Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 155–176

УДК 517.98

АНТИКОМПАКТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К АНАЛОГАМ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА И ЛЕБЕГА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

© 2014 г. **Ф. С. СТОНЯКИН**

Аннотация. В работе вводится понятие антикомпактного множества (антикомпакта) в пространствах Фреше. Детально исследованы свойства как самих антикомпактов, так и шкалы банаховых пространств, порожденных антикомпактами. Особо рассмотрена система антикомпактных эллипсоидов в гильбертовых пространствах. Доказано существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше E. На базе построенной теории получены аналоги теоремы Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторной меры в классе сепарабельных пространств Фреше: показана выпуклость и компактность замыкания множества значений векторной меры в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, порожденном некоторым антикомпактом $\overline{C}$. Также исследована проблема недифференцируемости интеграла Петтиса по верхнему пределу. Получены условия дифференцируемости неопределенных интегралов Петтиса в терминах новых характеристик — слабой интегральной ограниченности, а также σ-компактной измеримости. Доказан аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса для всякого сильно измеримого подынтегрального отображения.

Введение

Данная работа посвящена новому подходу к двум проблемам теории меры и интеграла в бесконечномерных пространствах Фреше.

Для отображений в конечномерные пространства хорошо известна теорема Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu}:\Sigma\to\mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [7]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [1, 4, 6, 8]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [19, 20, 24, 27, 30]. В частности, отметим работу с аналогами теоремы Ляпунова для некоторых специальных подмножеств $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [20].

Однако, как показывает множество примеров, теорема Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [5, 7, 21]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [1, 4]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова*. В каждом таком пространстве E для любой счетно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu}:\Sigma\to E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [5, 21]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p\in[1;2)\cup(2;+\infty)$, см. [5]). Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в том числе и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона—Никодима [21]. Но как свойство Ляпунова, так и свойство Радона—Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$). Нельзя не отметить также известный результат о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [21] в любом банаховом пространстве. Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений на класс пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [16]).

Работа выполнена при поддержке гранта Республики Крым для молодых ученых в 2014 году.

Далее, существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [16, 17, 23]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задачах функционального анализа и его приложений [3, 17, 23].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [3, 17, 23]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [3, 16, 17], которая активно развивается и в современных исследованиях [18, 23, 25, 28, 29, 32].

Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера. Так, например, всякий неопределенный интеграл Бохнера $F : I = [a; b] \to E$ (E — пространство Фреше) $F(x) = (B)\int\limits_a^x f(t)dt$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ сохраняет свойство дифференцируемости почти всюду на $[a; b]$. Рассмотрим неопределенные интегралы Петтиса, т. е. отображения $F : I = [a; b] \to E$ (E — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

причем f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом по Лебегу подмножестве $e \subset I$. Как показано в [22, замечание к теореме 1], для произвольного бесконечномерного банахова пространства E существует сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to E$ такое, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt\right\| = \infty \quad \forall t \in I,$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (4.1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (4.1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

Основная идея настоящей работы — предложить подход к указанным проблемам, основанный на новом понятии *антикомпактного множества* в пространствах Фреше. Поясним суть этого подхода. Весьма известно понятие компактного множества в топологических векторных пространствах. Такие множества обладают рядом весьма важных свойств, не присущих ограниченным множествам в бесконечномерных пространствах. Оказывается, что это как раз и приводит ко многим проблемам бесконечномерного анализа — таким как проблема переноса теоремы Ляпунова о выпуклости образа векторной меры (описана выше), проблема переноса теоремы Радона—Никодима о представимости абсолютно непрерывного отображения в виде интеграла Бохнера, проблема Крейна—Мильмана о существовании крайних точках ограниченных замкнутых множеств, не являющихся компактными и др. Ввиду этого возникла идея «сделать» ограниченные замкнутые множества компактами, но в другом пространстве (причем важно, чтобы это пространство было достаточно удобным). Аппаратом для реализации отмеченной идеи как раз и служит понятие антикомпактного множества, которому и посвящена настоящая работа.

Эти исследования в некотором смысле перекликаются с недавними работами [10, 15, 31], в которых была рассмотрена проблема Радона—Никодима, связанная с отсутствием представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера для бесконечномерных пространств. При этом в работах [10, 15, 31] был использован результат о разложимости каждого банахова пространства E в виде индуктивного предела банаховых пространств E_C, порожденных абсолютно выпуклыми компактами $C \in \mathcal{C}(E)$. В настоящей работе один из основных результатов — доказательство существования системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше. На базе этой системы антикомпактов как раз и удается, в некотором смысле, решить проблему, связанную с переносом теоремы Ляпунова в классе сепарабельных банаховых пространств.

Работа состоит из введения и пяти основных разделов. В первом разделе вводится понятие антикомпактного множества в банаховых пространствах, приведены два ключевых примера систем антикомпактов — системы эллипсоидов в сепарабельных гильбертовых пространствах, а также системы эллипсоидов в пространстве непрерывных функций $C[0;1]$.

Второй раздел посвящен детальному исследованию свойств как антикомпактных множеств, так и шкалы банаховых пространств, порожденных антикомпактами. Особо рассмотрен случай системы эллипсоидов в гильбертовых пространствах. Основной результат раздела 2 — существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше E (теорема 2.5).

И, наконец, в третьем разделе работы получены аналоги теоремы Ляпунова о выпуклости в классе сепарабельных гильбертовых (теорема 3.4) и банаховых пространств (теорема 3.5) — показана выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ множества значений векторной меры. При этом рассматриваются аналоги не только самой теоремы Ляпунова, а и более тонкого результата — выпуклости специальных подмножеств значений векторных мер [20]. Отметим, что в гильбертовом случае мы не накладываем никаких существенных условий на меры, кроме ограниченности. В случае же банаховых пространств мы по сути получаем аналог теоремы Ула, но без сужения на класс пространств.

Последние два раздела работы посвящены проблеме недифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса. В разделах 4 и 5 работы мы докажем условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (1). С этой целью в разделе 4 мы вводим две новые характеристики сильно измеримых и интегрируемых по Петтису отображений — *слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* ($C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}$). На базе предложенных понятий нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (1) в терминах слабой интегральной ограниченности (теорема 4.1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 4.3). Но фактически эти результаты лишь очерчивают проблему: дифференцировать неопределенный интеграл можно лишь для достаточно узких и специальных классов отображений.

Возникает естественная задача получить аналог теоремы Лебега для произвольного сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения. Такой результат получен нами в разделе 5: доказана интегрируемость по Бохнеру в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, порожденном антикомпактом $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ всякого сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения (теорема 5.1) и, как следствие — дифференцируемость почти всюду в $E_{\overline{C}}$ неопределенного интеграла Петтиса (теорема 5.2 и следствие 5.1).

1. Понятие антикомпактного множества. Примеры антикомпактов

Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E.

Определение 1.1. Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

1. $p_{\overline{C}}(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 0$ в E (или, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda\overline{C} = \{0\}$);
2. любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем, что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

Введем обозначение: $\overline{\mathcal{C}}(E)$ — *набор антикомпактных подмножеств* пространства Фреше E.

Приведем примеры антикомпактных множеств (или, сокращенно, антикомпактов) в некоторых пространствах.

Пример 1.1. Пусть $\mathrm{E} = H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство. В таких пространствах существует система так называемых эллипсоидов [9]. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ — последовательность положительных чисел. Для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется следующее множество:

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 \;\;|\;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Доказано, что C_ε компактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to 0$ (см. [9]). Отметим, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденная C_ε в пространстве $H_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1.1. *Если $\varepsilon \to \infty$, то C_ε — антикомпакт.*

Доказательство. Действительно, поскольку любое ограниченное множество $B \subset H$ поглощается единичным шаром, то, не уменьшая общности рассуждений, вместо B достаточно рассмотреть единичный шар

$$B = \left\{ x = \{x_k\} \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Ясно, что $p_B(\cdot) = \|\cdot\|_{\ell_2}$. Так как

$$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widetilde{x}_k^2|^2}{\widetilde{\varepsilon}_k^2},$$

где $\widetilde{\varepsilon}_k = \dfrac{1}{\varepsilon_k}$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n, \ldots) \in H_{C_\varepsilon}$, $\widetilde{x}_k = \dfrac{x}{\varepsilon_k}$ $(\varepsilon \to +\infty)$, то ввиду $\widetilde{\varepsilon}_k \to 0$ при $k \to \infty$ имеем, что — B компакт в E_{C_ε}, т. е. C_ε антикомпактно в H. □

Теперь покажем, как можно строить примеры антикомпактов в сепарабельных банаховых пространствах. Для этого рассмотрим пример в «типичном» банаховом пространстве числовых последовательностей ℓ_∞. Типичность пространства последовательностей ℓ_∞ мы понимаем в том смысле, что всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно подпространству $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (см. [5, с. 556]).

