

О НЕВЯЗКИХ РЕШЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА© 2014 г. **В. В. ПАЛИН, Е. В. РАДКЕВИЧ, Н. Н. ЯКОВЛЕВ, Е. А. ЛУКАШЕВ**

Аннотация. Построена нестандартная регуляризация многокомпонентной системы Эйлера, получены аналоги условия Гюгонио и условия устойчивости Лакса. Исследована проблема локальной достижимости точек фазового пространства. Построены двойственные бифуркации однофронтных решений усеченной системы Эйлера в двухфронтные решения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с физики, которая определяет, во многом, задачи математического языка. При гиперзвуковых течениях, которые характеризуются относительно большими числами Маха, более 5 (несмотря на определенную условность этой границы, она общепринята), возникают серьезные отличия от обычных сверхзвуковых течений с умеренными числами Маха.

Первое отличие заключается в том (см. [8]), что теперь небольшие изменения скорости потока могут быть сравнимы со звуковой скоростью, т. е. обычное использование метода малых возмущений становится неприменимым. Это обстоятельство усложняет вычислительную сторону вопроса, но не затрагивает принципиальную — общие формулировки для расчета остаются прежними.

Более принципиальным моментом является изменение термодинамических свойств среды (см. классические работы [2, 8]). При движении с любой сверхзвуковой скоростью в газе возникает ударная волна. Если движение стационарно, то до ударной волны (вверх по потоку) поток остается невозмущенным — поскольку возмущения распространяются со звуковой скоростью, они не могут появиться раньше ударной волны. На самой ударной волне и непосредственно за ней происходят следующие явления: резко возрастают давление, плотность и температура. При этом, хотя величина давления может расти на пару порядков, а плотность — на порядок, их абсолютная величина невелика (вообще говоря, давление порядка атмосферного или чуть выше, а плотность в несколько раз меньше значений при нормальных условиях), т.к. на тех высотах (более 20 км), на которых эффективен гиперзвуковой полет, атмосфера сильно разрежена. А вот температура в области ударной волны может достигать нескольких тысяч градусов Кельвина, и это обстоятельство сильно меняет термодинамику и может приводить к новым явлениям.

В обычном состоянии у молекул воздуха возбуждены поступательные и вращательные степени свободы, и он подчиняется уравнению состояния идеального газа. При повышении температуры возбуждаются колебательные степени свободы, что приводит к изменению, например, теплоемкости, и, таким образом, уравнение состояния газа становится отличным от идеального.

При дальнейшем повышении температуры возникают явления диссоциации и химических реакций, т. е. бинарные молекулы основных компонент воздуха — азота и кислорода — распадаются, образуя атомарные газы (диссоциация), и, кроме того, например, могут образовываться радикалы — соединения азота с кислородом (NO и др.), — начинают идти химические реакции.

Вследствие изменения физики газов при гиперзвуковых скоростях необходимо включить в рассмотрение более сложное и динамичное представление о газодинамической среде, включая эффекты, связанные с ее микроструктурой, например, диффузионное расслоение. Так, в [3] сделан акцент на рассмотрении диспергирующих сред (в отличие от привычного акцента на эффекты вязкости и теплопроводности).

Еще раз подчеркнем, что изменение свойств среды именно при гиперзвуковых скоростях обусловлено возрастанием температуры и энергии за ударной волной выше некоторого критического уровня. При температурах порядка 1500°K, что соответствует примерно $M=7$, возбуждены колебательные степени свободы. При температурах порядка 3000°K, что соответствует примерно

$M=10$, диссоциируют молекулы кислорода, и начинаются химические реакции с образованием окиси азота, которая, в свою очередь, диссоциирует при дальнейшем повышении температуры. Отмечались явления неравномерного поведения функций, например, давления и концентрации некоторых компонент при установлении равновесного режима (см., например, [4]), а также достаточно интересное поведение температуры, связанное с появлением солитонобразных графиков (см., например, [7]). Отметим, что здесь мы имеем фактически течение многокомпонентной среды. В области собственно ударной волны на расстояниях порядка длины свободного пробега [1] происходит быстрое торможение потока. Как правило, требуется небольшое число столкновений, чтобы погасить выделенную компоненту скорости молекул, поэтому область ударной волны является узкой.

