функционала $J(u)$ и приравнять ее к нулю (подобно тому, как это делалось выше в случае уравнения пантографа). Приходим к соотношению

$$2(\nabla(5I + 2P + 2P^{-1})u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} + (1, v)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

на минимизирующую функцию. Оно определяет обобщенное решение краевой задачи

$$\Delta(5I + 2P + 2P^{-1})u(x) = 1/2 \quad (x \in \Omega),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Его можно выписать в явном виде, используя метод данной главы. Находим корни уравнения

$$5 + 2\lambda + 2\lambda^{-1} = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -1/2,$$

и получаем разложение

$$5I + 2P + 2P^{-1} = 2(P + 2I)(P + (1/2)I)P^{-1} = (P + 2I)(P^{-1} + 2I).$$

Делаем замену $(P^{-1} + 2I)u = v$, учитывая, что оператор $P^{-1} + 2I$ — изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ (следствие 1.1), и решаем вспомогательную задачу

$$\Delta(P + 2I)v(x) = 1/2 \quad (x \in \Omega),$$
$$v|_{\partial\Omega} = 0.$$

К ней применима теорема 1.1, согласно которой функциональный оператор можно вынести за знак лапласиана и обратить по формуле (1.3):

$$\Delta v = 4(P + 8I)^{-1} f = (-1/2)\sum_{k=0}^{\infty}(-8)^{-(k+1)} = 1/18 \quad (f = 1/2).$$

Теперь нетрудно получить

$$v = \frac{|x|^2 - 1}{72} \quad (|x| < 1)$$

и, наконец, найти u, пользуясь формулой (1.6), а также учитывая, что $v = 0$ при $|x| > 1$:

$$u = (P^{-1} + 2I)^{-1} v = -\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^{-(k+1)} v(2^k x).$$

Точнее, если $2^{-(p+1)} < |x| < 2^{-p}$, то

$$u(x) = (-1/72)\sum_{k=0}^{p}(-2)^{-(k+1)}(2^{2k}|x|^2 - 1) = -\frac{1}{72}\left[\frac{(-2)^{p+1} - 1}{6}|x|^2 - \frac{(-2)^{-(p+1)} - 1}{3}\right],$$

$p = 0, 1, \ldots$.

Глава 2

СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ СО СЖАТИЕМ И РАСТЯЖЕНИЕМ АРГУМЕНТОВ

2.1. Проблема коэрцитивности. Случай уравнения с постоянными коэффициентами

Эта глава посвящена исследованию краевой задачи

$$A_R u(x) \equiv \sum_{|\alpha|, |\beta| \leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{2.1}$$

$$D_\nu^\mu u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (\mu = 0, \ldots, m-1), \tag{2.2}$$

где операторы $R_{\alpha\beta}$ определены формулой

$$R_{\alpha\beta} v(x) = \sum_j a_{\alpha\beta j}(x) v(q^{-j} x). \tag{2.3}$$

Здесь $D_\nu = -i\partial/\partial\nu$; ν — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$.

Краевую задачу (2.1), (2.2) будем называть первой краевой задачей или задачей Дирихле. Она является непосредственным обобщением модельной краевой задачи, рассмотренной в главе 1, на случай уравнения высокого порядка с различными функциональными операторами и переменными коэффициентами.

Задача (2.1), (2.2) рассматривается при следующих общих предположениях:

1. $q > 1$;
2. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с условием $\overline{\Omega} \subset q\Omega$;
3. индекс j в (2.3) пробегает конечное множество целых чисел и может быть как положительным, так и отрицательным;
4. коэффициенты $a_{\alpha\beta j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$ — заданные комплекснозначные функции;

5. если $q^{-j}x \notin \Omega$ при некоторых j и $x \in \Omega$, то считаем $v(q^{-j}x) = 0$ в (2.3) (другими словами, функции продолжаются нулем вне Ω перед применением к ним оператора $R_{\alpha\beta}$).

Ключевую роль в изучении задачи (2.1), (2.2) будет играть неравенство

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)) \tag{2.4}$$

на гладких финитных функциях, называемое неравенством типа Гординга. Постоянные $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ не зависят от $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Значение неравенства (2.4) определяется тем, что вместе с компактным вложением пространств $\mathring{H}^m(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ оно обеспечивает фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра задачи (2.1), (2.2) в $L_2(\Omega)$ (доказательство этих следствий, приведенное для связности изложения в разделе 2.3, опирается на стандартную технику линейного функционального анализа [15] и достаточно элементарно). Кроме того, с этим неравенством связана известная проблема Т. Като [75] о совпадении областей определения квадратных корней $A^{1/2}$ и $A^{*1/2}$ (в нашем случае это будут операторы $(\mathcal{A}_R + c_2 I)^{1/2}$ и $(\mathcal{A}_R^* + c_2 I)^{1/2}$, где $\mathcal{A}_R$ представляет собой расширение оператора A_R с $C_0^\infty(\Omega)$ на подпространство пространства $\mathring{H}^m(\Omega)$, состоящее из обобщенных решений задачи Дирихле с правыми частями f из $L_2(\Omega)$). В работах [78, 79] для абстрактных операторов A были получены достаточные условия совпадения областей определения операторов $A^{1/2}$ и $A^{*1/2}$, а также были построены примеры операторов с числовой областью значений в сколь угодно малом угле, охватывающем положительную вещественную полуось, для которых указанные области определения не совпадают. Дальнейшее развитие эти исследования в приложении к дифференциальным и функционально-дифференциальным операторам получили в работах [58, 60, 89].

Под проблемой коэрцитивности мы будем понимать задачу нахождения необходимых и достаточных условий в алгебраической форме (т. е. лишь в терминах коэффициентов уравнения) выполнения неравенства (2.4) для оператора A_R. В случае, когда A_R есть дифференциальный оператор (положим в (2.3) $a_{\alpha\beta j}(x) \equiv 0$, $j \neq 0$), неравенство (2.4) является синонимом сильной эллиптичности [10, 70]:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta 0}(x)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (x \in \overline{\Omega}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Поэтому уравнение (2.1), для которого выполнено неравенство (2.4), мы будем также называть сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения в ограниченных областях $\mathbb{R}^n$ рассматривались в [87, 88]. В работе [87] в том числе была решена проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных операторов. В этом разделе будет решена проблема коэрцитивности для оператора A_R, заданного формулами (2.1), (2.3), при постоянных коэффициентах $a_{\alpha\beta j}$ в операторах (2.3). Для этого нам понадобится более широкая по сравнению с алгеброй $\mathfrak{A}_R$ из раздела 1.1 операторная алгебра, в которую включены также операторы умножения на однородные функции нулевой степени. Начнем с предварительных рассуждений.

Пусть S^{n-1} есть единичная сфера в $\mathbb{R}^n$. Поставим в соответствие каждой функции $g \in C(S^{n-1})$ функцию $G \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ по правилу

$$G(x) = g(x/|x|) \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0). \tag{2.5}$$

Умножение на $G(x)$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ представляет собой ограниченный оператор, который мы также будем обозначать через G. Итак,

$$Gu(x) = G(x)u(x) = g(x/|x|)u(x).$$

Отображение $g \mapsto G$ есть, очевидно, гомоморфизм алгебры $C(S^{n-1})$ в алгебру ограниченных операторов $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$. Покажем, что оно является изометрией. С одной стороны,

$$\|Gu\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^2 |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant \|G\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \|g\|_{C(S^{n-1})} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad \text{т. е.} \quad \|G\| \leqslant \|g\|_{C(S^{n-1})}. \tag{2.6}$$

С другой стороны, пусть точка $\xi^0 \in S^{n-1}$ такова, что

$$|G(\xi^0)| = \|g\|_{C(S^{n-1})},$$

и пусть

$$u_\varepsilon(x) = 1 \ (|x - \xi^0| < \varepsilon), \quad u_\varepsilon(x) = 0 \ (|x - \xi^0| > \varepsilon).$$

Тогда по теореме о среднем

$$\frac{\|Gu_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}}{\|u_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}} = \left(\frac{1}{\sigma_n \varepsilon^n} \int\limits_{|x-\xi^0|<\varepsilon} |G(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} = |G(\tilde{x})|$$

для некоторого $\tilde{x}$, $|\tilde{x} - \xi^0| < \varepsilon$, так что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|Gu_\varepsilon\|}{\|u_\varepsilon\|} = |G(\xi^0)| = |g(\xi^0)|. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) следует, что $\|G\| = \|g\|_{C(S^{n-1})}$.

Таким образом, алгебра $C(S^{n-1})$ изометрически изоморфна замкнутой подалгебре $\mathfrak{A}_G$ алгебры $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$, состоящей из операторов умножения на функции $G(x)$ вида (2.5). Отсюда заключаем, что, во-первых, каждый комплексный гомоморфизм h алгебры $\mathfrak{A}_G$ имеет вид

$$h(G) = g(\xi^h) \quad (\xi^h \in S^{n-1}).$$

Во-вторых, так как полиномы $\operatorname{Pol}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ плотны в $C(S^{n-1})$ (по теореме Стоуна—Вейерштрасса [40, с. 137]), то в алгебре $\mathfrak{A}_G$ плотны полиномы $\operatorname{Pol}(G_1, \ldots, G_n)$, где G_i обозначает оператор умножения на функцию $G_i(x) = x_i/|x|$.

Далее, операторы P и P^* коммутируют с операторами из $\mathfrak{A}_G$. Следовательно, замыкание (по операторной норме) множества всех полиномов $\operatorname{Pol}(P, P^*, G_1, \ldots, G_n)$ есть коммутативная B^*-алгебра (как подалгебра B^*-алгебры $\mathcal{B}\left(L_2(\mathbb{R}^n)\right)$). Обозначим ее $\mathfrak{A}_{R,G}$. Очевидно, $\mathfrak{A}_G$ является замкнутой подалгеброй в $\mathfrak{A}_{R,G}$.

По теореме Гельфанда—Наймарка [40, с. 311] преобразование Гельфанда осуществляет изометрический изоморфизм

$$\mathfrak{A}_{R,G} \ni T \mapsto \widehat{T} \in C(\Delta_{R,G})$$

алгебры $\mathfrak{A}_{R,G}$ на алгебру $C(\Delta_{R,G})$, где $\Delta_{R,G}$ — пространство максимальных идеалов алгебры $\mathfrak{A}_{R,G}$. Пространство $\Delta_{R,G}$ снабжается топологией Гельфанда, которая является хаусдорфовой и компактной [40, с.300].

Покажем, что $\Delta_{R,G}$ есть с точностью до гомеоморфизма некоторый компакт

$$K \subset \{(\lambda, \xi) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n : |\lambda| = q^{n/2}, \, |\xi| = 1\}.$$

Для этого рассмотрим отображение $\phi : \Delta_{R,G} \to \mathbb{C}^{n+1}$, заданное формулой

$$\phi(h) = \big(\widehat{P}(h), \widehat{G}_1(h), \ldots, \widehat{G}_n(h)\big).$$

По определению преобразования Гельфанда оно непрерывно, а множество значений первой координаты есть $\sigma(P)$. Если h — гомоморфизм $\mathfrak{A}_{R,G}$, то h есть гомоморфизм $\mathfrak{A}_G$, и поэтому

$$h(G) = g(\xi^h) \quad (\xi^h \in S^{n-1}).$$

Но тогда

$$\big(\widehat{G}_1(h), \ldots, \widehat{G}_n(h)\big) = \big(h(G_1), \ldots, h(G_n)\big) = (\xi_1^h, \ldots, \xi_n^h) = \xi^h.$$

Таким образом, множество значений векторной функции $\phi(h)$ есть компакт $K \subset \sigma(P) \times S^{n-1}$.

Далее пусть $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, т. е. $h_1(P) = h_2(P)$ и $h_1(G_i) = h_2(G_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Так как преобразование Гельфанда сохраняет инволюцию, то $h_1(P^*) = h_2(P^*)$. Отсюда следует, что гомоморфизмы совпадают на полиномах $\operatorname{Pol}(P, P^*, G_1, \ldots, G_n)$, и в силу плотности последних получаем $h_1 = h_2$. Итак, отображение ϕ взаимно однозначно, а, как известно, непрерывное взаимно однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово есть гомеоморфизм.

В результате имеем изометрический изоморфизм

$$\Psi : \mathfrak{A}_{R,G} \to C(K), \quad \Psi(T) = \widehat{T} \circ \phi^{-1} \ (T \in \mathfrak{A}_{R,G}),$$

при этом
$$\Psi(P)(\lambda,\xi)=\widehat{P}\left(\phi^{-1}(\lambda,\xi)\right)=\lambda,$$
$$\Psi(G_i)(\lambda,\xi)=\widehat{G}_i\left(\phi^{-1}(\lambda,\xi)\right)=\xi_i \quad (i=1,\ldots,n).$$

Так как Ψ — гомоморфизм, то
$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\sum_j a_{\alpha\beta j}P^j G_1^{\alpha_1+\beta_1}\ldots G_n^{\alpha_n+\beta_n} \xrightarrow{\Psi} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\sum_j a_{\alpha\beta j}\lambda^j\xi^{\alpha+\beta}, \quad (\lambda,\xi)\in K.$$
Здесь $a_{\alpha\beta j}\in\mathbb{C}$; $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$ — мультииндексы; j пробегает конечное множество целых значений.

Обозначим
$$R_{\alpha\beta}=\sum_j a_{\alpha\beta j}P^j, \quad r_{\alpha\beta}(\lambda)=\sum_j a_{\alpha\beta j}\lambda^j,$$
$$G^{\alpha+\beta}=G_1^{\alpha_1+\beta_1}\ldots G_n^{\alpha_n+\beta_n}.$$

Лемма 2.1. *Пусть*
$$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda)\xi^{\alpha+\beta}>0 \quad ((\lambda,\xi)\in\sigma(P)\times S^{n-1}).$$
Тогда оператор
$$T=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(R_{\alpha\beta}+R^*_{\alpha\beta})G^{\alpha+\beta}: L_2(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)$$
положительно определен, т. е.
$$\mathrm{Re}\,(Tu,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad (u\in L_2(\mathbb{R}^n)).$$

Лемма вытекает из построенного изоморфизма и того факта, что спектр оператора один и тот же во всех *-алгебрах, его содержащих.

Систематическое применение матричного подхода в духе разностных операторов к изучению операторов
$$Ru=\sum_{j=-J}^{J}a_jP^ju=\sum_{j=-J}^{J}a_ju(q^{-j}x_1,\ldots,q^{-j}x_n), \quad a_j\in\mathbb{C}, \tag{2.8}$$
затруднительно вследствие бесконечной размерности получающихся матриц — так будет, если область содержит начало координат. С другой стороны, эта «бесконечность» дает возможность предельного перехода. Ниже (лемма 2.2) приведен основной результат такого сорта. Он будет использован при выводе необходимых условий выполнения неравенства типа Гординга.

Пусть ограниченное открытое множество $O_1\subset\mathbb{R}^n$ обладает тем свойством, что $q^{-1}O_1\cap O_1=\varnothing$, и пусть N — натуральное число. Положим
$$O_k=q^{1-k}O_1,\ k=1,\ldots,N, \quad O=\bigcup_{k=1}^N O_k.$$
Имеем $O_{k_1}\cap O_{k_2}=\varnothing$ при $k_1\neq k_2$.

По всякой функции $u\in L_2(O)$ строим вектор-функцию
$$\mathbf{u}=(u_1\ \ldots\ u_N)^T\in L_2^N(O_1),$$
$$u_k(x)=q^{n(1-k)/2}u(q^{1-k}x) \quad (x\in O_1,\ k=1,\ldots,N). \tag{2.9}$$
Отображение $u\mapsto\mathbf{u}$ является унитарным. Действительно, используя замену переменных, будем иметь
$$(u,v)_{L_2(O)}=\sum_{k=1}^N\int\limits_{O_k}u(x)\overline{v(x)}\,dx=\sum_{k=1}^N q^{n(1-k)}\int\limits_{O_1}u(q^{1-k}x)\overline{v(q^{1-k}x)}\,dx=$$
$$=\sum_{k=1}^N(u_k,v_k)_{L_2(O_1)}=(\mathbf{u},\mathbf{v})_{L_2^N(O_1)}. \tag{2.10}$$

Далее по заданному формулой (2.8) оператору R строим матрицу $\mathbf{R}$ порядка $N\times N$ с элементами

$$\rho_{jk} = \begin{cases} q^{n(k-j)/2}a_{k-j}, & |k-j| \leqslant J, \\ 0, & |k-j| > J. \end{cases}$$

Тогда, если $u \in L_2(O)$, $v = Ru$ и $\mathbf{v} = (v_1 \ldots v_N)^T \in L_2^N(O_1)$ — соответствующая вектор-функция (еще раз отметим, что по нашему соглашению u и v равны нулю вне O), то

$$v_k(x) = q^{n(1-k)/2}(Ru)(q^{1-k}x) = \sum_{|j|\leqslant J} q^{n(1-k)/2}a_j u(q^{1-(k+j)}x) =$$

$$= \sum_{|l-k|\leqslant J} q^{n(1-l)/2}q^{n(l-k)/2}a_{l-k}u(q^{1-l}x) = \sum_{l=1}^{N} \rho_{kl}u_l(x), \quad x \in O_1.$$

Таким образом,

$$v = Ru \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{Ru} \tag{2.11}$$

для любых функций $u, v \in L_2(O)$ и соответствующих вектор-функций $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_2^N(O_1)$.

Лемма 2.2. *Пусть матрицы $\mathbf{R} + \mathbf{R}^*$ равномерно по N положительно определены, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{Rz}, \mathbf{z}) \geqslant c|\mathbf{z}|^2 \quad (N = 1, 2, \ldots; \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N).$$

Тогда оператор $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ положительно определен.

Доказательство. Зафиксируем натуральное N. Положим

$$O_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : q^{-1}M < |x| < M\right\}, \quad O = \bigcup_{k=1}^{N} q^{1-k}O_1,$$

где $M > 0$ произвольно. Пусть $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $u = 0$ вне O и $v = Ru$. Используя условие леммы, (2.10) и (2.11), будем иметь

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{Re}(v, u)_{L_2(O)} = \operatorname{Re}(\mathbf{v}, \mathbf{u})_{L_2^N(O_1)} =$$

$$= \operatorname{Re}(\mathbf{Ru}, \mathbf{u})_{L_2^N(O_1)} \geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(O_1)} = c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

причем c не зависит от N, M, u. Но при всевозможных M и N функция u пробегает всюду плотное в $L_2(\mathbb{R}^n)$ подмножество. Поэтому неравенство

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

выполняется для любых $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. □

Из положительной определенности оператора $R + R^*$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ в свою очередь следует, что

$$\operatorname{Re} r(\lambda) = \operatorname{Re} \sum_{j=-J}^{J} a_j\lambda^j > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2}).$$

Следующий результат является примером применения леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Предположим, что Ω — произвольная область в $\mathbb{R}^n$, содержащая начало координат, и оператор $R + R^* : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ положительно определен. Тогда положительно определенным будет и оператор $R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in L_2(\Omega)). \tag{2.12}$$

Возьмем лежащую в Ω шаровую окрестность B начала координат и положим

$$O_1 = B \setminus q^{-1}\overline{B}, \quad O_k = q^{1-k}O_1\ (k = 1, \ldots, N), \quad O = \bigcup_{k=1}^{N} O_k.$$

Подставляя в (2.12) функцию z, принимающую постоянное значение на O_k и равную нулю вне O, получим с помощью (2.10) и (2.11)

$$\operatorname{Re}(Rz,z)_{L_2(\Omega)} = \operatorname{Re}(Rz,z)_{L_2(O)} = \operatorname{Re}(\mathbf{Rz},\mathbf{z})_{L_2^N(O_1)} = \mu(O_1)\operatorname{Re}(\mathbf{Rz},\mathbf{z}) \geqslant$$

$$\geqslant c\|z\|^2_{L_2(\Omega)} = c\|z\|^2_{L_2(O)} = c\|\mathbf{z}\|^2_{L_2^N(O_1)} = c\mu(O_1)|\mathbf{z}|^2 \quad (\mathbf{z}\in\mathbb{C}^N).$$

Таким образом, матрицы $\mathbf{R}+\mathbf{R}^*$ положительно определены равномерно по N. Остается применить лемму 2.2. □

Перейдем теперь к формулировке необходимых и достаточных условий сильной эллиптичности уравнения (2.1) при постоянных коэффициентах $a_{\alpha\beta j}$ в операторах $R_{\alpha\beta}$:

$$A_R u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x\in\Omega), \tag{2.13}$$

$$R_{\alpha\beta} v(x) = \sum_j a_{\alpha\beta j} v(q^{-j}x), \quad a_{\alpha\beta j}\in\mathbb{C}. \tag{2.14}$$

Символом уравнения (2.13) будем называть выражение

$$a_R(\lambda,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\sum_j a_{\alpha\beta j}\lambda^j\xi^{\alpha+\beta} \quad (\lambda\in\mathbb{C},\ \xi\in\mathbb{R}^n).$$

Начнем с теоремы о достаточных условиях. Отметим, что эти достаточные условия не зависят от рассматриваемой области Ω, которая может быть совершенно произвольной.

Теорема 2.1. *Если выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1), \tag{2.15}$$

то для любой ограниченной области Ω уравнение (2.13) *является сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Легко видеть, что младшие члены оператора в уравнении (2.13) не влияют на выполнение неравенства (2.4), а лишь изменяют значения постоянных c_1 и c_2. Действительно, интегрируя по частям с учетом финитности функции u, применяя неравенство Коши—Буняковского, ограниченность операторов $R_{\alpha\beta}$ в $L_2(\Omega)$ и известное интерполяционное неравенство [1]

$$t\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant c_{\Omega,m}(\|u\|_{H^m(\Omega)} + t^m\|u\|_{L_2(\Omega)}), \tag{2.16}$$

в котором постоянная $c_{\Omega,m}>0$ не зависит от $u\in H^m(\Omega)$ и $t>0$, будем иметь

$$\left|\sum_{|\alpha|+|\beta|<2m}\Big(D^\alpha R_{\alpha\beta}D^\beta u, u\Big)_{L_2(\Omega)}\right| = \left|\sum_{|\alpha|+|\beta|<2m}\Big(R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha u\Big)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant M_1 t^{-1}\Big(\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + t^m\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}\Big)$$

с некоторой постоянной $M_1>0$. Отсюда с использованием неравенства

$$2ab \leqslant \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2 \quad (a\geqslant 0, b\geqslant 0, \varepsilon>0)$$

приходим к оценке

$$\left|\sum_{|\alpha|+|\beta|<2m}\Big(D^\alpha R_{\alpha\beta}D^\beta u, u\Big)_{L_2(\Omega)}\right| \leqslant M_1\Big(2t^{-1}\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + t^{2m-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\Big)$$

для всех $u\in C_0^\infty(\Omega)$ и $t>0$ (положили $\varepsilon = t^{-m}$). Взяв теперь t достаточно большим, например, $t\geqslant 4M_1/c_1$, получаем требуемое утверждение. Таким образом, вопрос сводится лишь к оценке старшей части оператора A_R.

Очевидно,

$$\overline{a_R(\lambda,\xi)} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\overline{r_{\alpha\beta}(\lambda)}\xi^{\alpha+\beta} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\overline{r_{\beta\alpha}(\lambda)}\xi^{\alpha+\beta},$$

поэтому

$$2\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(r_{\alpha\beta}(\lambda) + \overline{r_{\beta\alpha}(\lambda)}\right)\xi^{\alpha+\beta}.$$

Кроме того, подставляя $\overline{\lambda}$ вместо λ в условие (2.15) и вводя обозначение $\tilde r_{\alpha\beta}(\lambda) = r_{\alpha\beta}(\overline{\lambda})$ (выражение $\tilde r_{\alpha\beta}(\lambda)$ — символ оператора $\widetilde R_{\alpha\beta}$), перепишем это условие в эквивалентной форме

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(\tilde r_{\alpha\beta}(\lambda) + \overline{\tilde r_{\beta\alpha}(\lambda)}\right)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1). \tag{2.17}$$

В скалярном произведении $(A_R u, u)_{L_2(\Omega)}$ рассмотрим слагаемые, входящие в старшую часть оператора A_R. Перейдем к преобразованию Фурье. После интегрирования по частям с учетом $\operatorname{supp} u \subset \Omega$ и применения теоремы Планшереля получаем (суммирование проводится по всем мультииндексам α и β таким, что $|\alpha| = |\beta| = m$)

$$\begin{aligned}
2\operatorname{Re}\sum \left(D^\alpha R_{\alpha\beta} D^\beta u, u\right)_{L_2(\Omega)} &= \sum \left((R_{\alpha\beta} + R^*_{\beta\alpha})D^\beta u, D^\alpha u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \sum \left((\widetilde R_{\alpha\beta} + \widetilde R^*_{\beta\alpha})(\xi^\beta \tilde u), \xi^\alpha \tilde u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \sum \left(\left(\widetilde R_{\alpha\beta} + \widetilde R^*_{\beta\alpha}\right)\frac{\xi^\beta}{|\xi|^m}|\xi|^m \tilde u, \frac{\xi^\alpha}{|\xi|^m}|\xi|^m \tilde u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \sum \left(\left(\widetilde R_{\alpha\beta} + \widetilde R^*_{\beta\alpha}\right)\frac{\xi^{\alpha+\beta}}{|\xi|^{2m}}|\xi|^m \tilde u, |\xi|^m \tilde u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \\
&= \left(\sum (\widetilde R_{\alpha\beta} + \widetilde R^*_{\beta\alpha}) G^{\alpha+\beta}(|\xi|^m \tilde u), |\xi|^m \tilde u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Существенным здесь является то, что операторы вида (2.8) ($R_{\alpha\beta}$ или $\widetilde R_{\alpha\beta}$) коммутируют с операторами умножения на однородные функции нулевой степени.

Остается воспользоваться соотношением (2.17) и леммой 2.1. Продолжая (2.18), будем иметь

$$\left(\sum (\widetilde R_{\alpha\beta} + \widetilde R^*_{\beta\alpha}) G^{\alpha+\beta}(|\xi|^m \tilde u), |\xi|^m \tilde u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c\left\||\xi|^m \tilde u\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \tag{2.19}$$

по теореме Планшереля и теореме об эквивалентных нормах в $\mathring{H}^m(\Omega)$. Теорема доказана. □

Достаточное условие (2.15) кажется весьма грубым, поскольку оно не учитывает вид области Ω и, кроме того, положительность символа проверяется на всем прямом произведении $\sigma(P) \times S^{n-1}$, а не на компакте K, который есть, вообще говоря, подмножество $\sigma(P) \times S^{n-1}$. Тем не менее, для областей, содержащих начало координат, это условие оказывается и необходимым для сильной эллиптичности.

Теорема 2.2. *Пусть уравнение* (2.13) *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega}$ *и* $0 \in \Omega$. *Тогда*

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1).$$

Доказательство. Интегрируя в (2.4) по частям и оценивая младшие члены уравнения, будем иметь

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\left(R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha u\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_3\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_4\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2.20}$$

с некоторыми не зависящими от $u \in C_0^\infty(\Omega)$ постоянными $c_3 > 0$, $c_4 \geqslant 0$. Зафиксируем лежащую в Ω шаровую окрестность B начала координат и натуральное N. Обозначим

$$O_1 = B \setminus q^{-1}\overline{B}, \quad O_k = q^{1-k}O_1,\ k = 2,\ldots,N, \quad O = \bigcup_{k=1}^N O_k.$$

Будем подставлять в неравенство (2.20) функции с носителями в O, $u \in C_0^\infty(O) \subset C_0^\infty(\Omega)$. По каждой такой функции $u(x)$ строим вектор-функцию (см. (2.9))

$$\mathbf{w} = (w_1 \ldots w_N)^T \in C_0^{\infty,N}(O_1),$$
$$w_k(x) = q^{m(k-1)}u_k(x) \quad (x \in O_1;\ k = 1,\ldots,N).$$

Для всех мультииндексов α, $|\alpha| = m$, справедливы соотношения

$$(D^\alpha u)_k(x) = q^{n(1-k)/2} D^\alpha u(y)\,|_{y=q^{1-k}x} = q^{m(k-1)} q^{n(1-k)/2} D^\alpha \Big(u(q^{1-k}x) \Big) =$$

$$= q^{m(k-1)} D^\alpha u_k(x) = D^\alpha w_k(x),$$

т. е. функции $D^\alpha u$ отвечает вектор-функция $D^\alpha \mathbf{w}$ в области O_1. Отсюда на основании соотношений (2.10), (2.11) получаем

$$(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)} = (R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(O)} = (\mathbf{R}_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w})_{L_2^N(O_1)},$$

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \sim \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^2_{L_2(O)} = \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{N} \|(D^\alpha u)_k\|^2_{L_2(O_1)} =$$

$$= \sum_{|\alpha|=m} \sum_{k=1}^{N} \|D^\alpha w_k\|^2_{L_2(O_1)} = \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha \mathbf{w}\|^2_{L_2^N(O_1)} \sim \|\mathbf{w}\|^2_{H^{m,N}(O_1)},$$

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|^2_{L_2(O_1)} = \sum_{k=1}^{N} q^{2m(1-k)} \|w_k\|^2_{L_2(O_1)} \leqslant \|\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(O_1)}.$$

Теперь неравенство (2.20) может быть переписано в виде

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \Big(\mathbf{R}_{\alpha\beta} D^\beta \mathbf{w}, D^\alpha \mathbf{w} \Big)_{L_2^N(O_1)} \geqslant c_5 \|\mathbf{w}\|^2_{H^{m,N}(O_1)} - c_4 \|\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(O_1)},$$

где $\mathbf{w} \in C_0^{\infty,N}(O_1)$ — произвольная вектор-функция, а c_4, c_5 не зависят от N и $\mathbf{w}$. Отсюда и из классических результатов о сильно эллиптических системах [10] следует, что для всех натуральных N матричный оператор $\sum\limits_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha \mathbf{R}_{\alpha\beta} D^\beta$ — сильно эллиптический:

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} \big((\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^*_{\alpha\beta}) \mathbf{z}, \mathbf{z} \big) \geqslant c_5 |\xi|^{2m} |\mathbf{z}|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N).$$

Другими словами, для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} (\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^*_{\alpha\beta})$$

положительно определены равномерно по N. По лемме 2.1 оператор

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} (R_{\alpha\beta} + R^*_{\alpha\beta}) : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

положительно определен. Будучи оператором вида (2.8) (ξ здесь — фиксированный вектор), он имеет символ с положительной вещественной частью:

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} r_{\alpha\beta}(\lambda) \xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2}).$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.1. В случае постоянных коэффициентов неравенство (2.15) является критерием сильной эллиптичности уравнения (2.13) в $\overline{\Omega}$ для произвольной ограниченной области Ω, содержащей начало координат. Требование $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ нигде не использовалось.

Замечание 2.2. Из доказательства теорем 2.1 и 2.2 видно, что в случае отсутствия младших членов сильно эллиптическое уравнение (2.13) удовлетворяет неравенству (2.4) при постоянной $c_2 = 0$.

Пример 2.1. Выясним, при каких значениях комплексных параметров a_1, a_2 уравнение

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\big(u(x)+a_1u(x/2)\big)-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big(u(x)+a_2u(x/4)\big)=f(x)$$

будет сильно эллиптическим в круге $\left\{|x|^2=x_1^2+x_2^2\leqslant 1\right\}$.

Выпишем символ уравнения:

$$a_R(\lambda,\xi)=\Big(1+\frac{a_1}{2}\lambda\Big)\,\xi_1^2+\Big(1+\frac{a_2}{4}\lambda^2\Big)\,\xi_2^2.$$

В силу теорем 2.1, 2.2 вопрос сводится к проверке условия $\operatorname{Re}a_R(\lambda,\xi)>0$ на множестве

$$|\lambda|=2,\quad |\xi|^2=\xi_1^2+\xi_2^2=1.$$

Записывая

$$a_1=|a_1|e^{i\theta_1},\quad a_2=|a_2|e^{i\theta_2},\quad \lambda=2e^{i\theta},$$

после элементарных преобразований приходим к неравенству

$$(1+|a_1|\cos(\theta+\theta_1))\xi_1^2+(1+|a_2|\cos(2\theta+\theta_2))\xi_2^2>0,$$

которое должно выполняться при всех $\theta\in\mathbb{R}$, $\xi_1^2+\xi_2^2=1$. Оно равносильно системе

$$(1+|a_1|\cos(\theta+\theta_1))>0,\quad (1+|a_2|\cos(2\theta+\theta_2))>0\quad(\theta\in\mathbb{R}),$$

которая дает следующие необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности: $|a_1|<1$, $|a_2|<1$.

Пример 2.2. Рассмотрим тот же вопрос для уравнения

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\big(u(x)+a_1u(x/3)\big)+\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\partial u(x)/\partial x_2\right)+2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big(u(x)+a_2u(x/3)\big)\right)=f(x)$$

при $|x_1|<1$, $|x_2|<1$. Имеем

$$a_R(\lambda,\xi)=\Big(1+\frac{a_1}{3}\lambda\Big)\,\xi_1^2+\xi_1\xi_2+2\,\Big(1+\frac{a_2}{3}\lambda\Big)\,\xi_2^2,$$

так что сильная эллиптичность равносильна требованию

$$(1+|a_1|\cos(\theta+\theta_1))\xi_1^2+\xi_1\xi_2+2(1+|a_2|\cos(\theta+\theta_2))\xi_2^2>0\quad(\theta\in\mathbb{R},\xi_1^2+\xi_2^2=1).$$

Матрица

$$\begin{bmatrix}(1+|a_1|\cos(\theta+\theta_1)) & 1/2\\ 1/2 & 2(1+|a_2|\cos(\theta+\theta_2))\end{bmatrix}$$

квадратичной формы при всех $\theta\in\mathbb{R}$ должна быть положительной, т. е. должны выполняться условия $|a_1|<1$, $|a_2|<1$ и

$$(1+|a_1|\cos(\theta+\theta_1))(1+|a_2|\cos(\theta+\theta_2))>\frac{1}{8}\quad(\theta\in\mathbb{R}).$$

Рассмотрим последнее неравенство в случае вещественных параметров,

$$(1+a_1t)(1+a_2t)>\frac{1}{8}\quad(|t|\leqslant 1).$$

На квадрате $\{|a_1|<1,|a_2|<1\}$ оно равносильно системе

$$(1+a_1)(1+a_2)>\frac{1}{8},\quad (1-a_1)(1-a_2)>\frac{1}{8}.$$

В результате для вещественных параметров получается следующая область сильной эллиптичности:

$$|a_1|<\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}},\quad -\frac{8a_1+7}{8a_1+8}<a_2<\frac{8a_1-7}{8a_1-8}.$$

2.2. Проблема коэрцитивности. Случай уравнения с переменными коэффициентами

В этом разделе исследуется проблема коэрцитивности для функционально-дифференциального оператора A_R, заданного формулами (2.1), (2.3), с переменными коэффициентами в операторах $R_{\alpha\beta}$. Будут получены необходимые условия и ряд достаточных условий сильной эллиптичности. Требование $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ для этого раздела будет существенным, и мы считаем его выполненным.

Следует отметить, что результат предыдущего раздела на переменные коэффициенты непосредственно не обобщается: неверно было бы требовать выполнения похожего на (2.15) неравенства

$$\operatorname{Re} a_R(x, \lambda, \xi) > 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ |\lambda| = q^{n/2},\ |\xi| = 1)$$

с «замороженными» в каждой точке области коэффициентами $a_{\alpha\beta j}(x)$ (будет приведен соответствующий пример). Кроме того, как уже отмечалось выше, переход к переменным коэффициентам представляет определенную техническую трудность, связанную с тем, что в рассматриваемой ситуации (область содержит начало координат — неподвижную точку для преобразования сжатия) метод локализации не работает. Тем не менее, вывод необходимых условий сильной эллиптичности вполне аналогичен рассуждениям предыдущего раздела и основан на сведении к сильно эллиптическим системам дифференциальных уравнений. Для получения достаточных условий применяется иной метод исследования, основанный на специальном разложении функционально-дифференциального оператора с переменными коэффициентами и использовании элементов теории псевдодифференциальных операторов. В случае постоянных коэффициентов все найденные в этом разделе условия совпадают и превращаются в условие (2.15). Начнем с необходимых условий.

Определим область $\Omega_N = \Omega \setminus q^{-N}\overline{\Omega}$ для всякого натурального числа N. Каждой функции $u \in L_2(\Omega_N)$ поставим в соответствие вектор-функцию $\mathbf{u} \in L_2^N(\Omega_1)$ по формуле

$$\mathbf{u}(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))^T, \quad u_k(x) = q^{n(1-k)/2} u(q^{1-k}x), \quad x \in \Omega_1, \quad k = 1, \dots, N,$$

имея при этом

$$(u, v)_{L_2(\Omega_N)} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_2^N(\Omega_1)} = \sum_{k=1}^{N} (u_k, v_k)_{L_2(\Omega_1)}.$$

По оператору R вида (2.3),

$$Ru(x) = \sum_j a_j(x) u(q^{-j}x),$$

построим в Ω_1 матрицы-функции размера $N \times N$, $N = 1, 2, \dots,$

$$\mathbf{R}_N(x) = \begin{pmatrix} a_0(x) & q^{n/2}a_1(x) & q^n a_2(x) & \dots \\ q^{-n/2}a_{-1}(q^{-1}x) & a_0(q^{-1}x) & q^{n/2}a_1(q^{-1}x) & \dots \\ q^{-n}a_{-2}(q^{-2}x) & q^{-n/2}a_{-1}(q^{-2}x) & a_0(q^{-2}x) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Мы рассматриваем R как ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ и в $L_2(\Omega_N)$ для каждого фиксированного N, предполагая, что функция u продолжена в $\mathbb{R}^n$ нулем вне Ω (Ω_N), а функция Ru сужается на Ω (Ω_N). Имея это в виду, нетрудно проверить аналогично предыдущему разделу, что соотношение $Ru = v$ для функций $u, v \in L_2(\Omega_N)$ может быть записано в эквивалентной форме $\mathbf{R}_N\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Другими словами, оператор R по-прежнему действует как умножение на матрицу $\mathbf{R}_N(x)$ при таком векторном представлении. Отличие от предыдущего раздела состоит лишь в том, что матрицы $\mathbf{R}_N$ сейчас переменные, но это никак не сказывается на выводе утверждения о положительной определенности функционального оператора при условии равномерной положительной определенности семейства матриц. Следующая лемма аналогична лемме 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть матрицы $\mathbf{R}_N(x) + \mathbf{R}_N^*(x)$ положительно определены равномерно по N и x, т. е. существует постоянная $C > 0$ такая, что неравенство*

$$\operatorname{Re}(\mathbf{R}_N(x)\mathbf{z}, \mathbf{z}) \geqslant C|\mathbf{z}|^2$$

выполняется для всех $N = 1, 2, \dots,$ $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$ и $x \in \Omega_1$. Тогда оператор

$$R + R^* : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$$

положительно определен.

Доказательство. Зафиксируем натуральное N и возьмем произвольную функцию $u \in L_2(\Omega)$ такую, что $u = 0$ в $q^{-N}\Omega$. В условиях леммы

$$\frac{1}{2}((R + R^*)u, u)_{L_2(\Omega)} = \operatorname{Re}(\mathbf{R}_N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2^N(\Omega_1)} = \operatorname{Re}\int\limits_{\Omega_1} (\mathbf{R}_N(x)\mathbf{u}(x), \mathbf{u}(x))\, dx \geqslant$$

$$\geqslant C \int\limits_{\Omega_1} |\mathbf{u}(x)|^2 dx = C\|\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} = C\|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку N можно выбрать сколь угодно большим, функция u пробегает всюду плотное подмножество в $L_2(\Omega)$, и лемма тем самым доказана. □

Теорема 2.3. *Пусть уравнение* (2.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega} \subset q\Omega$. *Тогда оператор*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}(R_{\alpha\beta} + R^*_{\alpha\beta}) : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$$

положительно определен при всяком ненулевом векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. После интегрирования по частям слева в неравенстве (2.4) и оценки младших членов оператора A_R обычным способом, используя ограниченность операторов $R_{\alpha\beta}$ в $L_2(\Omega)$ и интерполяционное неравенство (2.16), будем иметь

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_3\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_4\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{2.21}$$

с постоянными $c_3 > 0$ и $c_4 \geqslant 0$, не зависящими от $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Зафиксируем N и $x^0 \in \Omega_1$. Пусть $U = U(x^0)$ — (шаровая) окрестность точки x^0 такая, что $\overline{U} \subset \Omega_1$. С этого момента мы будем рассматривать неравенство (2.21) лишь для C^∞-функций с носителями в $\bigcup\limits_{k=1}^{N} q^{1-k}U$. Переходя к векторным обозначениям, мы показываем, как при доказательстве теоремы 2.2, что из (2.21) вытекает неравенство

$$\operatorname{Re}\int\limits_{\Omega_1} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x)D^\beta\mathbf{w}(x), D^\alpha\mathbf{w}(x))\, dx \geqslant c_3 \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} - c_4\|\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(\Omega_1)} \tag{2.22}$$

для вектор-функции $\mathbf{w}(x) = (w_1(x), \ldots, w_N(x))^T$,

$$w_k(x) = q^{m(k-1)}u_k(x) \quad (x \in \Omega_1;\ k = 1, \ldots, N).$$

По построению, $\mathbf{w}$ — произвольный элемент пространства $C_0^{\infty,N}(U)$.

Поскольку матрицы $\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x)$ непрерывно зависят от точки $x \in \Omega_1$, можно выбрать окрестность U настолько малой, чтобы иметь

$$\left|\operatorname{Re}\int\limits_U \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} ((\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x) - \mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0))D^\beta\mathbf{w}(x), D^\alpha\mathbf{w}(x))\, dx\right| \leqslant \frac{c_3}{2} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(U)} \tag{2.23}$$

при $\mathbf{w} \in C_0^{\infty,N}(U)$. Величина этой окрестности зависит от N. Из (2.22) и (2.23) следует, что

$$\operatorname{Re}\int\limits_U \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0)D^\beta\mathbf{w}(x), D^\alpha\mathbf{w}(x))\, dx \geqslant \frac{c_3}{2} \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(U)} - c_4\|\mathbf{w}\|^2_{L_2^N(U)} \tag{2.24}$$

для всех вектор-функций $\mathbf{w} \in C_0^{\infty,N}(U)$. Радиус h окрестности $U = U_h(x^0)$ точки x^0, в которой уравнению (2.1) отвечает полученная сильно эллиптическая система из N дифференциальных уравнений с «замороженными» в точке x^0 коэффициентами, уменьшается, вообще говоря, с ростом N. Однако, это не оказывает влияния на константу c_3 сильной эллиптичности. Чтобы убедиться в этом, мы используем известное рассуждение для сильно эллиптических систем [10]: рассмотрим замену переменных $y = t(x - x^0)$, $t \geqslant 1$, отображающую шар $U_h(x^0)$ на шар $U_{th}(0)$.