Пример 1.2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ назовем (*невырожденным*) *эллипсоидом* в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \widetilde{E} \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \leqslant 1 \right\}.$$

Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденная C_ε в $E_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\|_{C_\varepsilon} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|}. \tag{1.1}$$

Отметим, что если последовательность $\varepsilon \to 0$, то C_ε — компакт в $\widetilde{E}$ (при этом обратное утверждение неверно). Действительно, в таком случае $x_k \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по всем $x \in \widetilde{E}$. Поэтому C_ε равномерно мажорируется последовательностью $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in c_0$, откуда вытекает компактность C_ε в пространстве c_0 (см. [5, с. 336, теорема 1]), а значит и в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (здесь мы учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$).

Покажем, что для любой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно.

Лемма 1.2. *Для всякой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно в $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Во-первых, по построению нормы в E_{C_ε}

$$\|x\|_{C_\varepsilon} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k| = K\|x\|_{\widetilde{E}}$$

для некоторого $K > 0$. Поэтому E_{C_ε} содержит некоторый шар в $\widetilde{E}$ с центром в нуле.

Во-вторых, предкомпактность любого ограниченного множества $B \subset \widetilde{E}$ в пространстве E_{C_ε} вытекает из наличия последовательности $\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}, \dfrac{1}{\varepsilon_2}, \ldots, \dfrac{1}{\varepsilon_n}, \ldots\right) \in c_0$, равномерно мажорирующей все последовательности из B по норме $E_{C_\varepsilon} \cong \ell_\infty$ (здесь мы снова учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$). □

По сути, построением предыдущего примера мы доказали, что во всяком сепарабельном банаховом пространстве существует система антикомпактов. Это — основа всех основных результатов данной работы. Но перед их изложением уделим внимание некоторым общим свойствам антикомпактных множеств, а также свойствам шкалы пространств, которые порождаются антикомпактами.

2. Общие свойства антикомпактов

Данный пункт посвящен детальному исследованию свойств как самих антикомпактных множеств, так и шкалы банаховых пространств $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, порожденных антикомпактными множествами в E. Начнем с описания антикомпактов в конечномерных пространствах.

Теорема 2.1. *Если $E = \mathbb{R}^n$, то $\overline{\mathcal{C}}(E)$ состоит из всех ограниченных абсолютно выпуклых замкнутых множеств K.*

Доказательство. 1. Пусть $n = 1$. Тогда любое ограниченное абсолютно выпуклое замкнутое множество имеет вид $C = [-\alpha; \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем $E_C = E = \mathbb{R}$, и поэтому всякое ограниченное множество предкомпактно. Это значит, что любое множество вида $C = [-\alpha; \alpha]$ удовлетворяет условию. В то же время для неограниченных множеств C функция $p_C(\cdot)$ не удовлетворяет условию 1 определения 1.1.

2. Если $n > 1$, то рассмотрим координатные функционалы $\ell_1(\cdot), \ell_2(\cdot), \ldots, \ell_n(\cdot) \in E^* = (\mathbb{R}^n)^*$. Для всякого абсолютно выпуклого множества $C \in E$

$$\overline{\ell_i(C)} = [-\alpha; \alpha] \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

В силу пункта 1 данного доказательства неограниченное множество не может быть антикомпактным. А ограниченное замкнутое абсолютно выпуклое множество, как нетрудно проверить, антикомпактно.

3. Условие $\bigcap\limits_{\lambda > 0} \lambda K = \{0\}$ вытекает из ограниченности множества K. □

Теперь рассмотрим случай сепарабельного гильбертова пространства. Как показано в разделе 1, в таких пространствах существует система антикомпактных эллипсоидов. Пусть $\mathrm{E} = H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ — последовательность положительных чисел. Напомним, что для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \ \mid \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leqslant 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Лемма 1.1 утверждает, что при $\varepsilon \to \infty$ C_ε — антикомпакт. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. *Множество C_ε антикомпактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to +\infty$.*

Доказательство. Достаточность показана в лемме 1.1. Покажем необходимость: пусть ε не сходится к $+\infty$, т. е. существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \varepsilon$ такая, что $\varepsilon_{k_\ell} \leqslant N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{B} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \mid x_k = 0 \text{ при } k \neq k_\ell, \ x_k \in [0; 1] \text{ при } k = k_\ell\}.$$

Легко видеть, что $\widehat{B}$ ограничено в H_{C_ε}, но не компактно. □

Теперь мы покажем, что любой антикомпакт в H можно погрузить в некоторый антикомпактный эллипсоид.

Теорема 2.3. *Если множество $C \in \Omega_{ac}(\ell_2)$ антикомпактно, то $\exists C_\varepsilon : C \subset C_\varepsilon$.*

Доказательство. 1. Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 2.1, можно установить, что если положить $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots) \in C \subset H$ для всякого антикомпактного множества $C \in \Omega_{ac}(\ell_2)$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{x \in C} |x_n| = +\infty$.

2. Пусть $\varepsilon_n = \sup\limits_{x \in C} |x_n|$. Так как $\bigcap\limits_{\lambda<0} \lambda C = \{0\}$, то $\varepsilon_n < +\infty$. Действительно, если $\sup\limits_{x\in C} |x_n| = \infty$, то $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} = (x_{1k}, \ldots, x_{nk}, \ldots) \in C$: $|x_{nk}| = k$. Поэтому $\|x^{(k)}\| \geqslant k$ и $\dfrac{1}{k}\|x^{(k)}\| \geqslant 1 \forall k \in \mathbb{N}$, что противоречит условию $\bigcap\limits_{\lambda<0} \lambda C = \{0\}$ (если положить $\lambda_k = \dfrac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty$).

3. Поскольку $\varepsilon_n < +\infty$, то можно рассмотреть эллипсоид (2.1). Из пункта 1 данного доказательства вытекает, что C_ε — антикомпакт. При этом $C \subset C_\varepsilon$. □

Отметим очевидные свойства антикомпактных множеств в произвольных пространствах Фреше. Через $L(E;F)$ будем обозначать множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Фреше E в пространство Фреше F.

Предложение 2.1. *Если множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ и $A \in L(E;F)$, где E и F — пространства Фреше, то $A(\overline{C}) \in \overline{\mathcal{C}}(F)$.*

Далее под обозначением $E \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow F$ будем понимать, что банахово пространство E инъективно компактно вложено в банахово пространство F.

Предложение 2.2. *Если $E \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow F$, $\varphi : E \to F$ — каноническое вложение, то для любого замкнутого абсолютно выпуклого множества $K \subset E$ такого, что некоторый шар $B(0) \subset K$ и $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda K = \{0\}$, выполнено*:

$$\varphi(K) \in \overline{\mathcal{C}}(F).$$

Предложение 2.3. *Пусть E — пространство Фреше. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится в E, то она сходится и в $E_{\overline{C}}$ для произвольного $\forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.*

Доказательство. Отметим лишь, что если $\|\cdot\|$ — произвольная непрерывная полунорма в E, то $\|\cdot\|_{\overline{C}} \leqslant K\|\cdot\|$ для некоторого числа $K > 0$ и всякого антикомпактного множества $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. □

Переходим к свойствам шкалы пространств, порожденных антикомпактами. Начнем с очевидного свойства.

Предложение 2.4. *Пусть $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, $\overline{C}' \in \Omega_{ac}(E)$, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda\overline{C}' = \{0\}$ и $\overline{C} \subset \overline{C}'$. Тогда $\overline{C}' \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.*

Теперь докажем значительно более тонкий результат — существование для всякого антикомпакта $\overline{C}'$ такого антикомпакта $\overline{C}''$, что пространство $E_{\overline{C}''} \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{\overline{C}'}$.