Таким образом, в гиперзвуковом потоке может возникнуть многокомпонентная смесь, и могут возникнуть градиенты концентрации отдельных компонент. Также естественным образом возникают градиенты температуры. Это обуславливает образование диффузионных потоков вещества и тепла. Структура этих потоков может быть достаточно сложной и включать разного рода неустойчивости. Стандартным механизмом, действующим в зоне ударной волны, считается вязкость, которая понимается в некотором условном смысле как действующая на микроуровне, хотя, вообще-то, вязкость — понятие макроскопическое.

В дальнейшем мы рассмотрим другой механизм микроструктурного уровня — диффузионное расслоение. На примере начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке для двухкомпонентной системы Эйлера мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов на основе нестандартной регуляризации системы уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии.

При использовании углеводородного горючего наблюдается повышенная чувствительность потока (особенно при относительно длительном периоде работы) в тракте ПЖРД к изменению условий в камере сгорания, когда возникает явление незапуска (*unstart*) [15], сильных осцилляций давления, порядка 400 Гц (см. рис. 8). Мы сознательно, на первой стадии, рассмотрим изотермическую задачу, чтобы найти грубые условия вибрационной газовой динамики, при которых возможно появления *unstart* для гиперзвукового потока. Эти условия помогут сформулировать задачи визуализации характерных свойств гиперзвуковых течений.

2. Многокомпонентная система Эйлера

Здесь мы приведем визуализацию начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке для двухкомпонентной системы Эйлера

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_1 + \partial_x (\rho_1 u_1) &= 0, \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x (\rho_2 u_2) &= 0, \\ \partial_t (\rho_1 u_1) + \partial_x (\rho_1 u_1^2 + P(\rho_1, \rho_2)) &= 0, \\ \partial_t (\rho_2 u_2) + \partial_x (\rho_2 u_2^2 + P(\rho_1, \rho_2)) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где ρ_1, ρ_2 и u_1, u_2 — соответственно, плотности и скорости компонент, $P(\rho_1, \rho_2)$ — давление.

Хорошо известно, что система уравнений Эйлера имеет много решений. А нет ли среди них решений, естественно отличных от вязких, которые обладали бы свойствами дальнего действия и самовозбуждения, и как их выделить?

Ниже мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов для сверхзвукового потока с достаточно большим числом Маха на основе нестандартной регуляризации системы уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии. Для этих целей мы прежде всего в двухкомпонентной системе Эйлера перейдем к новым переменным: концентрации $c = \rho_2/\rho$ активной компоненты, суммарной плотности $\rho = \rho_1 + \rho_2$, усредненной скорости $U = (1-c)u_1 + cu_2$ и скорости u_2 активной компоненты. В переменных (c, U, u_2, ρ) система (2.1) примет

следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_t c + U \partial_x c - \partial_x (c(U - u_2)) - c(U - u_2) \varrho^{-1} \partial_x \varrho &= 0, \\ \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) &= 0, \\ \partial_t (\varrho U) + \partial_x (\varrho U^2 + 2P(\varrho_1, \varrho_2)) + \partial_x \left(\frac{c}{1-c} \varrho (U - u_2)^2 \right) &= 0, \\ \partial_t (c \varrho u_2) + \partial_x (c \varrho u_2^2 + P(\varrho_1, \varrho_2)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В дальнейшем систему (2.2) будем называть приведенной системой Эйлера. Для простоты будем считать, что давление $P(\varrho_1, \varrho_2) = P(\varrho)$ не зависит от концентрации активной компоненты.

К приведенной системе Эйлера мы применим нестандартную регуляризацию вязкостью (второе, третье и четвертое уравнения) и введением отрицательной диффузии в уравнение для концентрации, используя уравнение Кана—Хилларда:

$$\begin{aligned} \partial_t c + U \partial_x c - \partial_x (c(U - u_2)) - c(U - u_2) \varrho^{-1} \partial_x \varrho &= \partial_x^2 (\Phi'(c) - \varepsilon^2 \partial_x^2 c), \\ \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) &= \varepsilon \partial_x^2 \varrho, \\ \partial_t (\varrho U) + \partial_x (\varrho U^2 + 2P(\varrho)) + \partial_x \left(\frac{c}{1-c} \varrho (U - u_2)^2 \right) &= \varepsilon \partial_x^2 U, \\ \partial_t (c \varrho u_2) + \partial_x (c \varrho u_2^2 + P(\varrho)) &= \varepsilon \partial_x^2 u_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Phi'(c) = 4(c - c^-)(c - c_{cr})(c - c^+)$ — потенциал Ван-дер-Ваальса, c_- , c^+ и c_{cr} — заданные константы такие, что $c_-, c_+, c_{cr} \in (0, 1)$. Через $K_\varepsilon c = \partial_x^2 (\Phi'(c) - \varepsilon^2 \partial_x^2 c)$ будем обозначать оператор Кана с симметричным потенциалом $\Phi(c) = (c - c_-)^2 (c - c_+)^2$, когда $2c_{cr} = c^+ + c^-$.

Нестандартность определения слабого решения для приведенной системы Эйлера связана с тем, что первое уравнение умножается на тестовую функцию $c(x, t) \varphi(x, t)$, где $\varphi(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в \mathbb{R}^2 , в то время как три уравнения для усредненной плотности, U и u_2 стандартно умножаем на тестовые функции $\psi_j(x, t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2, 3$, соответственно.

Сходства и различия с классическим случаем: имеется четыре семейства волн разрежения и четыре семейства устойчивых ударных волн (см. [16]). Три семейства устойчивых ударных волн (2.2) являются поднятием устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x (\varrho U) &= 0, \\ \partial_t (\varrho U) + \partial_x (\varrho U^2 + 2P(\varrho)) + \partial_x \left(\frac{c}{1-c} \varrho (U - u_2)^2 \right) &= 0, \\ \partial_t (c \varrho u_2) + \partial_x (c \varrho u_2^2 + P(\varrho)) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу приведенного выше определения слабого решения предельный переход при $[c] \rightarrow 0$ трех семейств ударных волн, определяемых устойчивыми ударными волнами усеченной системы Эйлера, дает три семейства устойчивых ударных волн, для которых первое приближение $c = \text{const}$ и U, u_2, ϱ — решение усеченной системы Эйлера.

Регуляризация (2.3) для многокомпонентной системы уравнений Эйлера позволяет выделить в ней невязкие решения, описывающие процессы с избыточной энергией (в мезомасштабе), которые прежде всего характеризуются дальнодействием и самовозбуждающимися режимами (например, коагуляция, начальная стадия кристаллизации сплавов). Нестандартные регуляризации классических моделей механики сплошных сред встречались и ранее (см. [6, 11, 12]).

Как мы отмечали выше, для нестандартной регуляризации двухкомпонентной системы Эйлера (2.3) решения задачи Римана, описывающие режимы с самовозбуждением, связаны с тремя семействами устойчивых ударных волн, которые есть поднятие (см. [16]) устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера (2.4). Ниже мы приводим (рис. 1, 2) результаты численного эксперимента, проведенного Ю. Г. Рыковым, В. Лосевым и О. Феодоритовой (ИПМ им. Келдыша). Рисунок справа — увеличенный вид бифуркации фронта ударной волны скорости второй компоненты. Для (2.4), как показал численный эксперимент, в фазовой плоскости переменных (ϱ, U, u_2)

выделяется множество точек, не достижимых цепочками устойчивых ударных волн и волн разрежения. Вход в это множество приводит к появлению бифуркации фронта ударной волны компоненты u_2 . При любом фиксированном $c \in (0, 1)$ при специальном подборе начальных данных можно получить неклассическое решение задачи Римана (так называемый «горбатый» кинк) с бифуркацией фронта ударной волны компоненты u_2 в два фронта, когда для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер.

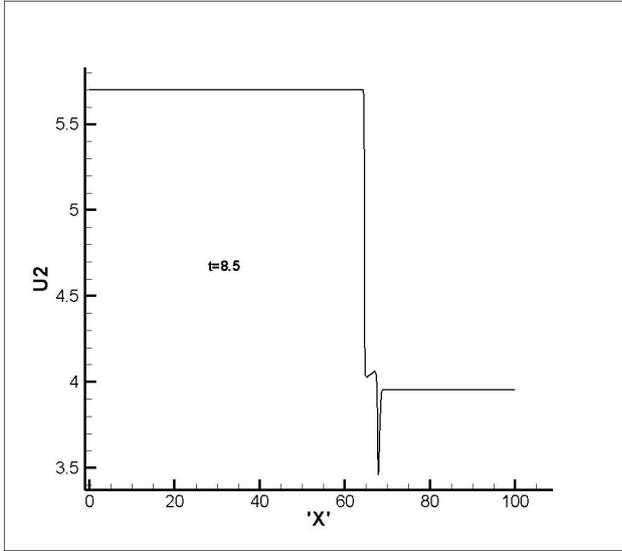


Рис. 1.