Пространство $C_0^{\infty,N}(U_h(x^0))$ вектор-функций $\mathbf{w}(x)$ перейдет в пространство $C_0^{\infty,N}(U_{th}(0))$ функций $\mathbf{v}(y) = \mathbf{w}(x^0 + y/t)$. При этом

$$D_x^\alpha \mathbf{w}(x) = t^m D_y^\alpha \mathbf{v}(y) \ \text{ и } \ dx = t^{-n} dy.$$

Переходя к новой переменной y в интегралах в неравенстве (2.24), будем иметь

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \int\limits_{|y|<th} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0) D^\beta \mathbf{v}(y), D^\alpha \mathbf{v}(y))\, dy \geqslant \\ \geqslant \frac{c_3}{2} \int\limits_{|y|<th} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \mathbf{v}(y)|^2\, dy - c_4 t^{-2m} \int\limits_{|y|<th} |\mathbf{v}(y)|^2\, dy \geqslant \\ \geqslant \frac{c_3}{2} \int\limits_{|y|<th} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \mathbf{v}(y)|^2\, dy - c_4 \int\limits_{|y|<th} |\mathbf{v}(y)|^2\, dy,\end{aligned}$$

где $\mathbf{v}$ — произвольная вектор-функция из $C_0^{\infty,N}(U_{th}(0))$. Поскольку $t \geqslant 1$ можно брать любым, приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0) D^\beta \mathbf{v}(y), D^\alpha \mathbf{v}(y))\, dy \geqslant \frac{c_3}{2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \mathbf{v}(y)|^2\, dy - c_4 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathbf{v}(y)|^2\, dy, \qquad (2.25)$$

которое выполняется уже для всех $\mathbf{v} \in C_0^{\infty,N}(\mathbb{R}^n)$.

Положим теперь в неравенстве (2.25) $\mathbf{v}(y) = v(y)\mathbf{z}$, где $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — произвольная скалярная функция, а $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$. Переходя к преобразованию Фурье и применяя теорему Планшереля, будем иметь

$$\operatorname{Re} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} \left(\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0)\mathbf{z}, \mathbf{z}\right) |\tilde{v}(\xi)|^2\, d\xi \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{c_3}{2}|\xi|^{2m} - c_4\right) |\mathbf{z}|^2 |\tilde{v}(\xi)|^2\, d\xi. \qquad (2.26)$$

Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ всюду плотно в $H^m(\mathbb{R}^n)$, а преобразование Фурье отображает пространство $H^m(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно на пространство $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, где

$$d\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^m d\xi,$$

множество образов Фурье гладких финитных функций оказывается всюду плотным и в $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$. Но это означает, что неравенство (2.26) распространяется на все $L_2(\mathbb{R}^n, d\mu)$, так что в качестве $\tilde{v}(\xi)$ можно брать характеристическую функцию любого шара $B_\delta(\xi^0)$. Получаем

$$\operatorname{Re} \int\limits_{|\xi-\xi^0|<\delta} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} \left(\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0)\mathbf{z}, \mathbf{z}\right)\, d\xi \geqslant \int\limits_{|\xi-\xi^0|<\delta} \left(\frac{c_3}{2}|\xi|^{2m} - c_4\right) |\mathbf{z}|^2\, d\xi,$$

откуда в силу непрерывности вытекает соответствующее неравенство для подынтегральных функций в точке ξ^0. Итак,

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} \left(\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0)\mathbf{z}, \mathbf{z}\right) \geqslant \left(\frac{c_3}{2}|\xi|^{2m} - c_4\right) |\mathbf{z}|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

На множестве $|\xi|^{2m} \geqslant 4c_4/c_3$ получается

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta} (\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x^0)\, \mathbf{z}, \mathbf{z}) \geqslant \frac{c_3}{4} |\xi|^{2m} |\mathbf{z}|^2.$$

Из однородности обеих частей этого неравенства по ξ вытекает его справедливость во всем $\mathbb{R}^n$. Поскольку постоянная c_3 одна и та же для всех $N = 1, 2, \ldots,$ $x^0 \in \Omega_1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N$, лемма 2.4 завершает доказательство. □

Нетрудно видеть, что в случае постоянных коэффициентов утверждение теоремы 2.3 превращается в неравенство (2.15). Это следует из леммы 2.3.

Замечание 2.3. Мы фактически не исследуем матрицы $\mathbf{R}_{\alpha\beta,N}(x)$, а лишь используем их, чтобы связать (2.4) с положительной определенностью функционального оператора.

В оставшейся части раздела общность относительно структуры операторов (2.3) в старшей части будет несколько сужена. А именно, мы будем предполагать эти операторы трехчленными, т. е. иметь дело с уравнением

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha \Big(a_{\alpha\beta 0}(x)D^\beta u(x) + a_{\alpha\beta 1}(x)D^\beta u(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x)D^\beta u(qx)\Big) = f(x) \quad (x\in\Omega) \qquad (2.27)$$

(очевидно, аналогичное ограничение в младших членах не является принципиальным).

Адаптируем полученные выше результаты для этого частного случая. Удобно ввести «симметризованные» коэффициенты и соответствующие им символы:

$$a_{\alpha\beta}(x) = \operatorname{Re} a_{\alpha\beta 0}(x), \quad b_{\alpha\beta}(x) = (a_{\alpha\beta 1}(x) + q^{-n}\bar a_{\alpha\beta,-1}(q^{-1}x))/2,$$
$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}, \quad b(x,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} b_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}.$$

Этих обозначений мы будем далее придерживаться. Поскольку сопряженный в $L_2(\Omega)$ к оператору

$$R_{\alpha\beta}v(x) = a_{\alpha\beta 0}(x)v(x) + a_{\alpha\beta 1}(x)v(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x)v(qx)$$

имеет вид

$$R^*_{\alpha\beta}v(x) = \bar a_{\alpha\beta 0}(x)v(x) + q^{-n}\bar a_{\alpha\beta,-1}(q^{-1}x)v(q^{-1}x) + q^n\bar a_{\alpha\beta 1}(qx)v(qx),$$

теорема 2.3 перепишется в новых обозначениях следующим образом.

Теорема 2.4. *Пусть уравнение* (2.27) *сильно эллиптическое в* $\overline\Omega\subset q\Omega$. *Тогда функциональный оператор*

$$a(x,\xi)I + b(x,\xi)P + P^*\bar b(x,\xi) : L_2(\Omega)\longrightarrow L_2(\Omega)$$

с параметром ξ *положительно определен для всех значений* $\xi\in S^{n-1}$.

Здесь под $a(x,\xi)$, $b(x,\xi)$ и $\bar b(x,\xi)$ подразумеваются операторы умножения на соответствующие функции от x в Ω, а ξ играет роль параметра. Полученное необходимое условие удобно записать в несколько измененном, «нормированном» виде.

Следствие 2.1. *Пусть уравнение* (2.27) *сильно эллиптическое в* $\overline\Omega\subset q\Omega$. *Тогда*

$$a(x,\xi) > 0 \quad \big(x\in\overline\Omega, \xi\in S^{n-1}\big) \qquad (2.28)$$

и функциональный оператор

$$I + \rho(x,\xi)P + P^*\bar\rho(x,\xi) : L_2(\Omega)\longrightarrow L_2(\Omega), \qquad (2.29)$$

где

$$\rho(x,\xi) = \frac{b(x,\xi)}{\sqrt{a(x,\xi)a(q^{-1}x,\xi)}}, \qquad (2.30)$$

положительно определен для всех значений параметра $\xi\in S^{n-1}$.

Доказательство. Для всех $v\in L_2(\Omega)$ имеем

$$\big(\big(a(\cdot\,,\xi)I + b(\cdot\,,\xi)P + P^*\bar b(\cdot\,,\xi)\big)\,v, v\big)_{L_2(\Omega)} \geqslant \gamma|\xi|^{2m}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}, \qquad (2.31)$$

где постоянная $\gamma>0$ не зависит от v. Рассмотрим любой шар $B\subset\Omega$ такой, что $0\notin\overline B$ и настолько малый, чтобы $B\cap qB=\varnothing$. В силу последнего соотношения неравенство (2.31) на функциях $v\in L_2(B)$ (и равных нулю вне B) превращается в неравенство

$$((a(\cdot\,,\xi)v, v)_{L_2(B)} \geqslant \gamma|\xi|^{2m}\|v\|^2_{L_2(B)} \quad (v\in L_2(B)),$$

означающее, что $a(x,\xi)\geqslant\gamma|\xi|^{2m}$ в B. Эта оценка, полученная для всех $0\neq x\in\Omega$, по непрерывности продолжается на $\overline\Omega$. С другой стороны, очевидно, существует постоянная $\Gamma>0$ такая, что $a(x,\xi)\leqslant\Gamma|\xi|^{2m}$ для всех $x\in\overline\Omega$ и $\xi\in\mathbb R^n$.

Теперь подставим в (2.31) вместо $v\in L_2(\Omega)$ функцию $\dfrac{v(x)}{\sqrt{a(x,\xi)}}$. Будем иметь

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a(\cdot\,,\xi)}}\big(a(\cdot\,,\xi)I + b(\cdot\,,\xi)P + P^*\bar b(\cdot\,,\xi)\big)\frac{1}{\sqrt{a(\cdot\,,\xi)}}v, v\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$

$$\geqslant \gamma|\xi|^{2m}\left\|\frac{v}{\sqrt{a(\cdot\,,\xi)}}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \frac{\gamma}{\Gamma}\|v\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Остается лишь заметить, что

$$P\frac{1}{\sqrt{a(x,\xi)}} = \frac{1}{\sqrt{a(q^{-1}x,\xi)}}P, \quad \frac{1}{\sqrt{a(x,\xi)}}P^* = P^*\frac{1}{\sqrt{a(q^{-1}x,\xi)}}.$$

Лемма доказана. □

Далее считаем условие (2.28) выполненным. Рассмотрим оператор (2.29). Если предположить, что символ ρ не зависит от x, $\rho = \rho(\xi)$, то, будучи положительно определенным в $L_2(\Omega)$, оператор

$$I + \rho(\xi)P + P^*\bar{\rho}(\xi)$$

по лемме 2.3 положительно определен и в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при произвольном ненулевом векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$, так что все сводится к алгебраическому неравенству

$$1 + 2\,\mathrm{Re}(\rho(\xi)\lambda) > 0$$

на множестве $|\lambda| = q^{n/2}, \xi \in S^{n-1}$. Последнее неравенство есть в точности

$$2q^{n/2}|\rho(\xi)| < 1$$

при всех $\xi \in S^{n-1}$.

Если же $\rho = \rho(x,\xi)$, то непосредственная проверка положительной определенности оператора (2.29) затруднительна. В качестве следствия можно пользоваться положительной определенностью всех матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & q^{n/2}\rho(x,\xi) & 0 & 0 & \dots \\ q^{n/2}\bar{\rho}(x,\xi) & 1 & q^{n/2}\rho(q^{-1}x,\xi) & 0 & \dots \\ 0 & q^{n/2}\bar{\rho}(q^{-1}x,\xi) & 1 & q^{n/2}\rho(q^{-2}x,\xi) & \dots \\ 0 & 0 & q^{n/2}\bar{\rho}(q^{-2}x,\xi) & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

которые строятся по оператору (2.29) в соответствии с правилом, описанным в начале этого раздела. Имеет смысл выписать несколько первых определителей, чтобы увидеть, какие при этом получаются необходимые условия:

$$q^n|\rho(x,\xi)|^2 < 1, \quad q^n\left(|\rho(x,\xi)|^2 + |\rho(q^{-1}x,\xi)|^2\right) < 1, \tag{2.33}$$

$$q^n\left(|\rho(x,\xi)|^2 + |\rho(q^{-1}x,\xi)|^2 + |\rho(q^{-2}x,\xi)|^2\right) < 1 + q^{2n}|\rho(x,\xi)|^2|\rho(q^{-2}x,\xi)|^2$$

и т. д. Неравенства должны выполняться для всех $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in S^{n-1}$.

Приведем еще одно элементарное следствие из положительной определенности оператора (2.29).

Следствие 2.2. *Пусть оператор* (2.29) *положительно определен. Тогда*

$$2q^{n/2}|\rho(0,\xi)| < 1 \quad (\xi \in S^{n-1}).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\Omega}\left(v(x) + \rho(x,\xi)v(q^{-1}x) + q^n\bar{\rho}(qx,\xi)v(qx)\right)\overline{v(x)}\,dx \geqslant \gamma\int\limits_{\Omega}|v(x)|^2\,dx$$

для всех $v \in L_2(\Omega)$. Для функций v с носителями в шаре $|x| < h$ (при малых h шар лежит в Ω в силу условия $\overline{\Omega} \subset q\Omega$) получаем

$$\int\limits_{|x|<h}\left(v(x) + \rho(x,\xi)v(q^{-1}x) + q^n\bar{\rho}(qx,\xi)v(qx)\right)\overline{v(x)}\,dx \geqslant \gamma\int\limits_{|x|<h}|v(x)|^2\,dx,$$

или

$$\int\limits_{|x|<h}\left(v(x) + \rho(0,\xi)v(q^{-1}x) + q^n\bar{\rho}(0,\xi)v(qx)\right)\overline{v(x)}\,dx +$$

$$+\int\limits_{|x|<h}(\rho(x,\xi)-\rho(0,\xi))v(q^{-1}x)\overline{v(x)}\,dx+$$

$$+\int\limits_{|qx|<h}q^n(\bar\rho(qx,\xi)-\bar\rho(0,\xi))v(qx)\overline{v(x)}\,dx\geqslant\gamma\int\limits_{|x|<h}|v(x)|^2\,dx.$$

Из равномерной непрерывности $\rho(x,\xi)$ на компакте $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$ следует, что сумма второго и третьего слагаемых в левой части последнего неравенства не превосходит $(\gamma/2)\|v\|^2_{L_2(|x|<h)}$, если h достаточно мало. Таким образом,

$$\int\limits_{|x|<h}\big(v(x)+\rho(0,\xi)v(q^{-1}x)+q^n\bar\rho(0,\xi)v(qx)\big)\,\overline{v(x)}\,dx\geqslant\frac{\gamma}{2}\int\limits_{|x|<h}|v(x)|^2\,dx$$

для всех $v\in L_2(|x|<h)$, т. е. оператор

$$I+\rho(0,\xi)P+P^*\bar\rho(0,\xi)$$

положительно определен в $L_2(|x|<h)$ при $\xi\in S^{n-1}$. По лемме 2.3 он будет положительно определен и в $L_2(\mathbb{R}^n)$, что равносильно условию

$$2q^{n/2}|\rho(0,\xi)|<1,\quad \xi\in S^{n-1}.$$

□

Устанавливаемые ниже в этом разделе достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (2.27) также имеют вид некоторых оценок сверху символа $\rho(x,\xi)$. Прежде чем переходить к формулировке этих условий, докажем несколько вспомогательных утверждений.

Замечание 2.4. Легко видеть, что разность

$$D^\alpha R_{\alpha\beta}D^\beta u-D^\beta R_{\alpha\beta}D^\alpha u$$

содержит производные функции u лишь до порядка $2m-1$. Поэтому с точностью до слагаемых, оценивающихся произведением $\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}$ и не влияющих на выполнение неравенства типа Гординга (см. доказательство теоремы 2.1), выражение $2\operatorname{Re}(A_Ru,u)_{L_2(\Omega)}$, отвечающее уравнению (2.27), совпадает на функциях $u\in C_0^\infty(\Omega)$ с выражением

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(D^\alpha R_{\alpha\beta}D^\beta u,u)_{L_2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\overline{(D^\beta R_{\alpha\beta}D^\alpha u,u)}_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(D^\alpha R_{\alpha\beta}D^\beta u,u)_{L_2(\Omega)}+\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\overline{(u,D^\alpha R^*_{\alpha\beta}D^\beta u)}_{L_2(\Omega)}=$$

$$=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}(D^\alpha(R_{\alpha\beta}+R^*_{\alpha\beta})D^\beta u,u)_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому оператор A_R в скалярном произведении можно заменить однородным порядка $2m$ оператором

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}D^\alpha\left(a_{\alpha\beta}(x)I+b_{\alpha\beta}(x)P+P^*\bar b_{\alpha\beta}(x)\right)D^\beta=$$

$$=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}D^\alpha a_{\alpha\beta}(x)D^\beta+\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}q^mD^\alpha b_{\alpha\beta}(x)D^\beta P+P^*\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}q^mD^\alpha\bar b_{\alpha\beta}(x)D^\beta.$$

Последний, в свою очередь, можно заменить на оператор

$$a(x,D)+q^mb(x,D)P+P^*q^m\bar b(x,D),$$

где $a(x,D)$, $b(x,D)$ и $\bar b(x,D)$ — дифференциальные операторы с символами $a(x,\xi),b(x,\xi)$ и $\bar b(x,\xi)$ (разница получается опять лишь в младших членах). Итак, в (2.4) вместо $(A_Ru,u)_{L_2(\Omega)}$ мы будем рассматривать скалярное произведение

$$\big((a(\cdot\,,D)+q^mb(\cdot\,,D)P+P^*q^m\bar b(\cdot\,,D))u,u\big)_{L_2(\Omega)}.$$

Лемма 2.5. *Предположим, что для области Ω выполнено более сильное условие: $\overline{\Omega} \subset \varkappa\Omega$ для всех $\varkappa > 1$. Предположим также, что существует такое число h, $0 < h < 1$, что для всех $\varkappa > 1$ выполняется оценка*

$$\operatorname{Re}\left(\left(a(\cdot\,,D) + q^m(1-h)^{-1}b(\cdot\,,D)P + P^*q^m(1-h)^{-1}\bar{b}(\cdot\,,D)\right)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant -c(\varkappa)\|u\|_{H^m(\varkappa^{-1}\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\varkappa^{-1}\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)), \qquad (2.34)$$

в которой постоянная $c(\varkappa)$ зависит лишь от $\varkappa$, но не зависит от функции $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Тогда уравнение (2.27) — *сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$.*

Доказательство. Условие (2.28) означает, что дифференциальный оператор $a(x,D)$ — сильно эллиптический в $\overline{\Omega}$. Поэтому [70] для него неравенство Гординга уже выполнено: существуют такие постоянные $c_3 > 0$, $c_4 \geqslant 0$, что

$$\operatorname{Re}\,(a(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_3\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_4\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)).$$

Взяв h из условия леммы, на функциях с носителями в $\varkappa^{-1}\Omega$ будем иметь

$$\operatorname{Re}\left((a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D))u,u\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_3h\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_4h\|u\|^2_{L_2(\Omega)} +$$
$$+ (1-h)\operatorname{Re}\left(\left(a(\cdot\,,D) + \frac{q^m b(\cdot\,,D)}{1-h}P + P^*\frac{q^m\bar{b}(\cdot\,,D)}{1-h}\right)u,u\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant c_3h\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_4h\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - c(\varkappa)\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)}. \qquad (2.35)$$

Оценим последний член в правой части (2.35), пользуясь интерполяционным неравенством (2.16) и элементарным алгебраическим неравенством

$$2ab \leqslant t^{-m}a^2 + t^m b^2 \quad (a \geqslant 0, b \geqslant 0, t > 0).$$

Получим

$$c(\varkappa)\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\Omega)} \leqslant c(\varkappa)c_{\Omega,m}t^{-1}\left(\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + t^m\|u\|_{H^m(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c(\varkappa)c_{\Omega,m}t^{-1}\left(2\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + t^{2m}\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\right) =$$
$$= \frac{c_3h}{2}\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + (c(\varkappa)c_{\Omega,m})^{2m}\left(\frac{4}{c_3h}\right)^{2m-1}\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

если взять $t = 4c(\varkappa)c_{\Omega,m}/(c_3h)$. Отсюда и из (2.35) вытекает

$$\operatorname{Re}\left((a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D))u,u\right)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{c_3h}{2}\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - \left(c_4h + (c(\varkappa)c_{\Omega,m})^{2m}\left(\frac{4}{c_3h}\right)^{2m-1}\right)\|u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

на функциях $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Последнее неравенство с учетом замечания 2.4, касающегося оценки младших членов оператора, означает существование таких постоянных $c_5 > 0$, $c_6 = c_6(\varkappa) \geqslant 0$, что

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega}\left(a_{\alpha\beta0}(x)D^\beta u(x) + a_{\alpha\beta1}(x)D^\beta u(q^{-1}x) + a_{\alpha\beta,-1}(x)D^\beta u(qx)\right) \times$$
$$\times\,\overline{D^\alpha u(x)}\,dx \geqslant c_5\sum_{|\alpha|=m}\int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega}|D^\alpha u(x)|^2\,dx - c_6(\varkappa)\int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega}|u(x)|^2\,dx$$

при всех $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Отметим, что c_5 от $\varkappa$ не зависит.

Подставляя в это неравенство в качестве функции $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$ функцию $v(\varkappa x)$, где $v(x)$ — любая функция из $C_0^\infty(\Omega)$, будем иметь

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\varkappa^{2m}\int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega}\left(a_{\alpha\beta0}(x)D^\beta v(\varkappa x) + a_{\alpha\beta1}(x)D^\beta v(q^{-1}\varkappa x) +\right.$$
$$\left. + a_{\alpha\beta,-1}(x)D^\beta v(q\varkappa x)\right)\overline{D^\alpha v(\varkappa x)}\,dx \geqslant$$

$$\geqslant c_5 \sum_{|\alpha|=m} \varkappa^{2m} \int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega} |D^\alpha v(\varkappa x)|^2\,dx - c_6(\varkappa) \int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega} |v(\varkappa x)|^2\,dx,$$

а после замены переменных $y = \varkappa x$ —

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \int\limits_{\Omega} \Big(a_{\alpha\beta 0}(\varkappa^{-1}y) D^\beta v(y) + a_{\alpha\beta 1}(\varkappa^{-1}y) D^\beta v(q^{-1}y) + \\ + a_{\alpha\beta,-1}(\varkappa^{-1}y) D^\beta v(qy) \Big) \overline{D^\alpha v(y)}\,dy \geqslant \\ \geqslant c_5 \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v(y)|^2\,dy - c_6(\varkappa)\varkappa^{-2m} \int\limits_{\Omega} |v(y)|^2\,dy.$$

Из равномерной непрерывности коэффициентов $a_{\alpha\beta j}(y)$ в $\overline{\Omega}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\varkappa$ настолько близким к 1, что погрешность левой части последнего неравенства при замене $a_{\alpha\beta j}(\varkappa^{-1}y)$ на $a_{\alpha\beta j}(y)$ не будет превышать $\varepsilon\|u\|^2_{H^m(\Omega)}$. Зафиксировав такое число $\varkappa$, получаем

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \int\limits_{\Omega} \Big(a_{\alpha\beta 0}(y) D^\beta v(y) + a_{\alpha\beta 1}(y) D^\beta v(q^{-1}y) + a_{\alpha\beta,-1}(y) D^\beta v(qy) \Big) \overline{D^\alpha v(y)}\,dy \geqslant \\ \geqslant (c_5 - \varepsilon) \sum_{|\alpha|=m} \int\limits_{\Omega} |D^\alpha v(y)|^2\,dy - c_6(\varkappa)\varkappa^{-2m} \int\limits_{\Omega} |v(y)|^2\,dy,$$

т. е. соответствующее неравенство для Ω (с измененными константами). □

Лемма 2.6. *Пусть $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ и выполнено условие*

$$2q^{n/2}|\rho(x,\xi)| < 1 \quad (x \in \overline{\Omega},\ \xi \in S^{n-1}). \tag{2.36}$$

Тогда существуют такие функции $\omega, \eta \in C^\infty\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$, что имеет место разложение

$$I + \rho(x,\xi)P + P^*\bar\rho(x,\xi) = \left(\omega(x,\xi)I + \eta(x,\xi)P\right)\left(\bar\omega(x,\xi)I + P^*\bar\eta(x,\xi)\right). \tag{2.37}$$

Доказательство. После раскрытия скобок справа в (2.37) и приравнивания соответствующих коэффициентов получаем систему функциональных уравнений, которой должна удовлетворять пара функций (ω, η):

$$|\omega(x,\xi)|^2 + q^n|\eta(x,\xi)|^2 = 1, \quad \eta(x,\xi)\bar\omega(q^{-1}x,\xi) = \rho(x,\xi). \tag{2.38}$$

Надо доказать существование гладкого решения этой системы в $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$. Из системы очевидным образом получается уравнение

$$|\omega(q^{-1}x,\xi)|^2(1 - |\omega(x,\xi)|^2) = q^n|\rho(x,\xi)|^2.$$

Обозначим $|\omega(x,\xi)|^2 = y(x,\xi)$. Мы ищем гладкое неотрицательное решение функционального уравнения

$$y(q^{-1}x,\xi)(1 - y(x,\xi)) = q^n|\rho(x,\xi)|^2. \tag{2.39}$$

Рассмотрим множество

$$M = \left\{ y \in C\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right) : y(x,\xi) \geqslant 1/2 \right\}.$$

Будучи замкнутым подмножеством банахова пространства $C\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$, оно является полным метрическим пространством. Определим отображение

$$T : M \to C\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right), \quad Ty(x,\xi) = 1 - \frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{y(q^{-1}x,\xi)}. \tag{2.40}$$

Благодаря условию (2.36) имеем $T : M \to M$. Кроме того,

$$Ty_1 - Ty_2 = \frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{y_1(q^{-1}x,\xi)y_2(q^{-1}x,\xi)}\left(y_1(q^{-1}x,\xi) - y_2(q^{-1}x,\xi)\right) \quad (y_1, y_2 \in M),$$

причем

$$\left|\frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{y_1(q^{-1}x,\xi)y_2(q^{-1}x,\xi)}\right| \leqslant 4q^n|\rho(x,\xi)|^2 \leqslant \varkappa < 1$$

(строгое неравенство (2.36) выполняется на компактном множестве). Отсюда

$$\|Ty_1 - Ty_2\|_{C\left(\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)} \leqslant \varkappa \|y_1 - y_2\|_{C(q^{-1}\overline{\Omega}\times S^{n-1})} \leqslant \varkappa \|y_1 - y_2\|_{C\left(\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)},$$

т. е. T есть сжимающее отображение. По теореме Банаха для сжимающих отображений T обладает единственной неподвижной точкой в M. Другими словами, уравнение (2.39) однозначно разрешимо в метрическом пространстве M. Полагая $x = 0$ в (2.39), мы можем найти «начальное» условие $y_0(\xi) = y(0, \xi)$, которому удовлетворяет рассматриваемое решение, из квадратного уравнения

$$y_0(1 - y_0) = q^n |\rho(0, \xi)|^2 \Longrightarrow y_0(\xi) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4q^n |\rho(0,\xi)|^2}\right).$$

Другой корень уравнения не подходит, поскольку он меньше $1/2$.

Имеем $y_0 \in C^\infty\left(S^{n-1}\right)$. Мы собираемся показать, что само решение y принадлежит $C^\infty\left(\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)$. Для этого зафиксируем натуральное p и введем банахово пространство

$$B = \left\{h \in C^p\left(\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right) :\, h(0,\xi) = 0\right\}.$$

Рассмотрим отображение

$$F(h)(x,\xi) = (y_0(\xi) + h(q^{-1}x, \xi))(1 - y_0(\xi) - h(x,\xi)) - q^n|\rho(0,\xi)|^2.$$

Ясно, что $F(h) \in C^p\left(\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)$ и $F(h)(0,\xi) = 0$, так что $F : B \to B$. При этом F есть дифференцируемое отображение с $F(0) = 0$ и

$$(DF(0))h(x,\xi) = (1 - y_0(\xi))h(q^{-1}x,\xi) - y_0(\xi)h(x,\xi) = -y_0(\xi)(h(x,\xi) - s(\xi)h(q^{-1}x,\xi)),$$

где

$$s(\xi) = \frac{1 - y_0(\xi)}{y_0(\xi)} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4q^n|\rho(0,\xi)|^2}}{1 + \sqrt{1 - 4q^n|\rho(0,\xi)|^2}}$$

есть гладкая функция, удовлетворяющая условию $0 \leqslant s(\xi) \leqslant s_0 < 1$ на S^{n-1}. Легко видеть, что ряд

$$h(x,\xi) + s(\xi)h(q^{-1}x,\xi) + s^2(\xi)h(q^{-2}x,\xi) + \ldots$$

задает ограниченный линейный оператор в B и этот оператор является обратным к

$$h(x,\xi) \longmapsto h(x,\xi) - s(\xi)h(q^{-1}x,\xi).$$

Действительно, при указанном выше условии на $s(\xi)$ k-й член ряда и его производные по x и ξ экспоненциально убывают при $k \to \infty$ равномерно в $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$. Поэтому производная в нуле

$$DF(0) : B \to B$$

есть линейный гомеоморфизм, а $F : B \to B$ — диффеоморфизм некоторой окрестности точки $h = 0$.

Далее, $q^n|\rho(x,\xi)|^2$ есть гладкая функция в $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$, причем функция

$$g(x,\xi) = q^n|\rho(x,\xi)|^2 - q^n|\rho(0,\xi)|^2$$

принадлежит B. Отсюда следует, что последняя может быть представлена в виде

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{g}_i(x,\xi)$$

с участием гладких в окрестности точки $x = 0$ функций $\tilde{g}_i$. Взяв число $L_0 > 0$ достаточно большим, можно считать, что

$$g(x,\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{g}_i(x,\xi) \quad (x \in q^{-L_0}\overline{\Omega},\, \xi \in S^{n-1}),$$

$$\tilde{g}_i \in C^\infty\left(q^{-L_0}\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right). \tag{2.41}$$

Рассмотрим функцию $g(q^{-L_0}x,\xi)$ в $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$. Пусть мультииндексы α и β таковы, что $|\alpha| + |\beta| \leqslant p$. Тогда

$$|D_x^\beta D_\xi^\alpha (g(q^{-L_0}x,\xi))| = q^{-L_0|\beta|}|D_x^\beta D_\xi^\alpha g(q^{-L_0}x,\xi)| \leqslant q^{-L_0}\|g\|_{C^p\left(q^{-L_0}\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)}$$

для всех $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in S^{n-1}$, если $|\beta| \neq 0$. Если же $|\beta| = 0$, то мы используем представление (2.41) и получаем

$$D_\xi^\alpha g(q^{-L_0}x, \xi) = D_\xi^\alpha \left[\sum_{i=1}^n q^{-L_0} x_i \tilde{g}_i(q^{-L_0}x, \xi)\right] = q^{-L_0} \sum_{i=1}^n x_i D_\xi^\alpha \tilde{g}_i(q^{-L_0}x, \xi)$$

и

$$|D_\xi^\alpha g(q^{-L_0}x, \xi)| \leqslant (\operatorname{diam}\Omega) q^{-L_0} \sum_{i=1}^n \|\tilde{g}_i\|_{C^p\left(q^{-L_0}\overline{\Omega}\times S^{n-1}\right)}.$$

Сейчас ясно, что функция $g(q^{-L_0}x, \xi)$ как элемент пространства B попадет в наперед заданную окрестность точки $h = 0$ в B за счет выбора L_0. Возьмем ее прообраз $h(x, \xi)$ при отображении F. Эта функция h из $C^p\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$ удовлетворяет уравнению

$$(y_0(\xi) + h(q^{-1}x, \xi))(1 - y_0(\xi) - h(x, \xi)) = g(q^{-L_0}x, \xi) + q^n|\rho(0, \xi)|^2$$

в $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$. Переобозначая $q^{-L_0}x$ на x, получим

$$(y_0(\xi) + h(q^{L_0-1}x, \xi))(1 - y_0(\xi) - h(q^{L_0}x, \xi)) = q^n|\rho(x, \xi)|^2.$$

Последнее означает, что функция

$$y'(x, \xi) = y_0(\xi) + h(q^{L_0}x, \xi),$$

принадлежащая пространству $C^p\left(q^{-L_0}\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$, является решением уравнения (2.39) при всех $x \in q^{-L_0}\overline{\Omega}$, $\xi \in S^{n-1}$.

Мы нашли C^p-решение уравнения (2.39), но пока лишь для $x \in q^{-L_0}\overline{\Omega}$. Это гладкое решение y' удовлетворяет «начальному» условию y_0 и, значит, $y' \geqslant 1/2$ в окрестности начала координат $x = 0$. Но как мы уже видели (в первой части доказательства), последнее неравенство означает единственность в классе непрерывных функций. Итак, $y(x, \xi)$ совпадает с $y'(x, \xi)$ в упомянутой выше окрестности, откуда заключаем, что наше глобальное решение y является C^p-гладким при малых значениях $|x|$. После этого гладкость при всех $x \in \overline{\Omega}$ вытекает непосредственно из (2.39), поскольку

$$y(qx, \xi) = 1 - \frac{q^n|\rho(qx, \xi)|^2}{y(x, \xi)}.$$

Имея решение $y \in C^p\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$, $y \geqslant 1/2$, уравнения (2.39), полагаем

$$\omega(x, \xi) = \sqrt{y(x, \xi)}, \quad \eta(x, \xi) = \frac{\rho(x, \xi)}{\sqrt{y(q^{-1}x, \xi)}}$$

и получаем C^p-решение системы (2.38) при $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in S^{n-1}$ с $\omega \geqslant 1/\sqrt{2}$. Остается вспомнить, что p произвольно. Лемма доказана. □

Замечание 2.5. Разрешимость в $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$ системы функциональных уравнений (2.38), связанной с разложением (2.37), можно получить при меньшем ограничении на $\rho(x, \xi)$. Предположим вместо (2.36), что

$$q^n|\rho(x, \xi)|^2 < \frac{1}{2} \quad (x \in \overline{\Omega}), \quad q^n|\rho(x, \xi)|^2 < \frac{1}{4} \quad (x \in q^{-1}\overline{\Omega}) \tag{2.42}$$

для всех $\xi \in S^{n-1}$ (до этого было $q^n|\rho(x, \xi)|^2 < 1/4$ во всей $\overline{\Omega}$). Обозначим

$$\sigma = \max_{\overline{\Omega}\times S^{n-1}} q^n|\rho(x, \xi)|^2 < 1/2, \quad \sigma_1 = \max_{q^{-1}\overline{\Omega}\times S^{n-1}} q^n|\rho(x, \xi)|^2 < 1/4.$$

Рассуждения проводятся аналогично доказательству леммы 2.6, только в качестве метрического пространства M следует взять

$$M = \left\{y \in C\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right) : \ y \geqslant 1 - 2\sigma \ (x \in \overline{\Omega}), \ y \geqslant 1/2 \ (x \in q^{-1}\overline{\Omega})\right\},$$

а отображение $T : M \to C\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$ задать той же формулой (2.40),

$$Ty(x, \xi) = 1 - \frac{q^n|\rho(x, \xi)|^2}{y(q^{-1}x, \xi)}.$$

Неравенства (2.42) гарантируют, что T по-прежнему отображает M в себя:

$$\begin{cases} Ty(x) \geqslant 1 - 2\sigma & \text{в } \overline{\Omega}, \\ Ty(x) \geqslant 1/2, & \text{если } x \in q^{-1}\overline{\Omega}. \end{cases}$$

Однако, в отличие от случая леммы 2.6, сжимающим будет не само отображение T, а некоторая его степень:

$$T^2 y_1 - T^2 y_2 = T(Ty_1) - T(Ty_2) =$$

$$= \frac{q^n |\rho(x,\xi)|^2}{Ty_1(q^{-1}x,\xi) Ty_2(q^{-1}x,\xi)} \left(Ty_1(q^{-1}x,\xi) - Ty_2(q^{-1}x,\xi) \right) =$$

$$= \frac{q^n |\rho(x,\xi)|^2}{Ty_1(q^{-1}x,\xi) Ty_2(q^{-1}x,\xi)} \cdot \frac{q^n |\rho(q^{-1}x,\xi)|^2}{y_1(q^{-2}x,\xi) y_2(q^{-2}x,\xi)} (y_1(q^{-2}x,\xi) - y_2(q^{-2}x,\xi)),$$

$$\ldots$$

$$T^k y_1 - T^k y_2 =$$

$$= \frac{q^n |\rho(x,\xi)|^2}{T^{k-1} y_1(q^{-1}x,\xi) T^{k-1} y_2(q^{-1}x,\xi)} \cdot \frac{q^n |\rho(q^{-1}x,\xi)|^2}{T^{k-2} y_1(q^{-2}x,\xi) T^{k-2} y_2(q^{-2}x,\xi)} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{q^n |\rho(q^{1-k}x,\xi)|^2}{y_1(q^{-k}x,\xi) y_2(q^{-k}x,\xi)} (y_1(q^{-k}x,\xi) - y_2(q^{-k}x,\xi)).$$

В выражении для $T^k y_1 - T^k y_2$ первая дробь не превосходит 2, а остальные $(k-1)$ дробей не превосходят числа $\varkappa = 4\sigma_1 < 1$. Таким образом,

$$\|T^k y_1 - T^k y_2\|_{C(\overline{\Omega} \times S^{n-1})} \leqslant 2\varkappa^{k-1} \|y_1 - y_2\|_{C(\overline{\Omega} \times S^{n-1})},$$

и отображение T^k сжимающее при $k > 1 - \ln 2 / \ln \varkappa$. Хорошо известно, что существование единственной неподвижной точки гарантируется теоремой Банаха и в рассматриваемой ситуации. Так убеждаемся в существовании непрерывного положительного на компакте $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ решения $y(x,\xi)$ уравнения (2.39). Доказательство гладкости полученного решения такое же, как в лемме 2.6.

Мы показали также, что функция $\omega(x,\xi)$ в разложении (2.37) может быть выбрана вещественнозначной и положительной.

Умножим теперь обе части формулы (2.37) справа и слева на $\sqrt{a(x,\xi)}$. Получим

$$\sqrt{a(x,\xi)} \left(I + \rho(x,\xi) P + P^* \bar{\rho}(x,\xi) \right) \sqrt{a(x,\xi)} =$$

$$= a(x,\xi) I + \sqrt{a(x,\xi)} \rho(x,\xi) \sqrt{a(q^{-1}x,\xi)} P + P^* \sqrt{a(q^{-1}x,\xi)} \bar{\rho}(x,\xi) \sqrt{a(x,\xi)} =$$

$$= a(x,\xi) I + b(x,\xi) P + P^* \bar{b}(x,\xi),$$

принимая во внимание определение (2.30) символа $\rho(x,\xi)$. Аналогично,

$$\sqrt{a(x,\xi)} \left(\omega(x,\xi) I + \eta(x,\xi) P \right) = \sqrt{a(x,\xi)} \omega(x,\xi) I + \sqrt{a(x,\xi)} \eta(x,\xi) P,$$

$$\left(\omega(x,\xi) I + P^* \bar{\eta}(x,\xi) \right) \sqrt{a(x,\xi)} = \sqrt{a(x,\xi)} \omega(x,\xi) I + P^* \sqrt{a(x,\xi)} \bar{\eta}(x,\xi).$$

Обозначим

$$\omega_1(x,\xi) = \sqrt{a(x,\xi)} \omega(x,\xi), \quad \eta_1(x,\xi) = \sqrt{a(x,\xi)} \eta(x,\xi).$$

Теперь из леммы 2.6 с учетом замечания 2.5 вытекает

Лемма 2.7. *Пусть $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ и для всех $\xi \in S^{n-1}$ выполнено условие* (2.42). *Тогда существуют такие функции $\omega_1, \eta_1 \in C^\infty \left(\overline{\Omega} \times S^{n-1} \right)$, $\omega_1 > 0$, что имеет место разложение*

$$a(x,\xi) I + b(x,\xi) P + P^* \bar{b}(x,\xi) = \left(\omega_1(x,\xi) I + \eta_1(x,\xi) P \right) \left(\omega_1(x,\xi) I + P^* \bar{\eta}_1(x,\xi) \right). \tag{2.43}$$

Замечание 2.6. Далее в работе будут использованы элементы теории псевдодифференциальных операторов (ПДО). Перечислим некоторые простейшие факты, касающиеся ПДО. Их можно найти в любой литературе, содержащей исчисление псевдодифференциальных операторов, например, [54, 55].

1. Под оператором $g(x,D)$ класса OPS^{μ}, $\mu \in \mathbb{R}$, мы понимаем непрерывное отображение в пространстве Шварца $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций по формуле
$$g(x,D)u = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x,\xi)\tilde{u}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$
где $\tilde{u}(\xi)$ означает образ Фурье функции $u(x)$. При этом гладкая в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ функция $g(x,\xi)$ такова, что конечны все полунормы
$$\sup\left\{(1+|\xi|)^{|\alpha|-\mu}|D^\alpha_\xi D^\beta_x g(x,\xi)| : x,\xi \in \mathbb{R}^n\right\}.$$
2. Каждый ПДО $g(x,D)$ класса OPS^{μ} продолжается до ограниченного оператора в пространствах Соболева $g(\cdot\,,D) : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n)$ для всех $\mu, s \in \mathbb{R}$.
3. Композицией ПДО $g_1(x,D)$ класса OPS^{μ_1} и $g_2(x,D)$ класса OPS^{μ_2} является ПДО $g_1(x,D)g_2(x,D)$ класса $OPS^{\mu_1+\mu_2}$ такой, что разность между ним и ПДО с символом $g_1(x,\xi)g_2(x,\xi)$ есть оператор класса $OPS^{\mu_1+\mu_2-1}$.
4. Для каждого ПДО $g(x,D)$ класса OPS^{μ} определен сопряженный (в смысле скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$) ПДО $g(x,D)^*$, также принадлежащий классу OPS^{μ}. При этом разность между $g(x,D)^*$ и ПДО с комплексно сопряженным символом $\bar{g}(x,\xi)$ принадлежит классу $OPS^{\mu-1}$.
5. Соотношение
$$Pg(x,D) = g(q^{-1}x, qD)P \ \text{ или } \ g(x,D)P^* = P^*g(q^{-1}x,qD)$$
легко проверяется для любого ПДО $g(x,D)$. Здесь $g(q^{-1}x,qD)$ обозначает оператор с символом $g(q^{-1}x,q\xi)$.

Далее вместо «ПДО класса OPS^{μ}» мы будем говорить «оператор порядка μ».

В следующей ниже теореме устанавливаются достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (2.27).