Теорема 2.4. *Если E — банахово пространство и $\overline{C}' \in \overline{C}(E)$, то*

$$\exists \overline{C}'' \in \overline{C}(E): \quad E_{\overline{C}''} \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{\overline{C}'}.$$

Доказательство. Докажем, что существует непрерывное отображение $\varphi : E_{\overline{C}'} \to E_{\overline{C}'}$ такое, что для любого $C \in \mathcal{C}(E_{\overline{C}'})$ вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно, где $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C)$. Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $E_{\overline{C}'}$. Введем отображение ($\forall x \in E_{\overline{C}'}$):

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|}} \quad (x \neq 0), \quad \varphi(0) = 0.$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ непрерывна. Обозначим $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C) \in \mathcal{C}(E_{\overline{C}'})$ и докажем компактность вложения $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$.

а). Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co} C$ ($\partial^{co} C$ — выпуклая граница C). Тогда при некотором $\lambda \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\|\widetilde{x}\|}}$ верно $\lambda x \in \partial^{co} C_\varphi$. Отсюда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|\widetilde{x}\|}. \tag{2.2}$$

Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu x$ (при некотором $\mu \geqslant 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu x$ в (2.2), получаем

$$\mu\|x\|_{C_\varphi} = \|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|\mu x\|},$$

откуда

$$\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \frac{1}{\mu}\sqrt{\|\mu x\|} = \sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|} \leqslant \sqrt{\|x\|}, \tag{2.3}$$

т. е. справедливо

$$(x \in C) \Rightarrow \left(\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|x\|}\right). \tag{2.4}$$

б). Пусть $\{x_k\}_1^\infty \subset C$. Тогда существует подпоследовательность x_{k_n} сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т. е. $x_{k_n} - x_0 \overset{E}{\to} 0$. При этом $x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2C$, т. е. $\dfrac{x_{k_n} - x_0}{2} \in C$ $(n \in \mathbb{N})$. Применяя (2.4) к $x = \dfrac{x_{k_n} - x_0}{2}$, получаем:

$$\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|}, \text{ откуда } \quad \|x_{k_n} - x_0\|_{C_\varphi} \leqslant 2\sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|} \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \overset{E_{C_\varphi}}{\to} 0$, т. е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. □

Отметим следствие из предыдущего результата.

Следствие 2.1. *Для любых множеств $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ таких, что $E_{\overline{C}_1} \hookrightarrow\!\hookrightarrow E_{\overline{C}_2}$ существует $\overline{C}_3 \in \overline{\mathcal{C}}(E)$:*

$$E_{\overline{C}_1} \hookrightarrow\!\hookrightarrow E_{\overline{C}_3} \hookrightarrow\!\hookrightarrow E_{\overline{C}_2}.$$

Переходим к изложению основного результата данного раздела работы — доказательству существования антикомпактного множества во всяком сепарабельном пространстве Фреше.

Теорема 2.5. *В любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпактное подмножество.*

Доказательство. 1. Хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство $E \cong \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ — некоторое подпространство пространства последовательностей ℓ_∞ (см. [5, с. 556]). В качестве искомого антикомпакта можно взять любой антикомпактный эллипсоид в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (см. лемму 1.2). Итак, теорема доказана в классе сепарабельных банаховых пространств.

2. Пусть теперь E — пространство Фреше. Напомним, что любое пространство Фреше E со счетной определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^\infty$ является проективным пределом последовательности банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где $\widehat{E}_j$ являются пополнениями по фактор-нормам фактор-пространств $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $(j \in \mathbb{N})$.

В силу пункта 1 настоящего доказательства $\forall j \in \mathbb{N}$ существует антикомпакт $\widehat{C}_j$, т. е. $E_j \hookrightarrow\!\hookrightarrow E_{\widehat{C}_j}$. Не уменьшая общности рассуждений, систему антикомпактов $\left\{\widehat{C}_j\right\}_{j=1}^\infty$ можно выбрать неубывающей (если нужно, рассмотрев вместо этого систему множеств $\{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \widehat{C}_j\}_{N=1}^\infty$, которые антикомпактны в силу предложения 2.4). При таком соглашении

$$\|\cdot\|_{\widehat{C}_j} \geqslant \|\cdot\|_{\widehat{C}_k} \quad \forall k \geqslant j. \tag{2.5}$$

Пусть $\widehat{E} = \prod\limits_{\widehat{C}_j} E_{\widehat{C}_j}$ — прямое произведение пространств $E_{\widehat{C}_j}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{C} := \left\{ x \in \widehat{E} \;\mid\; \sum_{j=1}^\infty \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2} < \infty. \right\}$$

Поскольку E — проективный предел пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому E может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то всякое ограниченное множество $C \subset E$ может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E) и непрерывно вложено в произведение $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} j^2\widehat{C}_j$, которое компактно в $\widehat{E}$ по теореме Тихонова в топологии прямого произведения. Далее, в силу (2.5) и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2}$ можно проверить компактность C в пространстве $E_{\widehat{C}}$, порожденном и пополненном относительно нормы

$$\|x\|_{\widehat{C}} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}.$$

Поэтому C — непустой абсолютно выпуклый компакт в $\widehat{E}$, т. е. $\widehat{C}$ — антикомпакт в E.

$\square$

3. Аналоги теоремы Ляпунова в сепарабельных пространствах Фреше

Теперь мы переходим к обобщению теоремы Ляпунова на случай сепарабельных пространствах Фреше. Начнем с примера, показывающего возможность невыпуклости как самого множества значений некоторой векторной меры, так и его замыкания в $H = \ell_2$.

Пример 3.1. Пусть $H = L_2[0;1]$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций с интегрируемым квадратом модуля, Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0;1]$, и в качестве меры рассмотрим классическую меру Лебега на отрезке. Рассмотрим векторную меру со значением в H:

$$\overrightarrow{\mu}(A) = \chi_A(\cdot) \text{ — \textit{характеристическая функция множества} } A.$$

Оказывается, что множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ невыпукло. Действительно, функции $\overrightarrow{\mu}_1 \equiv 0$ и $\overrightarrow{\mu}_2 \equiv 1$ принадлежат множеству $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$. Однако $\overrightarrow{\mu}_3 \equiv \dfrac{1}{2} \notin \overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$.

Отметим, что теорема Ула в этой ситуации неприменима, поскольку векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ не имеет полной ограниченной вариации.

Рассмотрим вспомогательный результат для мер, представимых в виде интеграла Бохнера, который будет базовым для основных результатов раздела. Мы отправляемся от специальной формы теоремы Ляпунова для подмножеств образов векторных мер в конечномерных пространствах, полученной в [20].

Теорема 3.1. *Если $E = \mathbb{R}^n$, то для всякого вектора $\overrightarrow{p} \in \overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma, \overrightarrow{p}) = \{\overrightarrow{\mu}(Y) \mid \exists X : \ Y \subseteq X, \ \overrightarrow{\mu}(X) = \overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в E.

Покажем справедливость следующего обобщения теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть E — банахово пространство, векторная мера представима в виде неопределенного интеграла Бохнера*

$$\overrightarrow{\mu}(A) = (B)\int\limits_A f(t)dm(t) \quad \forall A \in \Sigma,$$

где m — некоторая безатомная числовая мера. Тогда множество

$$\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma, \overrightarrow{p})} = \{\overrightarrow{\mu}(Y) \mid \exists X : Y \subseteq X, \ \overrightarrow{\mu}(X) = \overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в E.