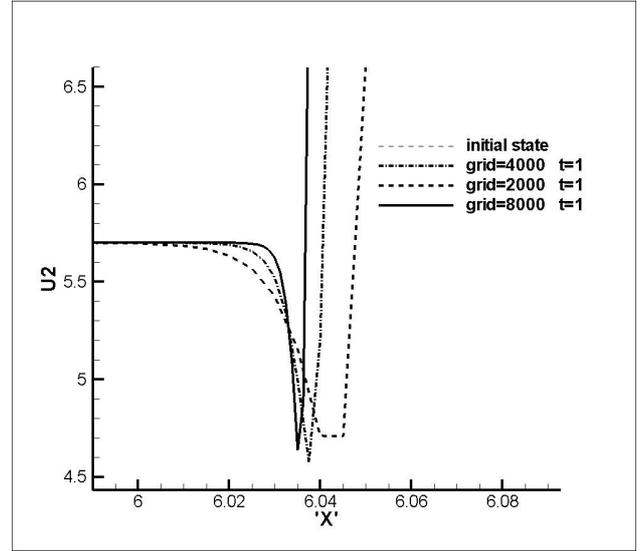


Рис. 2.

Ниже мы приведем построение двух двойственных бифуркаций однофронтного решения в двухфронтное для упрощенной усеченной системы

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P(\varrho)) &= 0, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)) &= 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

приводящее к неклассическому решению задачи Римана с профилем, например, типа «одногогорбого» кинка для скорости второй компоненты u_2 , численная реализация которого приведена выше, и профилем типа «полочки» (см. [10, 14]). Бифуркации реализуются распадом решения на две бегущих волны. Бифуркации реализуются как возмущения критических однофронтных решений. Исследование бифуркаций однофронтного решения в двухфронтное для полной усеченной системы (2.2) станет предметом исследования ближайшей публикации.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Приведенные выше результаты объясняют нестандартность поведения устойчивых ударных волн для приведенной системы. Чтобы пояснить природу такого поведения, мы приведем результаты численного эксперимента для упрощенной приведенной системы

$$\begin{aligned} \partial_t c + U \partial_x c &= 0, \\ \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P(\varrho)) &= 0, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

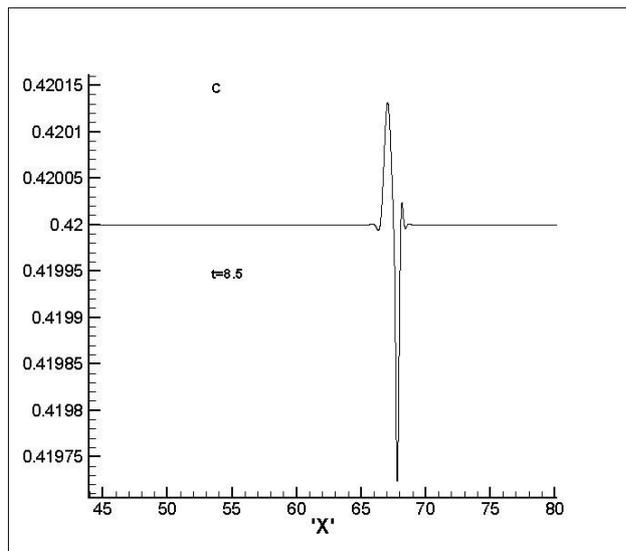


Рис. 3.