Теорема 2.5. *Пусть область* Ω *такова, что* $\overline{\Omega} \subset \varkappa\Omega$ *для всех* $\varkappa > 1$, *а символ* $\rho(x,\xi)$, *определяемый по формуле* (2.30), *удовлетворяет условию*
$$q^n|\rho(x,\xi)|^2 < \frac{1}{2} \quad (x \in \overline{\Omega}), \quad q^n|\rho(x,\xi)|^2 < \frac{1}{4} \quad (x \in q^{-1}\overline{\Omega}) \tag{2.44}$$
для всех $\xi \in S^{n-1}$. *Тогда уравнение* (2.27) — *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. В силу леммы 2.5, доказательство сильной эллиптичности уравнения (2.27) сводится к получению оценки (2.34) на оператор
$$a(x,D) + q^m(1-h)^{-1}b(x,D)P + P^*q^m(1-h)^{-1}\bar{b}(x,D),$$
которому отвечает символ $(1-h)^{-1}\rho(x,\xi)$. Если условие теоремы 2.5 выполняется для $\rho(x,\xi)$, то при достаточно малом $h > 0$ оно будет выполнено и для $(1-h)^{-1}\rho(x,\xi)$ (строгие неравенства выполняются относительно непрерывных на компактах функций). Поэтому, чтобы не вводить новых обозначений, мы без потери строгости можем доказывать соответствующую оценку для исходного оператора $a(x,D) + q^m b(x,D)P + P^*q^m\bar{b}(x,D)$:
$$\operatorname{Re}\left(\left(a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D)\right)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant -c(\varkappa)\|u\|_{H^m(\varkappa^{-1}\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\varkappa^{-1}\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)). \tag{2.45}$$

Доказательство будет опираться на разложение (2.43), существование которого гарантируется условием теоремы и леммой 2.7. Введем ПДО, отвечающие построенным в леммах 2.6 и 2.7 символам
$$\omega_1(x,\xi) = \sqrt{a(x,\xi)}\omega(x,\xi), \quad \eta_1(x,\xi) = \sqrt{a(x,\xi)}\eta(x,\xi).$$
Продолжим функции $\omega(x,\xi)$ и $\eta(x,\xi)$ по ξ со сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\}$ как положительно однородные нулевого порядка. Тогда функции ω_1 и η_1 естественным образом определены в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\}$ и являются положительно однородными порядка m по ξ. Зафиксировав число $\varkappa > 1$, введем срезающую

функцию $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, равную 1 на $\varkappa^{-1}\Omega$. Возьмем также срезающую функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$, обращающуюся в ноль в окрестности начала координат и равную 1 при $|\xi| \geqslant 1$. Определим символы

$$\omega_1'(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)\omega_1(x,\xi), \quad \eta_1'(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)\eta_1(x,\xi),$$

а через $\omega_1'(x,D)$ и $\eta_1'(x,D)$ обозначим соответствующие ПДО. Через $\bar\eta_1'(x,D)$ мы обозначаем оператор с символом $\bar\eta_1'(x,\xi)$. Эти операторы, очевидно, принадлежат стандартному классу OPS^m.

Рассмотрим следующий оператор, действующий на функции в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}&\left(\omega_1'(x,D) + \eta_1'(x,D)P\right)\left(\omega_1'(x,D) + P^*\bar\eta_1'(x,D)\right) = \\ &= \omega_1'(x,D)^2 + q^n\eta_1'(x,D)\bar\eta_1'(x,D) + \eta_1'(x,D)\omega_1'(q^{-1}x,qD)P + P^*\omega_1'(q^{-1}x,qD)\bar\eta_1'(x,D). \qquad (2.46)\end{aligned}$$

Из (2.43) и свойства композиции ПДО (п. 3 замечания 2.6) следует, что разность между оператором

$$\omega_1'(x,D)^2 + q^n\eta_1'(x,D)\bar\eta_1'(x,D)$$

и оператором с символом

$$\omega_1'(x,\xi)^2 + q^n|\eta_1'(x,\xi)|^2 = \varphi^2(x)\chi^2(\xi)\left(\omega_1(x,\xi)^2 + q^n|\eta_1(x,\xi)|^2\right) = \varphi^2(x)\chi^2(\xi)a(x,\xi)$$

принадлежит классу OPS^{2m-1}. Кроме того, $\varphi^2(\chi^2-1)a \in OPS^{-\infty}$, так что

$$\omega_1'(x,D)^2 + q^n\eta_1'(x,D)\bar\eta_1'(x,D) = \varphi^2(x)a(x,D) + g_1(x,D) \qquad (2.47)$$

с оператором $g_1 \in OPS^{2m-1}$. Поскольку $a(x,D)$ есть дифференциальный оператор и $\varphi(x) = 1$ в $\varkappa^{-1}\Omega$, имеем

$$\varphi^2(x)a(x,D)u = a(x,D)u, \quad u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega). \qquad (2.48)$$

Далее,

$$\begin{aligned}\eta_1'(x,\xi)\omega_1'(q^{-1}x,q\xi) &= \varphi(x)\varphi(q^{-1}x)\chi(\xi)\chi(q\xi)\eta_1(x,\xi)\omega_1(q^{-1}x,q\xi) = \\ &= \varphi(x)\chi(\xi)\eta_1(x,\xi)q^m\omega_1(q^{-1}x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)q^m b(x,\xi)\end{aligned}$$

в силу однородности ω_1 по ξ и формулы (2.43). Отсюда и из свойства композиции ПДО следует, что третье слагаемое в правой части (2.46) может быть записано в виде

$$\eta_1'(x,D)\omega_1'(q^{-1}x,qD)P = q^m\varphi(x)b(x,D)P + g_2(x,D)P \qquad (2.49)$$

с оператором $g_2 \in OPS^{2m-1}$. Очевидно,

$$\varphi(x)b(x,D)u|_{\varkappa^{-1}\Omega} = b(x,D)u|_{\varkappa^{-1}\Omega}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \qquad (2.50)$$

Для четвертого слагаемого справа в (2.46) при помощи аналогичных рассуждений получаем

$$P^*\omega_1'(q^{-1}x,qD)\bar\eta_1'(x,D) = P^*q^m\varphi(x)\bar b(x,D) + P^*g_3(x,D) \qquad (2.51)$$

с оператором $g_3 \in OPS^{2m-1}$. Заметим снова, что

$$\varphi(x)\bar b(x,D)u = \bar b(x,D)u, \quad u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega). \qquad (2.52)$$

Собирая вместе (2.46)–(2.52), будем иметь

$$\begin{aligned}&\left(\left(\omega_1'(x,D) + \eta_1'(x,D)P\right)\left(\omega_1'(x,D) + P^*\bar\eta_1'(x,D)\right)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} = \\ &= \left(\left(a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar b(\cdot\,,D)\right)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} + \\ &+ ((g_1(\cdot\,,D) + g_2(\cdot\,,D)P + P^*g_3(\cdot\,,D))u,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \qquad (2.53)\end{aligned}$$

для любой функции $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$.

С другой стороны, переходя к сопряженным относительно скалярного произведения в $L_2(\mathbb{R}^n)$ операторам, получим

$$\begin{aligned}&\left(\left(\omega_1'(x,D) + \eta_1'(x,D)P\right)\left(\omega_1'(x,D) + P^*\bar\eta_1'(x,D)\right)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} = \\ &= \left(\left(\omega_1'(x,D) + P^*\bar\eta_1'(x,D)\right)u, \left(\omega_1'(x,D)^* + P^*\eta_1'(x,D)^*\right)u\right)_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \qquad (2.54)\end{aligned}$$

Из представления сопряженного ПДО (п. 4 замечания 2.6) следует, что

$$\omega_1'(x,D)^* - \omega_1'(x,D) \in OPS^{m-1}, \quad \eta_1'(x,D)^* - \bar\eta_1'(x,D) \in OPS^{m-1}.$$

Таким образом,

$$\omega_1'(x,D)^* + P^*\eta_1'(x,D)^* = \omega_1'(x,D) + P^*\bar\eta_1'(x,D) + g_4(x,D) + P^*g_5(x,D) \qquad (2.55)$$

с операторами $g_4, g_5 \in OPS^{m-1}$. Из соотношений (2.53), (2.54) и (2.55) теперь следует равенство

$$\big(\big(a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^* q^m \bar{b}(\cdot\,,D)\big)\,u, u\big)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} =$$

$$= \big\|\big(\omega_1'(x,D) + P^*\bar{\eta}_1'(x,D)\big)\,u\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} -$$

$$- \big(\big(\omega_1'(x,D) + P^*\bar{\eta}_1'(x,D)\big)\,u, \big(g_4(x,D) + P^* g_5(x,D)\big)\,u\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)} -$$

$$- \left((g_1(\cdot\,,D) + g_2(\cdot\,,D)P + P^* g_3(\cdot\,,D))u, u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)}. \tag{2.56}$$

Из ограниченности ПДО в пространствах Соболева (п. 2 замечания 2.6) вытекает оценка второго члена в правой части (2.56):

$$\Big|\big(\big(\omega_1'(x,D) + P^*\bar{\eta}_1'(x,D)\big)\,u, \big(g_4(x,D) + P^* g_5(x,D)\big)\,u\big)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant c_7(\varkappa)\|u\|_{H^m(\varkappa^{-1}\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\varkappa^{-1}\Omega)}. \tag{2.57}$$

Получим такую же оценку для третьего слагаемого. Для этого введем вспомогательный ПДО $(1-\Delta)^{\mu/2}$, $\mu \in \mathbb{R}$, где Δ — оператор Лапласа. Символ этого ПДО порядка μ равен $(1+|\xi|^2)^{\mu/2}$, а сам оператор является изоморфизмом в шкале пространств Соболева

$$(1-\Delta)^{\mu/2} : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\mu}(\mathbb{R}^n), \quad s \in \mathbb{R},$$

и имеет обратный, равный $(1-\Delta)^{-\mu/2}$. Кроме того, легко видеть, что

$$((1-\Delta)^{\mu/2}u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (u, (1-\Delta)^{\mu/2}v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \quad u, v \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n).$$

Тогда для любого ПДО $g \in OPS^{2m-1}$ можем написать

$$(g(\cdot\,,D)u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = ((1-\Delta)^{-m/2}g(\cdot\,,D)u, (1-\Delta)^{m/2}v)_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

причем оператор $(1-\Delta)^{-m/2}g(\cdot\,,D)$ имеет порядок $m-1$, откуда следует, что $\big|(g(\cdot\,,D)u, v)_{L_2(\mathbb{R}^n)}\big|$ оценивается произведением $\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}$. Итак,

$$\Big|\left((g_1(\cdot\,,D) + g_2(\cdot\,,D)P + P^* g_3(\cdot\,,D))u, u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant c_8(\varkappa)\|u\|_{H^m(\varkappa^{-1}\Omega)}\|u\|_{H^{m-1}(\varkappa^{-1}\Omega)}. \tag{2.58}$$

Наконец, из (2.56), (2.57) и (2.58) вытекает (2.45). Теорема доказана. $\square$

Ниже будет приведен еще один класс достаточных условий сильной эллиптичности уравнения (2.27). Эти условия также имеют вид некоторой специальной оценки символа $\rho(x,\xi)$. В основе их получения лежит замена скалярного оператора (2.29) матричным оператором

$$\begin{bmatrix} (1-\delta(x,\xi))I & \rho(x,\xi)P \\ P^*\bar{\rho}(x,\xi) & \delta(x,\xi)I \end{bmatrix} : L_2^2(\Omega) \longrightarrow L_2^2(\Omega), \tag{2.59}$$

где $\delta(x,\xi)$ — некоторая гладкая на $\overline{\Omega}\times S^{n-1}$ вещественнозначная функция. Условия на δ будут наложены позже. Эти условия должны обеспечивать положительную определенность оператора (2.59). Если записать квадратичную форму этого оператора:

$$\left(\begin{bmatrix} (1-\delta(\cdot\,,\xi))I & \rho(\cdot\,,\xi)P \\ P^*\bar{\rho}(\cdot\,,\xi) & \delta(\cdot\,,\xi)I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right)_{L_2^2(\Omega)} =$$

$$= ((1-\delta(\cdot\,,\xi))v_1, v_1)_{L_2(\Omega)} + (\delta(\cdot\,,\xi)v_2, v_2)_{L_2(\Omega)} + 2\,\mathrm{Re}\,(\rho(\cdot\,,\xi)Pv_2, v_1)_{L_2(\Omega)},$$

то видно, что на подпространстве $v_1 = v_2 = v$ она превращается в

$$\|v\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\,\mathrm{Re}\,(\rho(\cdot\,,\xi)Pv, v)_{L_2(\Omega)},$$

что совпадает с квадратичной формой оператора $I + \rho(x,\xi)P + P^*\bar{\rho}(x,\xi)$. Отсюда, в частности, следует, что условие положительной определенности оператора (2.59) не слабее, чем положительная определенность оператора (2.29). Вопрос о том, вытекает ли существование такой функции δ, при которой матричный оператор (2.59) положительно определен, из положительной определенности скалярного оператора (2.29), остается открытым (для автора). Преимущество перехода к матричным операторам состоит в том, что нужное разложение, заменяющее разложение (2.37), строится в этом случае элементарно и не требует наложения новых дополнительных условий. Попробуем представить оператор (2.59) в виде

$$\begin{bmatrix} (1-\delta(x,\xi))I & \rho(x,\xi)P \\ P^*\bar{\rho}(x,\xi) & \delta(x,\xi)I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ N^* & I \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

с положительно определенными операторами M_1, M_2, повторяющем хорошо известный из линейной алгебры способ разложения положительной матрицы в произведение верхней и эрмитово сопряженной нижней треугольных матриц. Записывая результат перемножения трех матриц справа, после приравнивания соответствующих элементов получаем систему уравнений

$$M_1 + NM_2N^* = (1-\delta(x,\xi))I, \quad NM_2 = \rho(x,\xi)P, \quad M_2 = \delta(x,\xi)I,$$

из которой все операторы легко находятся:

$$M_2 = \delta(x,\xi)I, \quad N = \rho(x,\xi)P\frac{1}{\delta(x,\xi)} = \frac{\rho(x,\xi)}{\delta(q^{-1}x,\xi)}P,$$

$$M_1 = (1-\delta(x,\xi))I - \frac{\rho(x,\xi)}{\delta(q^{-1}x,\xi)}P\delta(x,\xi)P^*\frac{\bar{\rho}(x,\xi)}{\delta(q^{-1}x,\xi)} =$$

$$= \left(1-\delta(x,\xi) - \frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{\delta(q^{-1}x,\xi)}\right)I.$$

Остается потребовать

$$0 < \delta(x,\xi) < 1, \quad q^n\,|\rho(x,\xi)|^2 < \delta(q^{-1}x,\xi)\,(1-\delta(x,\xi)) \quad (x \in \overline{\Omega}, \xi \in S^{n-1}).$$

Эти соотношения, которые и будут условиями заключительной теоремы данного раздела, выражают тот факт, что матричный оператор (2.59) положительно определен. Сейчас будем считать эти условия выполненными.

Переписывая теперь правую часть (2.60) в виде

$$\begin{bmatrix} I & N \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{M_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{M_2} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ N^* & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{M_1} & N\sqrt{M_2} \\ 0 & \sqrt{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{M_1} & 0 \\ \sqrt{M_2}N^* & \sqrt{M_2} \end{bmatrix},$$

получаем разложение

$$\begin{bmatrix} (1-\delta(x,\xi))I & \rho(x,\xi)P \\ P^*\bar{\rho}(x,\xi) & \delta(x,\xi)I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\delta(x,\xi)-\frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{\delta(q^{-1}x,\xi)}}\,I & \frac{\rho(x,\xi)}{\sqrt{\delta(q^{-1}x,\xi)}}P \\ 0 & \sqrt{\delta(x,\xi)}I \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \sqrt{1-\delta(x,\xi)-\frac{q^n|\rho(x,\xi)|^2}{\delta(q^{-1}x,\xi)}}\,I & 0 \\ P^*\frac{\bar{\rho}(x,\xi)}{\sqrt{\delta(q^{-1}x,\xi)}} & \sqrt{\delta(x,\xi)}I \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

Умножая каждую из частей равенства (2.61) справа и слева на матрицу

$$\begin{bmatrix} \sqrt{a(x,\xi)}I & 0 \\ 0 & \sqrt{a(x,\xi)}I \end{bmatrix},$$

будем иметь

$$\begin{bmatrix} (1-\delta(x,\xi))a(x,\xi)I & b(x,\xi)P \\ P^*\bar{b}(x,\xi) & \delta(x,\xi)a(x,\xi)I \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \omega_1(x,\xi)I & \eta(x,\xi)P \\ 0 & \omega_2(x,\xi)I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1(x,\xi)I & 0 \\ P^*\bar{\eta}(x,\xi) & \omega_2(x,\xi)I \end{bmatrix}, \tag{2.62}$$

где функции ω_1, ω_2 и η принадлежат $C^\infty\left(\overline{\Omega} \times S^{n-1}\right)$ и определяются по формулам

$$\omega_1(x,\xi) = \sqrt{(1-\delta(x,\xi))a(x,\xi) - \frac{q^n|b(x,\xi)|^2}{a(q^{-1}x,\xi)\delta(q^{-1}x,\xi)}},$$

$$\omega_2(x,\xi) = \sqrt{\delta(x,\xi)a(x,\xi)}, \quad \eta(x,\xi) = \frac{b(x,\xi)}{\sqrt{a(q^{-1}x,\xi)\delta(q^{-1}x,\xi)}}$$

(к разложениям (2.37) и (2.43) эти функции отношения не имеют). Отметим вновь, что на подпространстве $v_1 = v_2$ вектор-функций $\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}^T \in L_2^2(\Omega)$ квадратичная форма матричного оператора

$$\begin{bmatrix} (1-\delta)aI & bP \\ P^*\bar{b} & \delta aI \end{bmatrix}$$

совпадает с квадратичной формой оператора $a + bP + P^*\bar{b}$.

Теорема 2.6. *Пусть область* Ω *такова, что* $\overline{\Omega} \subset \varkappa\Omega$ *для всех* $\varkappa > 1$. *Предположим также, что существует гладкая на* $\overline{\Omega} \times S^{n-1}$ *функция* $\delta(x,\xi)$ *такая, что* $0 < \delta(x,\xi) < 1$ *и*

$$q^n\,|\rho(x,\xi)|^2 < \delta(q^{-1}x,\xi)\,(1-\delta(x,\xi)) \quad (x \in \overline{\Omega}, \xi \in S^{n-1}). \tag{2.63}$$

Тогда уравнение (2.27) — *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega}$.

Доказательство. Доказательство сводится к получению оценки (2.45) так же, как и в теореме 2.5. Вводим ПДО, отвечающие построенным символам. Продолжим функцию $\delta(x,\xi)$ по ξ со сферы S^{n-1} в $\mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\}$ как положительно однородную нулевого порядка. Тогда функции $\omega_1(x,\xi)$, $\omega_2(x,\xi)$ и $\eta(x,\xi)$ естественным образом определены в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n_\xi \setminus \{0\}$ и являются положительно однородными порядка m по ξ. Определим символы

$$\omega_1'(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)\omega_1(x,\xi), \quad \omega_2'(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)\omega_2(x,\xi), \quad \eta'(x,\xi) = \varphi(x)\chi(\xi)\eta(x,\xi)$$

с теми же, что и ранее $\varphi(x)$ и $\chi(\xi)$. Отвечающие им ПДО класса OPS^m обозначим $\omega_1'(x,D)$, $\omega_2'(x,D)$ и $\eta'(x,D)$.

Рассмотрим следующую композицию матричных операторов, действующих на функции в $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} \omega_1'(x,D) & \eta'(x,D)P \\ 0 & \omega_2'(x,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1'(x,D) & 0 \\ P^*\bar{\eta}'(x,D) & \omega_2'(x,D) \end{bmatrix}. \tag{2.64}$$

Эта композиция построена по найденному выше разложению (2.62). Первый важный момент, связанный с (2.64), состоит в том, что для любой $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ выполняется соотношение

$$\begin{gathered}
\left(\begin{bmatrix} \omega_1'(\cdot,D) & \eta'(\cdot,D)P \\ 0 & \omega_2'(\cdot,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1'(\cdot,D) & 0 \\ P^*\bar{\eta}'(\cdot,D) & \omega_2'(\cdot,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} \right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)} = \\
= \left\| \begin{bmatrix} \omega_1'(\cdot,D) & 0 \\ P^*\bar{\eta}'(\cdot,D) & \omega_2'(\cdot,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} \right\|^2_{L_2^2(\mathbb{R}^n)} + \\
+ \left(\begin{bmatrix} \omega_1'(\cdot,D) & 0 \\ P^*\bar{\eta}'(\cdot,D) & \omega_2'(\cdot,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1(\cdot,D) & 0 \\ P^*h_3(\cdot,D) & h_2(\cdot,D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \end{bmatrix} \right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}
\end{gathered} \tag{2.65}$$

с операторами $h_1(x,D), h_2(x,D), h_3(x,D)$ порядка $m-1$. Здесь мы воспользовались свойством сопряженного ПДО (п. 4 замечания 2.6).

Из ограниченности ПДО в пространствах Соболева (п. 2 замечания 2.6) следует, что второе слагаемое в правой части (2.65) оценивается сверху (с некоторой константой) произведением $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}$, в то время как первое слагаемое неотрицательно.

С другой стороны, композиция (2.64) приводит к оператору

$$\begin{bmatrix} \omega_1'(x,D)^2 + q^n\eta'(x,D)\bar{\eta}'(x,D) & \eta'(x,D)\omega_2'(q^{-1}x,qD)P \\ P^*\omega_2'(q^{-1}x,qD)\bar{\eta}'(x,D) & \omega_2'(x,D)^2 \end{bmatrix}.$$

Из свойства композиции ПДО (п. 3 замечания 2.6) и определения символов $\omega_1'(x,\xi)$, $\omega_2'(x,\xi)$, $\eta'(x,\xi)$ следует, что оператор $\omega_1'(x,D)^2 + q^n\eta'(x,D)\bar{\eta}'(x,D)$ отличается от оператора $\theta_1(x,D)$ с символом

$$\begin{gathered}
\theta_1(x,\xi) = \omega_1'(x,\xi)^2 + q^n\eta'(x,\xi)\bar{\eta}'(x,\xi) = \varphi^2(x)\chi^2(\xi)\left(\omega_1^2(x,\xi) + q^n|\eta(x,\xi)|^2\right) = \\
= \varphi^2(x)\chi^2(\xi)(1-\delta(x,\xi))a(x,\xi)
\end{gathered}$$

на ПДО $g_1(x,D)$ порядка $2m-1$.

Оператор $\omega_2'(x,D)^2$ также отличается от оператора $\theta_2(x,D)$ с символом

$$\theta_2(x,\xi) = \varphi^2(x)\chi^2(\xi)\delta(x,\xi)a(x,\xi)$$

на ПДО $g_2(x,D)$ порядка $2m-1$.

Оператор $\eta'(x,D)\omega_2'(q^{-1}x,qD)$ отличается от оператора $\sigma(x,D)$ с символом

$$\sigma(x,\xi)=\eta'(x,\xi)\omega_2'(q^{-1}x,q\xi)=\varphi(x)\chi(\xi)\eta(x,\xi)\varphi(q^{-1}x)\chi(q\xi)\omega_2(q^{-1}x,q\xi)=$$
$$=\varphi(x)\chi(\xi)\frac{b(x,\xi)}{\sqrt{a(q^{-1}x,\xi)\delta(q^{-1}x,\xi)}}q^m\sqrt{\delta(q^{-1}x,\xi)a(q^{-1}x,\xi)}=\varphi(x)\chi(\xi)q^m b(x,\xi)$$

на ПДО $g_3(x,D)$ порядка $2m-1$.

Наконец, оператор $\omega_2'(q^{-1}x,qD)\bar\eta'(x,D)$ отличается от оператора $\bar\sigma(x,D)$ с символом $\bar\sigma(x,\xi)$ на ПДО $g_4(x,D)$ порядка $2m-1$.

Итак, композиция (2.64) представима в виде

$$\begin{bmatrix}\omega_1'(x,D) & \eta'(x,D)P\\ 0 & \omega_2'(x,D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1'(x,D) & 0\\ P^*\bar\eta'(x,D) & \omega_2'(x,D)\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\theta_1(x,D) & \sigma(x,D)P\\ P^*\bar\sigma(x,D) & \theta_2(x,D)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_1(x,D) & g_3(x,D)P\\ P^*g_4(x,D) & g_2(x,D)\end{bmatrix}. \tag{2.66}$$

Вклад второго слагаемого в квадратичную форму оценивается аналогично теореме 2.5:

$$\left(\begin{bmatrix}g_1(\cdot\,,D) & g_3(\cdot\,,D)P\\ P^*g_4(\cdot\,,D) & g_2(\cdot\,,D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix}\right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}=$$
$$=\left((1-\Delta)^{-m/2}\begin{bmatrix}g_1(\cdot\,,D) & g_3(\cdot\,,D)P\\ P^*g_4(\cdot\,,D) & g_2(\cdot\,,D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix},(1-\Delta)^{m/2}\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix}\right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}=$$
$$=\left(\begin{bmatrix}(g_1'(\cdot\,,D)+g_3'(\cdot\,,D)P)\,u\\ (P^*g_4'(\cdot\,,D)+g_2'(\cdot\,,D))\,u\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(1-\Delta)^{m/2}u\\ (1-\Delta)^{m/2}u\end{bmatrix}\right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{2.67}$$

причем все операторы $g_i'(x,D)=(1-\Delta)^{-m/2}g_i(x,D)$ $(i=1,2,3)$, а также

$$g_4'(x,D)=(1-q^2\Delta)^{-m/2}g_4(x,D)$$

имеют порядок $m-1$. Вновь из свойства ограниченности ПДО в пространствах Соболева получаем, что скалярное произведение (2.67) оценивается выражением $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}$.

Остается рассмотреть скалярное произведение

$$\left(\begin{bmatrix}\theta_1(\cdot\,,D) & \sigma(\cdot\,,D)P\\ P^*\bar\sigma(\cdot\,,D) & \theta_2(\cdot\,,D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u\\u\end{bmatrix}\right)_{L_2^2(\mathbb{R}^n)}=$$
$$=(\theta_1(\cdot\,,D)u+\sigma(\cdot\,,D)Pu,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}+(P^*\bar\sigma(\cdot\,,D)u+\theta_2(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}=$$
$$=((\theta_1(\cdot\,,D)+\theta_2(\cdot\,,D))u,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}+$$
$$+(\sigma(\cdot\,,D)Pu,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}+(P^*\bar\sigma(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.68}$$

Символ оператора $\theta_1(x,D)+\theta_2(x,D)$ равен

$$\theta_1(x,\xi)+\theta_2(x,\xi)=\varphi^2(x)\chi^2(\xi)a(x,\xi)=\varphi^2(x)a(x,\xi)+\varphi^2(x)(\chi^2(\xi)-1)a(x,\xi),$$

причем оператор $g_5(x,D)$ с символом

$$g_5(x,\xi)=\varphi^2(x)(\chi^2(\xi)-1)a(x,\xi)$$

сглаживающий (имеет порядок $-\infty$), а на функциях с носителем в $\varkappa^{-1}\Omega$ дифференциальный оператор $\varphi^2(x)a(x,D)$ совпадает с оператором $a(x,D)$. Итак,

$$((\theta_1(\cdot\,,D)+\theta_2(\cdot\,,D))u,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}=(a(\cdot\,,D))u,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)}+(g_5(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \tag{2.69}$$

для всех $u\in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Далее,

$$\sigma(x,\xi)=\varphi(x)q^m b(x,\xi)+\varphi(x)(\chi(\xi)-1)q^m b(x,\xi),$$

причем оператор $g_6(x,D)$ с символом

$$g_6(x,\xi)=\varphi(x)(\chi(\xi)-1)q^m b(x,\xi)$$

сглаживающий, а сужения на область $\varkappa^{-1}\Omega$ функций $\varphi(x)q^m b(x,D)u$ и $q^m b(x,D)u$ совпадают. Поэтому

$$(\sigma(\cdot\,,D)Pu,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}=(q^m b(\cdot\,,D)Pu,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)}+(g_6(\cdot\,,D)Pu,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \tag{2.70}$$

для всех $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Аналогично, используя тот факт, что дифференциальные операторы $\varphi(x)q^m\bar{b}(x,D)$ и $q^m\bar{b}(x,D)$ совпадают на функциях из $C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$, имеем

$$(P^*\bar{\sigma}(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \left(P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D)u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} + (P^*g_7(\cdot\,,D)u,u)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)} \tag{2.71}$$

со сглаживающим оператором $g_7(x,D)$.

Вторые слагаемые в правых частях формул (2.69), (2.70) и (2.71) оцениваются через $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}$, а первые слагаемые в сумме дают нужное нам скалярное произведение

$$\left((a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D))u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)},$$

фигурирующее в оценке (2.34). Таким образом, комбинируя (2.65), (2.66), (2.67), (2.68), (2.69), (2.70) и (2.71), получаем, что с точностью до слагаемых, оценивающихся выражением $\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\|u\|_{H^{m-1}(\mathbb{R}^n)}$, скалярное произведение

$$\left((a(\cdot\,,D) + q^m b(\cdot\,,D)P + P^*q^m\bar{b}(\cdot\,,D))u,u\right)_{L_2(\varkappa^{-1}\Omega)}$$

совпадает с величиной

$$\left\|\begin{bmatrix} \omega_1'(\cdot\,,D) & 0 \\ P^*\bar{\eta}'(\cdot\,,D) & \omega_2'(\cdot\,,D)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ u\end{bmatrix}\right\|^2_{L_2^2(\mathbb{R}^n)} \geqslant 0$$

на функциях $u \in C_0^\infty(\varkappa^{-1}\Omega)$. Оценка (2.34), а вместе с ней и теорема 2.6 доказаны. □

Замечание 2.7. В получении содержащихся в теоремах 2.5 и 2.6 результатов естественным образом выделяются два этапа. Первый этап состоит в разложении положительно определенного функционального оператора с параметром ξ в произведение оператора заданного вида и сопряженного ему оператора. По найденному разложению, на втором этапе мы записываем соответствующее разложение для исходного функционально-дифференциального оператора уже в классе функциональных и псевдодифференциальных операторов (грубо говоря, заменяем ξ на D), после чего выводим нужные оценки, опираясь на хорошо известные свойства ПДО. Конечно, любой положительно определенный оператор представим (и притом бесконечным числом способов) в виде произведения невырожденного оператора и сопряженного к нему. Целью, однако, является получение такого разложения, по элементам которого можно построить псевдодифференциальные операторы. В этом состоит основная трудность предложенного подхода.

Замечание 2.8. Требование на область $\overline{\Omega} \subset \varkappa\Omega$ ($\varkappa > 1$) в теоремах 2.5, 2.6 является, в отличие от основного условия (1.5), более сильным, чем условие звездности. Например, звездная область, изображенная на рис. 1.2, этому требованию не удовлетворяет. С другой стороны, оно выполнено для любой области, звездной относительно шара, содержащего начало координат.

Рассмотрим некоторые примеры применения теоремы 2.6.

Пример 2.3. Полагая $\delta(x,\xi) = 1/2$ в теореме 2.6, получаем, что неравенство

$$q^{n/2}\,|\rho(x,\xi)| < 1/2 \quad (x \in \overline{\Omega}, \xi \in S^{n-1}) \tag{2.72}$$

будет достаточным для выполнения оценки (2.4). Этот результат является и частным случаем достаточного условия из теоремы 2.5. Вновь отметим, что при постоянных коэффициентах (2.72) совпадает с необходимым условием из теоремы 2.4, эквивалентом которого (но только при постоянных коэффициентах!) служит алгебраическое неравенство (2.15).

Следующий пример показывает, что требование $q^{n/2}\,|\rho(x,\xi)| < 1/2$, накладываемое даже лишь при $x \in q^{-1}\overline{\Omega}$ (теорема 2.5), в случае переменных коэффициентов необходимым для сильной эллиптичности, вообще говоря, не является. Более того, существуют сильно эллиптические уравнения (2.27), у которых величина $q^{n/2}\,|\rho(x,\xi)|$ может быть сколь угодно близка к 1 в точках x, расположенных сколь угодно близко к началу координат. При этом условия

$$q^{n/2}\,|\rho(x,\xi)| < 1 \ \ (x \in \overline{\Omega}), \quad q^{n/2}\,|\rho(0,\xi)| < 1/2,$$

являются, как мы убедились выше, необходимыми ((2.33) и следствие 2.2).

Пример 2.4. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < d\}$. Возьмем $\delta(x,\xi) = ke^{-q^2|x|^2}$. Будем считать, что

$$(q^2+1)^{-1} < k < 1 \text{ и } d > q^{-1}\sqrt{\ln k(q^2+1)}.$$

Теорема 2.6 дает следующее достаточное условие сильной эллиптичности уравнения (2.27):

$$q^n|\rho(x,\xi)|^2 < ke^{-|x|^2}\left(1 - ke^{-q^2|x|^2}\right) \quad \left(|x| \leqslant d, \xi \in S^{n-1}\right). \tag{2.73}$$

Наибольшее значение, равное $k^{1-q^{-2}}q^2(q^2+1)^{-(1+q^{-2})}$, правая часть неравенства (2.73) принимает в точках $|x| = q^{-1}\sqrt{\ln k(q^2+1)}$ области Ω. Если взять q достаточно большим, а k близким к 1, то указанное значение будет мало отличаться от 1, а точки, где это значение достигается, будут близки к нулю.

Приведем простой пример уравнения, для которого неравенство (2.73) выполнено (считаем $n = 2$):

$$-\Delta u(x) + 2\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(b(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}(q^{-1}x)\right) = f(x) \quad (|x| < d), \tag{2.74}$$

где $b \in C^\infty(|x| \leqslant d)$ — комплекснозначная функция. Для этого уравнения имеем

$$a(x,\xi) = |\xi|^2, \quad b(x,\xi) = b(x)\xi_1\xi_2,$$

откуда при $|\xi| = 1$ получаем

$$\rho(x,\xi) = b(x)\xi_1\xi_2 \;\Rightarrow\; |\rho(x,\xi)| \leqslant |b(x)|/2.$$

Таким образом, для всякого коэффициента $b(x)$ такого, что

$$|b(x)| < 2q^{-1}\sqrt{ke^{-|x|^2}\left(1 - ke^{-q^2|x|^2}\right)} \quad (|x| \leqslant d),$$

выполнено неравенство (2.73), и уравнение (2.74) является сильно эллиптическим в круге $\left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant d\right\}$.

Для сравнения, теорема 2.5 гарантирует сильную эллиптичность уравнения (2.74) при таком условии:

$$|b(x)| < \sqrt{2}q^{-1}\ (|x| \leqslant d), \quad |b(x)| < q^{-1}\ (|x| \leqslant q^{-1}d).$$

Если b от x не зависит, то условие $|b| < q^{-1}$ является необходимым для сильной эллиптичности.

2.3. Разрешимость и спектр первой краевой задачи для сильно эллиптического уравнения

В этом разделе рассматривается задача (2.1), (2.2) в случае, когда уравнение (2.1) сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$, а правая часть $f(x)$ принадлежит $L_2(\Omega)$. С задачей свяжем непрерывную на пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$ полуторалинейную форму

$$\mathfrak{a}_R[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^m(\Omega)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\mathfrak{a}_R[u,v]| \leqslant M\|u\|_{H^m(\Omega)}\|v\|_{H^m(\Omega)} \quad (u,v \in \mathring{H}^m(\Omega)). \tag{2.75}$$

Кроме того, неравенство (2.4), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с $\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] \geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in \mathring{H}^m(\Omega)) \tag{2.76}$$

на всем пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$.

Функция $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ называется обобщенным решением задачи (2.1), (2.2), если интегральное тождество

$$\mathfrak{a}_R[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)}$$

выполнено для любой функции $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (2.1), (2.2), когда f пробегает все пространство $L_2(\Omega)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \mathring{H}^m(\Omega)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Рассуждения этого раздела хорошо известны, они носят достаточно общий характер и опираются на неравенство (2.4), позволяющее ввести в пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$ связанное с оператором в уравнении эквивалентное скалярное произведение.

Лемма 2.8. *Формула*

$$(u,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_R[u,v] + \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]}\right) + c_2(u,v)_{L_2(\Omega)}, \tag{2.77}$$

где $c_2 \geqslant 0$ — постоянная из неравенства (2.76)*, задает эквивалентное скалярное произведение на пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$.*

Доказательство. Правая часть (2.77) представляет собой непрерывную на $\mathring{H}^m(\Omega)$ эрмитову полуторалинейную форму, причем

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_R[u,u] + \overline{\mathfrak{a}_R[u,u]}\right) + c_2(u,u)_{L_2(\Omega)} = \operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] + c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{\mathring{H}^m(\Omega)}$$

в силу (2.76). □

Лемма 2.9. *Существует* (*единственный*) *линейный ограниченный оператор*

$$K : \mathring{H}^m(\Omega) \to \mathring{H}^m(\Omega)$$

такой, что

$$(u,Kv)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}_R[u,v] - \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]}\right) \tag{2.78}$$

для всех $u, v \in \mathring{H}^m(\Omega)$. При этом оператор K является самосопряженным,

$$(Ku,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (u,Kv)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}, \quad \|K\|' \leqslant M/c_1,$$

где M и c_1 — постоянные из неравенств (2.75) *и* (2.76)*, а $\|.\|'$ обозначает операторную норму, отвечающую норме $\|.\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)}$.*

Доказательство. При фиксированной функции $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$, правая часть (2.78) представляет собой непрерывный линейный функционал относительно u на пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$, рассматриваемом с эквивалентным скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}$:

$$\left|\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}_R[u,v] - \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]}\right)\right| \leqslant M\|v\|_{\mathring{H}^m(\Omega)}\|u\|_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leqslant \frac{M}{c_1}\|v\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)}\|u\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

По теореме Рисса существует единственный элемент, обозначим его Kv, пространства $\mathring{H}^m(\Omega)$, для которого равенство (2.78) справедливо при всех u из $\mathring{H}^m(\Omega)$. Соответствие $v \mapsto Kv$ является, очевидно, линейным и, кроме того,

$$\|Kv\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leqslant (M/c_1)\|v\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)},$$

откуда вытекает оценка нормы оператора K, $\|K\|' \leqslant M/c_1$.

Наконец,

$$(v,Ku)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}_R[v,u] - \overline{\mathfrak{a}_R[u,v]}\right),$$

так что

$$(Ku,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \overline{(v,Ku)'}_{\mathring{H}^m(\Omega)} = -\frac{1}{2i}\left(\overline{\mathfrak{a}_R[v,u]} - \mathfrak{a}_R[u,v]\right) = (u,Kv)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

□

Теорема 2.7. *Оператор $\mathcal{A}_R$ фредгольмов, а его спектр $\sigma(\mathcal{A}_R)$ — дискретный, при этом*

$$\sigma(\mathcal{A}_R) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > -c_2,\ |\arg(\lambda + c_2)| \leqslant \operatorname{arctg}(M/c_1)\}.$$

Для всякого $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_R)$ резольвента $\mathcal{R}(\lambda,\mathcal{A}_R) : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ есть компактный оператор.

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$-c_2 u - \mathcal{A}_R u = f, \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R),\ f \in L_2(\Omega).$$

По определению,

$$\mathfrak{a}_R[u,v] + c_2(u,v)_{L_2(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)},$$

или

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{a}_R[u,v] + \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]}\right) + c_2(u,v)_{L_2(\Omega)} + i\,\frac{1}{2i}\left(\mathfrak{a}_R[u,v] - \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]}\right) = -(f,v)_{L_2(\Omega)}$$

для всех $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$. В силу лемм 2.8 и 2.9 последнее соотношение можно переписать следующим образом:

$$(u,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + i(Ku,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = -(f,v)_{L_2(\Omega)}. \tag{2.79}$$

Правая часть этого равенства является непрерывным антилинейным функционалом относительно v на пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$ и по теореме Рисса порождает ограниченный линейный оператор $\Lambda : L_2(\Omega) \to \mathring{H}^m(\Omega)$ такой, что

$$(\Lambda f, v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in \mathring{H}^m(\Omega).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно операторному уравнению

$$(I + iK)u = F$$

в $\mathring{H}^m(\Omega)$ с правой частью $F = -\Lambda f$. Поскольку оператор iK кососимметрический, его спектр лежит на мнимой оси, и существует ограниченный обратный оператор $(I+iK)^{-1} : \mathring{H}^m(\Omega) \to \mathring{H}^m(\Omega)$, т. е. уравнение имеет единственное решение

$$u = (I+iK)^{-1}F = -(I+iK)^{-1}\Lambda f.$$

Чтобы оценить норму этого решения, подставим в (2.79) $v = u$. Будем иметь

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} + i(Ku,u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = -(f,u)_{L_2(\Omega)},$$

откуда с учетом вещественности $(Ku,u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}$ получаем оценку

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leqslant |(f,u)_{L_2(\Omega)}| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] + c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

выводим

$$\|u\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)} \leqslant (1/\sqrt{c_1})\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Итак, точка $\lambda = -c_2$ является резольвентной точкой оператора $\mathcal{A}_R$, и резольвента в этой точке компактна (в силу компактного вложения $\mathring{H}^m(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$). А хорошо известно, что всякий оператор с компактной резольвентой имеет дискретный спектр, т. е. спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности. Чтобы в этом убедиться, достаточно записать оператор $\lambda I - \mathcal{A}_R$ для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ в виде

$$\lambda I - \mathcal{A}_R = (I + (\lambda + c_2)\mathcal{R}(-c_2, \mathcal{A}_R))\,(-c_2 I - \mathcal{A}_R),$$

сводящем вопрос о разрешимости к уравнению с оператором «тождественный плюс компактный». Из этого представления очевидным образом вытекает и фредгольмовость оператора $\lambda I - \mathcal{A}_R$.

Убедимся теперь, что все собственные значения лежат в угле, охватывающем положительную вещественную полуось. Пусть $\mathcal{A}_R u = \lambda u$ при ненулевой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$, которую можно нормировать: $\|u\|'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = 1$. Прибавляя $c_2 u$ к обеим частям этого уравнения и переходя к равносильной записи, получим

$$(u,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + i(Ku,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (\lambda + c_2)(\Lambda u, v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^m(\Omega)).$$

Полагая теперь $v = u$, будем иметь

$$1 + i(Ku,u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (\mu + c_2)(\Lambda u, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + i\nu(\Lambda u, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}, \tag{2.80}$$

где μ и ν обозначают действительную и мнимую части числа λ.