Доказательство. 1. Покажем выпуклость множества

$$R_{\overrightarrow{p}}(f) = \left\{ (B)\int\limits_Y f(t)dm(t) \mid \exists X : Y \subseteq X, \ (B)\int\limits_X f(t)dm(t) = \overrightarrow{p} \right\}.$$

Для всякого $\varepsilon > 0$ ввиду интегрируемости f по Бохнеру на A можно выбрать простые отображения вида

$$f_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\chi_{X_k}(t), \quad \text{где } t_k \in X_k, \ f(t_k) = c_k \in E, \ A = \bigcup_{k=1}^{n} X_k,$$

где $\chi_E(t)$ — характеристическая функция множества E, так, чтобы

$$\int\limits_A \|f(t) - f_\varepsilon(t)\| dm(t) < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Докажем, что множество

$$R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n}) = \left\{ (B) \int\limits_Y f_{\varepsilon_n}(t) dm(t) \mid \exists X : Y \subseteq X,\ (B) \int\limits_X f(t) dm(t) = \overrightarrow{p} \right\}$$

выпукло при произвольном n. Не уменьшая общности, можно положить, что $A_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X'$ $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, где

$$(B) \int\limits_X f(t) dm(t) = (B) \int\limits_{X'} f(t) dm(t) = \overrightarrow{p}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{\mu}(A_1) = (B) \int\limits_{A_1} f_\varepsilon(t) dm(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) m\left(X_k \cap A_1\right),$$

$$\overrightarrow{\mu}(A_2) = (B) \int\limits_{A_1} f_\varepsilon(t) dm(t) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) m\left(X_k \cap A_2\right),$$

откуда

$$\frac{\overrightarrow{\mu}(A_1) + \overrightarrow{\mu}(A_2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \left(m\left(X_k \cap A_1\right) + m\left(X_k \cap A_2\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \left(m\left(X_k \cap \widetilde{A}_1\right) + m\left(X_k \cap \widetilde{A}_2\right)\right) = \overrightarrow{\mu}(\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2)$$

для множеств $\widetilde{A}_i$ таких, что $m(\widetilde{A}_i) = \dfrac{1}{2} m(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Такие множества можно выбрать в силу безатомности числовой меры m по классической теореме Ляпунова [7]. Таким образом, $R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})$ выпукло при произвольном $n \in \mathbb{N}$.

По построению функций f_{ε_n} и ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ можно заключить, что

$$R_{\overrightarrow{p}}(f) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})}.$$

В [16] показано, что можно выбрать последовательность функций f_{ε_n} так, чтобы при увеличении n происходило измельчение разбиения множества X. В таком случае $\left\{R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая цепочка выпуклых множеств.

Покажем, что эти множества не убывают. Действительно, для конечнозначных функций f_{ε_n} несложно проверить, что

$$R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n}) = \bigcup_X co\{f_{\varepsilon_n}\} m(X),$$

где $co\{f\}$ — выпуклая оболочка множества значений f. А поскольку разбиение при $n \to +\infty$ измельчается и «старые» значения функции сохраняются, то $co\{f_{\varepsilon_{n_1}}\} \subset co\{f_{\varepsilon_{n_2}}\}$ при $n_1 < n_2$.

Итак, множество $R_{\overrightarrow{p}}(f)$ выпукло как замыкание объединения (по включению) возрастающей последовательности выпуклых множеств $R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})$.

2. Компактность $R_{\overrightarrow{p}}(f)$ вытекает из относительной компактности множества [21]

$$R(f) = \left\{ (B) \int\limits_A f(t) dm(t) \mid A \in \Sigma \right\}.$$

□

Переходим к аналогам теоремы Ляпунова. Сформулируем вспомогательный результат в гильбертовом случае, который вытекает из того, что любой конечный числовой заряд имеет ограниченную вариацию [5]. Также специфика гильбертова случая связана с тем, что всякое сепарабельное гильбертово пространство имеет свойство Радона—Никодима.

Предложение 3.1. *Все ограниченные векторные меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ имеют слабо ограниченную вариацию.*

Перед изложением основных результатов раздела приведем некоторые вспомогательные понятия и результат из работы [15]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать в определениях 3.1 и 3.2, а также в теоремах 3.3–3.5). Напомним [3, с. 104], что *полной вариацией векторного заряда* $\nu : \Sigma \to E$ относительно нормы $\| \cdot \|$ в E называется отображение $|\nu| : \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3.1}$$

где супремум берется по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteqq A$. Легко проверить, что отображение $|\nu|$ — конечная счетно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [3, с. 104]). Обозначим через $V(S,E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$, которые имеют конечную полную вариацию $|\nu|(S) < \infty$ относительно нормы $\| \cdot \|$ на E (см. (3.1)). Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \| \cdot \|_C)$ банаховы пространства с нормами $\| \cdot \|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 3.1. Будем говорить, что ν имеет (*сильную*) *компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S,E)$, $|\nu|_C$ — полная вариация векторного заряда ν относительно нормы $\| \cdot \|_C$.

Для того, чтобы сформулировать необходимый результат из [15], нам потребуется новая характеристика для мер $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — (*сильная*) *компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S,E)$ множество всех зарядов $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, т. е. таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|(A) < \varepsilon$).

Определение 3.2. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S,E)$ (*сильно*) *компактно абсолютно непрерывна на* S *относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S, E_C)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S,E)$.

Приведем важный вспомогательный результат из [15].

Теорема 3.3. *Если $\nu \in AC_K(S,E)$, то найдется такое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : S \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ верно*

$$\nu(A) = (B) \int\limits_{A} f(t) d\mu(t). \tag{3.2}$$

Переходим к доказательству аналога теоремы Ляпунова в гильбертовом случае: для всякой конечной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)_{E_{\widetilde{C}}}}$ выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. Начнем со специфической формы, аналогичной [20].

Теорема 3.4. *Для всякой ограниченной безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует антикомпактное множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(H)$ такое, что $\forall \overrightarrow{p} \in \overrightarrow{\mu}(\Sigma) \subset H$ замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma, \overrightarrow{p}) = \{\overrightarrow{\mu}(Y) \mid \exists X : Y \subseteq X, \overrightarrow{\mu}(X) = \overrightarrow{p}\}$$

в пространстве $H_{\overline{C}}$ выпукло и компактно, причем пространство $H_{\overline{C}}$ гильбертово.

Доказательство. Итак, в силу предложения 3.1 векторная мера $\overrightarrow{\mu}:\Sigma\to H$ имеет слабую ограниченную вариацию, т. е. $\forall\ell\in\ell_2^*\cong\ell_2$ числовая мера $\ell(\overrightarrow{\mu})$ имеет ограниченную вариацию, т. е.

$$V(\mu_k)=V(\ell_k(\overrightarrow{\mu}))=c_k<\infty\quad\forall k\in\mathbb{N},\tag{3.3}$$

где $\forall h\in H$ выполнено $h=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\langle h,e_k\rangle e_k$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в пространстве H, $\ell_k(h)=\langle h,e_k\rangle$.

Выберем последовательность $n_k\to\infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\dfrac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной и рассмотрим пространство

$$H_{\widetilde{C}}=\left\{h\in H:\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k^2}{n_k^2}<\infty\right\},\ \text{где } h=(h_1,h_2,\ldots,h_k,\ldots).$$

Из (3.3) следует, что $\overrightarrow{\mu}\in V(\Sigma,H_{\widetilde{C}})$. Введем на Σ следующую числовую меру:

$$\mu_{\widetilde{C}}(A):=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\mu_k|(A)}{n_k},\tag{3.4}$$

где $|\mu_k|(\cdot)=V_k(\cdot)$ — полная вариация числовой меры μ_k. Отметим, что мера $|\mu_k|(\cdot)$ безатомна в силу безатомности $\overrightarrow{\mu}$. Поскольку $n_k<\infty$, то из (3.4) следует, что μ_k абсолютно непрерывно относительно $\mu_{\widetilde{C}}$ $\forall k$ и векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $\mu_{\widetilde{C}}$. При этом $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $H_{\widetilde{C}}$ и $H\hookrightarrow\hookrightarrow H_{\widetilde{C}}$ в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty}n_k=\infty$. Следовательно, мера $\overrightarrow{\mu}$ компактно абсолютно непрерывна и по теореме 3.3

$$\overrightarrow{\mu}(A)=(B)\int\limits_A\overrightarrow{\nu}(\tau)d\mu_{\widetilde{C}}(\tau),$$

где интеграл берется в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_{\widetilde{C}}$, $\overrightarrow{\nu}:\Sigma\to H\subset H_{\widetilde{C}}$. Теперь, применив теорему 3.2, получаем, что множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{H_{\widetilde{C}}}$ выпукло и компактно в $H_{\widetilde{C}}$. □

Отметим аналог обычной теоремы Ляпунова в сепарабельном гильбертовом пространстве, вытекающий из предыдущего результата (если положить $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{\mu}(A)$).