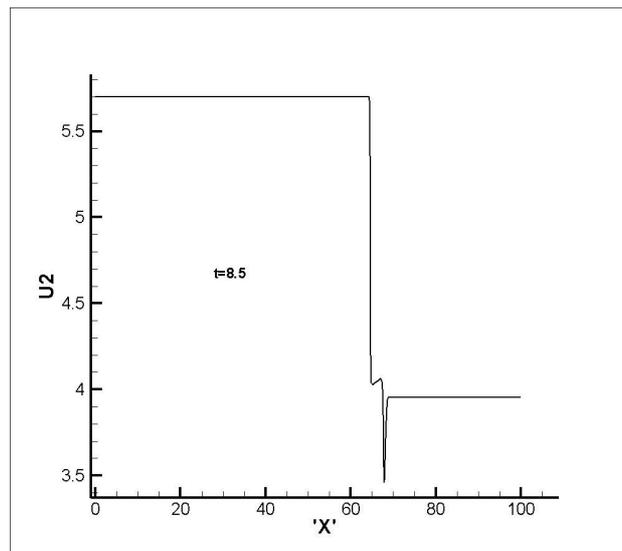


Рис. 4.

и ее усечения

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P(\varrho)) &= 0, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Чем интересна система (3.1)? Как было показано численно Ю.Г. Рыковым, В. Лосевым и О. Феодоровой (ИПМ им. Келдыша), усечение системы Эйлера (3.2) при любом фиксированном $c \in (0, 1)$ при специальном подборе начальных данных дает неклассические решения задачи Римана с бифуркацией фронта ударной волны компоненты u_2 в два фронта, когда для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер.

Анализ численного эксперимента. Начальная постоянная концентрация $c|_{t=0} = c_{cr} = 0,43$ берется из зоны лабильности активной компоненты. Такая концентрация включает механизм (рис. 3) бифуркации фронта ударной волны (рис. 4) для u_2 .

Возникший промежуток между передним и задним фронтами ударной волны для u_2 заполняется осцилляциями самовозбужденного решения.

Отметим, что усредненные компоненты ϱ, U не чувствительны к осцилляциям концентрации активной компоненты.

Пример визуализации. Предложенная регуляризация позволяет получить самовозбуждающиеся решения, по своему характеру визуализирующие реальные процессы в гиперзвуковом потоке, как например так называемый *unstart* (незажигание) в прямоточных ЖРД (рис. 7, 8; см. также [15]).

Слева характерное поведение второй скорости регуляризации (2.3). Длительность осцилляций регулируются входом в неклассическую зону и выхода из нее и может управляться граничными значениями слева для смешанной задачи Римана. Справа характерное давление *unstart*.

4. О ПРИРОДЕ БИФУРКАЦИЙ ОДНОФРОНТОВЫХ РЕШЕНИЙ УСЕЧЕННОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА

Как мы отмечали выше, основу «странного» поведения решений регуляризации (2.3) составляют бифуркации однофронтных решений усеченной системы Эйлера в двухфронтные решения. В этой статье для упрощенной усеченной системы Эйлера (4.2) мы приведем результаты, аналитически доказывающие существование двух двойственных бифуркаций однофронтных решений в двухфронтные решения. Перенос полученных результатов на полную усеченную систему (2.4) — предмет исследования ближайшей публикации.

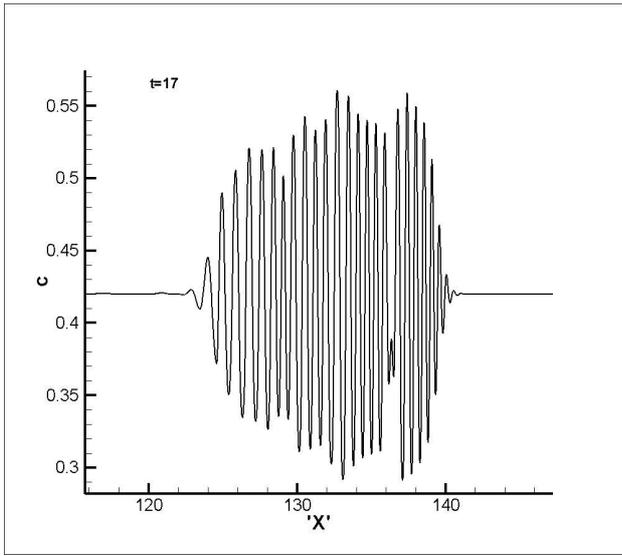


Рис. 5.