Отметим, что сужение оператора Λ на пространство $\mathring{H}^m(\Omega)$ (будем обозначать это сужение Λ_0) является положительным и компактным оператором в $\mathring{H}^m(\Omega)$. Действительно, по определению,

$$(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)} > 0, \ u \neq 0,$$

а компактность Λ_0 следует из компактности вложения $\mathring{H}^m(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. Приравняем действительные и мнимые части равенства (2.80):

$$1 = (\mu + c_2)(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}, \quad (Ku, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = \nu(\Lambda_0 u, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Отсюда следует, что действительная и мнимая части собственного значения удовлетворяют соотношениям

$$\mu > -c_2, \quad \frac{\nu}{\mu + c_2} = (Ku, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}.$$

Поскольку u лежит на единичной сфере, имеем

$$|(Ku, u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}| \leqslant \|K\|'.$$

Применяя лемму 2.9, получим $|\nu|/(\mu + c_2) \leqslant M/c_1$. Теорема доказана. □

Пример 2.5. Из примера 2.4, теоремы 2.1 и замечания 2.2 следует, что при $b \in \mathbb{C}$, $|b| < q^{-1}$, краевая задача

$$-\Delta u(x) + 2b\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(q^{-1}x)\right) = f(x) \quad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2),$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ для любой правой части $f \in L_2(\Omega)$ и в случае произвольной ограниченной области Ω.

Пример 2.6. Убедимся, что краевая задача

$$-\Delta\left(u(x) + 2u(9x)\right) + 5(1 + |x|^2)^{-1}u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{2.81}$$
$$u(x) = 0 \quad (x \notin \Omega)$$

имеет единственное обобщенное решение при любой функции $f \in L_2(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — произвольная ограниченная область. Имеем

$$a_R(\lambda, \xi) = (1 + 18/\lambda)|\xi|^2.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(1 + 18/\lambda) \geqslant 1/3 > 0$ на окружности $|\lambda| = 9^{3/2} = 27$, уравнение (2.81) — сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$. Более того,

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u, u] \geqslant \frac{1}{3}\int\limits_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx + \frac{5}{1 + \sup\{|x|^2 : x \in \Omega\}}\int\limits_\Omega |u(x)|^2\,dx,$$

т. е. $c_2 = 0$ в неравенстве (2.76). Тогда по теореме 2.7 краевая задача для уравнения (2.81) однозначно разрешима.

Следствие 2.3. *Оператор $\mathcal{A}_R$, отвечающий сильно эллиптическому уравнению* (2.1)*, является m-секториальным, ассоциированным с полуторалинейной формой $\mathfrak{a}_R[u, v]$.*

Доказательство. Из теоремы 2.7 следует, что оператор $\mathcal{A}_R$ секториальный: его числовая область значений

$$\{(\mathcal{A}_R u, u)_{L_2(\Omega)} : u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R), \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1\}$$

содержится, как нетрудно видеть, в угле

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\arg(\lambda + c_2)| \leqslant \operatorname{arctg}(M/c_1)\}.$$

Убедимся, что оператор $\mathcal{A}_R + c_2 I$ является аккретивным. Теорема 2.7 гарантирует существование ограниченного (и даже компактного) обратного оператора

$$(\mathcal{A}_R + (c_2 + \lambda)I)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega), \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Остается оценить его норму. Равенство

$$(\mathcal{A}_R + (c_2 + \lambda)I)u = f$$

означает по определению оператора $\mathcal{A}_R$, что

$$\mathfrak{a}_R[u,v] + (\lambda + c_2)(u,v)_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)},$$

или

$$(u,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + i(Ku,v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^m(\Omega)).$$

При подстановке $v = u$ получаем

$$\|u\|'^2_{\mathring{H}^m(\Omega)} + \mu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + i((Ku,u)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} + \nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)}) = (f,u)_{L_2(\Omega)},$$

где $\mu > 0$ и ν есть действительная и мнимая части λ. Из последнего равенства следует оценка

$$\mu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant |(f,u)_{L_2(\Omega)}| \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)},$$

откуда

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mu^{-1}\|f\|_{L_2(\Omega)},$$

т. е.

$$\left\|(\mathcal{A}_R + (c_2+\lambda)I)^{-1}\right\| \leqslant (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}_R$ является квази-m-аккретивным и, следовательно, m-секториальным. То, что оператор $\mathcal{A}_R$ ассоциирован с формой $\mathfrak{a}_R[u,v]$, вытекает из его определения. □

Вместе с уравнением (2.1) рассмотрим уравнение

$$\widehat{A}_R u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} D^\alpha R^*_{\beta\alpha} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.82}$$

и отвечающую ему форму

$$\mathfrak{a}^*_R[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} (R^*_{\beta\alpha}D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} = \overline{\mathfrak{a}_R[v,u]} \quad (u,v \in \mathring{H}^m(\Omega)).$$

Уравнение (2.82), очевидно, также будет сильно эллиптическим. Аналогичным образом введем оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}_R : \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega),$$

отвечающий задаче Дирихле для уравнения (2.82) в обобщенной постановке. Понятно, что теорема 2.7 и следствие 2.3 будут выполнены и для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_R$.

Лемма 2.10. $\mathcal{A}^*_R = \widehat{\mathcal{A}}_R$, $\widehat{\mathcal{A}}^*_R = \mathcal{A}_R$.

Доказательство. Из определения операторов $\mathcal{A}_R$ и $\widehat{\mathcal{A}}_R$ следует, что

$$(\mathcal{A}_R u,v)_{L_2(\Omega)} = \mathfrak{a}_R[u,v] \quad \left(u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R), v \in \mathring{H}^m(\Omega)\right),$$

$$(u,\widehat{\mathcal{A}}_R v)_{L_2(\Omega)} = \overline{\mathfrak{a}^*_R[v,u]} = \mathfrak{a}_R[u,v] \quad \left(u \in \mathring{H}^m(\Omega), v \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_R)\right),$$

т. е.

$$(\mathcal{A}_R u,v)_{L_2(\Omega)} = (u,\widehat{\mathcal{A}}_R v)_{L_2(\Omega)} \quad \text{при} \quad u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R), \quad v \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_R).$$

Это означает, что $\widehat{\mathcal{A}}_R \subset \mathcal{A}^*_R$ и $\mathcal{A}_R \subset \widehat{\mathcal{A}}^*_R$. Утверждение леммы следует из дискретности спектров обоих операторов и леммы 3 [12, с. 889]. □

Для m-аккретивных операторов $\mathcal{A}_R + c_2 I$ и $\mathcal{A}^*_R + c_2 I$ единственным образом определены m-аккретивные квадратные корни $(\mathcal{A}_R + c_2 I)^{1/2}$ и $(\mathcal{A}^*_R + c_2 I)^{1/2}$ [15, глава V]. Приведем без доказательства следующее важное утверждение, также опирающееся на неравенство (2.4) и справедливое в том числе для рассматриваемых здесь операторов.

Теорема 2.8 (Р. В. Шамин, [58]).

$$\mathcal{D}\left((\mathcal{A}_R + c_2 I)^{1/2}\right) = \mathcal{D}\left((\mathcal{A}^*_R + c_2 I)^{1/2}\right) = \mathring{H}^m(\Omega).$$

Теорема 2.9. *Предположим, что $R_{\beta\alpha} = R^*_{\alpha\beta}$ для всех мультииндексов α, β. Тогда оператор $\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ — самосопряженный, его собственные значения λ_k вещественны и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Собственные функции u_k оператора $\mathcal{A}_R$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(\Omega)$, а функции $u_k/\sqrt{\lambda_k + c_2}$ — ортонормированный базис в пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$ со скалярным произведением по формуле* (2.77).

Доказательство. Первая часть заключения теоремы вытекает из теоремы 2.7 и леммы 2.10. Пусть $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ — собственная функция оператора $\mathcal{A}_R$, соответствующая собственному значению λ. Тогда $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda > -c_2$. Из леммы 2.8 и доказательства теоремы 2.7 следует, что $(K = 0)$

$$(u, v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (c_2 + \lambda)(u, v)_{L_2(Q)} = (c_2 + \lambda)(\Lambda_0 u, v)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} \tag{2.83}$$

для всех $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$.

Итак, интегральное тождество (2.83) эквивалентно операторному уравнению

$$\Lambda_0 u = (c_2 + \lambda)^{-1} u$$

в пространстве $\mathring{H}^m(\Omega)$ с положительным компактным оператором Λ_0. По теореме Гильберта—Шмидта существует ортогональный базис в $\mathring{H}^m(\Omega)$ со скалярным произведением (2.77), состоящий из собственных функций u_k оператора Λ_0, которые соответствуют собственным значениям $1/(\lambda_k + c_2)$. Будем считать, что $\|u_k\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Отсюда и из (2.83) имеем

$$(u_l, u_k)_{L_2(\Omega)} = (u_l, u_k)'_{\mathring{H}^m(\Omega)}/(\lambda_k + c_2) = 0 \quad (l \neq k);$$

$$\Big(u_k/\sqrt{\lambda_k + c_2}, u_k/\sqrt{\lambda_k + c_2}\Big)'_{\mathring{H}^m(\Omega)} = (u_k, u_k)_{L_2(\Omega)} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, функции $u_k/\sqrt{\lambda_k + c_2}$ составляют ортонормированный базис в $\mathring{H}^m(\Omega)$, а u_k, в силу того, что $\mathring{H}^m(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ — ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. □

В заключение этого раздела исследуем вопрос о поведении обобщенных решений задачи (2.1), (2.2) при $q \to 1$. Будем рассматривать уравнение (2.1) при фиксированных правой части f и коэффициентах $a_{\alpha\beta j}(x)$ и при всевозможных значениях $q > 1$ в операторах $R_{\alpha\beta}$, заданных формулой (2.3). Чтобы подчеркнуть зависимость от параметра сжатия q, используем до конца раздела обозначения $R_{\alpha\beta,q}$, A_q и $\mathfrak{a}_q[u, v]$ вместо $R_{\alpha\beta}$, A_R и $\mathfrak{a}_R[u, v]$. При (формальной) подстановке единицы вместо q операторы $R_{\alpha\beta,q}$ превращаются в операторы умножения на функции $a_{\alpha\beta}(x) = \sum\limits_j a_{\alpha\beta j}(x)$, обозначим эти операторы $R_{\alpha\beta,1}$, а само уравнение (2.1) становится обычным дифференциальным уравнением

$$A_1 u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} D^\alpha a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{2.84}$$

Соответствующая полуторалинейная форма имеет вид

$$\mathfrak{a}_1[u, v] = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)} \quad (u, v \in \mathring{H}^m(\Omega)),$$

и соотношение

$$\mathfrak{a}_1[u, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^m(\Omega))$$

определяет обобщенное решение $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (2.84).

В ситуации, когда для всех значений параметра $q \geqslant 1$, близких к 1, соответствующая краевая задача (2.84), (2.2) имеет при одной и той же функции f единственное обобщенное решение $u = u_q(x)$, естественно поставить вопрос о сходимости при $q \to 1$ семейства решений u_q к решению u_1 краевой задачи для дифференциального уравнения (2.84). Вначале сделаем ряд элементарных наблюдений относительно семейства форм $\mathfrak{a}_q[u, v]$, считая, что q пробегает отрезок $[1, q_0]$, где $q_0 > 1$ — некоторое фиксированное значение. Заметим, во-первых, что при $q \in [1, q_0]$ нормы операторов $R_{\alpha\beta,q}$, действующих в $L_2(\Omega)$, ограничены в совокупности. Поэтому неравенство

$$|\mathfrak{a}_q[u, v]| \leqslant M\|u\|_{H^m(\Omega)}\|v\|_{H^m(\Omega)} \quad (u, v \in \mathring{H}^m(\Omega))$$

выполняется с некоторой постоянной $M > 0$, не зависящей от $q \in [1, q_0]$. Далее рассмотрим разность

$$\mathfrak{a}_q[u,v] - \mathfrak{a}_1[u,v] = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \Big((R_{\alpha\beta,q} - R_{\alpha\beta,1}) D^\beta u, D^\alpha v \Big)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{|\alpha|,|\beta| \leqslant m} \sum_j \int\limits_\Omega a_{\alpha\beta j}(x) \left(D^\beta u(q^{-j}x) - D^\beta u(x) \right) \overline{D^\alpha v(x)}\, dx.$$

Учитывая ограниченность в $\overline{\Omega}$ коэффициентов $a_{\alpha\beta j}(x)$, каждый из интегралов в правой части можно оценить (опускаем умножение на некоторую общую постоянную) выражением

$$\|D^\alpha v\|_{L_2(\Omega)} \left(\int\limits_\Omega \left| D^\beta u(q^{-j}x) - D^\beta u(x) \right|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Из непрерывности в среднем квадратичном производных $D^\beta u$ вытекает теперь, что

$$|\mathfrak{a}_q[u,v] - \mathfrak{a}_1[u,v]| \leqslant h_q(u) \|v\|_{H^m(\Omega)}, \tag{2.85}$$

где $h_q(u) \to 0$ при $q \to 1$ для всякой фиксированной функции $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$.

Лемма 2.11. *Пусть при всех $q \in [1, q_0]$ функционально-дифференциальное уравнение* (2.1) (*в частном случае, дифференциальное уравнение* (2.84)) — *сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$. Более того, предположим, что неравенство*

$$\operatorname{Re}(A_q u, u)_{L_2(\Omega)} \geqslant c\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \tag{2.86}$$

выполняется для всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и всех $q \in [1, q_0]$ с одной и той же постоянной $c > 0$. Тогда для каждого значения $q \in [1, q_0]$ краевая задача (2.1), (2.2) (*в том числе и* (2.84), (2.2)) *имеет единственное обобщенное решение $u = u_q(x)$, при этом*

$$\|u_q - u_1\|_{H^m(\Omega)} \to 0, \quad q \to 1.$$

Доказательство. Существование и единственность обобщенного решения u_q при любой фиксированной функции $f \in L_2(\Omega)$ для рассматриваемых значений параметра q моментально следует из теоремы 2.7, справедливой, конечно, и при $q = 1$.

В условиях леммы имеем

$$c\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{a}_q[u,u] \leqslant M\|u\|^2_{H^m(\Omega)} \quad (u \in \mathring{H}^m(\Omega),\ q \in [1, q_0]). \tag{2.87}$$

Из соотношений

$$\mathfrak{a}_q[u_q, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}, \quad \mathfrak{a}_1[u_1, v] = (f, v)_{L_2(\Omega)}$$

вытекает

$$\mathfrak{a}_q[u_q, v] = \mathfrak{a}_1[u_1, v],$$

или

$$\mathfrak{a}_q[u_q - u_1, v] = \mathfrak{a}_1[u_1, v] - \mathfrak{a}_q[u_1, v]$$

для всех $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$. Подставляя в последнее тождество $v = u_q - u_1$ и переходя к действительным частям, получим

$$c\|u_q - u_1\|^2_{H^m(\Omega)} \leqslant \operatorname{Re} \mathfrak{a}_q[u_q - u_1, u_q - u_1] \leqslant$$

$$\leqslant |\mathfrak{a}_1[u_1, u_q - u_1] - \mathfrak{a}_q[u_1, u_q - u_1]| \leqslant h_q(u_1)\|u_q - u_1\|_{H^m(\Omega)}$$

в силу (2.85) и (2.87), откуда следует, что

$$\|u_q - u_1\|_{H^m(\Omega)} \leqslant \frac{h_q(u_1)}{c} \to 0,\ q \to 1.$$

□

Для применения леммы 2.11 важно установить равномерную по q оценку (2.86) для всех $q \geqslant 1$, близких к 1. Это легко сделать, если в уравнении коэффициенты $a_{\alpha\beta j} \in \mathbb{C}$ постоянные, а младшие члены равны нулю:

$$A_q u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha\Big(\sum_j a_{\alpha\beta j} D^\beta u(q^{-j}x)\Big) = f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{2.88}$$

Напомним, что под символом уравнения (2.88) мы понимаем выражение

$$a_R(\lambda,\xi) = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_j a_{\alpha\beta j}\lambda^j \xi^{\alpha+\beta} \quad (\lambda \in \mathbb{C},\, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.10. *Пусть выполнено условие*

$$\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) > 0 \quad (|\lambda| = 1,\, |\xi| = 1).$$

Тогда существует такое число $q_0 > 1$, *что для произвольной фиксированной функции* $f \in L_2(\Omega)$ *при всех значениях параметра сжатия* $q \in [1, q_0]$ *краевая задача* (2.88), (2.2) *имеет единственное обобщенное решение* $u = u_q(x)$. *При этом*

$$\|u_q - u_1\|_{H^m(\Omega)} \to 0, \quad q \to 1.$$

Доказательство. В условиях теоремы неравенство $\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) > 0$ будет выполнено и на множестве $\{1 \leqslant |\lambda| \leqslant q_0^{n/2},\, |\xi| = 1\}$ при некотором $q_0 > 1$ (в противном случае можно построить ограниченную последовательность точек $\{(\lambda_k,\xi_k)\}_{k=1}^\infty$ такую, что $1 \leqslant |\lambda_k| \leqslant 1 + 1/k$, $|\xi_k| = 1$, но при этом $\operatorname{Re} a_R(\lambda_k,\xi_k) \leqslant 0$; для предела (λ_0,ξ_0) некоторой сходящейся ее подпоследовательности будем иметь $|\lambda_0| = 1$, $|\xi_0| = 1$ и $\operatorname{Re} a_R(\lambda_0,\xi_0) \leqslant 0$ в силу непрерывности $a_R(\lambda,\xi)$, что противоречит условию теоремы). Обозначим

$$\gamma = \min\Big\{\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) : 1 \leqslant |\lambda| \leqslant q_0^{n/2},\, |\xi| = 1\Big\} > 0.$$

При $q \in (0, q_0]$ это обеспечивает нам оценку (см. доказательство теоремы 2.1, неравенство (2.19))

$$\operatorname{Re}(A_q u, u)_{L_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \Big((\widetilde{R}_{\alpha\beta,q} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha,q})G^{\alpha+\beta}(|\xi|^m \tilde{u}), |\xi|^m\tilde{u}\Big)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \geqslant$$
$$\geqslant c_q \big\| |\xi|^m \tilde{u}\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)),$$

где в качестве постоянной c_q можно взять наименьшую точку спектра положительно определенного оператора

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} (\widetilde{R}_{\alpha\beta,q} + \widetilde{R}^*_{\beta\alpha,q})G^{\alpha+\beta} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n).$$

Но в силу леммы 2.1 и предваряющих эту лемму рассуждений

$$c_q = \min\{\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) : |\lambda| = q^{n/2},\, |\xi| = 1\} \geqslant \gamma.$$

Наконец, неравенство $\operatorname{Re} a_R(1,\xi) \geqslant \gamma$ при $|\xi| = 1$ (положили $\lambda = 1$) означает, что «предельное» дифференциальное уравнение

$$A_1 u(x) \equiv \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha a_{\alpha\beta} D^\beta u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

с коэффициентами $a_{\alpha\beta} = \sum\limits_j a_{\alpha\beta j}$ является сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$, так что оценка (2.86) имеет место и для случая $q = 1$. Доказательство завершается применением леммы 2.11. □

Отметим, что условие сильной эллиптичности «предельного» дифференциального уравнения, вообще говоря, слабее условия теоремы 2.10, поскольку подразумевает положительность вещественной части символа только в одной точке $\lambda = 1$ на единичной окружности, в то время как в теореме 2.10 мы требуем $\operatorname{Re} a_R(\lambda,\xi) > 0$ на всей окружности $|\lambda| = 1$. Простейшим примером служит уравнение

$$-\Delta(u(x) + qbu(x/q)) = f(x),$$

символ которого (в терминах данной главы) равен $(1+b\lambda)|\xi|^2$. В одном случае приходим к условию $\operatorname{Re} b > -1$, а в другом — к условию $|b| < 1$.

2.4. Гладкость обобщенных решений

В этом разделе мы остановимся более подробно на свойствах решений первой краевой задачи лишь для частного случая сильно эллиптического уравнения второго порядка с одним функциональным оператором

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(Ru_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in \Omega). \tag{2.89}$$

Здесь Ω — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая основному условию (1.5), $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, а R — функциональный оператор вида (2.14) с постоянными комплексными коэффициентами,

$$R = R(P) = \sum_k b_k P^k \quad (b_k \in \mathbb{C}).$$

Запишем символ уравнения (2.89):

$$a_R(\lambda, \xi) = a(\xi) r(\lambda), \quad a(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad r(\lambda) = \sum_k b_k \lambda^k.$$

Отсюда и из теорем 2.1, 2.2 следует, что сильная эллиптичность уравнения (2.89) в $\overline{\Omega}$ равносильна эллиптичности дифференциального оператора

$$A = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

и положительной определенности оператора

$$R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n).$$

Условие

$$\operatorname{Re} r(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = q^{n/2})$$

позволяет уточнить структуру функционального оператора. Данное условие означает, что на комплексной плоскости вектор, изображающий $r(\lambda)$, не совершает ни одного оборота вокруг начала координат, когда точка λ проходит окружность $|\lambda| = q^{n/2}$. В соответствии с принципом аргумента количество нулей функции $r(\lambda)$ в круге $|\lambda| < q^{n/2}$ совпадает с количеством полюсов $r(\lambda)$ в этом же круге. Но единственным конечным полюсом (кратным) функции $r(\lambda)$ может быть лишь начало координат.

Оформим сделанное наблюдение.

Лемма 2.12. *Пусть уравнение* (2.89) *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega} \subset q\Omega$. *Тогда символ* $r(\lambda)$ *оператора* R *может быть записан в виде*

$$r(\lambda) = \sum_{k=-l_2}^{l_1} b_k \lambda^k = \lambda^{-l_2} \sum_{k=0}^{l_1+l_2} b_{k-l_2}\lambda^k,$$

где $l_1 \geqslant 0$, $l_2 \geqslant 0$, $b_{l_1} \neq 0$, $b_{l_2} \neq 0$.

Функция $r(\lambda)$ *имеет на комплексной плоскости* $l_1 + l_2$ *нулей, из которых* l_1 *удовлетворяют условию* $|\lambda| > q^{n/2}$, *а остальные* l_2 — *условию* $|\lambda| < q^{n/2}$.

Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1+l_2}$ — корни $r(\lambda)$, то можно считать, что

$$|\lambda_j| > q^{n/2} \ (j = 1, \ldots, l_1), \quad |\lambda_j| < q^{n/2} \ (j = l_1 + 1, \ldots, l_1 + l_2).$$

Вновь воспользуемся разложением оператора

$$R = \sum_{k=-l_2}^{l_1} b_k P^k = \left(\sum_{k=0}^{l_1+l_2} b_{k-l_2} P^k\right) P^{-l_2}$$

в произведение $R = R_1 R_2$, где

$$R_1 = R_1(P) = b_{l_1}(P - \lambda_1 I) \ldots (P - \lambda_{l_1} I),$$

$$R_2 = R_2(P) = P^{-l_2}(P - \lambda_{l_1+1}I)\dots(P - \lambda_{l_1+l_2}I).$$

Напомним, что обобщенное решение первой краевой задачи $u|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (2.89) есть функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}Ru_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \tag{2.90}$$

при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$, где $f \in L_2(\Omega)$.

Теорема 2.11. *Пусть* Ω *— ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию* (1.5)*, уравнение* (2.89) *сильно эллиптическое в* $\overline{\Omega}$ *и, кроме того,* $l_2 = 0$*. Тогда всякое обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения* (2.89) *принадлежит* $H^2(\Omega)$.

Другими словами, если в сильно эллиптическом уравнении (2.89) присутствуют лишь сжатия аргументов, гладкость обобщенного решения сохраняется во всей области.

Доказательство. В условиях теоремы

$$R = R_1 = b_{l_1}(P - \lambda_1 I)\dots(P - \lambda_{l_1}I). \tag{2.91}$$

Предположим вначале, что $R = P - \lambda_0 I$, где $|\lambda_0| > q^{n/2}$.

Пусть $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения (2.89), т. е. имеет место интегральное тождество (2.90). Введем функцию

$$w = (qP - \lambda_0 I)u \in H^1(\Omega).$$

Тогда $w_{x_j} = Ru_{x_j} \in L_2(\Omega)$, и по лемме 1.2 с учетом формулы (1.3) будем иметь

$$u_{x_j}(x) = -\sum_{m=0}^{\infty}\lambda_0^{-(m+1)}w_{x_j}(q^{-m}x) \quad (x \in \Omega). \tag{2.92}$$

Для функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ функция $P^{-m}v(x) = v(q^m x)$ также принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$. Подставив ее в тождество (2.90) вместо v, получим

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}w_{x_j}, (P^{-m}v)_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (f, P^{-m}v)_{L_2(\Omega)}$$

или

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}P^m w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (q^{-m}P^m f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Мы воспользовались тем, что

$$(P^{-m}v)_{x_i} = q^m P^{-m}v_{x_i}, \quad (P^{-m})^* = q^{-nm}P^m.$$

Просуммировав полученные соотношения по всем $m = 0, 1, \dots$ с коэффициентами $-\lambda_0^{-(m+1)}$, будем иметь

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = ((q^{-1}P - \lambda_0 I)^{-1}f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

в силу (1.3). По лемме 1.2 оператор $(q^{-1}P - \lambda_0 I)^{-1}$ ограничен в $L_2(\Omega)$ (а также в $H^s(\Omega)$ для любого $s = 1, 2, \dots$).

Если оператор R имеет вид (2.91), то после l_1 однотипных итераций приходим к интегральному тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)}\,, \tag{2.93}$$

где $g = [R(q^{-1}P)]^{-1}f \in L_2(\Omega)$. Из (2.93), в свою очередь, следует (2.90). Остается заметить, что тождество (2.93) определяет обобщенное решение первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} = g(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.94}$$

с постоянными коэффициентами и правой частью из $L_2(\Omega)$ в ограниченной области Ω с гладкой границей. □

Пример 2.7. Исследуем гладкость решений первой краевой задачи для уравнения со сжатием

$$-\left(2u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x/\sqrt{3})\right)_{x_1} - 4\left(2u_{x_2}(x) + u_{x_2}(x/\sqrt{3})\right)_{x_2} + u_{x_1} - u_{x_2} = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

предполагая, что $f \in L_2(\Omega)$, а

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + 2|x_2| < 1\}.$$

Поскольку

$$\operatorname{Re}(2+\lambda)(\xi_1^2 + 4\xi_2^2) > 0 \quad (|\lambda| = \sqrt{3}),$$

рассматриваемое уравнение — сильно эллиптическое. Пусть $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — обобщенное решение краевой задачи. Тогда u является обобщенным решением краевой задачи и для уравнения

$$-\left(2u_{x_1}(x) + u_{x_1}(x/\sqrt{3})\right)_{x_1} - 4\left(2u_{x_2}(x) + u_{x_2}(x/\sqrt{3})\right)_{x_2} = F(x),$$

в котором правая часть $F = -u_{x_1} + u_{x_2} + f$ по-прежнему лежит в $L_2(\Omega)$. По теореме 2.11, $u \in H^2(\Omega)$. Конечно, теорема 2.11 остается справедливой и для данной негладкой области (ромба) Ω, поскольку сводит вопрос к известному вопросу о гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения

$$-u_{x_1x_1} - 4u_{x_2x_2} = g$$

в Ω при $g \in L_2(\Omega)$.

Замечание 2.9. Из доказательства теоремы 2.11 и из результатов главы 1 видно, что обобщенное решение существует, единственно и принадлежит $H^2(\Omega)$ и при менее жестком ограничении $|\lambda_j| \geqslant q^{n/2}$ на корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l_1}$ полинома $r(\lambda)$, хотя уравнение (2.89) может и не быть в этом случае сильно эллиптическим. Дело в том, что ряд в правой части (2.92) будет сходиться к u_{x_j} в $L_2(\Omega)$ и для $|\lambda_0| = q^{n/2}$ (лемма 1.3). Поэтому с точки зрения обобщенного решения первой краевой задачи сохраняется эквивалентность уравнений (2.89) и (2.94).

Как и прежде, обозначим $\Omega_1 = \Omega \setminus q^{-1}\overline{\Omega}$, $\Omega_p = q^{1-p}\Omega_1$ $(p = 2, 3, \ldots)$.

Теорема 2.12. *Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию* (1.5)*, а уравнение* (2.89) *сильно эллиптическое в $\overline{\Omega}$. Если $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — обобщенное решение первой краевой задачи для уравнения* (2.89)*, то $u \in H^2(\Omega_p)$ при $p = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Для $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ можем записать

$$Ru_{x_j} = R_1R_2u_{x_j} = R_1(P)[R_2(qP)u]_{x_j}.$$

Рассмотрим оператор

$$R_2(qP) = (qP - \lambda_{l_1+1}I)\ldots(qP - \lambda_{l_1+l_2}I)(qP)^{-l_2} = (P - q^{-1}\lambda_{l_1+1}I)\ldots(P - q^{-1}\lambda_{l_1+l_2}I)P^{-l_2}.$$

Имеем

$$|q^{-1}\lambda_{l_1+1}| < q^{n/2-1}, \ldots, |q^{-1}\lambda_{l_1+l_2}| < q^{n/2-1}.$$

Применяя пункт (б) леммы 1.2, заключаем, что оператор $R_2(qP)$ есть изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$. Поэтому, полагая $w = R_2(qP)u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, приходим к равносильной записи интегрального тождества (2.90):

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}R_1w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Отсюда и из доказательства теоремы 2.11 вытекает, что функция w является обобщенным решением первой краевой задачи для эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} w_{x_i x_j} = g_1(x) \quad (x \in \Omega)$$

с правой частью $g_1 = [R_1(q^{-1}P)]^{-1} f \in L_2(\Omega)$; следовательно, $w \in H^2(\Omega)$.

Находя решение u исходной задачи по формуле $u = [R_2(qP)]^{-1} w$, заметим, что при обращении оператора $R_2(qP)$ в $\mathring{H}^1(\Omega)$ мы пользуемся формулой (1.4). При этом в силу финитности функции w ряд для определения $u|_{\Omega_p}$ вырождается в конечную сумму. □

Нарушение гладкости обобщенного решения на границе соседних подобластей Ω_p в случае уравнения с растяжениями аргументов ($l_2 > 0$) имеет ту же природу, что и для дифференциально-разностных уравнений — соответствующие примеры легко строятся. Напротив, следующий эффект нарушения гладкости связан именно с наличием в области Ω начала координат — неподвижной точки преобразования $x \mapsto q^{-1}x$.

Пример 2.8. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta[u(x) + au(qx)] = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{2.95}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2.96}$$

где Ω — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию (1.5); $0 \neq a \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$.

Критерием сильной эллиптичности уравнения (2.95) является условие $|a| < q^{n/2-1}$. Кроме того, здесь

$$R_1 = I, \quad R_2(qP) = I + aP^{-1} = a(P^{-1} + a^{-1}I).$$

Из доказательства теоремы 2.12 видно, что при $|a| < q^{n/2-1}$ краевая задача (2.95), (2.96) имеет единственное обобщенное решение $u = (I + aP^{-1})^{-1} w$, где w — решение задачи

$$-\Delta w = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad w|_{\partial\Omega} = 0.$$

Предположим теперь, что $q^{n/2-2} \leqslant |a| < q^{n/2-1}$. Возьмем $w_0 \in C_0^\infty(\Omega_1)$ и обозначим

$$f_0 = -\Delta w_0, \quad u_0 = (I + aP^{-1})^{-1} w_0.$$

Функция $u_0 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ есть обобщенное решение краевой задачи (2.95), (2.96) при $f = f_0 \in C_0^\infty(\Omega_1)$. Находим его, пользуясь формулой (1.6):

$$u_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-a)^m w_0(q^m x)$$

(поскольку выполнено условие $|a^{-1}| > q^{1-n/2}$, к оператору $P^{-1} + a^{-1}I$ применимо следствие 1.1). Понятно, что

$$C_0^\infty(\Omega_p) \ni u_0|_{\Omega_p} = (-a)^{p-1} w_0(q^{p-1}x) \quad (x \in \Omega_p;\ p = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $u_0 \in H^2(\Omega \setminus \overline{B}_\varepsilon)$ для любой ε-окрестности B_ε начала координат. В то же время вторые производные решения u_0 растут при $x \to 0$ так, что

$$\big\|u_0|_{\Omega_p}\big\|^2_{H^2(\Omega_p)} \geqslant \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_p} |D^\alpha u_0(x)|^2\,dx = |a|^{2(p-1)} \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_p} \big|D^\alpha\left(w_0(q^{p-1}x)\right)\big|^2\,dx =$$

$$= |a|^{2(p-1)} q^{4(p-1)} \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_p} \big|D^\alpha w_0(q^{p-1}x)\big|^2\,dx =$$

$$= |a|^{2(p-1)} q^{(4-n)(p-1)} \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_1} |D^\alpha w_0(x)|^2\,dx \geqslant \sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega_1} |D^\alpha w_0|^2\,dx.$$

Ряд $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \|u_0|_{\Omega_p}\|^2_{H^2(\Omega_p)}$ расходится и, следовательно, $u_0 \notin H^2(\Omega)$.

Под конец отметим, что для сильно эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(R_{ij}u_{x_j})_{x_i}=f(x)$$

с различными операторами R_{ij} вида (1.1) остается открытым вопрос даже о внутренней гладкости обобщенных решений первой краевой задачи в подобластях Ω_p. Препятствием к применению в этой ситуации методов, развитых для дифференциально-разностных уравнений, является то, что приходится одновременно рассматривать поведение решения на бесконечном наборе окрестностей вида $q^{-p}\mathcal{O}(x_0)$, $p=0,1,\ldots$. Очевидные трудности здесь связаны, например, с аппроксимацией обобщенных производных конечными разностями.

2.5. Приложение к дифференциально-разностным уравнениям

Пусть $\Omega=(0,1)\times G$, где G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}D^{\alpha}R_{\alpha\beta}D^{\beta}u=f(x)\quad(x\in\Omega),\tag{2.97}$$

в котором разностные операторы $R_{\alpha\beta}$ имеют вид

$$R_{\alpha\beta}v(x)=\sum_{j=-J}^{J}a_{\alpha\beta j}v(x_1+j\varepsilon,x_2,\ldots,x_n)\quad(\varepsilon>0,\ a_{\alpha\beta j}\in\mathbb{C}).$$

Назовем функцию $u\in\mathring{H}^m(\Omega)$, продолженную нулем для значений $x_1<0$ и $x_1>1$, обобщенным решением первой краевой задачи (с однородными краевыми условиями вида (2.2)) для уравнения (2.97) в области Ω с правой частью $f\in L_2(\Omega)$, если интегральное тождество

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\Big(R_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}v\Big)_{L_2(\Omega)}=(f,v)_{L_2(\Omega)}$$

выполняется для любой функции $v\in\mathring{H}^m(\Omega)$.

При исследовании разрешимости первой краевой задачи для уравнения (2.97) неравенство Гординга

$$\operatorname{Re}\sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m}\Big(R_{\alpha\beta}D^{\beta}u,D^{\alpha}u\Big)_{L_2(\Omega)}\geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)}-c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}\quad(u\in C_0^{\infty}(\Omega))\tag{2.98}$$

играет аналогичную роль. В случае удовлетворения этому неравенству дифференциально-разностное уравнение (2.97) называется сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$. При фиксированном значении параметра сдвига ε уравнение (2.97) является частным случаем уравнения, рассмотренного в [87, 88]. Опираясь на результаты этих работ, легко выписать необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности уравнения (2.97), формулируемые в виде положительности некоторых матричных полиномов. При этом элементами матриц будут выражения

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}a_{\alpha\beta j}\xi^{\alpha+\beta}$$

или нули, т. е. в них (в элементы) входят лишь коэффициенты из разностных операторов, в то время как строение и порядок матриц определяются параметром ε.

Сейчас принципиально, что уравнение (2.97) будет рассматриваться для всех (в том числе сколь угодно малых) значений параметра сдвига ε. Соответственно, мы хотим найти условия на коэффициенты $a_{\alpha\beta j}$, обеспечивающие сильную эллиптичность уравнения (2.97) для всех $\varepsilon>0$. При этом рассмотрение сколь угодно малых ε дает возможность предельного перехода по аналогии с разделом 2.1 (леммы 2.2 и 2.3, теорема 2.2), когда при неограниченном увеличении порядка матриц получаются условия, формулируемые в терминах скалярного символа дифференциально-разностного оператора. Этот символ несколько отличается от обычного и имеет вид

$$a_R(\eta,\xi)=\sum_{|\alpha|,|\beta|=m}\sum_{|j|\leqslant J}a_{\alpha\beta j}\exp(ij\eta)\xi^{\alpha+\beta}\quad(\eta\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}^n),$$

где i — мнимая единица. Он зависит от двух величин, меняющихся независимо: переменной $\xi \in \mathbb{R}^n$, отвечающей дифференцированию, и переменной $\eta \in \mathbb{R}$, отвечающей сдвигу (ср. с λ и ξ в символе функционально-дифференциального оператора с растяжениями и сжатиями аргументов). Обычным же символом будет $a_R(\varepsilon\xi_1, \xi)$. Следующая лемма аналогична лемме 2.2.

Лемма 2.13. *Предположим, что имеется разностный оператор*

$$Ru(x) = \sum_{j=-J}^{J} a_j u(x_1 + j, x_2, \dots, x_n) \quad (a_j \in \mathbb{C}), \tag{2.99}$$

и для каждого натурального N матрица $\mathbf{R} = \mathbf{R}(N)$ есть матрица порядка $N \times N$ с элементами

$$\rho_{kj} = \begin{cases} a_{j-k}, & |j-k| \leqslant J, \\ 0, & |j-k| > J \end{cases} \quad (k, j = 1, \dots, N). \tag{2.100}$$

Если матрицы $\mathbf{R} + \mathbf{R}^*$ положительно определены равномерно по N, то оператор

$$R + R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$$

положительно определен.

Доказательство. Зафиксируем натуральное N и введем обозначения

$$\Pi_k = (k-1, k) \times \mathbb{R}^{n-1}, \quad \Pi = \bigcup_{k=1}^{N} \Pi_k.$$

Рассмотрим (унитарное) отображение

$$L_2(\Pi) \ni u \longmapsto \mathbf{u} = (u_1 \dots u_N)^T \in L_2^N(\Pi_1),$$

$$u_k(x) = u(x_1 + k - 1, x_2, \dots, x_n) \quad (x \in \Pi_1,\ k = 1, \dots, N).$$

Элементарно проверяется, что разностному оператору (2.99), действующему в $L_2(\Pi)$ (это действие, как обычно, включает продолжение функции нулем в $\mathbb{R}^n$, применение (2.99) и последующее сужение результата на Π) отвечает оператор умножения на матрицу (2.100) в пространстве вектор-функций $L_2^N(\Pi_1)$:

$$v = Ru \ (u, v \in L_2(\Pi)) \Longleftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{R}\mathbf{u} \ (\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L_2^N(\Pi_1)).$$

Возьмем произвольную финитную функцию $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Поскольку скалярное произведение $(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ инвариантно относительно сдвигов на векторы из $\mathbb{R}^n$, можно без ограничения общности считать, что носитель функции u лежит в Π для некоторого N. Тогда в силу условий леммы

$$\operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \operatorname{Re}(Ru, u)_{L_2(\Pi)} = \frac{1}{2}((\mathbf{R} + \mathbf{R}^*)\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2^N(\Pi_1)} \geqslant$$

$$\geqslant c\|\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(\Pi_1)} = c\|u\|^2_{L_2(\Pi)} = c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)},$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от N и u. Остается заметить, что финитные функции всюду плотны в $L_2(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Теорема 2.13. *Пусть $\Omega = (0,1) \times G$, G — ограниченная область в $\mathbb{R}^{n-1}$. Уравнение (2.97) является сильно эллиптическим в $\overline{\Omega}$ для любого значения параметра $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re} a_R(\eta, \xi) > 0 \quad (\eta \in \mathbb{R},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \tag{2.101}$$

Доказательство.

Достаточность. Пусть $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Интегрируя по частям и применяя теорему Планшереля, получим

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \left(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u\right)_{L_2(\Omega)} = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} a_R(\varepsilon\xi_1, \xi) |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Из (2.101) вытекает существование постоянной $\varkappa > 0$ такой, что

$$\operatorname{Re} a_R(\eta, \xi) \geqslant \varkappa |\xi|^{2m}$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. Это неравенство имеет место в том числе и при $\eta = \varepsilon\xi_1$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} a_R(\varepsilon\xi_1, \xi)|\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi \geqslant \varkappa \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2m}|\tilde{u}(\xi)|^2\, d\xi \geqslant c_1\|u\|^2_{H^m(\Omega)}$$

в силу того, что $\operatorname{supp} u \subset \Omega$. Таким образом, при отсутствии младших членов неравенство Гординга выполняется с постоянной $c_2 = 0$.

Необходимость. Для доказательства необходимости будем рассматривать неравенство (2.98) при $\varepsilon = 1/N$, $N = 1, 2, \dots$. Обозначим

$$Q_k = \left(\frac{k-1}{N}, \frac{k}{N}\right) \times G, \quad k = 1, \dots, N, \quad Q = \bigcup_{k=1}^{N} Q_k.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.2, будем подставлять в неравенство (2.98) функции с носителями в Q, $u \in C_0^\infty(Q) \subset C_0^\infty(\Omega)$. По каждой такой функции $u(x)$ строим вектор-функцию

$$\mathbf{u} = (u_1 \dots u_N)^T \in C_0^{\infty,N}(Q_1),$$

$$u_k(x) = u(x_1 + (k-1)/N, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, \dots, N.$$

Производным $D^\alpha u$, $D^\beta u$ отвечают вектор-функции $D^\alpha \mathbf{u}$, $D^\beta \mathbf{u}$, а функции $R_{\alpha\beta}D^\beta u$ — вектор-функция $\mathbf{R}_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}$, где $\mathbf{R}_{\alpha\beta}$ есть матрица порядка $N \times N$ с элементами

$$\rho^{\alpha\beta}_{kj} = \begin{cases} a_{\alpha\beta,j-k}, & |j-k| \leqslant J, \\ 0, & |j-k| > J \end{cases} \quad (k, j = 1, \dots, N). \tag{2.102}$$

При этом

$$\Big(R_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha u\Big)_{L_2(\Omega)} = \Big(\mathbf{R}_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}, D^\alpha\mathbf{u}\Big)_{L_2^N(Q_1)},$$

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(Q_1)}, \quad \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(Q_1)},$$

и из неравенства (2.98) вытекает оценка

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leqslant m} \Big(\mathbf{R}_{\alpha\beta}D^\beta\mathbf{u}, D^\alpha\mathbf{u}\Big)_{L_2^N(Q_1)} \geqslant c_1 \sum_{|\alpha|\leqslant m} \|D^\alpha\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(Q_1)} - c_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2^N(Q_1)},$$

справедливая для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in C_0^{\infty,N}(Q_1)$. Но эта оценка означает сильную эллиптичность системы дифференциальных уравнений в $\overline{Q_1}$ и поэтому влечет за собой (см. также доказательства теорем 2.2, 2.3) неравенство

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}\left((\mathbf{R}_{\alpha\beta} + \mathbf{R}^*_{\alpha\beta})\mathbf{z}, \mathbf{z}\right) \geqslant c_3|\xi|^{2m}|\mathbf{z}|^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^N),$$

в котором постоянная $c_3 > 0$ определяется постоянными c_1, c_2 и не зависит от N, $\mathbf{z}$ и ξ.