Следствие 3.1. *Для всякой ограниченной безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu}:\Sigma\to H$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует антикомпактное множество $\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(H)$ такое, что $\forall\overrightarrow{p}\in H$ замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $H_{\overline{C}}$ выпукло и компактно, причем пространство $H_{\overline{C}}$ гильбертово.*

Переходим к финальному результату данного раздела работы. Он утверждает выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ ($\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(E)$) специального подмножества множества значений векторной меры в сепарабельных пространствах Фреше.

Теорема 3.5. *Пусть E — сепарабельное пространство Фреше, $\overrightarrow{\mu}:\Sigma\to E$ — безатомная векторная мера ограниченной вариации. Тогда $\forall\overrightarrow{p}\in\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma,\overrightarrow{p})=\{\overrightarrow{\mu}(Y)\mid\exists X:Y\subseteq X,\overrightarrow{\mu}(X)=\overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C}\in\overline{\mathcal{C}}(E)$.

Доказательство. Из теоремы 2.5 вытекает, что в любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпакт $\overline{C}$. Тогда из условия $\overrightarrow{\mu}\in BV(\Sigma)$ следует, что $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\overline{C}}$. Более того, если обозначить через $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$ в пространстве $E_{\overline{C}}$, то несложно понять, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu}\in AC_K(\Sigma,E_{\overline{C}})$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде в виде неопределенного интеграла Бохнера по теореме 3.3. Доказываемое утверждение теперь вытекает из теоремы 3.2. □

И в завершение отметим аналог теоремы Ула в произвольных сепарабельных пространствах Фреше (мы не используем ограничение на класс пространств, но замыкание множества берем не в исходном пространстве, а в некотором пространстве, порожденном антикомпактом).

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.5 *замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma) = \{\overrightarrow{\mu}(A) \mid A \in \Sigma\}$$

выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

4. Условия дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса в терминах дополнительных характеристик подынтегрального отображения

Вернемся ко второй известной математической проблеме, затронутой в настоящей работе. Напомним, что в отличие от интеграла Бохнера, неопределенный интеграла Петтиса может быть нигде не дифференцируемым. Рассмотрим неопределенные интегралы Петтиса, т. е. отображения $F : I = [a; b] \to X$ (X — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P) \int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{4.1}$$

где f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом по Лебегу подмножестве $e \subset I$. Как показано в [22, замечание к теореме 1], для произвольного бесконечномерного банахова пространства X существует сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$ такое, что

$$\lim_{h\to 0} \left\| \frac{1}{h}(P) \int\limits_x^{x+h} f(t)dt \right\| = \infty \quad \forall t \in I,$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (4.1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (4.1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

С этой целью в данном разделе работы мы вводим две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений — *слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* (C^σ_{mes}). На базе предложенных понятий в пункте 4.3 нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (4.1) в терминах слабой интегральной ограниченности (теорема 4.1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 4.3). В разделе 4 будем обозначать через X — произвольное пространство Фреше, mes — классическую меру Лебега на вещественной прямой, Σ — набор измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$; X^* — пространство линейных непрерывных функционалов над X, а через $L(X; Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

4.1. Слабая интегральная ограниченность интегрируемых по Петтису отображений. В данном пункте мы вводим одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — слабую интегральную ограниченность.

Определение 4.1. Будем называть отображение $f : I = [a; b] \to X$ из (4.1) *слабо интегрально ограниченным в точке* $x \in I$ ($f \in B^w_{int}(x)$), если для любой системы интервалов $I_n = (\alpha_n; \beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} = 0, \tag{4.2}$$

где $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{mes}(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} = 0. \tag{4.3}$$

Если $A \subset I$ и $f \in B^w_{int}(x)$ для почти всех $x \in A$, то будем называть отображение f *почти всюду слабо интегрально ограниченным на* A. Примем обозначение: $f \in B^w_{int}(A)$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $B^w_{int}(I)$.

Предложение 4.1.

1. *Класс* $B^w_{int}(A)$ *является линейным*;
2. $f \in B^w_{int}(A) \Leftrightarrow f \in B^w_{int}(C)$ $\forall$ *измеримого по Лебегу множества* $C \subset A$;
3. *Пусть* $f : I \to X$ *таково, что* $f \in B^w_{int}(I)$, $A \in L(X;Y)$. *Тогда отображение* $Af : I \to Y$ *принадлежит классу* $B^w_{int}(I)$.

Доказательство. Данное утверждение легко вытекает из соответствующих свойств интеграла Петтиса (см., например, [16, с. 91-92]). Отметим лишь, что утверждение 2 справедливо в силу предположения об интегрируемости по Петтису f из (4.1) на произвольном измеримом по Лебегу подмножестве $A \subset I$. □

Проверим два достаточных условия интегральной ограниченности. Будем говорить, что f *локально ограничено* в точке $x \in I$, если

$$\sup_{A:\ \mathrm{mes}(A)=0} \|f((\alpha;\beta)\backslash A)\| = \operatorname{esssup} \|f((\alpha;\beta))\| = C < \infty \text{ для нек.} \quad (\alpha;\beta) \supset x. \tag{4.4}$$

Предложение 4.2.

1. *Если* f *локально ограничено в точке* $x \in I$, *то* $f \in B^w_{int}(x)$.
2. *Если* f *локально ограничено* $\forall\ x \in A \subset I$, *то* $f \in B^w_{int}(A)$.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная система измеримых множеств, удовлетворяющих (4.3). В силу (4.4) для некоторого числа $0 < C < \infty$ имеем

$$\left\| \frac{F(I_n \bigcap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| = \left\| \frac{(P) \int\limits_{I_n \bigcap E_n} f(t)dt}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| \leqslant C \frac{\mathrm{mes}(I_n \bigcap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

откуда и вытекают доказываемые утверждения. □

Предложение 4.3. *Пусть* X — *банахово пространство. Тогда всякое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : I = [a;b] \to X$ *удовлетворяет условию* $f \in B^w_{int}(I)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : I = [a;b] \to X$,

$$F(x) = (B) \int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть x — точка Лебега отображения F. Тогда в силу [16, следствие 2 из теоремы 3.8.5] для произвольной системы интервалов $I_n = (\alpha_n; \beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$, верно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0,$$

откуда вытекает, что для произвольной системы измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющих (4.3), верно (4.2). Действительно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| = \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} - f(x) \frac{\mathrm{mes}(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n \cap E_n} (f(t) - f(x))\, dt \right\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n \cap E_n} \|f(t) - f(x)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0.$$

Остается лишь заметить то, что почти все точки I являются точками Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f (см. [16, теорема 3.8.5]). □

Замечание 4.1. Из доказательства предыдущего утверждения следует, что если x — точка Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f, то $f \in B^w_{int}(x)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно привести функцию $F : [-1;1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int\limits_{-1}^{x} \mathrm{sign}(t)dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.5}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега (для вещественных функций интеграл Бохнера совпадает с интегралом Лебега), а $\mathrm{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\mathrm{sign}(x) = -1$ при $x < 0$, $\mathrm{sign}(x) = 0$ при $x = 0$.

Легко проверить, что $x = 0$ не является точкой Лебега отображения (4.5). Тем не менее, согласно предложению 4.2 выполнено $f \in B^w_{int}(0)$ ввиду ограниченности f.

Замечание 4.2. Отметим, что отображения $f \in B^w_{int}(I)$ могут быть не интегрируемыми по Бохнеру. Это подтверждает пример 4.1 ниже.

Замечание 4.3. Неопределенный интеграл Петтиса отображения $f \in B^w_{int}(I)$ может быть нигде не дифференцируемым на I, если f не является сильно измеримым. В качестве примера рассмотрим отображение $f : I = [0;1] \to L_\infty[0;1]$, $f(t) = \chi_{[t;1]}(\cdot)$. В [23, пример после теоремы 3.4, теорема 4.4] показано, что f интегрируемо по Петтису, причем

$$\left((P)\int\limits_A f(t)dt\right)(x) = \mathrm{mes}\left(A\bigcap[0;x]\right) \quad \forall x \in I, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Следовательно, $f \in B^w_{int}(I)$ (множества I_n и E_n удовлетворяют (4.3), $x \in [0;1]$):

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{(P)\int\limits_{I_n\bigcap E_n} f(t)dt}{\mathrm{mes}(I_n)}\right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\mathrm{esssup}\left|\frac{\mathrm{mes}(I_n\bigcap E_n\bigcap[0;x])}{\mathrm{mes}(I_n)}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{mes}(I_n\bigcap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} = 0.$$

При этом, в [23, пример после теоремы 3.4] доказано, что неопределенный интеграл Петтиса отображения f нигде не имеет обычной производной.