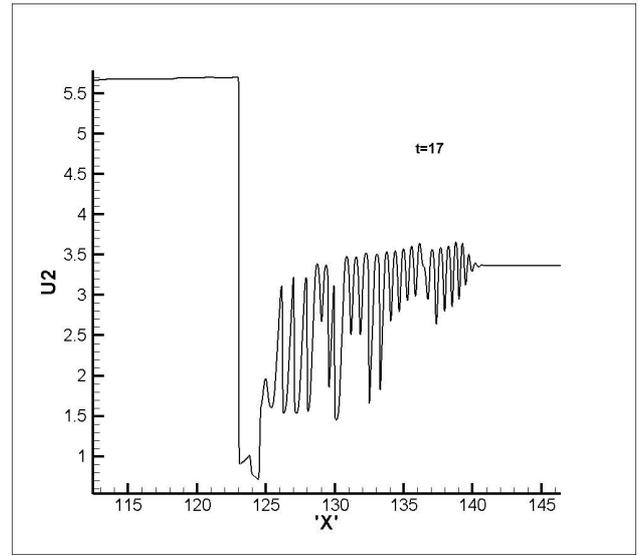


Рис. 6.

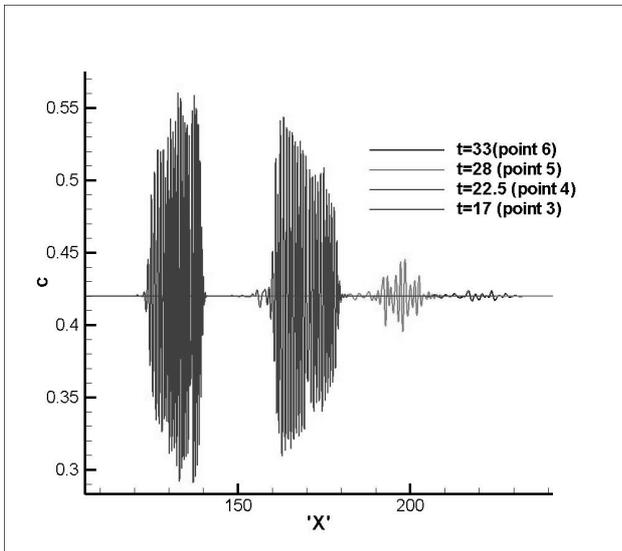


Рис. 7.

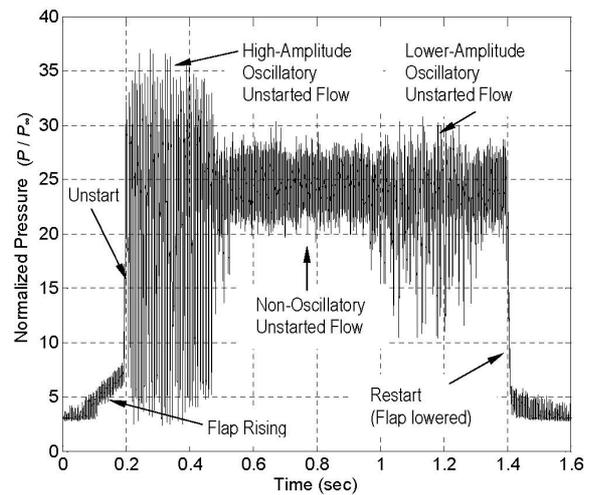


Рис. 8.

Многофронтные решения. Перейдем к исследованию условий существования двухфронтных решений усеченной системы Эйлера. Пусть $c_0 = \text{const}$. Рассмотрим упрощенную усеченную систему без квадратичной части

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + 2P) = 0, \\ \partial_t(c_0 \rho u_2) + \partial_x(c_0 \rho u_2^2 + P) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$V = (\rho, U, u_2)^T$$

и исследуем задачу Римана для системы (4.1), т. е. задачу Коши с начальными условиями

$$V|_{t=0} = \begin{cases} V_-, & x < 0, \\ V_+, & x > 0. \end{cases}$$

Ее регуляризация вязкостью имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = \varepsilon \partial_x^2 \rho, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + 2P) = \varepsilon \partial_x^2 U, \\ \partial_t(c_0 \rho u_2) + \partial_x(c_0 \rho u_2^2 + P) = \varepsilon \partial_x^2 u_2. \end{cases} \quad (4.2)$$

Выбор параметров задачи. Условия знаков. Будем предполагать, что выполнены следующие условия знаков:

$$[\varrho] < 0, \quad [U] < 0, \quad [u_2] < 0, \quad (4.3)$$

а также имеет место уравнение состояния

$$P(\varrho) = p_0 \varrho^\gamma, \quad (4.4)$$

где $p_0 > 0$, $\gamma > 1$ — заданные константы. Кроме того, будем предполагать, что имеет место неравенство

$$0 \leq \omega_1 < \omega. \quad (4.5)$$

4.1. Алгебраическое исследование. Перепишем систему (4.1) в форме Коши:

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + U \partial_x \varrho + \varrho \partial_x U = 0, \\ \partial_t U + \frac{2P'}{\varrho} \partial_x \varrho + U \partial_x U = 0, \\ \partial_t u_2 + \frac{c_0 u_2 (u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho} \partial_x \varrho - u_2 \partial_x U + 2u_2 \partial_x u_2 = 0. \end{cases}$$

Это можно записать в матричном виде:

$$\partial_t V + \mathcal{A} \partial_x V = \varepsilon \partial_x^2 V, \quad (4.6)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} U & \varrho & 0 \\ \frac{2P'}{\varrho} & U & 0 \\ \frac{c_0 u_2 (u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & 2u_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы имеют вид

$$\lambda_{\pm} = U \pm \sqrt{2P'}, \quad \lambda_3 = 2u_2, \quad (4.7)$$

и при $\varrho > 0$ нарушение строгой гиперболичности происходит на гиперповерхностях

$$\Sigma_{\pm} = \{(\varrho, U, u_2) | 2u_2 = U \pm \sqrt{2P'}\}.$$

Критическое многообразие Σ_+ . Условие жордановости. Будем рассматривать окрестность гиперповерхности Σ_+ (для Σ_- все аналогично). Обозначим

$$\mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A} - \lambda_{\pm} E.$$

Тогда на критической поверхности Σ_+ имеем

$$\mathcal{A}_{\pm}|_{\Sigma_+} = \begin{pmatrix} \mp \sqrt{2P'} & \varrho & 0 \\ \frac{2P'}{\varrho} & \mp \sqrt{2P'} & 0 \\ \frac{c_0 u_2 (\sqrt{2P'} - u_2) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & \sqrt{2P'} \mp \sqrt{2P'} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ получаем, что если выполнено *условие жордановости*

$$c_0 u_2^2 - P' \neq 0, \quad (4.8)$$

то ранг матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ равен двум, т. е. λ_+ соответствует жорданова клетка размера 2. Соответствующий собственный вектор $\nu = (0, 0, 1)^T$ будем называть критическим.

Некритический собственный вектор. Для матрицы A_- собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, имеет вид

$$\nu_- = (\varrho, -\sqrt{2P'}, \alpha_-)^T,$$

где

$$\alpha_- = -u_2 + \frac{u_2^2}{2\sqrt{2P'}} - \frac{\sqrt{2P'}}{4c_0}.$$

Предложение 4.1. *Проекция множества нарушения строгой гиперболичности Σ_+ на плоскость переменных (U, u_2) разделяет плоскость переменных (U, u_2) на две открытые части.*

Отсюда следует несправедливость теоремы А. Майда [13] для усеченной системы Эйлера (2.4).

4.2. Вид одно- и двухфронтных решений для регуляризованной системы. Будем искать решения системы (4.2) в виде бегущих волн. Для случая, когда решение имеет один общий фронт, положим

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad u_2 = u_2\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right). \quad (4.9)$$

Для случая двухфронтного решения положим

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad u_2 = a\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right) + b\left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\right). \quad (4.10)$$

Обозначим также

$$\dot{x}^*(t) = \omega, \quad \dot{x}_1(t) = \omega_1.$$

Условия стабилизации. Потребуем, чтобы для однофронтных решений имело место *условие стабилизации*:

$$\begin{aligned} \varrho(\pm\infty) &= \varrho_{\pm}, \quad U(\pm\infty) = U_{\pm}, \quad u_2(\pm\infty) = u_{2,\pm}, \\ \dot{\varrho}(\pm\infty) &= 0, \quad \dot{U}(\pm\infty) = 0, \quad \dot{u}_2(\pm\infty) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Для двухфронтных решений условие стабилизации имеет вид

$$\begin{aligned} \varrho(\pm\infty) &= \varrho_{\pm}, \quad U(\pm\infty) = U_{\pm}, \quad a(-\infty) = u_{2,-}, \\ b(-\infty) &= 0, \quad (a + b)(+\infty) = u_{2,+} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Система ОДУ для однофронтного решения. Условия Рэнкина—Гюгоньо. После подстановки вида однофронтного решения (4.9) в (4.2) получаем систему ОДУ