Здесь уместно подчеркнуть следующее: несмотря на то, что в разностный оператор $R_{\alpha\beta}$ входит параметр $\varepsilon = 1/N$, при описанном матричном представлении ему отвечают в точности такие же матрицы, что и (2.100) в лемме 2.13 — последние строились по разностному оператору (2.99) с $\varepsilon = 1$. Так что если теперь сопоставить семейству матриц

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \xi^{\alpha+\beta}\mathbf{R}_{\alpha\beta}(N), \quad N = 1, 2, \dots,$$

действующий в $L_2(\mathbb{R}^n)$ разностный оператор

$$\sum_{j=-J}^{J} \left(\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta j}\xi^{\alpha+\beta}\right) v(x_1 + j, x_2, \dots, x_n),$$

зависящий от параметра $\xi \in \mathbb{R}^n$, то по лемме 2.13 его симметрическая часть при $\xi \neq 0$ будет положительно определена. Поскольку положительная определенность в $L_2(\mathbb{R}^n)$ разностного оператора с постоянными коэффициентами равносильна положительности его символа, получаем

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \sum_{|j|\leqslant J} a_{\alpha\beta j} \exp(ij\eta)\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (\eta \in \mathbb{R},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n),$$

т. е. (2.101) (переменная η — двойственная к x_1 переменная относительно преобразования Фурье). Теорема доказана. □

Следствие 2.4. *Предположим, что выполнено условие* (2.101) *и, кроме того,* $R_{\alpha\beta} = 0$ *для* $|\alpha| + |\beta| < 2m$ (*в уравнении* (2.97) *отсутствуют младшие члены*). *Тогда при произвольной фиксированной функции* f *из* $L_2(\Omega)$ *и любом значения параметра сдвига* $\varepsilon > 0$ *первая краевая задача для уравнения* (2.97) *имеет единственное обобщенное решение* $u = u_\varepsilon(x)$. *При этом*

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^m(\Omega)} \to 0,\ \varepsilon \to 0,$$

где $u_0(x)$ — *решение задачи Дирихле для «предельного» сильно эллиптического дифференциального уравнения*

$$\sum_{|\alpha|,|\beta|=m} D^\alpha a_{\alpha\beta} D^\beta u_0(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \quad a_{\alpha\beta} = \sum_{|j|\leqslant J} a_{\alpha\beta j}. \tag{2.103}$$

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы 2.13, в условиях данного следствия имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} \Big(R_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u\Big)_{L_2(\Omega)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^m(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{2.104}$$

в котором

$$c_1 = \varkappa = \min\{\operatorname{Re} a_R(\eta,\xi) : \eta \in \mathbb{R},\ |\xi| = 1\} > 0$$

не зависит от $\varepsilon > 0$. Применяя стандартные рассуждения, описанные в разделе 2.3, убеждаемся в существовании единственного обобщенного решения u_ε первой краевой задачи для уравнения (2.97). Кроме того, условие

$$\operatorname{Re} a_R(0,\xi) = \operatorname{Re} \sum_{|\alpha|,|\beta|=m} a_{\alpha\beta}\xi^{\alpha+\beta} > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n),$$

означающее сильную эллиптичность дифференциального уравнения (2.103), гарантирует однозначную разрешимость задачи Дирихле и для уравнения (2.103). Доказательство сходимости

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^m(\Omega)} \to 0,\ \varepsilon \to 0$$

опирается на равномерную по ε оценку (2.104) и полностью повторяет соответствующие рассуждения из доказательства леммы 2.11. □

Пример 2.9. В квадрате $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(u(x_1,x_2) + bu(x_1+\varepsilon,x_2) + bu(x_1-\varepsilon,x_2)) = f(x)\ ((x_1,x_2) \in \Omega), \tag{2.105}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.106}$$

Символ уравнения (2.105) имеет вид

$$a_R(\eta,\xi) = (1 + 2b\cos\eta)(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

так что условие (2.101) сводится к следующему требованию:

$$|\operatorname{Re} b| < 1/2.$$

Итак, для всех значений параметров $\varepsilon > 0$ и $b \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} b| < 1/2$, краевая задача (2.105), (2.106) имеет по следствию 2.4 единственное обобщенное решение $u_\varepsilon(x_1,x_2)$, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится в пространстве $\mathring{H}^1(\Omega)$ к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(x)/(1 + 2b).$$

Глава 3

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА СО СЖАТИЕМ АРГУМЕНТОВ

3.1. Операторы сжатия в пространствах символов

В данной главе рассматривается общая краевая задача

$$Au \equiv \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{j\alpha}(x) D^\alpha (u(q^{-j}x)) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3.1}$$

$$T_j(x, D)u(x) = g_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m;\ x \in \partial\Omega). \tag{3.2}$$

Сейчас мы считаем, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей, удовлетворяющая условию $\overline{\Omega} \subset q\Omega$; коэффициенты уравнения — гладкие в $\overline{\Omega}$ функции; $T_j(x, D)$ — дифференциальные операторы порядка m_j с гладкими на $\partial\Omega$ коэффициентами.

Задаче (3.1), (3.2) отвечает ограниченный оператор в соболевских пространствах

$$\mathbf{L} = [A, T_1, \ldots, T_m] : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega) \times \prod_{j=1}^{m} H^{s+2m-m_j-1/2}(\partial\Omega),$$

$$s \geqslant 0,\ s + 2m - \max m_j \geqslant 1.$$

Символом оператора A будем называть выражение

$$a(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha|=2m} a_{j\alpha}(x) \xi^\alpha \lambda^j \quad (x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{C}).$$

Целью главы является доказательство фредгольмовости оператора $\mathbf{L}$. Это будет сделано в предположении эллиптичности соответствующей «локальной» задачи

$$\mathbf{L}_0 = [A_0, T_1, \ldots, T_m], \quad A_0 = \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_{0\alpha}(x) D^\alpha$$

(сюда входят слагаемые, не содержащие преобразований аргументов). Опираясь на существование регуляризатора «локальной» задачи и при условии

$$a(0, \xi, \lambda) \neq 0 \quad (|\lambda| \leqslant q^{n/2-2m},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n)$$

на символ функционально-дифференциального оператора, мы строим регуляризатор исходной задачи с применением теории псевдодифференциальных операторов. Основной результат содержится в разделе 3.3. В настоящем и следующем разделах излагается подготовительный материал.

Как это обычно принято (см., например, [54, 55]), для каждого вещественного m обозначим через $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ множество всех функций $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ таких, что при любых мультииндексах α, β выполнены неравенства

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant c_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \quad (x, \xi \in \mathbb{R}^n).$$

с не зависящими от x и ξ положительными постоянными $c_{\alpha\beta}$. Множество S^m называется пространством символов порядка m. Это множество уже фигурировало в главе 2 (замечание 2.6). На S^m определены полунормы

$$p_{\alpha\beta}^{(m)}(a) = \sup_{x, \xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{|\alpha|-m} |D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)|.$$

Наделенное такими полунормами, S^m становится пространством Фреше.

Пусть $q > 1$. Рассмотрим отображение $\Lambda : S^\mu \to S^\mu$,

$$(\Lambda a)(x, \xi) = a(q^{-1}x, q\xi) \quad (a \in S^\mu),$$

непрерывное в S^μ при любом μ. Конечные линейные комбинации вида $\sum a_k(x, \xi)\Lambda^k$ с коэффициентами из S^m представляют, очевидно, ограниченные операторы $S^\mu \to S^{\mu+m}$. Нам понадобятся и бесконечные линейные комбинации, т. е. ряды, введение которых подразумевает определенную степень убывания коэффициентов a_k. Получающимся при этом операторам будут соответствовать аналитические в круге $Q_r = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < r\}$ функции $a(\lambda)$ со значениями в S^m.

Заметим, что скалярные аналитические в Q_r функции $a(\lambda)$ суть в точности суммы степенных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$$

с коэффициентами a_k такими, что для любого $r' < r$ выполнены неравенства

$$|a_k| \leqslant \max_{|\lambda|=r'} |a(\lambda)|\, r'^{-k}$$

(неравенства Коши). Это соответствие, основанное на интегральной формуле Коши, очевидным образом переносится на аналитические функции со значениями в пространстве Фреше.

Пусть X — пространство Фреше с топологией, порожденной счетной системой полунорм p_N, $N = 1, 2, \dots$. Семейство X-значных аналитических в открытом множестве $Q \subset \mathbb{C}$ функций обозначим $\mathcal{H}(Q, X)$.

Если $Q = Q_r$, то ряд

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \lambda^k \quad (f_k \in X)$$

представляет функцию $f \in \mathcal{H}(Q_r, X)$ тогда и только тогда, когда

$$p_N(f_k) \leqslant c_N(r') r'^{-k} \quad (r' < r). \tag{3.3}$$

При этом в неравенстве (3.3)

$$f_k = (k!)^{-1} f^{(k)}(0), \quad c_N(r') = \max_{|\lambda|=r'} p_N(f(\lambda)).$$

На пространстве $\mathcal{H}(Q_r, X)$ определены полунормы

$$p_{N,r'}(f) = \max_{|\lambda|=r'} p_N(f(\lambda)) \quad (N = 1, 2, \dots;\ r' < r).$$

Для произвольной последовательности чисел

$$0 < r_1 < r_2 < \ldots < r, \quad r_j \to r,$$

счетный набор полунорм p_{N,r_j} задает на $\mathcal{H}(Q_r, X)$ топологию пространства Фреше. В случае $X = S^m$ соответствующие полунормы будем обозначать $p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}$. А именно,

$$p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a) = \max_{|\lambda|=r'} p^{(m)}_{\alpha\beta}(a(\lambda)) \quad (a \in \mathcal{H}(Q_r, S^m)).$$

Теорема 3.1. *Пусть функция $a = a(x, \xi, \lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(Q_r, S^m)$ и удовлетворяет условию*

$$a^{(k)}(x, \xi, 0) \equiv \frac{\partial^k a(x, \xi, \lambda)}{\partial \lambda^k}\Big|_{\lambda=0} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots;\ |\xi| \leqslant C_0). \tag{3.4}$$

Тогда формула

$$a(x, \xi, \Lambda) u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} a^{(k)}(x, \xi, 0) \Lambda^k u \tag{3.5}$$

определяет непрерывное билинейное отображение

$$\mathcal{H}(Q_r, S^m) \times S^\mu \ni (a, u) \longrightarrow a(x, \xi, \Lambda) u \in S^{\mu+m}$$

для всех $\mu < \log_q r$.

Доказательство. Используя для коэффициента $(j!)^{-1} a^{(j)}(x, \xi, 0)$ сокращенное обозначение $a_j(x, \xi)$, оценим полунормы функции $a_j \Lambda^j u$ в пространстве $S^{m+\mu}$. В силу условия (3.4) на коэффициенты a_j можно записать

$$p^{(m+\mu)}_{\alpha\beta}(a_j \Lambda^j u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n,\, |\xi| \geqslant C_0} (1 + |\xi|)^{|\alpha| - (m+\mu)} |D^\alpha_\xi D^\beta_x (a_j \Lambda^j u)(x, \xi)|.$$

Применяя (3.3) в ситуации $X = S^m$, получим при $r' < r$:

$$(1+|\xi|)^{|\alpha_1|-m}\,|D_\xi^{\alpha_1}D_x^{\beta_1}a_j(x,\xi)| \leqslant p^{(m)}_{\alpha_1\beta_1}(a_j) \leqslant p^{(m,r)}_{\alpha_1\beta_1 r'}(a) r'^{-j}. \tag{3.6}$$

Используя очевидное неравенство

$$\left(\frac{1+|\xi|}{1+t|\xi|}\right)^{|\alpha_2|-\mu} \leqslant C_1 t^{\mu-|\alpha_2|} \quad (t \geqslant 1,\ |\xi| \geqslant C_0),$$

в котором $C_1 > 0$ зависит лишь от C_0 и α_2, при $|\xi| \geqslant C_0$ будем иметь

$$\begin{gathered}(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}(\Lambda^j u)(x,\xi)| = \\ = q^{j(|\alpha_2|-|\beta_2|)}(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|(D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}u)(q^{-j}x, q^j\xi)| \leqslant \\ \leqslant q^{j|\alpha_2|}(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}(1+q^j|\xi|)^{\mu-|\alpha_2|}p^{(\mu)}_{\alpha_2\beta_2}(u) \leqslant C_1 q^{j\mu} p^{(\mu)}_{\alpha_2\beta_2}(u).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Применяя формулу Лейбница и учитывая (3.6), (3.7), получим при $|\xi| \geqslant C_0$ и $r' < r$

$$\begin{gathered}(1+|\xi|)^{|\alpha|-(m+\mu)}\,|D_\xi^{\alpha}D_x^{\beta}(a_j\Lambda^j u)(x,\xi)| \leqslant \\ \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} \binom{\alpha}{\alpha_1}\binom{\beta}{\beta_1}(1+|\xi|)^{|\alpha_1|-m}\,|D_\xi^{\alpha_1}D_x^{\beta_1}a_j|(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-\mu}\,|D_\xi^{\alpha_2}D_x^{\beta_2}\Lambda^j u| \leqslant \\ \leqslant C_2\left\{\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p^{(m,r)}_{\alpha_1\beta_1 r'}(a)p^{(\mu)}_{\alpha_2\beta_2}(u)\right\}\left(\frac{q^\mu}{r'}\right)^j\end{gathered}$$

с постоянной $C_2 > 0$, зависящей лишь от α,β (и C_0). Если $r > q^\mu$, то можно взять $r' > q^\mu$. Тогда ряд (3.5) сходится в $S^{m+\mu}$, причем

$$p^{(m+\mu)}_{\alpha\beta}(a(x,\xi,\Lambda)u) \leqslant c_{\alpha\beta}(r')\sum p^{(m,r)}_{\alpha_1\beta_1 r'}(a)p^{(\mu)}_{\alpha_2\beta_2}(u).$$

Полученная оценка доказывает теорему. □

В заключение отметим, что требование (3.4) (в соответствии с которым все коэффициенты ряда (3.5), начиная с номера $j = 1$, равны нулю при малых ξ), совершенно не обременительное с точки зрения теории псевдодифференциальных операторов, позволяет игнорировать рост производных по ξ в точке $\xi = 0$ у функций $\Lambda^j u$ при неограниченном увеличении j.

Функции из $\mathcal{H}(Q_r, S^m)$, удовлетворяющие условию (3.4), будем называть символами класса (m,r). Каждому символу $a(x,\xi,\lambda)$ класса (m,r) по теореме 3.1 соответствует ограниченный оператор

$$a(x,\xi,\Lambda) : S^\mu \to S^{\mu+m} \quad (\mu < \log_q r).$$

Рассмотрим вопрос о композиции операторов.

Теорема 3.2. *Пусть $a = a(x,\xi,\lambda)$, $b = b(x,\xi,\lambda)$ — символы класса (m_1,r), (m_2,r) соответственно. Тогда произведение $a(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda)$ есть оператор $c(x,\xi,\Lambda)$ с символом $c(x,\xi,\lambda)$ класса $(m_1+m_2, q^{-m_2}r)$. Билинейное отображение*

$$\mathcal{H}(Q_r, S^{m_1}) \times \mathcal{H}(Q_r, S^{m_2}) \ni (a,b) \longrightarrow c \in \mathcal{H}(Q_{q^{-m_2}r}, S^{m_1+m_2})$$

непрерывно.

Доказательство. Перемножая ряды, получим

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,\xi)\Lambda^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x,\xi)\Lambda^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x,\xi)\Lambda^k,$$

где

$$c_k(x,\xi) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x,\xi)b_{k-j}(q^{-j}x, q^j\xi). \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что $c_k \in S^{m_1+m_2}$ и выполняется условие (3.4). Оценим полунормы c_k в $S^{m_1+m_2}$:

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\,|\xi|\geqslant C_0} (1+|\xi|)^{|\alpha|-(m_1+m_2)}|D_\xi^\alpha D_x^\beta c_k(x,\xi)|.$$

Аналогично доказательству теоремы 3.1 будем иметь

$$(1+|\xi|)^{|\alpha_1|-m_1}|D_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} a_j| \leqslant p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m_1,r)}(a) r'^{-j};$$

$$(1+|\xi|)^{|\alpha_2|-m_2}|D_\xi^{\alpha_2} D_x^{\beta_2} \Lambda^j b_{k-j}| \leqslant C_3 q^{jm_2} p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(b_{k-j}) \leqslant C_3 q^{jm_2} p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b) r'^{j-k}.$$

Тогда

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(a_j\Lambda^j b_{k-j}) \leqslant C_4 q^{jm_2} r'^{-k} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m_1,r)}(a) p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b)$$

и

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) \leqslant \frac{C_5}{(q^{-m_2}r')^k} \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1\beta_1 r'}^{(m_1,r)}(a) p_{\alpha_2\beta_2 r'}^{(m_2,r)}(b).$$

Постоянные C_3, C_4 и C_5 зависят лишь от мультииндексов. Поскольку $r' < r$ произвольно, для любого $\bar r < q^{-m_2} r$ верна оценка

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2)}(c_k) \leqslant C_{\alpha\beta}(\bar r) \left\{ \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1,\beta_1,q^{m_2}\bar r}^{(m_1,r)}(a) p_{\alpha_2,\beta_2,q^{m_2}\bar r}^{(m_2,r)}(b) \right\} \bar r^{-k}.$$

Поэтому, взяв любое достаточно малое $\varepsilon > 0$ ($\bar r + \varepsilon < q^{-m_2} r$), для символа

$$c(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=0}^\infty c_k(x,\xi)\lambda^k$$

будем иметь

$$p_{\alpha\beta\bar r}^{(m_1+m_2,q^{-m_2}r)}(c) \leqslant C_{\alpha\beta}(\bar r,\varepsilon) \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=\alpha\\ \beta_1+\beta_2=\beta}} p_{\alpha_1,\beta_1,q^{m_2}(\bar r+\varepsilon)}^{(m_1,r)}(a) p_{\alpha_2,\beta_2,q^{m_2}(\bar r+\varepsilon)}^{(m_2,r)}(b).$$

Теорема доказана. □

Из теоремы 3.2 следует, что операторы $a(x,\xi,\Lambda)$ образуют алгебру. Центральное место этого раздела — доказательство следующей теоремы обращения.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$a(x,\xi,\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^l a_j(x,\xi)\lambda^j \quad (\lambda\in\mathbb{C};\ a_j \in S^0)$$

и выполнены следующие условия:

$$a_j(x,t\xi) = a_j(x,\xi) \quad (t \geqslant 1,\ |\xi| \geqslant 1);$$

$$\operatorname{supp} a_j \subset K \times \{|\xi| \geqslant q^{-1}\}$$

для некоторого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$.

Если число $r > 0$ таково, что имеет место соотношение

$$a(0,\xi,\lambda) \neq 0 \quad (|\xi| = 1, |\lambda| < r),$$

то существует обратный оператор $(a(x,\xi,\Lambda))^{-1}$ с символом $b(x,\xi,\lambda)$ класса $(0,r)$, причем $b(x,\xi,0) = 1$ и

$$\operatorname{supp} b^{(k)}(x,\xi,0) \subset K \times \{|\xi| \geqslant q^{-1}\} \quad (k = 1,2,\ldots).$$

Доказательство. Доказательство проводится по той же схеме, что применялась при доказательстве теоремы 1.6. Воспользуемся формулой (3.8) композиции для построения оператора $b(x,\xi,\Lambda)$, обратного к $a(x,\xi,\Lambda)$.

Равенство $a(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda)=I$ приводит к системе

$$\begin{cases} b_0(x,\xi)=1, \\ b_k(x,\xi)=-\sum\limits_{j=1}^{\min(k,l)} a_j(x,\xi)b_{k-j}(q^{-j}x,q^j\xi) \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases} \tag{3.9}$$

Равенство $b(x,\xi,\Lambda)a(x,\xi,\Lambda)=I$ дает

$$\begin{cases} b_0(x,\xi)=1, \\ b_k(x,\xi)=-\sum\limits_{j=1}^{\min(k,l)} a_j(q^{j-k}x,q^{k-j}\xi)b_{k-j}(x,\xi) \quad (k=1,2,\ldots). \end{cases} \tag{3.10}$$

Аналогично доказательству теоремы 1.6 убеждаемся, что обе системы задают одну и ту же формулу для коэффициентов $b_k(x,\xi)$:

$$b_k(x,\xi)=(-1)^k\det A_k(x,\xi),\ k=0,1,\ldots,$$

где матрица $A_k(x,\xi)$ порядка $k\times k$ имеет вид

$$A_k(x,\xi)=\begin{pmatrix} a_1(x,\xi) & a_2(x,\xi) & \ldots & a_{k-1}(x,\xi) & a_k(x,\xi) \\ 1 & a_1(q^{-1}x,q\xi) & \ldots & a_{k-2}(q^{-1}x,q\xi) & a_{k-1}(q^{-1}x,q\xi) \\ 0 & 1 & \ldots & a_{k-3}(q^{-2}x,q^2\xi) & a_{k-2}(q^{-2}x,q^2\xi) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1(q^{1-k}x,q^{k-1}\xi) \end{pmatrix}.$$

Из (3.9) следует, что функции $b_k(x,\xi)$ принадлежат S^0 и

$$\operatorname{supp} b_k(x,\xi)\subset K\times\bigl\{|\xi|\geqslant q^{-1}\bigr\} \quad (k=1,2,\ldots).$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$p^{(0)}_{\alpha\beta}(b_k)=\sup_{x\in K,\,|\xi|\geqslant q^{-1}}(1+|\xi|)^{|\alpha|}\,|D^\alpha_\xi D^\beta_x b_k(x,\xi)|\leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k} \quad (k=1,2,\ldots) \tag{3.11}$$

для любого $r'<r$.

Введем вектор-столбец $B_k=(b_{k+l},\ldots,b_{k+1})^T$ $(k=0,1,\ldots)$ и матрицу $G(x,\xi)$ порядка $l\times l$:

$$G(x,\xi)=\begin{pmatrix} -a_1(q^{1-l}x,q^{l-1}\xi) & -a_2(q^{2-l}x,q^{l-2}\xi) & \ldots & -a_l(x,\xi) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если из матрицы $G(x,\xi)$ удалить первую строку, то слева будет расположена единичная матрица порядка $l-1$, а справа — нулевой столбец длины $l-1$. Используя однородность по ξ коэффициентов a_j, перепишем $G(x,\xi)$ при $|\xi|\geqslant 1$ в виде

$$G(x,\xi)=\begin{pmatrix} -a_1(q^{1-l}x,\xi) & -a_2(q^{2-l}x,\xi) & \ldots & -a_l(x,\xi) \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим $G_k(x,\xi)=G(q^{-k}x,q^k\xi)$. Тогда

$$G_k(x,\xi)=G(q^{-k}x,q\xi)$$

при $|\xi|\geqslant q^{-1}$. Система (3.10) может быть записана в виде рекуррентных соотношений

$$B_k=G_kB_{k-1} \quad (k=1,2,\ldots),$$

или
$$B_k = G_k G_{k-1} \dots G_1 B_0. \tag{3.12}$$
Докажем оценку
$$\sup_{x\in K,\,|\xi|\geqslant q^{-1}} (1+|\xi|)^{|\alpha|} \left\| D_\xi^\alpha D_x^\beta (G_k G_{k-1} \dots G_1)(x,\xi) \right\| \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k} \tag{3.13}$$
$$(r' < r;\ k = 1, 2, \dots)$$
индукцией по α и β (в (3.13) $\|\cdot\|$ обозначает матричную норму). В силу однородности функций a_j по второму аргументу имеем
$$\sup_{x\in K,\,|\xi|\geqslant q^{-1}} \|G_k G_{k-1} \dots G_1\| = \sup_{x\in K,\,|\eta|\geqslant 1} \left\| G(q^{-k}x,\eta) \dots G(q^{-1}x,\eta) \right\| =$$
$$= \sup_{x\in K,\,|\eta|=1} \left\| G(q^{-k}x,\eta) \dots G(q^{-1}x,\eta) \right\| = \|g_k \dots g_1\|_{\mathcal{B}},$$
где $g_k = G(q^{-k}x,\eta)$ — элементы банаховой алгебры $\mathcal{B}$ непрерывных на компакте $K \times \{|\xi| = 1\}$ матриц порядка $l \times l$.

Если $g = G(0,\eta)$, то, как нетрудно видеть,
$$\|g_k - g\|_{\mathcal{B}} \leqslant c q^{-k}.$$
Это следует из гладкости коэффициентов по x — достаточно применить дифференциальную теорему о среднем. Пусть $\rho(g)$ обозначает спектральный радиус элемента $g \in \mathcal{B}$. По лемме 1.7
$$\|g_k \dots g_1\| \leqslant \tilde{M}(\bar{r}) \bar{r}^k \quad (\bar{r} > \rho(g)).$$
Оценим $\rho(g)$. Характеристическое уравнение для определения собственных значений матрицы $G(0,\eta)$ имеет вид
$$z^l + a_1(0,\eta) z^{l-1} + \dots + a_l(0,\eta) = 0 \tag{3.14}$$
(достаточно раскрыть $\det(G(0,\eta) - zE)$ по первому столбцу). После замены $z = \lambda^{-1}$ уравнение (3.14) примет вид
$$a(0,\eta,\lambda) = 0.$$
По условию теоремы $a(0,\eta,\lambda) \neq 0$ ($|\eta| = 1$, $|\lambda| < r$). Следовательно, все корни $z_j = z_j(\eta)$ уравнения (3.14) таковы, что
$$|z_j| \leqslant r^{-1} \quad (j = 1, \dots, l;\ |\eta| = 1).$$
Поскольку спектр элемента $g \in \mathcal{B}$ есть объединение по всем $\eta \in S^{n-1}$ собственных значений матриц $G(0,\eta)$, отсюда вытекает, что $\rho(g) \leqslant r^{-1}$. Если $r' < r$, то $\bar{r} = r'^{-1} > r^{-1} \geqslant \rho(g)$ и
$$\sup_{x\in K,\,|\xi|\geqslant q^{-1}} \|G_k G_{k-1} \dots G_1\| = \|g_k \dots g_1\|_{\mathcal{B}} \leqslant \tilde{M}(r') r'^{-k} \quad (k = 1, 2, \dots).$$
Таким образом, для $\alpha = \beta = 0$ оценка (3.13) доказана.

Предположим теперь, что оценка (3.13) справедлива для всех мультииндексов $\gamma = (\alpha, \beta)$ таких, что
$$|\gamma| = |\alpha| + |\beta| \leqslant N.$$
Рассмотрим
$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{\xi,x}^\gamma (G_k \dots G_1),\ \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_{\xi,x}^\gamma (G_k \dots G_1) \quad (|\gamma| = N;\ i = 1, \dots, n).$$
По формуле Лейбница,
$$\frac{\partial}{\partial x_i} D_{\xi,x}^\gamma (G_k \dots G_1) = D_{\xi,x}^\gamma \sum_{j=1}^k G_k \dots G_{j+1} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} G_{j-1} \dots G_1 =$$
$$= \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_1} \binom{\gamma_1}{\gamma_2} \sum_{j=1}^k D_{\xi,x}^{\gamma_2} (G_k \dots G_{j+1}) \left(D_{\xi,x}^{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right) D_{\xi,x}^{\gamma - \gamma_1} (G_{j-1} \dots G_1).$$
Аналогично,
$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} D_{\xi,x}^\gamma (G_k \dots G_1) =$$

$$= \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \binom{\gamma}{\gamma_1} \binom{\gamma_1}{\gamma_2} \sum_{j=1}^{k} D_{\xi,x}^{\gamma_2}(G_k \ldots G_{j+1}) \left(D_{\xi,x}^{\gamma_1-\gamma_2} \frac{\partial G_j}{\partial \xi_i} \right) D_{\xi,x}^{\gamma-\gamma_1}(G_{j-1} \ldots G_1).$$

Заметим, что для любого мультииндекса $\gamma = (\alpha, \beta)$ найдется константа M_γ такая, что

$$\left\| D_{\xi,x}^{\gamma} G_j(x,\xi) \right\| \leqslant M_\gamma (1+|\xi|)^{-|\alpha|} \quad (j = 1, 2, \ldots;\ |\xi| \geqslant q^{-1},\ x \in K).$$

Отсюда с учетом предположения индукции и замечания 1.6 вытекает, что при $x \in K$, $|\xi| \geqslant q^{-1}$, $r' < r$ справедлива оценка

$$\left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{\xi,x}^{\gamma}(G_k \ldots G_1) \right\| \leqslant \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \sum_{j=1}^{k} \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_2|} D_{\xi,x}^{\gamma_2}(G_k \ldots G_{j+1}) \right\| \times$$

$$\times \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_1-\alpha_2|} D_{\xi,x}^{\gamma_1-\gamma_2} \frac{\partial G_j}{\partial x_i} \right\| \cdot \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha-\alpha_1|} D_{\xi,x}^{\gamma-\gamma_1}(G_{j-1} \ldots G_1) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{\gamma_2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma} \sum_{j=1}^{k} c_{\gamma_2}(r') r'^{j-k} M_\gamma c_{\gamma-\gamma_1}(r') r'^{1-j} \leqslant C_\gamma(r') k r'^{-k}.$$

Взяв малое $\varepsilon > 0$, можем записать

$$k r'^{-k} = k \left(\frac{r'-\varepsilon}{r'} \right)^k (r'-\varepsilon)^{-k} \leqslant C(r', \varepsilon)(r'-\varepsilon)^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

что дает при любом $r' < r$ на множестве $x \in K$, $|\xi| \geqslant q^{-1}$ оценку

$$\left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|} \frac{\partial}{\partial x_i} D_{\xi,x}^{\gamma}(G_k \ldots G_1) \right\| \leqslant C_\gamma(r') r'^{-k}$$

(с новой постоянной $C_\gamma(r')$). Аналогично

$$\left\| (1+|\xi|)^{|\alpha|+1} \frac{\partial}{\partial \xi_i} D_{\xi,x}^{\gamma}(G_k \ldots G_1) \right\| \leqslant C_\gamma(r') r'^{-k}.$$

Оценка (3.13) доказана. Из (3.12), (3.13) следует, что

$$(1+|\xi|)^{|\alpha|} \left| D_\xi^\alpha D_x^\beta B_k(x,\xi) \right| \leqslant \sum_{\substack{\alpha_1 \leqslant \alpha \\ \beta_1 \leqslant \beta}} \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_1|} D_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} (G_k \ldots G_1)(x,\xi) \right\| \times$$

$$\times \left\| (1+|\xi|)^{|\alpha_2|} D_\xi^{\alpha_2} D_x^{\beta_2} B_0(x,\xi) \right\| \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

при $x \in K$, $|\xi| \geqslant q^{-1}$, $r' < r$. Получили (3.11). Теорема доказана. □

3.2. Псевдодифференциальные операторы со сжатием аргументов

Вспомним теперь, что каждому символу $a(x,\xi)$, $a \in S^m$, отвечает непрерывный оператор

$$Op(a) = A(x, D) : \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$$

в пространстве Шварца $\mathfrak{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций, определенный по формуле

$$A(x,D)u = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x,\xi) \widetilde{u}(\xi)\, d\xi,$$

и называемый псевдодифференциальным оператором порядка m ($\widetilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $u(x)$). Как уже было отмечено выше, такой оператор продолжается до непрерывного оператора в соболевских пространствах

$$A(x,D) : H^\mu(\mathbb{R}^n) \to H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n), \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(см., например, [55, теоремы 18.1.11, 18.1.13]). Кроме того, из доказательства упомянутых теорем видно, что соответствующая норма оператора A оценивается суммой конечного числа полунорм символа a:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H^\mu(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \text{const} \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}^{(m)}(a). \tag{3.15}$$

Другими словами, отображение

$$S^m \ni a \longrightarrow A \in \mathcal{L}\left(H^\mu(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right)$$

также непрерывно.

Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{L}(X,Y)$ обозначается банахово пространство линейных ограниченных операторов из X в Y, а через $\mathcal{K}(X,Y)$ — подпространство пространства $\mathcal{L}(X,Y)$, состоящее из компактных операторов.

Далее, если $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$, то композиция $A(x,D)B(x,D)$ есть псевдодифференциальный оператор с символом $\sigma(AB) \in S^{m_1+m_2}$, допускающим асимптотическое разложение

$$\sigma(AB) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D_\xi^\alpha a(x,\xi) D_x^\alpha b(x,\xi)$$

(см. [55, теорема 18.1.8]). Это означает, что для любого $N = 0, 1, \ldots$ остаточный член

$$\sigma(AB) - \sum_{|\alpha|<N} (\alpha!)^{-1} D_\xi^\alpha a(x,\xi) D_x^\alpha b(x,\xi)$$

принадлежит классу $S^{m_1+m_2-N}$. Кроме того, в ходе доказательства теоремы 18.1.8 выводится также непрерывность билинейного отображения

$$S^{m_1} \times S^{m_2} \ni (a,b) \longrightarrow \sigma(AB) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b) \in S^{m_1+m_2-N}.$$

Показано, что всякая полунорма остаточного члена в $S^{m_1+m_2-N}$ оценивается некоторой конечной суммой произведений полунорм функции a в S^{m_1} на полунормы функции b в S^{m_2}:

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2-N)} \left(\sigma(AB) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} (D_\xi^\alpha a)(D_x^\alpha b) \right) \leqslant \mathrm{const} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1 \\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a) p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(b) \tag{3.16}$$

(сумма в правой части содержит конечное число членов).

В случае, когда $a(x,\xi) = a(x)$, имеем $\sigma(AB) = a(x)b(x,\xi)$, если же $b(x,\xi) = b(\xi)$, то, очевидно, $\sigma(AB) = a(x,\xi)b(\xi)$.

Пусть P, как и ранее, обозначает функциональный оператор, соответствующий сжатию переменной x: $Pu(x) = u(q^{-1}x)$. Вспомним, что

$$\|P^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} = \|P\|^k_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} = q^{kn/2} \quad (k = 0, 1, \ldots)$$

и, кроме того,

$$PA(x,D) = A(q^{-1}x, qD)P \tag{3.17}$$

для всякого ПДО $A(x,D)$, где $A(q^{-1}x, qD)$ обозначает ПДО с символом $a(q^{-1}x, q\xi)$.

Теорема 3.4. *Пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r). Тогда формулой*

$$A(x,D,P)u = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!} Op\left(a^{(k)}(x,\xi,0)\right) P^k u \tag{3.18}$$

определен ограниченный оператор

$$A(x,D,P) : H^\mu(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$$

для всех $\mu > n/2 - \log_q r$.

Доказательство. Пусть $\chi(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция:

$$\chi(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| \leqslant \varepsilon, \quad \chi(\xi) = 1 \text{ при } |\xi| \geqslant C_0,$$

где C_0 — константа из (3.4). Тогда, учитывая поведение коэффициентов

$$a_k(x,\xi) = (k!)^{-1} a^{(k)}(x,\xi,0)$$

при малых ξ (условия (3.4)), оператор $A_k(x,D)$ можно разложить в произведение

$$A_k(x,D) = A_{k,1}(x,D) A_{k,2}(D),$$

$$a_{k,1}(x,\xi) = a_k(x,\xi)|q^k\xi|^{-\mu}, \quad a_{k,2}(x,\xi) = \chi(\xi)|q^k\xi|^{\mu}.$$

Очевидно, $a_{k,1} \in S^{m-\mu}$, $a_{k,2} \in S^{\mu}$. Представим k-й член ряда (3.18) в виде

$$A_k(x,D)P^k = A_{k,1}(x,D)P^k A_{k,2}(q^{-k}D).$$

Понятно, что отображение

$$a(x,\xi) \mapsto |\xi|^{-\mu}a(x,\xi)$$

из S^m в $S^{m-\mu}$ непрерывно на подпространстве символов, обращающихся в ноль при $|\xi| \leqslant C_0$. Поэтому

$$p^{(m-\mu)}_{\alpha\beta}(a_{k,1}) \leqslant \mathrm{const}\cdot q^{-\mu k}\sum_{\alpha_1,\beta_1} p^{(m)}_{\alpha_1\beta_1}(a_k) \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha_1,\beta_1} p^{(m,r)}_{\alpha_1\beta_1 r'}(a)\right)(q^{\mu}r')^{-k}$$

для всех $r' < r$ и $k = 0,1,\ldots$. Принимая во внимание (3.15), будем иметь

$$\|A_{k,1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)\right)(q^{\mu}r')^{-k}.$$

Очевидно также, что последовательность

$$a_{k,2}(q^{-k}\xi) = \chi(q^{-k}\xi)|\xi|^{\mu}$$

ограничена в S^{μ}. Поэтому

$$\|A_{k,2}(q^{-k}D)\|_{\mathcal{L}(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const} \quad (k = 0,1,\ldots).$$

Таким образом,

$$\|A_kP^k\|_{\mathcal{L}(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|A_{k,1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n))}\|P^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))}\times$$

$$\times\|A_{k,2}(q^{-k}D)\|_{\mathcal{L}(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)\right)\left(\frac{q^{n/2-\mu}}{r'}\right)^k.$$

Если $r > q^{n/2-\mu}$, то можно взять $r' > q^{n/2-\mu}$. Тогда ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(x,D)P^k$$

сходится по операторной норме, и справедлива оценка (постоянная справа зависит от r')

$$\|A\|_{\mathcal{L}(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const}\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a) \quad (q^{n/2-\mu} < r' < r).$$

Теорема доказана. □

Заметим, что мы установили также непрерывность отображения

$$\mathcal{H}(Q_r, S^m) \ni a \longrightarrow A \in \mathcal{L}\left(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)\right).$$

Если $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r), то оператор $A(x,D,P)$ из теоремы 3.4 будем называть псевдодифференциальным оператором со сжатием аргументов (класса (m,r)).

Для символов $a \in S^{m_1}$, $b \in S^{m_2}$, обращающихся в ноль при $|\xi| \leqslant C_0$, символ произведения операторов $A(x,D)B(x,D)$ этому условию, вообще говоря, не удовлетворяет. Поэтому мы будем рассматривать операторы (3.18) и для произвольных функций $a \in \mathcal{H}(Q_r, S^m)$.

Теорема 3.5. *Если $a \in \mathcal{H}(Q_r, S^m)$ и $r > q^{n/2}$, то ряд* (3.18) *задает ограниченный оператор*

$$A(x,D,P) : H^{\mu}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$$

для всех $\mu \geqslant 0$.

Доказательство.

1. В случае $\mu = 0$ аналогично теореме 3.4

$$\|A_kP^k\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);\,H^{-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \|A_k\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);\,H^{-m}(\mathbb{R}^n))}\|P^k\|_{\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))} \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\left(\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)\right)\left(\frac{q^{n/2}}{r'}\right)^k,$$

откуда следует, что

$$\|A\|_{\mathcal{L}(L_2(\mathbb{R}^n);\,H^{-m}(\mathbb{R}^n))} \leqslant \mathrm{const}\sum_{\alpha,\beta} p^{(m,r)}_{\alpha\beta r'}(a)$$

для r' из интервала $q^{n/2} < r' < r$ (постоянная справа, конечно, зависит от r').

2. В случае натурального μ в силу теоремы о замкнутом графике достаточно показать, что $Au \in H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$, если $u \in H^{\mu}(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем мультииндекс α, $|\alpha| \leqslant \mu$. По формуле Лейбница

$$D^\alpha A_k(x,D)u = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}A_{k,\alpha-\beta}(x,D)D^\beta u,$$

где $A_{k,\alpha-\beta}(x,D) = Op\left(D_x^{\alpha-\beta}a(x,\xi)\right)$. Тогда

$$D^\alpha A(x,D,P)u = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}A_{k,\alpha-\beta}(x,D)D^\beta(P^ku) =$$
$$= \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty}A_{k,\alpha-\beta}(x,D)(q^{-|\beta|}P)^kD^\beta u = \sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}A_{\alpha-\beta}(x,D,q^{-|\beta|}P)D^\beta u.$$

Заметим, что если $a \in \mathcal{H}(Q_r, S^m)$, то функция $D_\xi^{\gamma_1}D_x^{\gamma_2}a(x,\xi,t^{-1}\lambda)$ принадлежит пространству $\mathcal{H}(Q_{tr}, S^{m-|\gamma_1|})$ для любых мультииндексов γ_1,γ_2 и любого $t > 0$.

Ограниченность операторов

$$A_{\alpha-\beta}(x,D,q^{-|\beta|}P) : L_2(\mathbb{R}^n) \to H^{-m}(\mathbb{R}^n)$$

уже доказана. А так как $D^\beta u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ при $\beta \leqslant \alpha$, мы получили, что $D^\alpha Au \in H^{-m}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, $Au \in H^{\mu-m}(\mathbb{R}^n)$.

3. Интерполяция между нулем и натуральным μ завершает доказательство теоремы. □

Следующая задача — вывести формулу композиции псевдодифференциальных операторов со сжатием аргументов. Ограничимся случаем, когда один из сомножителей — полином относительно P.

Лемма 3.1. *Пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — полином относительно λ с коэффициентами из S^{m_1}, удовлетворяющий условию* (3.4); *$b(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m_2,r); $c(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m_1+m_2,r), отвечающий произведению*

$$c(x,\xi,\Lambda) = a(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda).$$

Если $r > q^{n/2}$, то

$$A(x,D,P)B(x,D,P) - C(x,D,P) \in \mathcal{L}\left(H^\mu(\mathbb{R}^n);\,H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $\mu \geqslant 0$.