4.2. σ-Компактная измеримость интегрируемых по Петтису отображений. Введем еще одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — σ-компактную измеримость.

Определение 4.2. Будем говорить, что отображение $f : I = [a;b] \to X$ из (4.1) *σ-компактно измеримо* ($f \in C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$), если существует такое разбиение I на измеримые по Лебегу подмножества $\{e_N\}_{N=0}^\infty$, что

$$f(e_N) \subset U_N,\ U_N — \text{компакт в } E \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

где $I = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} e_N$, $\mathrm{mes}(e_0) = 0$, $e_{N_1} \subseteq e_{N_2}$ $\forall N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$.

Предложение 4.4.

1. *Класс $C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$ является линейным*;
2. $f \in C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I) \Leftrightarrow f \in C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I')$ $\forall I' \subset I$;
3. *Пусть $f : I \to X$, $f \in C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$, $A \in L(X;Y)$. Тогда отображение $Af : I \to Y$ принадлежит классу $C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$.*

Предложение 4.5. *Всякое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : I = [a;b] \to X$ удовлетворяет условию $f \in C^\sigma_{\mathrm{mes}}(I)$.*

Доказательство. Вследствие [13, теорема 2], для всякого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : I \to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что $\int\limits_I \|f(t)\|_C dt < \infty$, где $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского, порожденный множеством C. Если положить

$$e_N := \{t \in [a;b] \mid \|f(t)\|_C \leqslant N\}, \quad U_N = NC \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

то f будет удовлетворять условию (4.6). □

Возникает естественный вопрос: не является ли всякое интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$, удовлетворяющее условию $f \in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$, интегрируемым по Бохнеру? На этот вопрос можно дать отрицательный ответ даже в случае гильбертова пространства X. В качестве примера мы рассмотрим следующее отображение [31, пример 2.1].

Пример 4.1. Пусть $X = \ell_2$ — вещественное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в E. Рассмотрим отображение $F : [0;1] \to X$:

$$\begin{cases} F(0)=0; \quad F\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{k} \quad (n\in\mathbb{N}); \quad F(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k}; \\ F \text{ линейно на сегментах } \left[\dfrac{n-1}{n};\ \dfrac{n}{n+1}\right] \quad (n\in\mathbb{N}). \end{cases}$$

1. Ясно, что F дифференцируемо п. в. на I. Покажем, что оно слабо абсолютно непрерывно. Для этого рассмотрим произвольный функционал $\ell \in \ell_2^* \cong \ell_2$, а также функцию $\widetilde{f} = \ell[F]$, $\widetilde{f} : [0;1] \to \mathbb{R}$. Поскольку $\ell \in \ell_2$, то $\exists\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_2$:

$$\ell(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \quad \forall\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots) \in \ell_2.$$

Нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$.

$$\left(\forall N \in \mathbb{N},\ \mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N} [a_k; b_k]\right) < \delta\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Заметим, что $\widetilde{f}(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{k}$. Этот ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\alpha_k}{k}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \leqslant C < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

по неравенству Коши—Буняковского.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=N_0+1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $\bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[\dfrac{N_0}{N_0+1};\ 1\right]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

Отрезок же $\left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$ разбивается на N_0 отрезков, на каждом из которых функция $\widetilde{f}$ линейна. Следовательно, $\widetilde{f}$ абсолютно непрерывна на $\left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$, т. е. $\exists\ \delta > 0$: $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$,

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{m} [a_k; b_k]\right) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.9}$$

Из неравенств (4.8) и (4.9) вытекает неравенство (4.7).

2. Итак, отображение F слабо абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо. Следовательно, F — неопределенный интеграл Петтиса. Действительно,

$$\ell(F(x) - F(0)) = \ell(F(x)) - \ell(F(0)) = \left(\int_0^x (\ell(F(t)))' dt\right) = \int_0^x \ell(F'(t)) dt \quad \forall x \in [0;1]$$

$\forall \ell \in X^*$, откуда и вытекает, что $F(x) = F(0) + (P)\int\limits_0^x F'(t)dt\ \forall x \in [0;1]$.

Если положить $e_N := \left[0; \dfrac{N}{N+1}\right]$, то $f = F'$ будет удовлетворять условию (4.6) с компактами $U_N := \bigcup\limits_{n=1}^{N} \left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$, т. е. $f = F' \in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$. Однако, как показано в [31, пример 2.1], F не имеет сильной ограниченной вариации и поэтому не является неопределенным интегралом Бохнера.

3. Отметим также, что по предложению 4.2 имеем $f = F' \in B^w_{int}(I)$, так как F' непрерывно (и поэтому локально ограничено) п. в. на I в силу кусочной линейности F.

4.3. Дифференцируемость неопределенного интеграла Петтиса в терминах слабой интегральной ограниченности и σ-компактной измеримости. В данном пункте работы мы получим условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (4.1):

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

в терминах введенных в первых двух пунктах характеристик. Если интегральная ограниченность f приводит к достаточному условию дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса по верхнему пределу (теорема 4.1), то σ-компактная измеримость приводит к необходимому условию (теорема 4.3).

В доказательстве теоремы 4.1 существенно используется изучавшееся нами ранее понятие компактного субдифференциала (см. [9–13, 15, 31]), которое мы вначале напомним. Обозначим через $U(0)$ произвольную замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) X.

Определение 4.3. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по включениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП $X, B \subset X$. Множество $B = \bigcap\limits_{\delta\to+0} B_\delta$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta,$$

если: $\forall U = U(0) \subset X \ \exists \delta_U > 0 : \ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$.

Из предыдущего определения вытекает замкнутость и выпуклость множества B. Далее будем обозначать через $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, $\overline{co}A$ — выпуклую замкнутую оболочку множества A и рассматривать отображения $F : I \to E$.

Определение 4.4. Пусть $x_0 \in I, \ \delta > 0$. *Частным K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0, отвечающим данному $\delta > 0$, называется множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{co}\left\{\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \quad \Bigg| \quad 0 < |h| < \delta\right\}.$$

Определение 4.5. Отображение $F : I \to X$ называется *компактно субдифференцируемым*, или *K-субдифференцируемым*, в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов $\partial_K F(x_0) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} \partial_K F(x_0, \delta)$. Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ называется *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом*, отображения F в точке x_0.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причем $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как показано в [9–13, 15, 31], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

Следующая теорема является первым основным результатом работы.

Теорема 4.1. *Если в* (4.1) $f \in B^w_{int}(I)$, *то F дифференцируемо почти всюду на I, причем справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x) \text{ п. в. на } I. \tag{4.10}$$

Для доказательства нам потребуется следующий вспомогательный результат, полученный ранее в [26, Theorem 1 (ii)].

Теорема 4.2. *Пусть отображение f из* (4.1) *сильно измеримо. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что* $\mathrm{mes}(I \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ *и множество*

$$X_F^\varepsilon := \left\{ \frac{F(E)}{\mathrm{mes}(E)} \;\middle|\; E \subset E_\varepsilon,\ \mathrm{mes}(E) > 0,\ E \in \Sigma \right\} \tag{4.11}$$

относительно компактно в X.

Переходим к доказательству теоремы 4.1.

Доказательство. 1. Покажем K-субдифференцируемость отображения F. Положим $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого n выберем соответствующее множество из (4.11) (мы считаем, что $E_{\varepsilon_n} \subset [a;\ b]$). Легко видеть, что множество $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_{\varepsilon_n})$ имеет нулевую меру Лебега. Поэтому почти все точки $x \in [a; b]$ принадлежат множеству E_{ε_n} при каком-либо $n \in \mathbb{N}$. Более того, согласно теореме о точках внешней плотности (см. [2, теорема 2, с. 68]), почти все точки каждого из множеств E_{ε_n} будут точками внешней плотности E_{ε_n}. Следовательно, для некоторого множества $e \subset [a; b]$ нулевой меры всякая точка $x \in [a; b] \backslash e$ является точкой внешней плотности какого-либо множества E_{ε_n}, т. е. для любой системы интервалов $\{I_m = (\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x, существуют $n \in \mathbb{N}$ и E_{ε_n} из (4.11) такие, что:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{mes}(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} = 0 \qquad (\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m, \quad \alpha_m \neq \beta_m)\,. \tag{4.12}$$

Далее,

$$\frac{(P)\int\limits_{I_m} f(t)dt}{\mathrm{mes}(I_m)} = \frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} = \frac{F(I_m \cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m \cap E_{\varepsilon_n})} \frac{\mathrm{mes}(I_m \cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} + \frac{F(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)}. \tag{4.13}$$

Отношение $\dfrac{F(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} \to 0$ при $m \to \infty$ в силу (4.12) и $f \in B_{int}^w(I)$. Из (4.12) также вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{mes}(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} = 1. \tag{4.14}$$

В силу (4.12)–(4.14), а также относительной компактности множеств $X_F^{1/n} \subset X$ (см. теорему 4.2) вытекает существование частичного предела любой последовательности

$$\frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} \quad \text{при } m \to \infty,$$

а также относительная компактность множества всех таких частичных пределов. Следовательно, F K-субдифференцируемо в точке x согласно [12, теорема 3].

2. Далее, сильная измеримость f влечет сепарабельнозначность отображений f и F. А для сепарабельнозначных отображений в пространства Фреше из компактной субдифференцируемости почти всюду вытекает дифференцируемость F почти всюду (см. [14, теорема 4]).

Равенство (4.10) в банаховом случае мы покажем, опираясь на сепарабельнозначность F, а также известный результат [5, п. 17.2.4, следствие 2] о существовании у каждого сепарабельного банахова пространства счетного множества линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки: если X — сепарабельное банахово пространство, то существует множество функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ такое, что $\forall x, y \in X$ $x = y \ \Leftrightarrow\ \ell_n(x) = \ell_n(y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\exists e_n : \mathrm{mes}(e_n) = 0$ и $\ell_n(F'(x)) = (\ell_n(F(x)))' = \ell_n(f(x))$ $\forall x \in I \backslash e_n$, т. к.

$$\ell_n(F(x)) = \ell_n\left((P)\int\limits_a^x f(t)dt\right) = \int\limits_a^x \ell_n(f(t))dt \quad \forall x \in [a; b].$$

Ясно, что множество $e = \bigcup\limits_{n=1}^{n} e_n$ имеет нулевую меру. При этом $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\ell_n(F'(x)) = \ell_n(f(x)) \quad \forall x \in I \backslash e,$$

откуда и вытекает равенство (4.10) для банаховых пространств X.

3. Пусть теперь X — пространство Фреше. Обозначим через $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — некоторую счетную определяющую систему полунорм в X. Обозначим через $\widehat{X}_j$ пополнения фактор-пространств $X_j = X/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{}_j = \|\cdot\|_j$. Для банаховых пространств $\widehat{X}_j\ \forall\ j\in\mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt - f(x)\right\|_j = 0 \quad \forall x\in[a;b]\backslash e_j, \tag{4.15}$$

где $\mathrm{mes}(e_j)=0$. Тогда (4.15) справедливо для всех $x\in[a;b]\backslash\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} e_j$. Это означает, что почти всюду на $[a;b]$ равенство (4.15) справедливо при всех $j\in\mathbb{N}$. Следовательно, $F'(x)=f(x)$ почти всюду на I. □

Опираясь на некоторые рассуждения предыдущего доказательства, покажем второй основной данного раздела результат работы.

Теорема 4.3. *Если в* (4.1) *отображение* F *дифференцируемо почти всюду на* I, *то* $f\in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$.

Доказательство. Рассуждая, как и в пунктах 2-3 предыдущего доказательства, легко проверить, что

$$F'(x)=f(x) \quad \text{для п. в.} \quad x\in I. \tag{4.16}$$

Пусть $\ell\in X^*$ — произвольный линейный непрерывный функционал на X. Тогда из (4.16) следует, что почти все точки $x\in I$ являются точками Лебега функции $\widetilde{f}=\ell(f)$, т. е. для произвольной системы интервалов $\{I_m=(\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\mathrm{mes}(I_m)}\int\limits_{I_m}|\widetilde{f}(t)-\widetilde{f}(x)|dt=0 \quad \text{почти всюду на } I,$$

откуда $\widetilde{f}\in B^w_{int}(I)$ (в пространстве $\mathbb{R}$) в силу предложения 4.3:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{f}(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}=0, \tag{4.17}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{mes}(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}=0.$$

Из (4.17) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\ell\left(\frac{F(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}\right)=0. \tag{4.18}$$

Рассуждая так же, как и в пункте 1 доказательства предыдущей теоремы, можно получить равенства (4.13) $\forall x\in I\backslash e$, $\mathrm{mes}(e)=0$. При этом

$$\ell\left(\frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}\right)=\ell\left(\frac{F(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}\right)\frac{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)}+\ell\left(\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)}\right),$$

откуда, переходя к пределу при $m\to\infty$, в силу (4.14), (4.16) и (4.18) мы имеем

$$\ell\left(F'(x)\right)\in\ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right),$$

так как $\dfrac{F(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}\in X_F^{1/n}\subset X\ \forall n\in\mathbb{N}$ (под $\overline{abs.co}A$ мы понимаем замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества $A\subset X$).

Итак, $\ell\left(F'(x)\right)\leqslant\sup\ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right)\ \forall\ell\in X^*$. По известному следствию из теоремы Хана—Банаха о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества $\forall x\in E_{1/n}\backslash e$:

$$F'(x)\in\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}, \quad \text{или} \quad F'(E_{1/n}\backslash e)\subset\overline{abs.co}\ X_F^{1/n},$$

причем все множества $\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}$ компактны как абсолютно выпуклые замыкания компактов (множества $\overline{X}_F^{1/n}$ компактны по теореме 4.2). Для завершения доказательства остается лишь заметить измеримость всех множеств $E_{1/n}\backslash e$. □

5. Аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса с использованием антикомпактов

Итак, в предыдущем разделе мы показали, что класс интегрируемых по Петтису отображений, для которых неопределенный интеграл Петтиса (4.1) почти всюду дифференцируем, достаточно специфичен. Более того, достаточно хорошо известно, что даже в случае дифференцируемости интеграла его производная может в любой точке не совпасть с подынтегральным отображением (см. работу [23]). Возникает естественная задача нахождения аналога теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла Петтиса в более универсальном случае. В данном разделе работы мы получим такой результат с использованием понятия антикомпактного множества в пространствах Фреше. Докажем интегрируемость по Бохнеру всякого сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения.

Теорема 5.1. *Пусть E — пространство Фреше. Если $f : I = [a; b] \to E$ сильно измеримо и интегрируемо по Петтису, то $\exists\ \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ такой, что f интегрируемо в $E_{\overline{C}}$ по Бохнеру.*

Доказательство. Напомним, что сильно измеримо $\Leftrightarrow$ когда f слабо измеримо и почти всюду сепарабельнозначно. Ввиду этого будем полагать, что E — сепарабельное пространство Фреше.

1. Начнем со случая банахова пространства E. Как известно [5], всякое такое пространство E инъективно непрерывно можно вложить в сепарабельное гильбертово пространство $H \cong l_2$. Обозначим через $\varphi : E \to H$ соответствующее непрерывное инъективное вложение. Тогда $\varphi(E) \subset H$ и $H^* \subset (\varphi(E))^* \cong E^*$ (A^* — сопряженное пространство к банахову пространству A). Поэтому сильная измеримость и слабая интегрируемость $f : I \to E$ означает сильную измеримость и слабую интегрируемость $\varphi(f) : I \to H$. Это означает, что для доказательства достаточно рассмотреть случай $E = H$.