Доказательство. Перемножая ряды и пользуясь формулой композиции ПДО, будем иметь (конечно, считаем $A_j = 0$ при $j > l$):

$$A(x,D,P)B(x,D,P) = \left(\sum_{k=0}^{l}A_k(x,D)P^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k(x,D)P^k\right) =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}A_j(x,D)B_{k-j}(q^{-j}x,q^jD)\right)P^k = \sum_{k=0}^{\infty}C_k(x,D)P^k + \sum_{k=0}^{\infty}E_k(x,D)P^k,$$

где $C_k(x,D) \in Op\,(S^{m_1+m_2})$ — оператор с символом (см. (3.8))

$$c_k(x,\xi) = \frac{1}{k!}\,c^{(k)}(x,\xi,0) = \sum_{j=0}^{k} a_j(x,\xi) b_{k-j}(q^{-j}x, q^j\xi),$$

$$E_k(x,D) = \sum_{j=0}^{k} A_j(x,D) B_{k-j}(q^{-j}x, q^jD) - C_k(x,D) \in Op\left(S^{m_1+m_2-1}\right).$$

В силу (3.16)

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1+m_2-1)}(e_k) \leqslant \mathrm{const} \sum_{j=0}^{l} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a_j) p_{\alpha_2\beta_2}^{(m_2)}(\Lambda^j b_{k-j}) \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k} \quad (r' < r).$$

Следовательно, функция

$$e(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k(x,\xi)\lambda^k$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}(Q_r, S^{m_1+m_2-1})$ и

$$A(x,D,P)B(x,D,P) = C(x,D,P) + E(x,D,P).$$

Но при $r > q^{n/2}$ по теореме 3.5 оператор

$$E(x,D,P) : H^{\mu}(\mathbb{R}^n) \to H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)$$

ограничен для всех $\mu \geqslant 0$. Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — полином относительно λ с коэффициентами из S^{m_1}, удовлетворяющий условию* (3.4)*, причем коэффициенты $a_k(x,\xi)$ имеют вид*

$$a_k(x,\xi) = a_{k,1}(x) a_{k,2}(\xi) \quad (k = 0,\ldots,l);$$

$b(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m_2, r); $c(x,\xi,\lambda)$ — символ класса $(m_1+m_2, q^{-m_1}r)$, отвечающий произведению

$$c(x,\xi,\Lambda) = b(x,\xi,\Lambda)a(x,\xi,\Lambda).$$

Если $r > q^{n/2}$, то

$$B(x,D,P)A(x,D,P) - C(x,D,P) \in \mathcal{L}\left(H^{\mu}(\mathbb{R}^n);\, H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $\mu \geqslant m_1$.

Доказательство. Действуя аналогично лемме 3.1, получим ($A_j = 0$ при $j > l$):

$$B(x,D,P)A(x,D,P) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x,D)P^k\right)\left(\sum_{k=0}^{l} A_k(x,D)P^k\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} B_{k-j}(x,D) A_{j,1}(q^{j-k}x) A_{j,2}(q^{k-j}D)\right) P^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} C_k(x,D)P^k + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} F_{kj}(x,D) A_{j,2}(q^{k-j}D) P^k,$$

где

$$F_{kj}(x,D) = B_{k-j}(x,D) A_{j,1}(q^{j-k}x) - Op\left(b_{k-j}(x,\xi) a_{j,1}(q^{j-k}x)\right) \in Op\left(S^{m_2-1}\right)$$

и $F_{kj} = 0$ при $j > l$. В силу (3.16)

$$p_{\alpha\beta}^{(m_2-1)}(f_{kj}) \leqslant \mathrm{const} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}} p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_2)}(b_{k-j}) p_{\alpha_2\beta_2}^{(0)}(\Lambda^{k-j} a_{j,1}) \leqslant c_{\alpha\beta}(r') r'^{-k}$$

$$(r' < r;\ j = 0,\ldots,l;\ k \geqslant j),$$

поскольку семейство символов $a_{j,1}(q^{j-k}x)$ ($j = 0,\ldots,l$; $k \geqslant j$) ограничено в S^0.

Меняя местами порядок суммирования, получим

$$B(x,D,P)A(x,D,P) - C(x,D,P) =$$

$$= \sum_{j=0}^{l} \left(\sum_{k=j}^{\infty} F_{kj}(x,D)P^k \right) A_{j,2}(q^{-j}D) = \sum_{j=0}^{l} F_j(x,D,P) A_{j,2}(q^{-j}D),$$

$$f_j(x,\xi,\lambda) = \sum_{k=j}^{\infty} f_{kj}(x,\xi)\lambda^k, \quad f_j \in \mathcal{H}(Q_r, S^{m_2-1}).$$

Остается заметить, что по теореме 3.5 все операторы

$$F_j(x,D,P) : H^{\mu-m_1}(\mathbb{R}^n) \to H_2^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\mathbb{R}^n)$$

ограничены для всех $\mu \geqslant m_1$. Лемма доказана. □

Перейдем теперь к операторам, действующим на функции в ограниченной области. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^\infty$, удовлетворяющую условию $\overline{\Omega} \subset q\Omega$ (условие (1.5)). Пусть $K \subset q\Omega$ — фиксированный компакт, а $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ — срезающая функция такая, что $\phi(x) = 1$ при $x \in q^{-1}K$.

Если функция $a \in \mathcal{H}(Q_r, S^m)$ является полиномом по ξ, то

$$A_k(x,D) = (k!)^{-1}\, Op\left(a^{(k)}(x,\xi,0)\right)$$

— дифференциальные операторы, и формула (3.18) при $r > q^{n/2}$ задает также ограниченный оператор

$$A(x,D,P) : H^\mu(\Omega) \to H^{\mu-m}(\Omega) \quad (\mu \geqslant 0)$$

для всякой области Ω, удовлетворяющей (1.5). Если при этом коэффициенты операторов $A_k(x,D)$ финитны в K, то

$$A(x,D,P)u = A_0(x,D)u + \sum_{k=1}^{\infty} r^+ A_k(x,D)P^k(\phi u). \tag{3.19}$$

В (3.19) операторы $A_k(x,D)$, начиная с $k=1$, действуют на функции в $\mathbb{R}^n$; r^+ — оператор сужения на Ω. Воспользуемся этим соображением, чтобы определить операторы в ограниченной области для более общих символов.

Итак, пусть $a(x,\xi,\lambda)$ — символ класса (m,r), для которого

$$a(x,\xi,0) \text{ — полином относительно } \xi; \tag{3.20}$$

$$\operatorname{supp} a^{(k)}(x,\xi,0) \subset K \times \{|\xi| \geqslant C_0\} \quad (k = 1,2,\ldots). \tag{3.21}$$

Тогда правой частью равенства (3.19) корректно определен оператор из $H^\mu(\Omega)$ в $H^{\mu-m}(\Omega)$, который мы будем обозначать $r^+A(x,D,P)$, в отличие от оператора $A(x,D,P)$, действующего в $\mathbb{R}^n$. Здесь $\mu > n/2 - \log_q r$.

Для символов $a(x,\xi,\lambda)$ класса (m_1,r), $b(x,\xi,\lambda)$ класса (m_2,r), удовлетворяющих условиям (3.20), (3.21), рассмотрим композицию

$$r^+A(x,D,P)r^+B(x,D,P) = (A_0 + r^+(A-A_0)\phi)(B_0 + r^+(B-B_0)\phi).$$

В силу очевидных соотношений

$$A_0 r^+(B-B_0)\phi = r^+[A_0(B-B_0)]\phi,$$

$$r^+(A-A_0)\phi r^+(B-B_0)\phi = r^+[(A-A_0)\phi(B-B_0)]\phi,$$

будем иметь

$$r^+Ar^+B = A_0B_0 + r^+(A-A_0)(\phi B_0) + r^+\left[A_0(B-B_0) + (A-A_0)\phi(B-B_0)\right]\phi.$$

Очевидно,

$$\phi(x)B_0(x,D) = B_0(x,D)\phi(x) + \widetilde{B}_0(x,D),$$

где $\widetilde{B}_0(x,D)$ есть дифференциальный оператор порядка m_2-1 с финитными в Ω коэффициентами. Далее,

$$(A(x,D,P)-A_0(x,D))\,\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(x,D)\phi(q^{-k}x)P^k=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(x,D)P^k+\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{A}_k(x,D)P^k=A-A_0+\widetilde{A},$$

где

$$\widetilde{A}_k(x,D)=A_k(x,D)\phi(q^{-k}x)-A_k(x,D)\in Op\left(S^{m_1-1}\right),$$

причем

$$p_{\alpha\beta}^{(m_1-1)}(\widetilde{a}_k)\leqslant \mathrm{const}\sum_{\substack{\alpha_1,\beta_1\\ \alpha_2,\beta_2}}p_{\alpha_1\beta_1}^{(m_1)}(a_k)p_{\alpha_2\beta_2}^{(0)}(\phi(q^{-k}x))\leqslant c_{\alpha\beta}(r')r'^{-k}\quad (r'<r),$$

поскольку семейство символов $\phi(q^{-k}x)$ $(k=1,2,\dots)$ ограничено в S^0. Таким образом, функция

$$\widetilde{a}(x,\xi,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{a}_k(x,\xi)\lambda^k$$

лежит в $\mathcal{H}(Q_r,S^{m_1-1})$.

В результате получим

$$r^+Ar^+B=A_0B_0+r^+\left[(A-A_0)B_0+A_0(B-B_0)+(A-A_0)(B-B_0)\right]\phi+$$

$$+\,r^+(A-A_0)\widetilde{B}_0+r^+\widetilde{A}(B-B_0)\phi,$$

или

$$r^+A(x,D,P)r^+B(x,D,P)=A_0(x,D)B_0(x,D)+$$

$$+\,r^+\left[A(x,D,P)B(x,D,P)-A_0(x,D)B_0(x,D)\right]\phi(x)+$$

$$+\,r^+\left[A(x,D,P)-A_0(x,D)\right]\widetilde{B}_0(x,D)+$$

$$+\,r^+\widetilde{A}(x,D,P)\left[B(x,D,P)-B_0(x,D)\right]\phi(x).$$

Из полученного соотношения и теорем 3.4, 3.5 вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Пусть символы $a(x,\xi,\lambda)$, $b(x,\xi,\lambda)$ принадлежат классам (m_1,r), (m_2,r) соответственно и удовлетворяют условиям* (3.20), (3.21). *Если $r>q^{n/2}$, то для всех*

$$\mu\in[m_2,+\infty)\cap(n/2-\log_q r,+\infty)$$

оператор

$$r^+A(x,D,P)r^+B(x,D,P)-A_0(x,D)B_0(x,D)-r^+\left[A(x,D,P)B(x,D,P)-A_0(x,D)B_0(x,D)\right]\phi(x)$$

ограничен из $H^{\mu}(\Omega)$ в $H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\Omega)$.

Действительно, следующие операторы:

$$\widetilde{B}_0(x,D):H^{\mu}(\Omega)\to H^{\mu-m_2+1}(\mathbb{R}^n)\quad(\mu\in\mathbb{R}),$$

$$r^+[A(x,D,P)-A_0(x,D)]:H^{\mu-m_2+1}(\mathbb{R}^n)\to H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\Omega)\quad(\mu-m_2+1>n/2-\log_q r),$$

$$[B(x,D,P)-B_0(x,D)]\phi:H^{\mu}(\Omega)\to H^{\mu-m_2}(\mathbb{R}^n)\quad(\mu>n/2-\log_q r),$$

$$r^+\widetilde{A}(x,D,P):H^{\mu-m_2}(\mathbb{R}^n)\to H^{\mu-(m_1+m_2)+1}(\Omega)\quad(\mu\geqslant m_2)$$

ограничены (выполнение неравенства $\mu-m_2+1>n/2-\log_q r$ обеспечено условиями $\mu\geqslant m_2$ и $r>q^{n/2}$ леммы).

3.3. Фредгольмова разрешимость общей краевой задачи в шкале пространств Соболева

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^\infty$, удовлетворяющей условию (1.5), рассмотрим уравнение

$$Au \equiv \sum_{j=0}^{l} \sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_{j\alpha}(x) D^\alpha (u(q^{-j}x)) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{3.22}$$

с бесконечно гладкими в $\overline{\Omega}$ комплекснозначными коэффициентами. Не умаляя общности, можно считать, что $a_{j\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} a_{j\alpha} \subset K$ для некоторого компакта $K \subset q\Omega$.

Уравнению (3.22) соответствует ограниченный оператор в соболевских пространствах

$$A : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega).$$

Будем рассматривать уравнение (3.22) в предположении, что дифференциальный оператор

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_{0\alpha}(x) D^\alpha$$

(«локальная» часть оператора A) правильно эллиптичен (см., например, [20, стр. 134]). Таким образом,

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha}(x)\xi^\alpha \neq 0 \quad (x \in \overline{\Omega};\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n).$$

Пусть $\chi(\xi)$ — срезающая функция:

$$\chi(\xi) = 0 \text{ при } |\xi| \leqslant q^{-1}, \quad \chi(\xi) = 1 \text{ при } |\xi| \geqslant 1.$$

Введем обозначения

$$a_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{j\alpha}(x)\xi^\alpha \quad (j = 0, \ldots, l);$$

$$a_j'(x,\xi) = a_j(x,\xi)\chi(\xi), \quad a_j''(x,\xi) = \frac{a_j'(x,\xi)}{a_0(q^{-j}x, q^j\xi)} \quad (j = 1, \ldots, l);$$

$$a(x,\xi,\lambda) = \sum_{j=0}^{l} a_j(x,\xi)\lambda^j,$$

$$a'(x,\xi,\lambda) = a_0(x,\xi) + \sum_{j=1}^{l} a_j'(x,\xi)\lambda^j, \quad a''(x,\xi,\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{l} a_j''(x,\xi)\lambda^j.$$

Символы $a'(x,\xi,\lambda)$, $a''(x,\xi,\lambda)$ связаны соотношением

$$a'(x,\xi,\Lambda) = a''(x,\xi,\Lambda)a_0(x,\xi). \tag{3.23}$$

Соответствующие символам операторы будем, как обычно, обозначать заглавными буквами:

$$A_j(x,D),\ A_j'(x,D),\ A_j''(x,D),\ A(x,D,P),\ A'(x,D,P),\ A''(x,D,P).$$

Поскольку $1 - \chi \in S^{-\infty}$, оператор

$$r^+A(x,D,P) - r^+A'(x,D,P) = r^+ \left[\sum_{j=1}^{l} A_j(x,D)(1-\chi(D))P^j \right] \phi$$

сглаживающий. По теореме Реллиха—Гординга

$$A - r^+A'(x,D,P) \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^s(\Omega)\right) \quad (s \in \mathbb{R}) \tag{3.24}$$

(в разность вошли также и младшие члены уравнения (3.22)). Из (3.23), формулы композиции ПДО и теоремы Реллиха—Гординга следует, что

$$r^+A'(x,D,P) - r^+A''(x,D,P)A_0(x,D) \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^s(\Omega)\right),$$

а значит, и

$$A - r^+A''(x,D,P)A_0(x,D) \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^s(\Omega)\right) \quad (s \in \mathbb{R}). \tag{3.25}$$

Рассмотрим также систему граничных условий

$$T_j(x,D)u(x) = g_j(x) \quad (j=1,\ldots,m;\ x\in\partial\Omega), \tag{3.26}$$

где $T_j(x,D)$ — дифференциальные операторы порядка m_j с гладкими коэффициентами. Будем считать, что операторы $T_j(x,D)$ $(j=1,\ldots,m)$ удовлетворяют на $\partial\Omega$ условию Лопатинского относительно правильно эллиптического оператора $A_0(x,D)$, так что локальная часть уравнения (3.22) с краевыми условиями (3.26) образуют эллиптическую краевую задачу. Тогда для любого числа $s\geqslant 0$ такого, что $s+2m-\max m_j\geqslant 1$, ограниченный оператор

$$\mathbf{L}_0 = [A_0, T] = [A_0, T_1, \ldots, T_m]:$$

$$H^{s+2m}(\Omega)\longrightarrow \mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega) = H^s(\Omega)\times\prod_{j=1}^m H^{s+2m-m_j-1/2}(\partial\Omega)$$

фредгольмов (см., например, [11]). Через

$$\mathbf{P}_0 : \mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega)\to H^{s+2m}(\Omega)$$

обозначим его регуляризатор.

Напомним, что оператор $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ (X и Y — банаховы пространства) называется фредгольмовым, если его ядро $\mathcal{N}(T)$ конечномерно, а образ $\mathcal{R}(T)$ замкнут и имеет конечную коразмерность. Фредгольмовость оператора L равносильна существованию таких операторов $P_1, P_2\in\mathcal{L}(X,Y)$, называемых левым и правым регуляризаторами, что $P_1L-I\in\mathcal{K}(X,X)$ и $LP_2-I\in\mathcal{K}(Y,Y)$. Если оператор $L\in\mathcal{L}(X,Y)$ имеет левый и правый регуляризаторы, то любой правый регуляризатор одновременно является левым, и наоборот.

Теорема 3.6. *Предположим, что*

$$a(0,\xi,\lambda)\neq 0 \quad (|\lambda|\leqslant q^{n/2-2m},\ 0\neq\xi\in\mathbb{R}^n).$$

Тогда для любого показателя $s\geqslant 0$, $s+2m-\max m_j\geqslant 1$, *оператор*

$$\mathbf{L} = [A,T] : H^{s+2m}(\Omega)\to\mathbf{H}^s(\Omega;\partial\Omega)$$

фредгольмов.

Доказательство. Очевидно, функции a''_j $(j=1,\ldots,l)$ принадлежат S^0, положительно однородны по ξ при $|\xi|\geqslant 1$ и $\operatorname{supp} a''_j\subset K\times\left\{|\xi|\geqslant q^{-1}\right\}$. Кроме того, используя условие теоремы, при $|\xi|=1$ будем иметь

$$a''(0,\xi,\lambda) = 1+\sum_{j=1}^l \frac{a_j(0,\xi)}{a_0(0,\xi)}(q^{-2m}\lambda)^j = \frac{a(0,\xi,q^{-2m}\lambda)}{a_0(0,\xi)}\neq 0,$$

если $|\lambda|\leqslant q^{n/2}$. По теореме 3.3 существует символ $b(x,\xi,\lambda)$ класса $(0,r)$ для некоторого $r>q^{n/2}$ такой, что

$$b(x,\xi,0)=1,\quad \operatorname{supp} b^{(k)}(x,\xi,0)\subset K\times\left\{|\xi|\geqslant q^{-1}\right\}\ (k=1,2,\ldots)$$

и

$$a''(x,\xi,\Lambda)b(x,\xi,\Lambda) = b(x,\xi,\Lambda)a''(x,\xi,\Lambda) = I,$$

откуда в силу равенства (3.23) следует также, что

$$b(x,\xi,\Lambda)a'(x,\xi,\Lambda) = a_0(x,\xi).$$

В таком случае по лемме 3.1

$$A''(x,D,P)B(x,D,P)-I\in\mathcal{L}\left(H^s(\mathbb{R}^n);\ H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right),$$

а по лемме 3.2

$$B(x,D,P)A'(x,D,P)-A_0(x,D)\in\mathcal{L}\left(H^{s+2m}(\mathbb{R}^n);\ H^{s+1}(\mathbb{R}^n)\right)$$

для всех $s\geqslant 0$. После применения леммы 3.3 и теоремы Реллиха—Гординга будем иметь

$$r^+A''(x,D,P)r^+B(x,D,P)-I\in\mathcal{K}\left(H^s(\Omega);\ H^s(\Omega)\right),$$

$$r^+B(x,D,P)r^+A'(x,D,P)-A_0(x,D)\in\mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^s(\Omega)\right).$$

Введем оператор
$$\mathbf{L}' = [r^+A', T] : H^{s+2m}(\Omega) \to \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)$$
и матричные операторы
$$\mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} r^+A'' & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} : \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega) \to \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega),$$
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} r^+B & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} : \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega) \to \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega).$$
Точнее, если $[f, g] = [f, g_1, \dots, g_m] \in \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)$, то
$$\mathbf{A}''[f, g]^T = [r^+A''(x, D, P)f,\ g]^T, \quad \mathbf{B}[f, g]^T = [r^+B(x, D, P)f,\ g]^T.$$

Покажем, что оператор $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0\mathbf{B}$ является одновременно правым и левым регуляризатором оператора $\mathbf{L}$.

Из (3.24), (3.25) следует, что
$$\mathbf{L} - \mathbf{A}''\mathbf{L}_0 \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right), \tag{3.27}$$
$$\mathbf{L} - \mathbf{L}' \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right). \tag{3.28}$$
Поскольку $\mathbf{P}_0$ есть регуляризатор для $\mathbf{L}_0$, имеем
$$\mathbf{L}_0\mathbf{P}_0 - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(\mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right), \tag{3.29}$$
$$\mathbf{P}_0\mathbf{L}_0 - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^{s+2m}(\Omega)\right). \tag{3.30}$$
Кроме того,
$$\mathbf{A}''\mathbf{B} - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(\mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right), \tag{3.31}$$
$$\mathbf{B}\mathbf{L}' - \mathbf{L}_0 \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right). \tag{3.32}$$
Из (3.29), (3.31) следует, что
$$\mathbf{A}''\mathbf{L}_0(\mathbf{P}_0\mathbf{B}) - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(\mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right). \tag{3.33}$$
Из (3.27), (3.33) следует, что
$$\mathbf{L}(\mathbf{P}_0\mathbf{B}) - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(\mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega);\ \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega)\right),$$
т. е. оператор
$$\mathbf{P}_0\mathbf{B} : \mathbf{H}^s(\Omega; \partial\Omega) \to H^{s+2m}(\Omega)$$
является для $\mathbf{L}$ правым регуляризатором. Далее, (3.30), (3.32) означают, что
$$\mathbf{P}_0\mathbf{B}\mathbf{L}' - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^{s+2m}(\Omega)\right). \tag{3.34}$$
Наконец, (3.28) и (3.34) дают $\mathbf{P}_0\mathbf{B}\mathbf{L} - \mathbf{I} \in \mathcal{K}\left(H^{s+2m}(\Omega);\ H^{s+2m}(\Omega)\right)$, т. е. $\mathbf{P}_0\mathbf{B}$ является также и левым регуляризатором для $\mathbf{L}$. Теорема доказана. □

Замечание 3.1. Из результатов раздела 1.2 (теоремы 1.1, 1.2 и 1.3) следует, что фредгольмовость краевой задачи для уравнения со сжатиями аргументов зависит, вообще говоря, от выбора пространства. В то же время в теореме 3.6 получились одни и те же достаточные условия фредгольмовости для всех $s \geqslant 0$. Дело в том, что теорема 3.6 фактически опирается на более грубую теорему 3.5, а не на теорему 3.4, в которой условие на символ меняется в зависимости от показателя гладкости пространства. Этот недостаток в некоторой степени будет исправлен в главе 4 путем перехода к весовым пространствам.

Пример 3.1. Выясним, при каких значениях параметра $\tau \in \mathbb{R}$ краевая задача
$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(u(x) + \sin x_2 u(x/2)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(u(x) + \sin x_1 u(x/2)\right) +$$
$$+ 2\tau \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(u(x) + \cos(x_1^2 + x_2^2) u(x/4)\right) = f(x)$$
$$(x = (x_1, x_2) \in \Omega = \{x_1^4 + x_2^4 < 1\}),$$
$$u|_{\partial\Omega} = g(x) \quad (x \in \partial\Omega)$$

фредгольмова в паре пространств $H^2(\Omega)$, $L_2(\Omega)\times H^{3/2}(\partial\Omega)$.

Структура уравнения, коэффициенты и область удовлетворяют всем предположениям настоящей главы. Запишем символ уравнения:

$$a(x,\xi,\lambda)=\xi_1^2+2\tau\xi_1\xi_2+\xi_2^2+(\xi_1^2\sin x_2+\xi_2^2\sin x_1)\lambda+2\tau\cos(x_1^2+x_2^2)\xi_1\xi_2\lambda^2.$$

Критерием правильной эллиптичности его «локальной части»

$$a_0(x,\xi)=a(x,\xi,0)=\xi_1^2+2\tau\xi_1\xi_2+\xi_2^2$$

на множестве вещественных значений параметра будет условие $|\tau|<1$, гарантирующее, очевидно, и эллиптичность соответствующей локальной задачи Дирихле. По теореме 3.6 для фредгольмовой разрешимости исходной задачи достаточно потребовать отсутствия в круге $|\lambda|\leqslant q^{-1}$ нулей выражения

$$a(0,\xi,\lambda)=\xi_1^2+2\tau\xi_1\xi_2+\xi_2^2+2\tau\xi_1\xi_2\lambda^2$$

при $\xi\neq 0$, или, что то же самое, выражения $1+\tau(1+\lambda^2)\sin 2\theta$ при всех $\theta\in\mathbb{R}$. Последнее, как нетрудно видеть, равносильно следующему условию на τ:

$$|\tau|<\frac{q^2}{1+q^2}.$$

Глава 4

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

4.1. Весовые пространства и преобразование Фурье

Важной особенностью и значительной трудностью при исследовании краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений служит наличие негладких решений. Так, обобщенные решения краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений могут иметь степенные особенности в некоторых точках (как на границе, так и внутри области) даже при бесконечно гладких границе и правых частях [88]. Поэтому общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений естественно решать не только в пространствах Соболева, но и в весовых пространствах [53]. Для уравнений, рассматриваемых в данной работе, также естественно наличие негладких решений (см. разделы 1.2, 1.3, 2.4). Здесь, однако, эффект нарушения гладкости связан не только с постановкой краевых задач, но и с наличием неподвижной точки у преобразования сжатия. Оказывается, и в этом случае удобно регулировать поведение решений введением подходящего веса вблизи начала координат. В настоящей главе будет установлена разрешимость уравнения

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{|\alpha|=2m}a_{k\alpha}D^\alpha\Big(u(q^{-k}x)\Big)=f(x)\quad(x\in\mathbb{R}^n)$$

в шкале весовых пространств $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ и показано, что путем выбора параметров s и β всегда можно добиться однозначной разрешимости (при дополнительном условии эллиптичности «локальной» части оператора).

В этом разделе приводятся известные результаты из теории весовых пространств (см. [16], [23]), необходимые для дальнейшего изложения.

В соответствии с определением В. А. Кондратьева [16], весовое пространство $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ при целом неотрицательном s вводится как пополнение множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций по норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant s}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^{2(\beta-s+|\alpha|)}|D^\alpha u(x)|^2dx\right)^{1/2}.$$

Рассмотрим простейший пример. При $\beta = 0, s = 1, n \geqslant 3$ для всякой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ имеем

$$\|u\|^2_{H^1_0(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(|x|^{-2}|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2\right) dx.$$

Применяя неравенство Харди (в результате которого интеграл от первого слагаемого оценивается через интеграл от второго), получим

$$\|u\|_{H^1_0(\mathbb{R}^n)} \sim \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx\Big)^{1/2} = \Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |Fu(\xi)|^2 d\xi\Big)^{1/2} = \|Fu\|_{H^0_1(\mathbb{R}^n)}.$$

Здесь $Fu(\xi)$ означает преобразование Фурье функции $u(x)$.

Отмечая плотность в $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ образов Фурье функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ (любая функция из $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ аппроксимируется в $H^0_1(\mathbb{R}^n)$ функцией из пересечения $L_2(\mathbb{R}^n) \bigcap H^0_1(\mathbb{R}^n)$, последнее пространство есть образ соболевского пространства $H^1(\mathbb{R}^n)$ под действием изоморфизма F; остается заметить, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ всюду плотно в $H^1(\mathbb{R}^n)$), получаем, что преобразование Фурье F продолжается до изоморфизма между $H^1_0(\mathbb{R}^n)$ и $H^0_1(\mathbb{R}^n)$.

В общем случае для описания преобразования Фурье в весовых пространствах необходимо определить пространства $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ для произвольных $s, \beta \in \mathbb{R}$. Сделаем это, следуя [23]. Для функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ рассмотрим преобразование Меллина

$$\tilde{u}(\lambda, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty r^{-i\lambda-1} u(r,\phi) dr \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \phi \in S^{n-1}).$$

Свойства преобразования Меллина вытекают из соответствующих хорошо известных свойств преобразования Фурье благодаря соотношению

$$\tilde{u}(\mu + i\nu, \phi) = F_{t\to\mu}[e^{\nu t} u(e^t, \phi)](\mu).$$

Так, справедливы формула обращения

$$u(r,\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\nu} r^{i\lambda} \tilde{u}(\lambda,\phi) d\lambda$$

и равенство Парсеваля

$$\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\nu} |\tilde{u}(\lambda,\phi)|^2 d\lambda = \int\limits_0^\infty r^{2\nu-1} |u(r,\phi)|^2 dr,$$

в силу которого можно перейти в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ к эквивалентной норме

$$\left(\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\beta-s} \sum_{j=0}^s |\lambda|^{2j} \|\tilde{u}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^{s-j}(S^{n-1})} d\lambda \right)^{1/2}.$$

Кроме того, в $H^s(S^{n-1})$ удобно пользоваться специальной нормой, зависящей от параметра λ, определяя ее при помощи ряда Фурье функции по ортонормированному базису в $L_2(S^{n-1})$, состоящему из сферических функций Y_{mk} $(m = 0, 1, \ldots; k = 1, \ldots, k_m)$, где

$$k_m = (2m + n - 2)(m + n + 3)![(n-2)!m!]^{-1} = O(m^{n-2}),\ m \to \infty$$

(Y_{mk} — сферические функции порядка m). Если

$$v(\omega) = \sum_{m,k} v_{mk} Y_{mk}(\omega),$$

где

$$v_{mk} = \int\limits_{S^{n-1}} v(\omega) Y_{mk}(\omega) d\omega,$$

то полагаем

$$\|v\|_{H^s(\lambda;S^{n-1})} = \left(\sum_{m,k}(1+m^2+|\lambda|^2)^s|v_{mk}|^2\right)^{1/2},$$

что при целом неотрицательном s эквивалентно (т. е. подчиняется двусторонней оценке с независящими от v и λ константами) выражению

$$\left(\|v\|^2_{H^s(S^{n-1})} + |\lambda|^{2s}\|v\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right)^{1/2}.$$

Итак, исходная норма в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ эквивалентна норме

$$\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)} = \left(\int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=\beta-s} \|\tilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^s(\lambda;S^{n-1})}d\lambda\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Правая часть сохраняет смысл для любого вещественного s, что делает естественным определение пространства $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ в случае произвольного $s \in \mathbb{R}$ как пополнения множества $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ по норме (4.1).

При изучении преобразования Фурье в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ можно вначале рассматривать его на множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ при $\beta - s < n/2$ и на множестве

$$M_p = \left\{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\gamma u(x)dx = 0,\ |\gamma| = 0,1,\ldots,p\right\}$$

при $n/2 + p < \beta - s < n/2 + p + 1$ $(p = 0,1,\ldots)$.

Для обоих случаев доказаны (см. [23, глава 2]) плотность области определения F в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$, а также оценка $\|Fu\|_{H^\beta_s(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)}$.

Замечание 4.1. Естественность накладываемых на u условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} x^\gamma u(x)dx = 0 \quad (|\gamma| = 0,\ldots,p),$$

равносильных условиям $(Fu)^{(\gamma)}(0) = 0$ $(|\gamma| = 0,\ldots,p)$, проиллюстрируем на примере $n = 3$, $\beta = 2$, $s = 0$, $p = 0$. Действительно, для конечности интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{-4}|Fu|^2 d\xi,$$

обеспечивающего конечность нормы

$$\|Fu\|_{H^2_0(\mathbb{R}^3)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{2}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2(-2+|\alpha|)}|D^\alpha_\xi Fu|^2 d\xi\right)^{1/2},$$

необходимо и достаточно, чтобы $Fu(0) = 0$.

Таким образом, при $\beta - s \neq n/2 + p$ $(p = 0,1,\ldots)$ преобразование Фурье F однозначно продолжается до непрерывного оператора

$$F_{\beta-s} : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^\beta_s(\mathbb{R}^n).$$

При дополнительном условии $\beta - s \neq -n/2 - p$ $(p = 0,1,\ldots)$ этот оператор является изоморфизмом, а обратный оператор $F^{-1}_{\beta-s}$ совпадает с обратным преобразованием Фурье на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, если $s - \beta < n/2$, и на функциях из M_q, если

$$n/2 + q < s - \beta < n/2 + q + 1 \quad (q = 0,1,\ldots).$$

Стоит отметить, что операторы $F_{\beta-s}$ и $F_{\beta'-s'}$, когда числа $\beta-s$ и $\beta'-s'$ принадлежат различным интервалам
$$(-\infty; n/2), \quad (n/2+p; n/2+p+1), \quad p=0,1,\dots,$$
различаются, вообще говоря, на функциях из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

4.2. Оценка для оператора умножения на однородную функцию. Операторы свертки в весовых пространствах

Пусть $\Phi(\xi)$ — гладкая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функция, положительно однородная вещественной степени a:
$$\Phi(t\xi) = t^a \Phi(\xi) \quad (t>0, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$
Цель этого раздела — доказательство оценки
$$\|\Phi u\|_{H^\beta_{s-a}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}\|u\|_{H^\beta_s(\mathbb{R}^n)}$$
для оператора умножения на $\Phi(\xi)$ в $H^\beta_s(\mathbb{R}^n_\xi)$. Здесь N — некоторое целое неотрицательное число. Вначале оценим норму оператора
$$H^\beta(\lambda; S^{n-1}) \ni u \mapsto \Phi u \in H^\beta(\lambda; S^{n-1})$$
умножения на функцию $\Phi(\omega)$ в $H^\beta(\lambda; S^{n-1})$ ($\Phi \in C^\infty(S^{n-1})$). Для этого воспользуемся соотношением
$$\|\Phi u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} = \sup_{v \in H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})} \frac{\left|\int\limits_{S^{n-1}} \Phi(\omega)u(\omega)v(\omega)d\omega\right|}{\|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})}}. \tag{4.2}$$
Без ограничения общности можно считать $u, v \in C^\infty(S^{n-1})$. Сначала предположим, что $\beta \geqslant 0$. Имеем
$$\|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} = \sum_{m,k}(1+m^2+|\lambda|^2)^\beta |u_{mk}|^2,$$
где u_{mk} — коэффициенты Фурье разложения функции u в $L_2(S^{n-1})$ по ортонормированному базису из сферических функций Y_{mk} (для гладкой функции u последовательность u_{mk} быстро убывает). Запишем очевидные неравенства ($\beta \geqslant 0$):
$$c_1((1+m^2)^\beta + |\lambda|^{2\beta}) \leqslant (1+m^2+|\lambda|^2)^\beta \leqslant c_2((1+m^2)^\beta + |\lambda|^{2\beta})$$
$$(c_1 = \min(1, 2^{\beta-1}), \quad c_2 = \max(1, 2^{\beta-1})).$$
Умножая эти неравенства на $|u_{mk}|^2$ и суммируя по m и k, получаем
$$c_1\left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant \|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant$$
$$\leqslant c_2\left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right).$$

Оценим норму оператора $H^\beta(S^{n-1}) \ni u \mapsto \Phi u \in H^\beta(S^{n-1})$ (сейчас уже норма в пространстве не зависит от λ).

Возьмем какой-нибудь гладкий атлас сферы (например, основанный на стереографической проекции) $\{(U_i, \chi_i)\}_{i=1,2}$, где $\{U_1, U_2\}$ — открытое покрытие S^{n-1}, а $\chi_i : U_i \to \mathbb{R}^{n-1}_{x'}$ $(i=1,2)$ — координатные отображения (стереографические проекции). Пусть $\{\zeta_i\}_{i=1,2}$ — подчиненное указанному покрытию разбиение единицы. Тогда $\zeta_i u \in C_0^\infty(U_i)$ — гладкая финитная функция в окрестности U_i, где действует координатная система χ_i, а $(\zeta_i u)\circ\chi_i^{-1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Соотношение
$$\|u\|_{H^\beta(S^{n-1})} = \left(\sum_{i=1,2} \|(\zeta_i u)\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})}\right)^{1/2}$$
задает в $H^\beta(S^{n-1})$ норму, эквивалентную введенной при помощи коэффициентов Фурье.

Возьмем также гладкие финитные в U_i функции h_i, равные 1 на $\operatorname{supp}\zeta_i$, так что
$$\zeta_i \Phi u = h_i \zeta_i \Phi u = (h_i \Phi)\cdot(\zeta_i u),$$

причем функции $h_i\Phi, \zeta_i u$ принадлежат $C_0^\infty(U_i)$. Тогда

$$(\zeta_i\Phi u)\circ\chi_i^{-1}(x') = (h_i\Phi)(\chi_i^{-1}(x'))\cdot(\zeta_i u)(\chi_i^{-1}(x')).$$

Временно обозначим

$$f_i(x') = (\zeta_i u)(\chi_i^{-1}(x')), \quad \phi_i(x') = (h_i\Phi)(\chi_i^{-1}(x')) \quad (i=1,2)$$

— функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Оценим норму

$$\|\phi f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} = \sup_{g\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \frac{\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x')f(x')g(x')dx'\right|}{\|g\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}}.$$

Применяя последовательно равенство Парсеваля для преобразования Фурье (используем обозначение $\hat{u}(\xi') = F_{x'\to\xi'}u$), формулу для преобразования Фурье произведения (опускаем для краткости записи несущественный для оценки множитель $(2\pi)^{-n/2}$) и теорему Фубини, получим

$$\int(\phi f)(x')g(x')dx' = \int(\widehat{\phi f})(\xi')\hat{g}(-\xi')d\xi' =$$

$$= \int\hat{g}(-\xi')d\xi'\int\hat{f}(\xi'-\eta')\hat{\phi}(\eta')d\eta' = \int\hat{\phi}(\eta')d\eta'\int\hat{f}(\xi'-\eta')\hat{g}(-\xi')d\xi'$$

(интегрирование везде выполняется по всему пространству $\mathbb{R}^{n-1}$), так что

$$\left|\int\phi(x')f(x')g(x')dx'\right| \leqslant \int|\hat{\phi}(\eta')|d\eta'\int|\hat{f}(\xi'-\eta')\hat{g}(-\xi')|d\xi' =$$

$$= \int|\hat{\phi}(\eta')|d\eta'\int(1+|\xi'|)^\beta|\hat{f}(\xi'-\eta')|(1+|\xi'|)^{-\beta}|\hat{g}(-\xi')|d\xi'.$$

Применяя известное алгебраическое неравенство

$$1+|\xi'| \leqslant (1+|\eta'|)(1+|\xi'-\eta'|),$$

а затем неравенство Коши—Буняковского, видим, что последний интеграл не превосходит

$$\int(1+|\eta'|)^\beta|\hat{\phi}(\eta')|d\eta'\int(1+|\xi'-\eta'|)^\beta|\hat{f}(\xi'-\eta')|(1+|\xi'|)^{-\beta}|\hat{g}(-\xi')|d\xi' \leqslant$$

$$\leqslant \int(1+|\eta'|)^\beta|\hat{\phi}(\eta')|\left(\int(1+|\xi'-\eta'|)^{2\beta}|\hat{f}(\xi'-\eta')|^2d\xi'\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\int(1+|\xi'|)^{-2\beta}|\hat{g}(\xi')|^2d\xi'\right)^{1/2}d\eta' \leqslant 2^\beta\int(1+|\eta'|)^\beta|\hat{\phi}(\eta')|d\eta'\times$$

$$\times\left(\int(1+|\xi'|^2)^\beta|\hat{f}(\xi')|^2d\xi'\int(1+|\xi'|^2)^{-\beta}|\hat{g}(\xi')|^2d\xi'\right)^{1/2} =$$

$$= 2^\beta\int(1+|\eta'|)^\beta|\hat{\phi}(\eta')|d\eta'\cdot\|f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})}\|g\|_{H^{-\beta}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Первый интеграл можно оценить, например, следующим образом, взяв произвольное число $\delta>0$:

$$2^\beta\int(1+|\eta'|)^\beta|\hat{\phi}(\eta')|d\eta' = 2^\beta\int(1+|\eta'|)^{-(n+\delta)/2}(1+|\eta'|)^{\beta+(n+\delta)/2}|\hat{\phi}(\eta')|d\eta' \leqslant$$

$$\leqslant 2^\beta\left(\int(1+|\eta'|)^{-(n+\delta)}d\eta'\right)^{1/2}\left(\int(1+|\eta'|)^{2\beta+n+\delta}|\hat{\phi}(\eta')|^2d\eta'\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_3\|\phi\|_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \quad (c_3 = c_3(\delta,\beta)).$$

Итак, $\|\phi f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant c_3\|\phi\|_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\|f\|_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})}$, откуда

$$\|\Phi u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} = \sum_{i=1,2}\|(\zeta_i\Phi u)\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{i=1,2}\|\phi_i f_i\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_3^2\sum_{i=1,2}\|\phi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})}\|f_i\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant$$

$$\leqslant c_3^2 \max_{i=1,2} \|\phi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \sum_{i=1,2} \|(\zeta_i u)\circ \chi_i^{-1}\|^2_{H^\beta(\mathbb{R}^{n-1})} =$$
$$= c_3^2 \max_{i=1,2} \|\phi_i\|^2_{H^{\beta+(n+\delta)/2}(\mathbb{R}^{n-1})} \|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})}.$$

Далее возьмем наименьшее $\delta > 0$ так, чтобы число $N = \beta + (n+\delta)/2$ было натуральным, а именно $N = [\beta + n/2] + 1$. Тогда в силу финитности функций h_i ($\operatorname{supp}(h_i \circ \chi_i^{-1}) \subset \{|x'| < R\}$) можно записать

$$\|\phi_i\|^2_{H^N(\mathbb{R}^{n-1})} = \|(h_i\Phi)\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^N(\mathbb{R}^{n-1})} = \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \left| D^\alpha \left(h_i \Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\right|^2 dx' =$$
$$= \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{|x'|<R} \left| D^\alpha \left(h_i \Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\right|^2 dx' \leqslant c_4 \sum_{|\alpha|\leqslant N} \int\limits_{|x'|<R} \left| D^\alpha \left(\Phi(\chi_i^{-1}(x'))\right)\right|^2 dx' =$$
$$= c_4 \|\Phi\circ\chi_i^{-1}\|^2_{H^N(|x'|<R)} \leqslant c_5 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})}$$

(c_5 зависит от χ_i, h_i).

Итак, норма оператора умножения на Φ в $H^\beta(S^{n-1})$ не превосходит $c_6\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}$, причем в качестве N можно взять $[\beta + n/2] + 1$. Наконец,

$$\|\Phi u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant c_2 \left(\|\Phi u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta} \|\Phi u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_2 \left(c_6^2 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta} \|\Phi\|^2_{C(S^{n-1})}\ \|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_7 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \left(\|u\|^2_{H^\beta(S^{n-1})} + |\lambda|^{2\beta}\|u\|^2_{L_2(S^{n-1})}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c_8 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \|u\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})},$$

где константа c_8 не зависит от u, Φ и λ.

Замечание 4.2. Конечно, в случае, когда β — целое неотрицательное число, норма оператора умножения на Φ в $H^\beta(S^{n-1})$ очевидным образом оценивается через $\|\Phi\|_{C^\beta(S^{n-1})}$.