2. Итак, $E = H \cong l_2$. Известно, что

$$h \in H \Leftrightarrow h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 < \infty.$$

Обозначим через $l_k(h) = h_k\ \forall k \in \mathbb{N} (l_k \in H^*)$. Ввиду интегрируемости $f : I \to H$ по Петтису отображение $f_k = l_k(f) : I \to \mathbb{R}$ интегрируемо по Лебегу, т. е.

$$\int_a^b |f_k(t)| dt = C_k < \infty.$$

Необходимо для всякого $f : I \to H$ доказать существование антикомпакта $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(H)$ такого, что $||f(t)||_{H_{\overline{C}}} : I \to \mathbb{R}$ измеримо и

$$\int_a^b ||f(t)||_{H_{\overline{C}}} dt < +\infty.$$

Пусть $H_{\widetilde{C}} = \left\{ h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots) \middle| \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h_k^2}{k^4 C_k^2} < +\infty \right\}$.

$H_{\widetilde{C}}$ — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $||h||_{H_{\widetilde{C}}} = \Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h_k^2}{k^4 C_k^2} \Big)^{\frac{1}{2}}$. Отметим, что поточечно $\forall t \in [a; b]$

$$||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2^4 C_2^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е. $f : I \to H_{\widetilde{C}}$ измеримо в пространстве $H_{\widetilde{C}}$ в силу слабой измеримости и сепарабельности. Далее, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2^4 C_2^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt <$$

$$< \int\limits_a^b \left(\frac{|f_1(t)|}{C_1} + \frac{|f_2(t)|}{2^2 C_2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|}{n^2 C_n} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{C_1} \int\limits_a^b |f_1(t)| dt + \frac{1}{2^2 C_2} \int\limits_a^b |f_2(t)| dt + .. + \frac{1}{n^2 C_n} \int\limits_a^b |f_n(t)| dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots . + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots . + \frac{1}{n^2} + \ldots = K < +\infty.$$

По теореме Фату

$$\int\limits_a^b ||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} dt \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leqslant K < +\infty.$$

Итак, f слабо измеримо в $H_{\widetilde{C}}$ ввиду $(H_{\widetilde{C}})^* \subset H^*$,

$$\int\limits_a^b ||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} dt < +\infty,$$

и поэтому $f : I \to H_{\widetilde{C}}$ интегрируемо по Бохнеру, что и требовалось.

3. Перейдем теперь к случаю, когда E — пространство Фреше. Поскольку теорема доказана для банаховых пространств, то $\forall j \in \mathbb{N}$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $\widehat{C}_j \subset \widehat{E}_j$, что

$$\int\limits_I \|f(t)\|_{\widehat{C}_j} dt < \infty.$$

Заметим, что $\| \cdot \|_{\lambda C} = \dfrac{1}{\lambda} \| \cdot \|_C \quad \forall \lambda > 0$ и подберем числа n_j $(j \in \mathbb{N})$ так, чтобы

$$\int\limits_I \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt < \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$C = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x\|_{n_j \widehat{C}_j} \leqslant 1 \right\}.$$

Поскольку E является проективным пределом пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому изоморфно некоторому подпространству произведения $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то C изоморфно замкнутому подмножеству произведения $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} n_j \widehat{C}_j$, которое компактно по теореме Тихонова. Следовательно, C является непустым абсолютно выпуклым компактом в E.

Функция $\|f(t)\|_C = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$ измерима как супремум последовательности измеримых функций $\|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$. Далее, воспользовавшись теоремой Б. Леви о предельном переходе, имеем

$$\int\limits_I \|f(t)\|_C dt = \int\limits_I \sup_{j\in\mathbb{N}} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt \leqslant \int\limits_I \sum_{j=1}^{\infty} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_I \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

$\square$

Из свойств интеграла Бохнера, а также предыдущего результата вытекает аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса по верхнему пределу.

Теорема 5.2. *Пусть E — пространство Фреше. Если $f : I = [a;b] \to E$ сильно измеримо и интегрируемо по Петтису, то существует антикомпакт $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ такой, что*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} ||f(t) - f(x_0)||_{E_{\overline{C}}} dt = 0$$

для почти всех $x_0 \in I = [a;b]$.

Следствие 5.1. *Если $K \in E$ — фиксированная постоянная, то для всякого $f : [a;b] \to E$ существует такой антикомпакт $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, что отображение*

$$F(x) = K + (P)\int\limits_a^x f(t)dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

почти всюду дифференцируемо в пространстве $E_{\overline{C}}$. При этом

$$F'_{E_{\overline{C}}}(x_0) = f(x_0) \text{ для почти всех } x_0 \in [a;b].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 3. — С. 21–77.
2. Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. Избранные главы. — М.: Наука, 1971.
3. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 6. — С. 51–116.
5. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006.
6. *Кутателадзе С. С.* Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг// В сб. «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения». — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 262–264.
7. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1940. — *4*. — С. 465–478.
8. *Ляпунов А. Н.* Теорема А. А. Ляпунова о выпуклости значений мер// В сб. «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения». — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 257–261.
9. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 165–175.
10. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона—Никодима верна в произвольном пространстве Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 55–69.
11. *Стонякин Ф. С.* Компактный субдифференциал вещественных функций// Динам. сист. — 2007. — *23*. — С. 99–112.
12. *Стонякин Ф. С.* Секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в метризуемые ЛВП// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Мат. Мех. Информ. и киберн.» — 2008. — *21* (*60*), № 1. — С. 41–53.
13. *Стонякин Ф. С.* K-свойство Радона—Никодима для пространств Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Мат. Мех. Информ. и киберн.» — 2009. — *22* (*61*), № 1. — С. 102–113.
14. Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Данжуа—Юнг—Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования// Тр. ИПММ НАН Украины. — 2010. — *20*. — С. 168–176.
15. *Стонякин Ф. С.* Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона—Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2010. — *23* (*62*), № 1. — С. 131–149.
16. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М: ИЛ, 1962.
17. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
18. *Cascales B., Kadets V., Rodriguez J.* Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces// J. Funct. Anal. — 2009. — *256*, № 3. — С. 673–699.

19. *Chen Y., Lai J., Parkes D. C., Procaccia A. D.* Truth, justice, and cake cutting// Games Econom. Behav. — 2013. — *77*, № 1. — С. 284–297.
20. *Dai P., Feinberg E. A.* Extension of Lyapunov's convexity theorem to subranges// arXiv:1102.2534v1 [math.PR]. — 2011.
21. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures. — Providence: Am. Math. Soc., 1977.
22. *Dilworth S. J., Girardi M.* Nowhere weak differentiability of the Pettis integral// Quaest. Math. — 1995. — *18*, № 4. — С. 365–380.
23. *Kadets V. M., Shumyatskiy B., Shvidkoy R., Tseytlin L., Zheltukhin K.* Some remarks on vector-valued integration// Math. Phys. Anal. Geom. — 2002. — *9*. — С. 48-–65.
24. *Maccheroni F., Marinacci M.* How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations// Soc. Choice Welf. — 2003. — *20*, № 3. — С. 457–465.
25. *Marrafa V.* The variational McShane integral in locconvex spaces// Rocky Mountain J. Math. — 2009. — *39*, № 6. — С. 1993–2013.
26. *Moedomo S., Uhl J. J.* Radon—Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals// Pacific J. Math. — 1971. — *38*, № 2. — С. 531–536.
27. *Mossel E., Tamuz O.* Truthful fair division// arXiv:1003.5480v2 [cs.GT]. — 2010.
28. *Naralenkov K. M.* On Denjoy type extensions of the Pettis integral// Czechoslovak Math. J. — 2010. — *60*, № 3. — С. 737–750.
29. *Naralenkov K. M.* On continuity and compactness of some vector-valued integrals// Rocky Mountain J. Math. — 2013. — *43*, № 3. — С. 1015–1022.
30. *Neyman J.* Un théorèm d'existence// C. R. Math. Acad. Sci. Paris — 1946. — *222*. — С. 843—845.
31. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon—Nikodym// Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — *16*, № 2. — С. 183–196.
32. *Yoon J. H., Park J. M., Kim Y. K., Kim B. M.* The AP-Henstok extension of the Dunford and Pettis integral// J. Chungcheong Math. Soc. — 2010. — *23*, № 4. — С. 879–884.

Ф. С. Стонякин
E-mail: fedyor@mail.ru