Для перехода к отрицательным β воспользуемся соотношением (4.2), в силу которого

$$\Big| \int\limits_{S^{n-1}} \Phi(\omega) u(\omega) v(\omega) d\omega \Big| \leqslant \sqrt{c_8} \|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})},$$

и, значит,

$$\frac{\Big| \int\limits_{S^{n-1}} (\Phi v)(\omega) u(\omega) d\omega \Big|}{\|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})}} \leqslant \sqrt{c_8} \|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})},$$

т. е.

$$\|\Phi v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})} \leqslant \sqrt{c_8} \|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \|v\|_{H^{-\beta}(\lambda;S^{n-1})}.$$

Таким образом, мы показали, что для произвольного вещественного β справедлива оценка

$$\|\Phi u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} \leqslant c_9 \|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \|u\|_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})},$$

где $N = [|\beta| + n/2] + 1$, а константа c_9 $(= \sqrt{c_8})$ не зависит от u, Φ и λ (но может зависеть от β).

Рассмотрим теперь умножение на функцию $\Phi(\xi) = \rho^a \Phi(\omega)$ ($\rho = |\xi|$, $\omega \in S^{n-1}$) в пространстве $H_s^\beta(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\|u\|^2_{H_s^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda = s-\beta} \|\tilde{u}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} d\lambda,$$
$$\|\Phi u\|^2_{H_{s-a}^\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\operatorname{Im}\lambda = s-a-\beta} \|\widetilde{\Phi u}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} d\lambda.$$

Но

$$\widetilde{\Phi u}(\lambda,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{-i\lambda-1} \rho^a \Phi(\omega) u(\rho,\omega) d\rho =$$

$$= \Phi(\omega) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \rho^{-i(\lambda+ia)-1} u(\rho,\omega) d\rho = \Phi(\omega)\tilde{u}(\lambda+ia,\omega),$$

так что

$$\|\Phi u\|^2_{H^\beta_{s-a}(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda = s-a-\beta} \|\Phi(\cdot)\tilde{u}(\lambda+ia+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\Phi(\cdot)\tilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda-ia;S^{n-1})} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_8 \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\tilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda-ia;S^{n-1})} d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant c_{10} \|\Phi\|^2_{C^N(S^{n-1})} \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda=s-\beta} \|\tilde{u}(\lambda+in/2,\cdot)\|^2_{H^\beta(\lambda;S^{n-1})} d\lambda,$$

поскольку для всех $m=0,1,\ldots$ и λ на прямой $\mathrm{Im}\lambda = s-\beta$ имеет место неравенство

$$\left(1+m^2+|\lambda-ia|^2\right)^\beta \leqslant \max\left(1, \left(\frac{1+(s-\beta-a)^2}{1+(s-\beta)^2}\right)^\beta\right) \cdot \left(1+m^2+|\lambda|\right)^\beta.$$

Таким образом, для всех $u \in H^\beta_s(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\|\Phi u\|_{H^\beta_{s-a}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})} \|u\|_{H^\beta_s(\mathbb{R}^n)},$$

где константа c не зависит от u и Φ, а $N = [|\beta| + n/2] + 1$.

Для рассматриваемой функции Φ при условиях

$$\beta - s \neq n/2 + p,\ \beta - s + a \neq -n/2 - p \quad (p = 0,1,\ldots)$$

можно ввести ограниченный оператор свертки $\Phi_{\beta-s}(D)$, действующий из $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ в $H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$\Phi_{\beta-s}(D)u = F^{-1}_{\beta-s+a}\Phi(\xi)F_{\beta-s}u.$$

Из результатов этого и предыдущего разделов для нормы этого оператора вытекает оценка

$$\|\Phi_{\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta,s,a)\|\Phi\|_{C^N(S^{n-1})}, \quad N = [|\beta|+n/2]+1.$$

Пусть даны функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\xi)$, положительно однородные степеней a_1 и a_2. При выполнении ограничений

$$\beta - s \neq n/2 + p,\ \beta - s + a_1 \neq \pm(n/2+p),\ \beta - s + a_1 + a_2 \neq -n/2 - p$$

$(p = 0,1,\ldots)$ можно говорить об ограниченных операторах

$$\Phi_{1,\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a_1}\Phi_1(\xi)F_{\beta-s} : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a_1}_\beta(\mathbb{R}^n),$$

$$\Phi_{2,\beta-s+a_1}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a_1+a_2}\Phi_2(\xi)F_{\beta-s+a_1} : H^{s-a_1}_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-(a_1+a_2)}_\beta(\mathbb{R}^n).$$

В этом случае оператор $F_{\beta-s+a_1} : H^{s-a_1}_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^\beta_{s-a_1}(\mathbb{R}^n)$ — изоморфизм, и композиция $\Phi_{2,\beta-s+a_1}(D)\Phi_{1,\beta-s}(D)$ есть ограниченный оператор

$$F^{-1}_{\beta-s+a_1+a_2}\Phi_2(\xi)\Phi_1(\xi)F_{\beta-s} : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-(a_1+a_2)}_\beta(\mathbb{R}^n),$$

отвечающий произведению функций $(\Phi_2\Phi_1)(\xi)$.

В частности, если однородная функция $\Phi(\xi)$ степени a не обращается в ноль на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (или, что то же самое, на S^{n-1}), то при всех $\beta, s \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\beta - s \neq \pm(n/2+p),\ \beta - s + a \neq \pm(n/2+p) \quad (p = 0,1,\ldots)$$

ограниченный оператор

$$\Phi_{\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a}\Phi(\xi)F_{\beta-s} : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный

$$\Phi^{-1}_{\beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s}\Phi^{-1}(\xi)F_{\beta-s+a} : H^{s-a}_{\beta}(\mathbb{R}^n) \to H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n),$$

т. е. является изоморфизмом $H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ на $H^{s-a}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 4.3. Рассмотрим однородный дифференциальный оператор

$$A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$$

порядка $m = 0, 1, \ldots$ с постоянными коэффициентами. Для всякого целого неотрицательного показателя s он задает непрерывное отображение из пространства $H^{s+m}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ в $H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n)$. При фиксированных β и s, удовлетворяющих условиям

$$\beta - s - m \neq n/2 + p, \ \beta - s \neq -n/2 - p \quad (p = 0, 1, \ldots),$$

определен также ограниченный оператор свертки

$$A_{\beta-s-m}(D) = F^{-1}_{\beta-s}A(\xi)F_{\beta-s-m} : H^{s+m}_{\beta}(\mathbb{R}^n) \to H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n),$$

где

$$A(\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha$$

— символ дифференциального оператора, однородный полином степени m. Покажем, что (при дополнительном условии $\beta - s \neq n/2 + p$, $p = 0, 1, \ldots$) на всюду плотном в $H^{s+m}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$ подпространстве (если $\beta - s - m < n/2$, то на подпространстве $C^\infty_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, если $n/2 + p < \beta - s - m < n/2 + p + 1$, то на подпространстве M_p) выполнено соотношение

$$A_{\beta-s-m}(D)u = F^{-1}A(\xi)Fu = A(D)u.$$

Тогда в силу непрерывности операторов $A_{\beta-s-m}(D)$ и $A(D)$ совпадают на всем пространстве $H^{s+m}_{\beta}(\mathbb{R}^n)$.

Действительно, пусть, например,

$$n/2 + p < \beta - s - m < n/2 + p + 1$$

для некоторого $p = 0, 1, \ldots$, и пусть $u \in M_p$. Функция $v = F_{\beta-s-m}u = Fu$ (на M_p отображение $F_{\beta-s-m}$ совпадает с обычным преобразованием Фурье, примененным к гладкой финитной функции) удовлетворяет условиям $v^{(\gamma)}(0) = 0$ ($|\gamma| \leqslant p$). Тогда функция $w(\xi) = A(\xi)v(\xi)$ является образом Фурье принадлежащей пространству $C^\infty_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ функции

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha u,$$

причем $w^{(\gamma)}(0) = 0$ для $|\gamma| \leqslant p + m$, так что $w \in F(M_{p+m})$. Но при ограничении

$$n/2 + (p + m) < \beta - s < n/2 + (p + m) + 1$$

оператор $F_{\beta-s} : H^s_{\beta}(\mathbb{R}^n) \to H^{\beta}_s(\mathbb{R}^n)$ является изоморфизмом, на M_{p+m} совпадающим с преобразованием Фурье. Следовательно, на подпространстве $F(M_{p+m})$ обратный оператор $F^{-1}_{\beta-s}$ совпадает с обратным преобразованием Фурье F^{-1}. Поэтому

$$F^{-1}_{\beta-s}w = F^{-1}w$$

и, таким образом,

$$F^{-1}_{\beta-s}A(\xi)F_{\beta-s-m}u = F^{-1}A(\xi)Fu = A(D)u.$$

Если же выполняется неравенство

$$\beta - s - m < n/2,$$

то для $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ снова имеем

$$v = F_{\beta-s-m}u = Fu,$$

в то время как функция $w(\xi) = A(\xi)v(\xi)$ удовлетворяет условиям $w^{(\gamma)}(0) = 0$ $(|\gamma| \leqslant m-1)$. Так что при

$$n/2 + p < \beta - s < n/2 + p + 1 \quad (p = 0, 1, \ldots, m-1)$$

обязательно получим $w \in F(M_p)$, а при $\beta - s < n/2$ будем иметь $w \in F\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})\right)$. И в этом случае $F_{\beta-s}^{-1} w = F^{-1} w$.

4.3. Операторы свертки со сжатиями аргументов

Зафиксируем $q > 1$ и на заданных в $\mathbb{R}^n$ функциях рассмотрим оператор $(Pu)(x) = u(x/q)$. Очевидно,

$$(\widetilde{Pu})(\lambda, \phi) = q^{-i\lambda} \tilde{u}(\lambda, \phi)$$

и

$$\|Pu\|^2_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda = \beta - s} \|\widetilde{Pu}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^s(\lambda; S^{n-1})} d\lambda =$$

$$= \int\limits_{\mathrm{Im}\lambda = \beta - s} \left| q^{-i(\lambda + in/2)} \right|^2 \|\tilde{u}(\lambda + in/2, \cdot)\|^2_{H^s(\lambda; S^{n-1})} d\lambda = q^{2(\beta - s + n/2)} \|u\|^2_{H^s_\beta(\mathbb{R}^n)},$$

так что норма оператора P в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ равна $q^{\beta - s + n/2}$.

Для всякой гладкой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ функции $\Phi(\xi)$, положительно однородной степени $a \in \mathbb{R}$, легко проверяется соотношение

$$P\Phi_{\beta-s}(D) = q^a \Phi_{\beta-s}(D) P \tag{4.3}$$

$$(\beta - s \neq n/2 + p, \quad \beta - s + a \neq -n/2 - p \quad (p = 0, 1, \ldots)).$$

Надо лишь вспомнить, что

$$(FPu)(\xi) = q^n (Fu)(q\xi) \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})),$$

откуда получается

$$q^a(\Phi F P u)(\xi) = q^n q^a \Phi(\xi) Fu(q\xi) = q^n (\Phi F u)(q\xi).$$

При $a = 0$ операторы свертки коммутируют с оператором сжатия.

Рассмотрим функцию двух переменных $\Phi(\omega, z)$ $(\omega \in S^{n-1}, z \in \mathbb{C})$ такую, что вектор-функция

$$z \mapsto \Phi(\cdot, z) \in C^\infty(S^{n-1})$$

аналитична в круге $|z| < \varkappa$ для некоторого $\varkappa > 0$. Если ее разложить в ряд по степеням z:

$$\Phi(\omega, z) = \sum_{k=0}^\infty \Phi_k(\omega) z^k,$$

то $\Phi_k \in C^\infty(S^{n-1})$, причем для любого целого неотрицательного d и любого числа h, $0 < h < \varkappa$, найдется постоянная $c = c(d, h) > 0$ такая, что

$$\|\Phi_k\|_{C^d(S^{n-1})} \leqslant c h^{-k} \quad (k = 0, 1, \ldots). \tag{4.4}$$

Для произвольного $a \in \mathbb{R}$ функцию $\Phi(\xi, z) = \rho^a \Phi(\omega, z)$ назовем символом класса $(a, \varkappa)$.

Лемма 4.1. *Пусть $a, \beta, s \in \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\beta - s \neq n/2 + p, \ \beta - s + a \neq -n/2 - p \quad (p = 0, 1, \ldots)$$

и $\varkappa > q^{\beta - s + n/2}$. Тогда всякому символу $\Phi(\xi, z)$ класса $(a, \varkappa)$ формулами

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) = \sum_{k=0}^\infty \Phi_{k, \beta-s}(D) P^k, \quad \Phi_{k, \beta-s}(D) = F^{-1}_{\beta-s+a} \rho^a \Phi_k(\omega) F_{\beta-s} \tag{4.5}$$

ставится в соответствие ограниченный оператор

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство. В условиях леммы определены ограниченные операторы свертки

$$\Phi_{k,\beta-s}(D) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^{s-a}_\beta(\mathbb{R}^n),$$

причем

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta, s, a)\|\Phi_k\|_{C^N(S^{n-1})}, \qquad N = \Big[|\beta| + n/2\Big] + 1.$$

Поэтому из (4.4) следует, что для любого числа h, $0 < h < \varkappa$, выполнены неравенства

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)\| \leqslant c(\beta, s, a, h) \cdot h^{-k} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

С учетом известного значения нормы оператора P в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ (при этом очевидно, что норма оператора P^k равна $q^{k(\beta-s+n/2)}$) для члена ряда (4.5) получаем оценку

$$\|\Phi_{k,\beta-s}(D)P^k\| \leqslant c(\beta, s, a, h) \cdot \left(\frac{q^{\beta-s+n/2}}{h}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Если $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$, то можно взять $q^{\beta-s+n/2} < h < \varkappa$, и тогда члены ряда по норме мажорируются убывающей геометрической прогрессией. Ряд (4.5) сходится по операторной норме. □

Лемма 4.2. *Пусть $\beta - s \neq \pm(n/2 + p)$ $(p = 0, 1, \ldots)$, $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$, а для символов $\Phi(\xi, z)$, $\Psi(\xi, z)$ и $\Theta(\xi, z)$ класса $(0, \varkappa)$ выполняется соотношение $\Theta(\xi, z) = \Phi(\xi, z)\Psi(\xi, z)$. Тогда*

$$\Theta_{\beta-s}(D, P) = \Phi_{\beta-s}(D, P)\Psi_{\beta-s}(D, P) = \Psi_{\beta-s}(D, P)\Phi_{\beta-s}(D, P).$$

Доказательство. На самом деле, в условиях леммы в $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ действуют ограниченные операторы

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{k,\beta-s}(D)P^k, \quad \Psi_{\beta-s}(D, P) = \sum_{k=0}^{\infty} \Psi_{k,\beta-s}(D)P^k$$

$$\Theta_{\beta-s}(D, P) = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_{k,\beta-s}(D)P^k, \quad \text{причем } \Theta_k(\xi) = \sum_{j=0}^{k} \Phi_j(\xi)\Psi_{k-j}(\xi).$$

Но композиция $\Phi_{\beta-s}(D, P)\Psi_{\beta-s}(D, P)$ задается рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \Phi_{j,\beta-s}(D)P^j\Psi_{k-j,\beta-s}(D)P^{k-j}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} \Phi_{j,\beta-s}(D)\Psi_{k-j,\beta-s}(D)\right)P^k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_{k,\beta-s}(D)P^k = \Theta_{\beta-s}(D, P).$$

Здесь мы воспользовались тем, что оператор P^j коммутирует с оператором $\Psi_{k-j,\beta-s}(D)$, а оператор свертки $\Phi_{j,\beta-s}(D)\Psi_{k-j,\beta-s}(D)$ отвечает произведению функций $\Phi_j(\xi)\Psi_{k-j}(\xi)$. □

Из леммы 4.2 вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.3. *Пусть $\beta - s \neq \pm(n/2 + p)$ $(p = 0, 1, \ldots)$, $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$, а символ $\Phi(\xi, z)$ класса $(0, \varkappa)$ не обращается в ноль при $\xi \in S^{n-1}$ и $|z| < \varkappa$. Тогда ограниченный оператор*

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$$

есть изоморфизм.

Доказательство. Заметим лишь, что функция $\Psi(\xi, z) = 1/\Phi(\xi, z)$ аналитична в том же круге $|z| < \varkappa$, т. е. является символом класса $(0, \varkappa)$ таким, что $\Phi(\xi, z)\Psi(\xi, z) = 1$. □

4.4. Разрешимость функционально-дифференциального уравнения в шкале весовых пространств

Рассмотрим во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ уравнение

$$\sum_{k=0}^{l} \sum_{|\alpha|=2m} a_{k\alpha} D^\alpha \Big(u(q^{-k}x) \Big) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n), \tag{4.6}$$

с однородным оператором порядка $2m$ и постоянными коэффициентами $a_{k\alpha} \in \mathbb{C}$.

Если s — целое неотрицательное число, то левой частью уравнения (4.6) задан ограниченный оператор

$$A(D,P) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n), \quad A(D,P) = \sum_{k=0}^{l} A_k(D) P^k.$$

Нас интересует вопрос обратимости этого оператора. Замечание 4.3 позволяет рассматривать в качестве обобщения уравнения (4.6) на случай произвольного $s \in \mathbb{R}$ уравнение с ограниченным оператором

$$A_{\beta-s-2m}(D,P) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n).$$

Конечно, при этом накладываются ограничения

$$\beta - s - 2m \neq n/2 + p, \quad \beta - s \neq \pm(n/2+p) \quad (p = 0, 1, \ldots).$$

Замечание 4.4. Из того, что $\beta - s \neq n/2 + p$, очевидно, следует, что $\beta - s - 2m \neq n/2 + p$, а из того, что $\beta - s - 2m \neq -n/2 - p$, вытекает, что $\beta - s \neq -n/2 - p$ (p везде пробегает множество неотрицательных целых чисел). Поэтому условия

$$\beta - s \neq \pm(n/2+p),\ \beta - s - 2m \neq \pm(n/2+p) \quad (p = 0, 1, \ldots)$$

равносильны условиям

$$\beta - s \neq n/2 + p,\ \beta - s - 2m \neq -n/2 - p \quad (p = 0, 1, \ldots).$$

Основным результатом данной главы является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $\beta, s \in \mathbb{R}$ таковы, что*

$$\beta - s \neq n/2 + p, \quad \beta - s - 2m \neq -n/2 - p \quad (p = 0, 1, \ldots)$$

и выполнено основное условие

$$A(\xi, z) \equiv \sum_{k=0}^{l} \sum_{|\alpha|=2m} a_{k\alpha} \xi^\alpha z^k \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ |z| \leqslant q^{\beta-s+n/2-2m}).$$

Тогда для ограниченного оператора

$$A_{\beta-s-2m}(D,P) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$$

существует ограниченный обратный. Другими словами, при произвольной функции $f \in H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$ уравнение (4.6) *имеет единственное решение $u \in H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Из основного условия теоремы следует, в частности (полагаем $z = 0$), что «локальная» часть

$$A_0(D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha} D^\alpha$$

оператора эллиптична:

$$A_0(\xi) \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{4.7}$$

Поэтому ограниченный оператор

$$A_{0,\beta-s-2m}(D) : H_\beta^{s+2m}(\mathbb{R}^n) \to H_\beta^s(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный (см. раздел 4.2). Условие (4.7) позволяет также ввести функции

$$\Phi_j(\xi) = q^{-2mj} \frac{A_j(\xi)}{A_0(\xi)}, \quad A_j(\xi) = \sum_{|\alpha|=2m} a_{j\alpha} \xi^\alpha \quad (j = 0, 1, \ldots, l),$$

являющиеся гладкими в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ положительно однородными функциями нулевой степени. Положим

$$\Phi(\xi, z) = \sum_{j=0}^{l} \Phi_j(\xi) z^j = \frac{A(\xi, q^{-2m} z)}{A_0(\xi)}.$$

Функция $\Phi(\xi, z)$ есть символ класса $(0, \varkappa)$ при любом $\varkappa > 0$. Основное условие теоремы гарантирует необращение в ноль функции $\Phi(\xi, z)$ на множестве $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $|z| < \varkappa$ для некоторого $\varkappa > q^{\beta-s+n/2}$. Но тогда по лемме 4.3 ограниченный оператор

$$\Phi_{\beta-s}(D, R) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$$

имеет ограниченный обратный. Кроме того, используя (4.3), будем иметь

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) A_{0,\beta-s-2m}(D) = \left(\sum_{j=0}^{l} \Phi_{j,\beta-s}(D) P^j \right) A_{0,\beta-s-2m}(D) =$$

$$= \sum_{j=0}^{l} q^{2mj} \Phi_{j,\beta-s}(D) A_{0,\beta-s-2m}(D) P^j = A_{\beta-s-2m}(D, P),$$

так как

$$q^{2mj} \Phi_{j,\beta-s}(D) A_{0,\beta-s-2m}(D) =$$
$$= q^{2mj} F^{-1}_{\beta-s} q^{-2mj} \frac{A_j(\xi)}{A_0(\xi)} F_{\beta-s} F^{-1}_{\beta-s} A_0(\xi) F_{\beta-s-2m} = A_{j,\beta-s-2m}(D).$$

Поскольку каждый из операторов

$$\Phi_{\beta-s}(D, P) : H^s_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^s_\beta(\mathbb{R}^n),\ A_{0,\beta-s-2m}(D) : H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$$

является изоморфизмом, оператор $A_{\beta-s-2m}(D, P) : H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n) \to H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ есть также изоморфизм,

$$A^{-1}_{\beta-s-2m}(D, P) = A^{-1}_{0,\beta-s-2m}(D) \Phi^{-1}_{\beta-s}(D, P).$$

Теорема доказана. □

Заметим, что, уменьшая β и (или) увеличивая s, мы ослабляем условие, накладываемое на символ оператора: уменьшается круг, где выражение $A(\xi, z)$ не должно обращаться в ноль. За счет выбора β и s этот круг может быть сделан сколь угодно малым. В то же время, не обращаясь в ноль при $z = 0$, выражение $A(\xi, z)$ будет отличным от нуля и в некотором круге, так что эллиптичность «локальной» части

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha} D^\alpha$$

оператора в уравнении (4.6) гарантирует однозначную разрешимость уравнения при всех «достаточно хороших» функциях f. Оформим это наблюдение.

Следствие 4.1. *Если*

$$A_0(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=2m} a_{0\alpha} \xi^\alpha \neq 0 \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

то найдется число $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что для всех $\beta, s \in \mathbb{R}$ таких, что

$$\beta - s \neq n/2 + p, \quad \beta - s - 2m \neq -n/2 - p \ \ (p = 0, 1, \ldots), \quad \beta - s < \gamma,$$

уравнение (4.6) *имеет для всякой функции $f \in H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ единственное решение $u \in H^{s+2m}_\beta(\mathbb{R}^n)$.*

Такая «гибкость» при использовании весовых пространств $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ имеет элементарное объяснение. С точки зрения уравнений со сжатиями аргументов, преимущество $H^s_\beta(\mathbb{R}^n)$ над соболевскими пространствами $H^s(\mathbb{R}^n)$ состоит в том, что в первом случае имеется примечательная зависимость нормы оператора

$$Pu(x) = u(x/q), \quad q > 1,$$

от параметров s и β гладкости и веса

$$\|P; H^s_\beta(\mathbb{R}^n)\| = q^{\beta-s+n/2},$$

в то время как (в этом несложно убедиться) для $H^s(\mathbb{R}^n)$ аналогичная зависимость отсутствует: соответствующая норма всегда равна (с точностью до эквивалентной нормировки) $q^{n/2}$, если $q > 1$ и $s \geqslant 0$. Этот факт имеет непосредственное отношение к тому, что достаточные условия фредгольмовой разрешимости в соболевских пространствах общей краевой задачи для уравнения со сжатиями аргументов (теорема 3.6) получились одни и те же для всех показателей $s \geqslant 0$.

Пример 4.1. Выясним, при каких значениях параметра $s \in \mathbb{R}$ уравнение

$$u_{x_1x_1}(x) + 2u_{x_2x_2}(x) + u_{x_1x_2}(x/3) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2) \tag{4.8}$$

имеет единственное решение $u \in H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ для любой функции $f \in H_0^s(\mathbb{R}^2)$. Символом уравнения (4.8) (в терминах данной главы) будет выражение $-(\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 9\xi_1\xi_2 z)$. По теореме 4.1 достаточно потребовать

$$\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 9\xi_1\xi_2 z \neq 0 \quad \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,\, |z| \leqslant 3^{-s-1}\right). \tag{4.9}$$

Для любого комплексного числа z с ненулевой мнимой частью выражение $\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 9\xi_1\xi_2 z$, очевидно, не обращается в ноль при $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$. В случае же вещественного z соотношение (4.9) равносильно условию

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{9}{2}z \\ \frac{9}{2}z & 2 \end{vmatrix} = 2 - \frac{81}{4}z^2 > 0 \quad \left(|z| \leqslant 3^{-s-1}\right),$$

или

$$2\sqrt{2}/9 > 3^{-s-1} \Leftrightarrow s > 1 - \frac{3}{2}\log_3 2.$$

Итак, уравнение (4.8) имеет единственное решение $u \in H_0^{s+2}(\mathbb{R}^2)$ для любой принадлежащей $H_0^s(\mathbb{R}^2)$ функции f, если

$$s > 1 - \frac{3}{2}\log_3 2, \quad s \notin \mathbb{Z}.$$

Пример 4.2. Исследуем существование и единственность решения из пространства $H_\beta^2(\mathbb{R}^2)$ уравнения

$$\Delta u(x) + b_1 u_{x_1x_1}(x/2) + b_2 u_{x_2x_2}(x/4) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^2), \tag{4.10}$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $f \in H_\beta^0(\mathbb{R}^2)$.

Символ уравнения (4.10) имеет вид

$$-(\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4b_1\xi_1^2 z + 16b_2\xi_2^2 z^2).$$

Запишем основное условие теоремы 4.1:

$$\xi_1^2(1 + 4b_1 z) + \xi_2^2(1 + 16b_2 z^2) \neq 0 \quad \left(\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1,\, |z| \leqslant 2^{\beta-1}\right). \tag{4.11}$$

Отсюда, очевидно, следует, что коэффициенты при ξ_1^2 и ξ_2^2 не должны обращаться в ноль при $|z| \leqslant 2^{\beta-1}$, что равносильно требованиям

$$|b_1| < 2^{-(\beta+1)}, \quad |b_2| < 2^{-2(\beta+1)}.$$

Но эти же требования обеспечивают положительность действительной части выражения $\xi_1^2(1 + 4b_1 z) + \xi_2^2(1 + 16b_2 z^2)$ при $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$, т. е. являются необходимыми и достаточными для выполнения (4.11).

Итак, уравнение (4.10) имеет единственное решение $u \in H_\beta^2(\mathbb{R}^2)$ для любой принадлежащей $H_\beta^0(\mathbb{R}^2)$ функции f, если

$$|b_1| < 2^{-(\beta+1)}, \quad |b_2| < 2^{-2(\beta+1)}, \quad \beta \notin \mathbb{Z}.$$

Глава 5

СПЕКТРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

5.1. Вариационные свойства собственных значений неотрицательного самосопряженного оператора

Помимо простейших спектральных свойств задачи Дирихле, рассмотренных в разделе 2.3, для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений и уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов были установлены также полнота и базисность системы корневых функций [24]. Кроме того, для симметрического дифференциально-разностного оператора был получен главный член спектральной асимптотики [25]. В то же время вопрос устойчивости собственных значений при возмущении области Ω остается открытым даже в том случае, когда рассматриваемая задача порождает неотрицательный самосопряженный оператор с компактной резольвентой в пространстве $L_2(\Omega)$.

Спектральной устойчивостью краевых задач (с разными типами краевых условий) для эллиптических дифференциальных уравнений занимались многие авторы [62, 64, 67, 71, 77], начиная с известной монографии [19]. В работе [65] предложен единый подход к исследованию спектральной устойчивости общих неотрицательных самосопряженных операторов, использующий вариационные свойства собственных значений и основанный на построении специального *оператора переноса*. Содержательность получаемых на этом пути результатов существенно зависит от регулярности собственных функций (что в значительной степени определяется регулярностью области) невозмущенной задачи и классом рассматриваемых возмущений.

Попытки перенести разработанные методы на функционально-дифференциальные уравнения сталкиваются с определенными трудностями. В разность между соответствующими вариационными величинами для двух областей (исходной и возмущенной) входят дополнительные новые члены, обусловленные нелокальным характером задачи. В этих членах производные собственных функций интегрируются по некоторым множествам, образованным сдвигами границ как исходной, так и возмущенной областей. При этом геометрическая картина может оказаться достаточно сложной. Но настоящим препятствием является отсутствие априорной гладкости собственных функций. В монографии [88], а также главах 1, 2 данной работы показано, что решения краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений могут иметь сингулярности не только на границе, но и внутри области даже при бесконечно дифференцируемых данных, и такое поведение типично.

В настоящей главе получены некоторые «положительные» результаты об устойчивости собственных значений задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения с растяжениями и сжатиями аргументов. С одной стороны, этот тип уравнений изучен меньше, чем дифференциально-разностные уравнения. Особенно это относится к задаче Неймана, которая всегда интересна с точки зрения спектральной устойчивости. С другой стороны, при некотором естественном техническом предположении (слабый вариант условия звездности) пропадает необходимость громоздких геометрических конструкций. Мы начинаем с вариационной формулы для собственных значений в разделе 5.1. В разделе 5.2 на основе утверждений относительно функциональных операторов, полученных в разделе 1.1, формулируются условия неотрицательности и дискретности спектра задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения. Основной результат раздела 5.2 — теорема о внутренней гладкости собственных функций. Раздел 5.3, являющийся центральным местом настоящей главы, содержит оценки изменения собственных значений под действием малых внутренних возмущений $\Omega' \subset \Omega$ области Ω. Относительно свойства полунепрерывности собственных значений (теорема 5.2), малость возмущения означает, что мера Лебега $|\Omega \setminus \Omega'|$ мала. Для получения обратной оценки некоторые дополнительные ограничения накладываются как на Ω, так и на класс возмущений Ω'. Заключительный раздел 5.4 посвящен обобщениям с точки зрения структуры уравнения.

Напомним известную вариационную формулу, являющуюся основой для сравнения собственных значений. Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, обладающая тем свойством, что вложение пространства Соболева $H^1(\Omega)$ в пространство $L_2(\Omega)$ компактно. Через $\mathfrak{a}[u, v]$ обозначим непрерывную эрмитову полуторалинейную форму на $H^1(\Omega)$, для которой существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что

$$\mathfrak{a}[u,u] \geqslant \gamma \| |\nabla u| \|^2_{L_2(\Omega)} \tag{5.1}$$

для всех $u \in H^1(\Omega)$. Более того, предположим, что

$$\mathfrak{a}[1,v] = \mathfrak{a}[u,1] = 0 \quad \text{при всех} \quad u, v \in H^1(\Omega).$$

Из (5.1) немедленно следует, что $\mathfrak{a}[u,u] = 0$ тогда и только тогда, когда $u = const$.

Для заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ рассмотрим абстрактную обобщенную задачу Неймана нахождения функции $u \in H^1(\Omega)$ из равенства

$$\mathfrak{a}[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)},$$

справедливого при любой функции $v \in H^1(\Omega)$. Соответствующая спектральная задача имеет вид

$$\mathfrak{a}[u,v] = \lambda(u,v)_{L_2(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{5.2}$$

Оценка (5.1) позволяет ввести эквивалентное скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ по формуле

$$(u,v)'_{H^1(\Omega)} = \mathfrak{a}[u,v] + (u,v)_{L_2(\Omega)}.$$

Тогда переписываем тождество (5.2) в виде

$$(u,v)'_{H^1(\Omega)} = (\lambda+1)(u,v)_{L_2(\Omega)}$$

и, продолжая стандартным образом, убеждаемся при помощи теоремы Рисса в существовании непрерывного линейного оператора

$$A : L_2(\Omega) \to H^1(\Omega), \quad \|A\| \leqslant 1,$$

такого, что

$$(f,v)_{L_2(\Omega)} = (Af,v)'_{H^1(\Omega)} \quad \text{для всех} \quad f \in L_2(\Omega), \ \ v \in H^1(\Omega).$$

Его сужение на $H^1(\Omega)$ является в таком случае компактным положительным оператором в $H^1(\Omega)$, и мы приходим к операторному уравнению

$$u = (\lambda+1)Au$$

в пространстве $H^1(\Omega)$. Из теоремы Гильберта—Шмидта следует, что собственные значения μ оператора A составляют неубывающую бесконечно малую последовательность

$$1 = \mu_1 > \mu_2 \geqslant \ldots \to 0,$$

а соответствующие собственные функции $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ образуют ортогональный базис в $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$. Везде будем предполагать, что $\|\varphi_m\|_{L_2(\Omega)} = 1$. В терминах исходной задачи имеем последовательность собственных значений λ_m:

$$0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \ldots \to +\infty \quad \lambda_m = 1/\mu_m - 1.$$

Очевидно, первое собственное значение $\lambda_1 = 0$ — простое, и ему отвечает собственная функция $\varphi_1 = |\Omega|^{-1/2}$. Собственные функции φ_m удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{a}[\varphi_m, \varphi_m] = \lambda_m, \quad \mathfrak{a}[\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}] = 0 \quad (m_1 \neq m_2). \tag{5.3}$$

Для произвольного конечномерного подпространства $L \subset H^1(\Omega)$ положим

$$\lambda(L) = \sup\{\mathfrak{a}[u,u] : u \in L, \ \|u\|_{L_2(\Omega)} = 1\}.$$

Лемма 5.1 (Вариационный принцип для собственных значений [68, глава 4]). *Собственные значения λ_m задачи* (5.2) *могут быть получены по формуле*

$$\lambda_m = \inf\{\lambda(L) : L \subset H^1(\Omega), \dim L = m\}. \tag{5.4}$$

Доказательство. Обозначим через M_m линейную оболочку системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Если $u \in M_m$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, то (5.3) дает

$$\mathfrak{a}[u,u] = a\left[\sum_{i=1}^{m} c_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{m} c_j\varphi_j\right] = \sum_{i=1}^{m} |c_i|^2\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} |c_i|^2\lambda_m = \lambda_m,$$

т. е. $\lambda(M_m)$ не превосходит λ_m, и то же можно сказать про правую часть (5.4).

Наоборот, пусть L — произвольное m-мерное подпространство в $H^1(\Omega)$. Тогда существует функция $u \in L$ с $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$ такая, что ее ортогональная проекция в $L_2(\Omega)$ на M_{m-1} равна нулю, т. е.

$$c_i = (u, \varphi_i)_{L_2(\Omega)} = 0, \quad i = 1, \ldots, m-1.$$

Таким образом, имеем

$$\mathfrak{a}[u,u] = a\left[\sum_{i=1}^{\infty} c_i\varphi_i, \sum_{j=1}^{\infty} c_j\varphi_j\right] = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2\lambda_i = \sum_{i=m}^{\infty} |c_i|^2\lambda_i \geqslant \sum_{i=m}^{\infty} |c_i|^2\lambda_m = \lambda_m$$

для этой функции u, а это означает, что правая часть (5.4) не может быть меньше λ_m. □

5.2. Гладкость обобщенных решений и обобщенных собственных функций задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения

Вначале будем рассматривать простейший положительно определенный оператор R, состоящий из трех слагаемых:

$$Ru(x) = au(x) + bu(q^{-1}x) + q^n\bar{b}u(qx), \tag{5.5}$$

причем

$$r(\omega) = a + b\omega + q^n\bar{b}\omega^{-1} > 0,$$

когда $|\omega| = q^{n/2}$ (см. раздел 1.1). Записав последнее условие как

$$a + bq^{n/2}e^{i\phi} + q^n\bar{b}q^{-n/2}e^{-i\phi} \equiv a + 2q^{n/2}|b|\cos(\phi + \phi_b) > 0 \quad (\phi \in \mathbb{R}),$$

получаем $a > 2q^{n/2}|b|$. Нули $r(\omega)$ равны

$$\omega_1 = -\frac{a + \sqrt{a^2 - 4q^n|b|^2}}{2b}, \quad \omega_2 = \frac{q^n\bar{b}}{b\omega_1},$$

при этом $|\omega_1| > q^{n/2}$, $|\omega_2|^{-1} > q^{-n/2}$. Таким образом,

$$r(\omega) = b\omega^{-1}(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) = -b\omega_2(\omega - \omega_1)(\omega^{-1} - \omega_2^{-1}),$$

и оператор (5.5) представляется в виде

$$R = -b\omega_2(P - \omega_1 I)(P^{-1} - \omega_2^{-1}I). \tag{5.6}$$

Заметим, что числа $b\omega_1$ и $b\omega_2$ — вещественные и отрицательные. Понимая под * сопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$, можем записать

$$(P^{-1} - \omega_2^{-1}I)^* = q^{-n}P - \bar{\omega}_2^{-1}I = q^{-n}P - \frac{\bar{b}\bar{\omega}_1}{q^n b}I = q^{-n}(P - \omega_1 I),$$

откуда приходим к другому представлению

$$R = -b\omega_2 q^{-n}(P - \omega_1 I)(P - \omega_1 I)^*. \tag{5.7}$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, а оператор R имеет вид (5.5) и выполнено условие $a > 2q^{n/2}|b|$. Введем полуторалинейную форму $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]$ на пространстве $H^1(\Omega)$ по формуле

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = \int_{\Omega} R_\Omega \nabla u \cdot \nabla\bar{v}\,dx \quad (u, v \in H^1(\Omega)). \tag{5.8}$$

Используя нижний индекс у R_Ω, мы подчеркиваем, что производные u_{x_i} продолжены нулем вне Ω перед применением оператора R.

Относительно областей сделаем несколько принципиальных предположений:

$$\overline{\Omega} \subset q\Omega, \tag{S1}$$

$$H^1(\Omega)\ \textit{компактно вложено в}\ L_2(\Omega), \tag{E1}$$

$$H^1(\Omega)\ \textit{непрерывно вложено в}\ L_p(\Omega)\ \textit{для некоторого}\ p > 2. \tag{E2}$$

Хорошо известно, что условия (E1) и (E2) выполнены, например, для всякой ограниченной области, удовлетворяющей условию конуса. Всякая ограниченная звездная относительно шара область удовлетворяет условию конуса. В то же время свойство (S1), уже широко использовавшееся в работе (это условие (1.5)), гораздо слабее звездности относительно шара. Число p в (E2) можно взять равным $2n/(n-2)$, если $n > 2$, и любому числу, большему 2, при $n = 2$. Условие (E2) нам понадобится в следующем разделе. Соответствующий материал подробно обсуждается в монографии [63].

Поскольку выполнена оценка (5.1) (с $\gamma = a - 2q^{n/2}|b| > 0$), все утверждения раздела 5.1 справедливы для $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]$.

При заданной функции $f \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega), \tag{5.9}$$

отвечает (формально записанной) задаче Неймана для функционально-дифференциального уравнения

$$-\mathrm{div}(R_\Omega \nabla u) = f \text{ в } \Omega, \tag{5.10}$$

$$R_\Omega \nabla u \cdot \nu = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{5.11}$$

где $\nu(x)$ обозначает единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$. Как обычно, (5.9) получается из (5.10), (5.11) интегрированием по Ω уравнения (5.10), умноженного на произвольную функцию v, и последующим применением формулы интегрирования по частям. Удовлетворяющую (5.9) функцию $u \in H^1(\Omega)$ поэтому естественно назвать *обобщенным решением* задачи (5.10), (5.11).

Цель этого раздела — доказательство принадлежности $H^2_{loc}(\Omega)$ решений (5.9), что будет играть важную роль при оценке собственных значений в следующем разделе.

Лемма 5.2. *Для функций $u \in H^1(\Omega)$ и $f \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество*

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)} \tag{5.12}$$

эквивалентно тождеству

$$\big((P^{-1} - \omega_2^{-1} I)\nabla u, \nabla v\big)_{L_2^n(\Omega)} = -(b\omega_2)^{-1}((q^{-1}P - \omega_1 I)^{-1} f, v)_{L_2(\Omega)} \tag{5.13}$$

на классе $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Доказательство. Опирается на представление (5.6), формулу (1.3), лемму 1.2 и повторяет рассуждения из доказательств теорем 1.1, 1.7, 2.11, поскольку не использует краевые условия, которым удовлетворяет функция $u(x)$ (условие на область (S1) дает возможность подставлять в (5.12) функции $P^{-k}v(x) = v(q^k x)$, принадлежащие $C_0^\infty(\Omega)$ вместе с $v(x)$ — таким образом оператор $-b\omega_2(P - \omega_1 I)$ «перебрасывается» на правую часть в интегральном тождестве). □

Лемма 5.3. *Предположим, что выполняется условие $|\omega_2|^{-1} > q^{1-n/2}$. Тогда для функций $u \in H^1(\Omega)$ и $g \in L_2(\Omega)$ интегральное тождество*

$$\big((P^{-1} - \omega_2^{-1} I)\nabla u, \nabla v\big)_{L_2^n(\Omega)} = (g,v)_{L_2(\Omega)} \tag{5.14}$$

эквивалентно тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^n(\Omega)} = ((qP^{-1} - \omega_2^{-1} I)^{-1} g, v)_{L_2(\Omega)} \tag{5.15}$$

на классе $v \in H^1(\Omega)$.

Доказательство. Возьмем $v \in H^1(\Omega)$. Благодаря условию (S1) функции $P^k v(x)$ остаются в $H^1(\Omega)$ при $k = 1, 2, \ldots$ и могут заменить v в (5.14). Имеем

$$\Big((P^{-1} - \omega_2^{-1} I)\nabla u, \nabla P^k v\Big)_{L_2^n(\Omega)} = (g, P^k v)_{L_2(\Omega)}$$

и

$$\Big(P^{-k}(P^{-1} - \omega_2^{-1} I)\nabla u, \nabla v\Big)_{L_2^n(\Omega)} = (q^k P^{-k} g, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{5.16}$$

Вновь суммирование по $k = 0, 1, \ldots$ соотношений (5.16), умноженных на $-\omega_2^{k+1}$, приводит к (5.15), где оператор

$$(qP^{-1} - \omega_2^{-1} I)^{-1} = q^{-1}(P^{-1} - (q\omega_2)^{-1} I)^{-1}$$

ограничен в $L_2(\Omega)$ по следствию 1.1. Сейчас потребуем $|\omega_2|^{-1} > q^{1-n/2}$, чтобы иметь неравенство $|q\omega_2|^{-1} > q^{-n/2}$. Тождество (5.14) может быть получено из тождества (5.15) тем же способом. □

Теорема 5.1. *Пусть выполнено более сильное условие*

$$a > q^{n/2}(q + q^{-1})|b| \tag{5.17}$$

на коэффициенты оператора R, *и пусть* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда всякое обобщенное решение* u *задачи* (5.10), (5.11) *принадлежит* $H^2_{loc}(\Omega)$.

Доказательство. Если $u \in H^1(\Omega)$ есть обобщенное решение задачи (5.10), (5.11), то (5.9) выполняется для любой функции $v \in H^1(\Omega)$ и тем более для любой функции $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Условие (5.17) в точности означает неравенство

$$|\omega_2|^{-1} > q^{1-n/2}.$$

Применяя последовательно леммы 5.2 и 5.3, мы видим, что функция u удовлетворяет интегральному тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^n(\Omega)} = (h, v)_{L_2(\Omega)}$$

при произвольном $v \in C_0^\infty(\Omega)$, где функция $h \in L_2(\Omega)$ задается формулой

$$h = -(b\omega_2)^{-1} \left(P^{-1} - (q\omega_2)^{-1} I\right)^{-1} I_\Omega \left(P - q\omega_1 I\right)^{-1} f,$$

а оператор I_Ω продолжает функцию нулем вне Ω. Являясь решением уравнения Пуассона в Ω с правой частью из $L_2(\Omega)$, функция u принадлежит $H^2_{loc}(\Omega)$. Более того, ее H^2-норма по любой строго внутренней подобласти, скажем $q^{-1}\Omega$, допускает оценку

$$\|u\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_1(\|h\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}) \leqslant C_2(\|f\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)})$$

с положительными постоянными C_1, C_2, зависящими только от Ω и параметров оператора R. □

Под обобщенной собственной функцией оператора $-\mathrm{div}(R_\Omega \nabla u)$ с условиями (5.11) понимается всякая не равная тождественно нулю функция $\varphi \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[\varphi, v] = \lambda(\varphi, v)_{L_2(\Omega)}, \quad v \in H^1(\Omega).$$

Следствие 5.1. *При выполнении условий* (E1), (S1) *и* (5.17) *все обобщенные собственные функции* φ_m *задачи* (5.10), (5.11) *принадлежат пространству* $H^2_{loc}(\Omega)$ *и удовлетворяют оценке*

$$\|\varphi_m\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_2(\lambda_m + 1),$$

где λ_m *— собственные значения* ($\|\varphi_m\|_{L_2(\Omega)} = 1$).

5.3. Поведение собственных значений задачи Неймана для функционально-дифференциального уравнения при малых внутренних деформациях области

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ со свойствами (E1), (E2) и (S1). Возьмем другую область Ω', удовлетворяющую (E1) и (S1). Эта область Ω' будет рассматриваться в качестве возмущения исходной области Ω. Принципиальное предположение относительно Ω' состоит в том, что она содержится в Ω. Цель этого раздела (и основная цель главы) — сравнить соответствующие собственные значения λ_m и λ'_m форм $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ и $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}$, где оператор R, заданный формулами (5.5) и (5.17), остается неизменным. В основе рассуждений лежит вариационная формула (5.4). Ее использование строится на оценке выражения $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]/\|u\|^2_{L_2(\Omega')}$ на конечномерном линейном подпространстве $M_m \subset H^1(\Omega)$, натянутом на первые m собственных функций φ_i формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ в Ω. В нашем случае это возможно сделать, просто взяв сужения на Ω' функций из $H^1(\Omega)$ (эти сужения, естественно, принадлежат $H^1(\Omega')$). Когда $\Omega' \setminus \Omega \neq \varnothing$, использование вариационной формулы требует построения специального *оператора переноса* $T : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega')$; см. [65]. В качестве характеристики близости Ω и $\Omega' \subset \Omega$ мы будем использовать меру $|\Omega \setminus \Omega'|$ и пытаться оценивать разность $\lambda_m - \lambda'_m$ функцией от $|\Omega \setminus \Omega'|$, когда возможно (хотя есть и другие распространенные оценки малости возмущения [64, 65]).

Теорема 5.2. *Пусть оператор R имеет вид* (5.5)*, его коэффициенты удовлетворяют неравенству* (5.17)*, а Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ со свойствами* (S1), (E1) *и* (E2). *Тогда существуют постоянные $C > 0$ и $\delta_m > 0$, зависящие только от Ω и R, такие, что для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, удовлетворяющей условиям* (S1), (E1) *и неравенству $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_m$, неравенство*

$$\lambda'_m \leqslant \lambda_m + Cm(\lambda_m+1)^2|\Omega\setminus\Omega'|^{1-2/p}\left[1 + m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^{1-2/p}\right] \tag{5.18}$$

выполнено для соответствующих собственных значений λ_m и λ'_m форм $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ и $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}$.

Доказательство. Применение (E2) и неравенства Гельдера к собственным функциям φ_i формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ в Ω дает ($d = 1 - 2/p > 0$)

$$\|\varphi_i\|^2_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} \leqslant \|\varphi_i\|^2_{L_p(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}|\Omega\setminus\Omega'|^d \leqslant \|\varphi_i\|^2_{L_p(\Omega)}|\Omega\setminus\Omega'|^d \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|\varphi_i\|^2_{H^1(\Omega)}|\Omega\setminus\Omega'|^d \leqslant C_4(\lambda_i+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d.$$

Здесь C_3 и C_4 (а также все другие постоянные, возникающие в ходе доказательства) — положительные числа, зависящие только от Ω и R.

Возьмем $u \in M_m$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, так что $u = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i\varphi_i$ и $\sum\limits_{i=1}^m |\alpha_i|^2 = 1$. Тогда

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} \leqslant \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|^2_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} \leqslant C_4m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d,$$

откуда

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega')} = 1 - \|u\|^2_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} \geqslant 1 - C_4m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d. \tag{5.19}$$

Таким образом,

$$\|u\|^{-2}_{L_2(\Omega')} \leqslant 1 + 2C_4m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d, \tag{5.20}$$

если мера $|\Omega\setminus\Omega'|$ достаточно мала, точнее,

$$|\Omega\setminus\Omega'| \leqslant \delta_m = [2C_4m(\lambda_m+1)]^{-1/d}. \tag{5.21}$$

Благодаря представлению (5.7) и условию (S1) квадратичную форму $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]$ от $u \in H^1(\Omega)$ можно переписать следующим образом (используется обозначение $\beta = -q^{-n}b\omega_2$):

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] = \int\limits_{\Omega} R_\Omega\nabla u\cdot\nabla\bar{u}dx = \beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}(P-\omega_1 I)^*(P-\omega_1 I)I_\Omega\nabla u\cdot I_\Omega\nabla\bar{u}dx =$$
$$= \beta\int\limits_{\mathbb{R}^n}|(P-\omega_1 I)I_\Omega\nabla u|^2dx = \beta\int\limits_{\Omega}|(P-\omega_1 I)\nabla u|^2dx + q^n\beta\int\limits_{\Omega\setminus q^{-1}\overline{\Omega}}|\nabla u|^2dx. \tag{5.22}$$

Аналогично,

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u] = \beta\int\limits_{\Omega'}|(P-\omega_1 I)\nabla u|^2dx + q^n\beta\int\limits_{\Omega'\setminus q^{-1}\overline{\Omega}'}|\nabla u|^2dx \tag{5.23}$$

для той же функции u. Более точно, в (5.23) мы имеем дело с сужением u на Ω'. Сравнивая далее (5.22) с (5.23) и принимая во внимание очевидное соотношение

$$\beta\int\limits_{\Omega'}|(P-\omega_1 I)\nabla u|^2dx \leqslant \beta\int\limits_{\Omega}|(P-\omega_1 I)\nabla u|^2dx,$$

приходим к ключевому неравенству

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u] \leqslant \mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] + q^n\beta\int\limits_{\Omega'\setminus q^{-1}\overline{\Omega}'}|\nabla u|^2dx - q^n\beta\int\limits_{\Omega\setminus q^{-1}\overline{\Omega}}|\nabla u|^2dx = \mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] +$$
$$+ q^n\beta\int\limits_{q^{-1}(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}|\nabla u|^2dx - q^n\beta\int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}|\nabla u|^2dx \leqslant \mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] + q^n\beta\int\limits_{q^{-1}(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}|\nabla u|^2dx. \tag{5.24}$$

Для $u \in M_m$, $\|u\|_{L_2(\Omega)} = 1$, имеем

$$\int\limits_{q^{-1}(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} |\nabla u|^2 dx \leqslant \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{q^{-1}(\Omega\setminus\overline{\Omega}')} |\nabla\varphi_i|^2 dx.$$

В силу следствия 5.1 и условия (S1) все производные φ_{ix_j} принадлежат $H^1(q^{-1}\Omega)$, что вместе с условием (E2) обеспечивает оценку

$$\||\nabla\varphi_i|\|^2_{L_p(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_5\|\varphi_i\|^2_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_6(\lambda_i+1)^2.$$

С учетом этих неравенств и неравенства Гельдера получаем из (5.24), что

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u] \leqslant \mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] + C_7 m(\lambda_m+1)^2|\Omega\setminus\Omega'|^d.$$

Комбинируя последнее неравенство с неравенством (5.20) и принимая во внимание, что верхняя грань $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]$ на единичной сфере (относительно $L_2(\Omega)$-нормы) в M_m есть в точности λ_m, мы приходим к оценке

$$\frac{\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]}{\|u\|^2_{L_2(\Omega')}} \leqslant \left(1+2C_4 m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d\right)\left(\lambda_m + C_7 m(\lambda_m+1)^2|\Omega\setminus\Omega'|^d\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda_m + Cm(\lambda_m+1)^2|\Omega\setminus\Omega'|^d\big(1+m(\lambda_m+1)|\Omega\setminus\Omega'|^d\big)$$

на пространстве M_m для всех достаточно малых $|\Omega\setminus\Omega'|$.

Отметим, что сужения $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ на Ω' линейно независимы и тем самым порождают m-мерное подпространство в $H^1(\Omega')$, если $|\Omega\setminus\Omega'| \leqslant \delta_m$ (см. (5.19)). Поэтому последнее неравенство вместе с вариационной формулой означают (5.18). □

Для получения оценки снизу обычно приходится накладывать дополнительные ограничения на области Ω и Ω' — хорошо известно, что одной малости $|\Omega\setminus\Omega'|$ недостаточно [19, глава 6]. Сейчас в дополнение к (S1) мы требуем

$$\Omega \text{ — \textit{звездная относительно начала координат},} \tag{S2}$$

и ограничиваемся возмущениями $\Omega' \subset \Omega$, для которых существует общая постоянная C_{emb} в теореме о вложении $H^1(\Omega') \subset L_p(\Omega')$, т. е.

$$\|u\|_{L_p(\Omega')} \leqslant C_{emb}\|u\|_{H^1(\Omega')}, \tag{E3}$$

где $C_{emb} > 0$ не зависит ни от $u \in H^1(\Omega')$, ни от Ω'.

Замечание 5.1. В качестве примера такого класса возмущений можно указать все области $\Omega' \subset \Omega$, звездные относительно шаров диаметра не меньше некоторого числа $D > 0$, или все области, удовлетворяющие условию конуса с фиксированными параметрами конуса (см. [63]). Постоянная C_{emb} в (E3) зависит только от D в первом случае и от параметров конуса — во втором случае.

Теорема 5.3. *Предположим, что оператор R имеет вид* (5.5)*, его коэффициенты удовлетворяют условию* (5.17)*, ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям* (S1), (S2) *и* (E1)*, и задано число $C_{emb} > 0$. Тогда для каждого $m = 1, 2, \dots$ можно указать такое число $0 < \varepsilon_m < 1$, что для любой области Ω', удовлетворяющей условиям* (S1), (E1) *и* (E3)*, и такой, что $(1-\varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega$ при некотором $\varepsilon \in (0, \varepsilon_m]$, имеет место неравенство*

$$\lambda_m \leqslant \lambda'_m + C'm(\lambda'_m+1)^2\varepsilon^{1-2/p}\left[1+m(\lambda'_m+1)\varepsilon^{1-2/p}\right] \tag{5.25}$$

для собственных значений λ_m и λ'_m форм $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ и $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}$ соответственно, где постоянная $C' > 0$ зависит лишь от C_{emb}.

Доказательство. Для начала отметим, что по теореме 5.2 числа λ'_m ограничены равномерно некоторой константой (своей для каждого m, но не зависящей от Ω') для всех областей Ω', удовлетворяющих условиям теоремы 5.3. Чтобы доказать теорему 5.3, применим теорему 5.2 к паре $(1-\varepsilon)\Omega \subset \Omega'$ и используем то, что собственные значения $\lambda_{(1-\varepsilon)\Omega,m}$ задачи в $(1-\varepsilon)\Omega$ равны в точности $(1-\varepsilon)^{-2}\lambda_m$. Действительно, замена $x = \varkappa y$, $\varkappa = (1-\varepsilon)^{-1}$, переменных интегрирования в тождестве

$$\int\limits_\Omega R_\Omega \nabla u \cdot \nabla \bar{v} dx = \lambda \int\limits_\Omega u\bar{v}dx$$

и очевидные соотношения

$$\nabla v(\varkappa y) = \varkappa^{-1}\nabla[v(\varkappa y)], \quad (R_\Omega \nabla u)(\varkappa y) = \varkappa^{-1} R_{\varkappa^{-1}\Omega}\nabla[u(\varkappa y)]$$

приводят к интегральному тождеству

$$\int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega} R_{\varkappa^{-1}\Omega}\nabla[u(\varkappa y)]\cdot\nabla[\bar{v}(\varkappa y)]dy = \varkappa^2\lambda \int\limits_{\varkappa^{-1}\Omega} u(\varkappa y)\bar{v}(\varkappa y)dy$$

(существенно, что оператор R перестановочен с заменой переменных).

В ситуации, когда роль Ω играет переменная область Ω', а роль Ω' — область $(1-\varepsilon)\Omega$, необходимо дополнительно проверить независимость соответствующих постоянных C_3', C_4', C_5', C_6' и C_7' от Ω'. Для C_3', C_4' это очевидно — в условиях теоремы они определяются лишь постоянной вложения C_{emb} и коэффициентами уравнения. Проверим неравенство, аналогичное неравенству (5.21). Оно превращается в ограничение на ε: поскольку

$$|\Omega' \setminus (1-\varepsilon)\Omega| \leqslant |\Omega \setminus (1-\varepsilon)\Omega| \leqslant \varepsilon n|\Omega|,$$

будем иметь

$$|\Omega' \setminus (1-\varepsilon)\Omega| \leqslant [2C_4' m(\lambda_m' + 1)]^{-1/d},$$

как только

$$\varepsilon \leqslant (n|\Omega|)^{-1}[2C_4' m(\lambda_m'+1)]^{-1/d}.$$

При этом в силу равномерной (по Ω') ограниченности собственных значений λ_m' правая часть последнего неравенства не может быть меньше некоторого числа $\varepsilon_m > 0$.

Далее имеем $q^{-1}\Omega' \subset q^{-1}\Omega$, в то время как $q^{-1}\overline{\Omega} \subset (1-\tilde{\varepsilon})\Omega$ для достаточно малого $\tilde{\varepsilon}$. Будем считать, что $\varepsilon_m \leqslant \tilde{\varepsilon}$. Это означает, что компакт $q^{-1}\overline{\Omega}'$ обладает открытой окрестностью (именно, $(1-\tilde{\varepsilon})\Omega)$, содержащейся в каждой рассматриваемой области Ω'. Поэтому можно применить рассуждения теоремы 5.1 к собственным функциям φ_m' формы $a_{R,\Omega'}$ и записать оценку

$$\|\varphi_m'\|_{H^2(q^{-1}\Omega')} \leqslant C_2'(\lambda_m'+1) \quad (m = 1, 2, \ldots),$$

в которой постоянная C_2' уже не зависит от Ω' и m. Действительно, поскольку для функции

$$h_m' = -\lambda_m'(b\omega_2)^{-1}\left(P^{-1} - (q\omega_2)^{-1}I\right)^{-1} I_{\Omega'}\left(P - q\omega_1 I\right)^{-1}\varphi_m'$$

справедлива оценка

$$\|h_m'\|_{L_2(\Omega')} \leqslant \widetilde{C}\lambda_m'\|\varphi_m'\|_{L_2(\Omega')} = \widetilde{C}\lambda_m'$$

с некоторой не зависящей от Ω' и m постоянной $\widetilde{C}$, будем иметь

$$\|\varphi_m'\|_{H^2(q^{-1}\Omega')} \leqslant \|\varphi_m'\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_1\left(\|h_m'\|_{L_2((1-\tilde{\varepsilon})\Omega)} + \|\varphi_m'\|_{L_2((1-\tilde{\varepsilon})\Omega)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\|h_m'\|_{L_2(\Omega')} + \|\varphi_m'\|_{L_2(\Omega')}\right) \leqslant C_1(\widetilde{C}\lambda_m' + 1) \leqslant C_2'(\lambda_m'+1).$$

То же верно и для C_5', C_6' в неравенстве

$$\||\nabla\varphi_m'|\|^2_{L_p(q^{-1}\Omega')} \leqslant C_5'\|\varphi_m'\|^2_{H^2(q^{-1}\Omega')} \leqslant C_6'(\lambda_m'+1)^2,$$

а, значит, и для соответствующей постоянной C_7'. Применение результата теоремы 5.2 с учетом очевидных неравенств

$$|\Omega' \setminus (1-\varepsilon)\Omega| \leqslant \varepsilon n|\Omega|, \quad \lambda_m < (1-\varepsilon)^{-2}\lambda_m$$

завершает доказательство. □

В утверждении ниже под *звездной областью относительно шара* мы понимаем звездную область относительно шара, содержащего начало координат.

Следствие 5.2. *Предположим, что выполнено условие* (5.17) *на коэффициенты оператора* R, *а ограниченная область* Ω *является звездной относительно шара. Тогда существуют такие числа* $C_m > 0$, $\delta_m > 0$, *что неравенство*

$$\lambda'_m \leqslant \lambda_m + C_m |\Omega \setminus \Omega'|^{1-2/p}$$

выполняется для любой подобласти $\Omega' \subset \Omega$, *звездной относительно шара и удовлетворяющей условию* $|\Omega \setminus \Omega'| < \delta_m$.

Кроме того, для всех областей Ω', *звездных относительно шара диаметра не меньше* D (*число* $D > 0$ *произвольно, но фиксировано*) *и таких, что* $(1-\varepsilon)\Omega \subset \Omega' \subset \Omega$, *выполняется неравенство*

$$\lambda'_m \geqslant \lambda_m - C'_m \varepsilon^{1-2/p},$$

как только $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_m$. *При этом величины* $C'_m > 0$, $0 < \varepsilon_m < 1$ *не зависят от* Ω', *а определяются лишь параметром* D.

Доказательство. Хорошо известно, что звездные относительно шара области обладают свойствами (S1), (E1) и (E2). Если же диаметр шара фиксирован, то можно зафиксировать и постоянную C_{emb} в теореме вложения, т. е. имеет место и (E3) (см. [63] и замечание 5.1). Остается применить теоремы 5.2 и 5.3 и вновь учесть ограниченность относительно Ω' собственных значений λ'_m во второй части теоремы. □

5.4. Некоторые обобщения

При тех же предположениях относительно областей рассмотрим более общий функционально-дифференциальный оператор. Пусть полуторалинейная форма $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ на $H^1(\Omega)$ задана теперь выражением

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij\Omega} u_{x_i}) \bar{v}_{x_j} dx \quad (u, v \in H^1(\Omega)) \tag{5.26}$$

с (различными) операторами R_{ij}, представимыми в виде конечных сумм (1.1):

$$R_{ij} v(x) = \sum_k a_{ijk} v(q^{-k} x).$$

Ограничиваясь эрмитовыми формами, мы полагаем $R_{ji} = R^*_{ij}$ или, переходя к символам операторов в смысле раздела 5.2, $r_{ji}(\omega) = \overline{r_{ij}(\omega)}$ на окружности $|\omega| = q^{n/2}$. Важно иметь алгебраические условия, обеспечивающие выполнение неравенства (5.1) для эрмитовой формы $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$. Для этого достаточно потребовать, чтобы самосопряженный матричный оператор

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & \dots & R_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} : L_2^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2^n(\mathbb{R}^n) \tag{5.27}$$

был положительно определен.

Лемма 5.4. *Самосопряженный оператор* $\mathbf{R}$ *в* (5.27) *положительно определен тогда и только тогда, когда эрмитова матрица* $\mathbf{r}(\omega) = (r_{ij}(\omega))_{i,j=1}^n$ *положительно определена в каждой точке* $\omega \in \mathbb{C}$ *такой, что* $|\omega| = q^{n/2}$, *т. е.*

$$\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}(\omega) \eta_i \bar{\eta}_j > 0 \quad \left(0 \neq \eta \in \mathbb{C}^n,\ |\omega| = q^{n/2}\right). \tag{5.28}$$

Доказательство. Вновь обратимся к подалгебре $\mathcal{A}_R$ алгебры $\mathcal{B}(L_2(\mathbb{R}^n))$, порожденной операторами P и P^* и изоморфной (с сохранением инволюции) алгебре всех комплексных непрерывных функций $C(S)$ на окружности $S = \{\omega \in \mathbb{C} : |\omega| = q^{n/2}\}$. Будем рассматривать матричные алгебры $\mathcal{A}_R^{n\times n}$ и $C(S, \mathbb{C}^{n\times n})$. Первая состоит из всех $n \times n$-матриц с элементами из $\mathcal{A}_R$, действующих на n-мерные векторы, компоненты которых принадлежат $L_2(\mathbb{R}^n)$. Она представляет собой замкнутую подалгебру в $\mathcal{B}(L_2^n(\mathbb{R}^n))$ с инволюцией. Вторая — алгебра всех непрерывных на S матриц порядка $n \times n$. Упомянутый выше изоморфизм естественным образом порождает изоморфизм и этих алгебр, что влечет за собой совпадение спектра оператора $\mathbf{R}$ в $\mathcal{A}_R^{n\times n}$ (или в $\mathcal{B}(L_2^n(\mathbb{R}^n))$, что то же самое) со спектром матрицы-функции $\mathbf{r}(\omega)$ в $C(S,\mathbb{C}^{n\times n})$. Последний есть объединение всех собственных значений матриц $\mathbf{r}(\omega)$, когда ω пробегает S:

$$\sigma(\mathbf{r}) = \{\mu\in\mathbb{C} : \det(\mathbf{r}(\omega)-\mu\mathbf{e}) = 0 \text{ для некоторого } \omega\in S\}.$$

Условие (5.28) означает положительность $\sigma(\mathbf{r})$, а значит, и $\sigma(\mathbf{R})$. Но для непрерывного линейного оператора в гильбертовом пространстве это эквивалентно положительной определенности. □

Следствие 5.3. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — произвольная область, $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ задана посредством* (5.26) *и выполнено условие* (5.28). *Тогда $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ есть непрерывная эрмитова полуторалинейная форма на $H^1(\Omega)$ такая, что*

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] \geqslant \gamma |||\nabla u|||^2_{L_2(\Omega)}, \quad u\in H^1(\Omega),$$

с положительной постоянной γ, не зависящей от Ω и u.

Замечание 5.2. В главе 2 мы видели, что выполнение последней оценки на более узком классе $u\in C_0^\infty(\Omega)$ в случае ограниченной области Ω, содержащей начало координат, эквивалентно более слабому условию

$$\sum_{i,j=1}^n r_{ij}(\omega)\xi_i\xi_j > 0 \quad \Big(0\neq\xi\in\mathbb{R}^n,\ |\omega| = q^{n/2}\Big)$$

на символ оператора, т. е. вещественная часть эрмитовой матрицы $\mathbf{r}(\omega)$ должна быть положительно определена.

Докажем ослабленный вариант теоремы 5.2 о полунепрерывности собственных значений, не использующий внутреннюю гладкость собственных функций.

Теорема 5.4. *Пусть $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ задана формулами* (5.26) *и* (5.28), *и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющая* (S1) *и* (E1). *Тогда для любого $\varepsilon>0$ и для каждого натурального m существует $\delta>0$ такое, что неравенство*

$$\lambda'_m \leqslant \lambda_m + \varepsilon \tag{5.29}$$

выполняется для соответствующих собственных значений в Ω и любой подобласти $\Omega'\subset\Omega$, удовлетворяющей (S1), (E1) *и такой, что $|\Omega\setminus\Omega'|<\delta$.*

Доказательство. Пусть M_m обозначает то же, что и в теореме 5.2. Существование $\delta_1=\delta_1(m,\varepsilon)$ такого, что $\|u\|^{-2}_{L_2(\Omega')}\leqslant 1+\varepsilon$ для всех $u\in M_m$, $\|u\|_{L_2(\Omega)}=1$, и $\Omega'\subset\Omega$, $|\Omega\setminus\Omega'|<\delta_1$, немедленно следует из абсолютной непрерывности интеграла.

Сравним $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]$ и $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]$ на конечномерном пространстве M_m. Под u в $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]$ мы понимаем ограничение элемента u из $M_m\subset H^1(\Omega)$ на Ω'. Для любых $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ можем записать

$$\int\limits_\Omega (R_{ij\Omega}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} R_{ij}(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i} + I_{\Omega'}u_{x_i})\cdot(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}\bar u_{x_j} + I_{\Omega'}\bar u_{x_j})\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega'} (R_{ij\Omega'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx + \int\limits_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'} (R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx + 2\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\Omega'}(R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx,$$

обозначая через $I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}$ оператор продолжения функций нулем вне $\Omega\setminus\overline{\Omega}'$. Суммируя эти равенства по всем $i,j\in\{1,\ldots,n\}$, получим

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u] = \mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u] + \mathfrak{a}_{R,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}[u,u] + 2\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\Omega'}(R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx. \tag{5.30}$$

Оценим третье слагаемое справа. Имеем

$$R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i} = \sum_k a_{ijk}(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})(q^{-k}x),$$

причем функция $I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i}$ локализована в “тонком слое” $\Omega\setminus\overline{\Omega}'$. Поэтому слагаемые, отвечающие неотрицательным индексам k, обращаются в ноль в области интегрирования Ω'. Слагаемые с $k<0$ дают

$$\left|\int\limits_{\Omega'}(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})(q^{-k}x)\,\bar u_{x_j}(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_{\Omega'}\left|(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})(q^{-k}x)\right||u_{x_j}(x)|\,dx\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_{q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}\left|(I_{\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})(q^{-k}x)\right||u_{x_j}(x)|\,dx\leqslant q^{kn/2}\|u_{x_i}\|_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}\|u_{x_j}\|_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}.$$

Отсюда получаем

$$\left|2\,\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\Omega'}(R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx\right|\leqslant C_8|||\nabla u|||_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}\sum_{k<0}|||\nabla u|||_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}\leqslant$$
$$\leqslant\gamma|||\nabla u|||^2_{L_2(\Omega\setminus\overline{\Omega}')}+\frac{C_8^2}{4\gamma}\left(\sum_{k<0}|||\nabla u|||_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}\right)^2\leqslant$$
$$\leqslant\mathfrak{a}_{R,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}[u,u]+C_9\sum_{k<0}|||\nabla u|||^2_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}$$

при помощи следствия 5.3, где положительные постоянные C_8 и C_9 зависят только от q и коэффициентов операторов R_{ij}; суммирование производится по конечному набору отрицательных чисел. Таким образом,

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}[u,u]+2\,\mathrm{Re}\sum_{i,j=1}^n\int\limits_{\Omega'}(R_{ij,\Omega\setminus\overline{\Omega}'}u_{x_i})\bar u_{x_j}dx\geqslant-C_9\sum_{k<0}|||\nabla u|||^2_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))},$$

и из (5.30) теперь следует

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]\leqslant\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]+C_9\sum_{k<0}|||\nabla u|||^2_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}.$$

Вспоминая сейчас, что $u=\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i\varphi_i$, $\sum\limits_{i=1}^m|\alpha_i|^2=1$, получаем неравенство

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]\leqslant\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]+C_9\sum_{k<0}\sum_{s=1}^m|||\nabla\varphi_s|||^2_{L_2(q^k(\Omega\setminus\overline{\Omega}'))}. \tag{5.31}$$

На основе этого неравенства и абсолютной непрерывности интеграла Лебега можно выбрать такое число $\delta_2=\delta_2(m,\varepsilon)$, что

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]\leqslant\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]+\varepsilon\leqslant\lambda_m+\varepsilon \tag{5.32}$$

для всех $u\in M_m$, $\|u\|_{L_2(\Omega)}=1$, и всех подобластей Ω', удовлетворяющих (S1) и (E1), и таких, что $|\Omega\setminus\Omega'|<\delta_2$. Завершаем доказательство, рассуждая аналогично теореме 5.2. □

Замечание 5.3. Неравенство (5.31) показывает, что только сужения собственных функций $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ на строго внутреннюю подобласть $q^{-1}\Omega$ участвуют в оценке разности между $\mathfrak{a}_{R,\Omega'}[u,u]$ и $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,u]$. Однако, в ситуации, когда нет информации о внутренней регулярности собственных функций, мы используем более грубое неравенство (5.32). В заключение остановимся на частном случае формы (5.26), для которой остаются справедливыми результаты раздела 5.2 и могут быть получены непосредственные аналоги теорем 5.2 и 5.3 и следствия 5.2.

Предположим, что все функциональные операторы R_{ij} в (5.26) пропорциональны одному и тому же оператору вида (1.1):

$$R_{ij}=a_{ij}R,\quad Ru(x)=\sum_k a_k u(q^{-k}x)\quad(a_{ij},a_k\in\mathbb{C}). \tag{5.33}$$

Чтобы удовлетворить условию (5.28), полагаем, что

$$\textit{матрица }(a_{ij})_{i,j=1}^n-\textit{положительно определенная эрмитова} \tag{5.34}$$

и

$$r(\omega) \equiv \sum_k a_k \omega^k \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{k_0} \left(a_k \omega^k + q^{kn} \bar{a}_k \omega^{-k} \right) > 0 \quad (\omega \in S). \tag{5.35}$$

Можем без ограничения общности считать $a_{k_0} \neq 0$. Легко видеть, что $r(\omega)$ в (5.35) имеет в точности k_0 корней $\omega = \omega_k$, для которых $|\omega_k| < q^{n/2}$, в то время как остальные $\omega_{k_0+k} = q^n/\bar{\omega}_k$ удовлетворяют неравенствам $|\omega_{k_0+k}| > q^{n/2}$ $(k = 1, \ldots, k_0)$. Получаем следующее разложение:

$$R = (-1)^{k_0} a_{k_0} \omega_1 \ldots \omega_{k_0} \prod_{k=1}^{k_0} (P - \omega_{k_0+k} I) \prod_{k=1}^{k_0} (P^{-1} - \omega_k^{-1} I).$$

Для того, чтобы имел место аналог леммы 5.3, мы должны потребовать выполнения неравенств $|\omega_k|^{-1} > q^{1-n/2}$, $k = 1, \ldots, k_0$. Ввиду этого мы усиливаем условие (5.35), полагая

$$r(\omega) \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{k_0} \left(a_k \omega^k + q^{kn} \bar{a}_k \omega^{-k} \right) \neq 0 \quad (q^{n/2} \leqslant |\omega| \leqslant q^{1+n/2}) \tag{5.36}$$

(будучи вещественнозначной и непрерывной на связном множестве S, функция $r(\omega)$ не меняет знак и может считаться положительной на S без ограничения общности).

Теорема 5.5. *Пусть* $\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v]$ *задана формулами* (5.26) *и* (5.33)*, выполнены условия* (5.34) *и* (5.36)*, а ограниченная область* Ω *обладает свойствами* (S1) *и* (E1)*. Тогда всякое решение тождества*

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = (f,v)_{L_2(\Omega)},$$

где v *пробегает* $H^1(\Omega)$*, при фиксированной функции* f *из* $L_2(\Omega)$ *принадлежит пространству* $H^2_{loc}(\Omega)$*. В частности, все собственные функции* φ_m *формы* $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ *принадлежат* $H^2_{loc}(\Omega)$ *и удовлетворяют оценке*

$$\|\varphi_m\|_{H^2(q^{-1}\Omega)} \leqslant C_{10}(\lambda_m + 1),$$

где λ_m *суть соответствующие собственные значения, а положительная постоянная* C_{10} *зависит только от* Ω *и коэффициентов формы.*

Доказательство. Те же рассуждения, что и в доказательствах лемм 5.2, 5.3, позволяют свести исходное тождество

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} R_\Omega u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f,v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in H^1(\Omega))$$

для функции $u \in H^1(\Omega)$ к тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} u_{x_i}, w_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (g,w)_{L_2(\Omega)},$$

справедливому для всех $w \in C_0^\infty(\Omega)$. Функция $g \in L_2(\Omega)$ непрерывно зависит от $f \in L_2(\Omega)$. Другими словами, u является решением эллиптического уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} = g$$

в Ω. Внутренняя гладкость вместе с соответствующей оценкой на любом открытом множестве, строго внутреннем по отношению к Ω, следует из хорошо известных результатов для эллиптических уравнений [40, глава 8], [12, глава XIV]. □

Опираясь на теорему 5.5 и оценку (5.31), полученную для общего случая, повторением схемы доказательства теоремы 5.2 получаем

Теорема 5.6. *Все утверждения теорем* 5.2, 5.3 *и следствия* 5.2 *остаются справедливыми при замене* $\mathfrak{a}_{R,\Omega}$ *в* (5.8) *формой*

$$\mathfrak{a}_{R,\Omega}[u,v] = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(R_\Omega u_{x_i})\bar{v}_{x_j}dx,$$

удовлетворяющей условиям (5.34) *и* (5.36).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
2. *Амбарцумян В. А.* К теории флуктуаций яркости в Млечном пути// Докл. АН СССР. — 1944. — *44.* — С. 244–247.
3. *Антоневич А. Б.* Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе// Дифф. уравн. — 1972. — *8.* — С. 309–317.
4. *Антоневич А. Б.* Эллиптические псевдодифференциальные операторы с конечной группой сдвигов// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1973. — *37*, № 3. — С. 663–675.
5. *Антоневич А. Б.* Краевые задачи с сильной нелокальностью для эллиптических уравнений// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1989. — *53*, № 1. — С. 3–24.
6. *Антоневич А. Б., Лебедев А. В.* О нетеровости функционально-дифференциального оператора с частными производными, содержащего линейное преобразование аргумента// Дифф. уравн. — 1982. — *18.* — С. 987–996.
7. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.
8. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
9. *Бородулина Л. В., Россовский Л. Е.* Разрешимость эллиптических функционально-дифференциальных уравнений со сжатием аргументов в весовых пространствах// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26.* — С. 37–55.
10. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.
11. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68.* — С. 373–416.
12. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Том 2. — М.: Мир, 1966.
13. *Каменский Г. А.* Вариационные и краевые задачи с отклоняющимся аргументом// Дифф. уравн. — 1970. — *6*, № 8. — С. 1349–1358.
14. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О минимуме квадратичного функционала и о линейных краевых задачах эллиптического типа с отклоняющимися аргументами// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 8. — С. 1469–1473.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
16. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1967. — *16.* — С. 209–292.
17. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
18. *Кук К., Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 3. — С. 1366–1370.
19. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Том 1. — Москва—Ленинград: ГТТИ, 1953.
20. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
21. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — Москва—Ленинград: Гостехиздат, 1951.
22. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
23. *Пламеневский Б. А.* Алгебры псевдодифференциальных операторов. — М.: Наука, 1986.
24. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* О полноте и базисности системы корневых функций сильно эллиптических функционально-дифференциальных операторов// Усп. мат. наук. — 1996. — *51.* — С. 219–220.
25. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — *35.* — С. 793–800.
26. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36.* — С. 125–142.

27. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
28. *Рабинович В. С.* О разрешимости дифференциально-разностных уравнений в $\mathbb{R}^n$ и полупространстве// Докл. АН СССР. — 1978. — *243*. — С. 1134–1137.
29. *Россовский Л. Е.* Задача об успокоении системы с запаздыванием, линейно зависящим от времени. — Проблемы современной математики и приложения к задачам физики и механики. — М.: Изд-во МФТИ, 1995. — С. 172–182.
30. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
31. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность одного класса функционально-дифференциальных уравнений// Функц. анализ и его прилож. — 1996. — *30*, № 1. — С. 81–83.
32. *Россовский Л. Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2001. — *62*. — С. 199–228.
33. *Россовский Л. Е.* Сильно эллиптические дифференциально-разностные операторы в полуограниченном цилиндре// Фундам. и прикл. мат. — 2001. — *7*, № 1. — С. 289–293.
34. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатиями аргументов// Докл. акад. наук. — 2006. — *411*, № 2. — С. 161–163.
35. *Россовский Л. Е.* Спектральные свойства некоторых функционально-дифференциальных операторов и неравенство типа Гординга// Докл. акад. наук. — 2010. — *434*, № 4. — С. 450–453.
36. *Россовский Л. Е.* О спектральной устойчивости функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 6. — С. 885–901.
37. *Россовский Л. Е.* Об одном классе секториальных функционально-дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 2012. — *48*, № 2. — С. 227–237.
38. *Россовский Л. Е.* К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 122–131.
39. *Россовский Л. Е., Скубачевский А. Л.* Разрешимость и регулярность решений некоторых классов эллиптических функционально-дифференциальных уравнений. — Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож., *66*. — М.: ВИНИТИ, 1999. — С. 114–192.
40. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
41. *Савин А. Ю.* Об индексе нелокальных эллиптических операторов, отвечающих неизометрическому изоморфизму// Мат. заметки. — 2011. — *90*, № 5. — С. 712–726.
42. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 10. — С. 99–130.
43. *Скрябин М. А.* Разбиение единицы и проблема сильной эллиптичности для функционально-дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 139–151.
44. *Скубачевский А. Л.* О некоторых нелокальных эллиптических краевых задачах// Дифф. уравн. — 1982. — *18*, № 9. — С. 1590–1599.
45. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
46. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные эллиптические краевые задачи с вырождением// Дифф. уравн. — 1983. — *19*, № 3. — С. 457–470.
47. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
48. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 587–598.
49. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Мат. сб. — 1986. — *129*, № 2. — С. 279–302.
50. *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–292.
51. *Скубачевский А. Л.* Задача об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
52. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
53. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Общие краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Тр. Санкт-Петербург. мат. об-ва. — 1998. — *5*. — С. 223–288.
54. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
55. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Том 3. Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1987.

56. *Цветков Е. Л.* Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1992. — *51*, № 1. — С. 107–114.
57. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
58. *Шамин Р. В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 1411–1426.
59. *Antonevich A., Lebedev A.* Functional-Differential Equations. I. C^*-theory. — Harlow: Longman, 1994.
60. *Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$// J. Evol. Equ. — 2001. — *1*, № 4. — С. 361–385.
61. *Axelsson A., Keith S., McIntosh A.* The Kato square root problem for mixed boundary value problems// J. Lond. Math. Soc. (2) — 2006. — *74*. — С. 113–130.
62. *Babuška I., Výborný R.* Continuous dependence of the eigenvalues on the domain// Czechoslovak Math. J. — 1965. — *15*. — С. 169–178.
63. *Burenkov V. I.* Sobolev spaces on domains. — Stuttgart: Teubner, 1998.
64. *Burenkov V. I., Davies E. B.* Spectral stability of the Neumann Laplacian// J. Differential Equations. — 2002. — *186*. — С. 485–508.
65. *Burenkov V. I., Lamberti P. D.* Spectral stability of general non-negative self-adjoint operators with applications to Neumann-type operators// J. Differential Equations. — 2007. — *233*. — С. 345–379.
66. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
67. *Davies E. B.* Eigenvalue stability bounds via weighted Sobolev spaces// Math. Z. — 1993. — *214*. — С. 357–371.
68. *Davies E. B.* Spectral Theory and Differential Operators. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
69. *Derfel G., Iserles A.* The pantograph equation in the complex plane// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *213*. — С. 117–132.
70. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations// Math. Scand. — 1953. — *1*. — С. 55–72.
71. *Hale J. K.* Eigenvalues and perturbed domains. — Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology. — Amsterdam: Elsevier B.V., 2005. — С. 95–123.
72. *Hall A. J, Wake G. C.* A functional differential equation arising in the modelling of cell growth// J. Aust. Math. Soc. Ser. B — 1989. — *30*. — С. 424–435.
73. *Iserles A.* On the generalized pantograph functional–differential equation// European J. Appl. Math. — 1993. — *4*. — С. 1–38.
74. *Iserles A., Liu Y.* On neutral functional–differential equations with proportional delays// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *207*, № 1. — С. 73–95.
75. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
76. *Kato T., McLeod J. B.* Functional-differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$// Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 6. — С. 891–937.
77. *Lamberti P. D., Lanza de Cristoforis M.* A global Lipschitz continuity result for a domain dependent Dirichlet eigenvalue problem for the Laplace operator// Z. Anal. Anwend. — 2005. — *24*. — С. 277–304.
78. *Lions J. L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs// J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14*, № 2. — С. 233–241.
79. *McIntosh A.* On the comparability of $A^{1/2}$ and $A^{*1/2}$// Proc. Amer. Math. Soc. — 1972. — *32*, № 2. — С. 430–434.
80. *Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic Theory and Noncommutative Geometry. — Nonlocal Elliptic Operators, Operator Theory: Advances and Applications, *183*. — Basel: Birkhäuser Verlag, 2008.
81. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1971. — *322*. — С. 447–468.
82. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *3*. — С. 491–500.
83. *Przeworska-Rolewicz D.* Equations with Transformed Argument: An Algebraic Approach. — Warszawa: PWN, 1973.
84. *Rossovskii L. E.* On the boundary value problem for the elliptic functional-differential equation with contractions// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 3-4. — С. 395–406.

85. *Rossovskii L. E.* On boundary value problems for a class of functional-differential equations// Nonlinear Anal. — 2002. — *49*, № 6. — C. 799–816.
86. *Rossovskii L. E., Skubachevskii A. L.* Boundary value problems for functional differential equations with linearly transformed argument// Spectral and Evolution Problems. — 1995. — *4*. — C. 77–82.
87. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differential Equations. — 1986. — *63*. — C. 332–361.
88. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Operator Theory: Advances and Applications, *91*. — Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.
89. *Skubachevskii A. L., Shamin R. V.* The mixed boundary value problem for parabolic differential-difference equation// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 3-4. — C. 407–424.

Леонид Ефимович Россовский
127206, г. Москва, Дмитровский проезд, д. 20, корп. 2, кв. 205
E-mail: lrossovskii@gmail.com