$$\begin{cases} -\omega(\varrho - \varrho_-) + (\varrho U - \varrho_- U_-) = \dot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U - \varrho_- U_-) + (\varrho U^2 - \varrho_- U_-^2 + 2(P - P_-)) = \dot{U}, \\ -c_0\omega(\varrho u_2 - \varrho_- u_{2,-}) + c_0(\varrho u_2^2 - \varrho_- u_{2,-}^2) + P - P_- = \dot{u}_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Проинтегрировав эту систему по $(-\infty; +\infty)$ и воспользовавшись условиями стабилизации (4.11), получаем условия Рэнкина—Гюгоньо для однофронтного случая:

$$\begin{cases} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[c_0\varrho u_2] + [c_0\varrho u_2^2 + P] = 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

4.3. Система ОДУ для двухфронтного решения. Заметим, что регуляризованная система (4.2) допускает факторизацию: первые два уравнения этой системы не содержат неизвестной функции u_2 . После подстановки явного вида двухфронтного решения соответствующая первым двум уравнениям (4.2) система ОДУ имеет вид

$$\begin{cases} -\omega \dot{\varrho} + (\varrho U) = \ddot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U) + (\varrho U^2 + 2P) = \ddot{U}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Рассмотрим теперь ОДУ, соответствующее третьему уравнению системы (4.2). После подстановки вида двухфронтного решения (4.10) получаем:

$$-\omega c_0(\dot{\varrho}(a+b) + \varrho \dot{a}) - \omega_1 c_0 \dot{\varrho} b + (c_0 \varrho(a+b)^2 + P) = (a+b)\ddot{\varrho}.$$

После перегруппировки это уравнение принимает вид

$$-\omega c_0(\varrho \dot{a}) - \omega_1 c_0(\varrho \dot{b}) + (\omega_1 - \omega)c_0 \dot{\varrho} b + (c_0 \varrho(a+b)^2 + P) = (a+b)\ddot{\varrho}.$$

Условия Рэнкина—Гюгонио двухфронтной задачи. Аналогично тому, как было получено условие Рэнкина—Гюгонио для однофронтного решения, получим:

$$\begin{cases} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[\varrho u_2] + (\omega - \omega_1)[b]\varrho_- + \left[\varrho u_2^2 + \frac{P}{c_0}\right] = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

При этом в последнем уравнении мы воспользовались равенством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varrho}(\tau)b(\tau)d\tau = [b]\varrho_-,$$

которое имеет место при условии (4.5).

5. БИФУРКАЦИИ КРИТИЧЕСКИХ ОДНОФРОНТОВЫХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе мы приведем построение бифуркаций однофронтного решения в двухфронтное как возмущение критических однофронтных решений усеченной системы. Бифуркация реализуется распадом решения на две бегущих волны. Каков сценарий бифуркации? Задача этого раздела — найти условия бифуркации однофронтного решения в двухфронтное, т. е. природу разветвления фронта ударной волны. Мы покажем ниже, что бифуркация возникает как возмущение критических решений $(\varrho^{cr}, U^{cr}, u_2^{cr})$, исследованных выше.

5.1. Однофронтное решение. Продолжим исследование однофронтных решений. Система (4.13) факторизуется, поэтому исследуем сначала первые два уравнения:

$$\begin{aligned} -\omega(\varrho - \varrho_-) + \varrho U - \varrho_- U_- &= \dot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U - \varrho_- U_-) + \varrho U^2 - \varrho_- U_-^2 + 2(P - P_-) &= \dot{U}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Определим условия Лакса, при которых есть сепаратрисное решение. Тогда существует пара ϱ, U монотонных функций, являющаяся решением системы ОДУ (5.1) и удовлетворяющая условиям стабилизации

$$\begin{aligned} \varrho(\pm\infty; t) &= \varrho_{\pm}(t), \quad U(\pm\infty; t) = U_{\pm}(t), \\ \dot{\varrho}(\pm\infty; t) &= 0, \quad \dot{U}(\pm\infty; t) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

с условиями Гюгонио

$$\begin{aligned} -\omega[\varrho] + [\varrho U] &= 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2] &= 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\omega = \dot{x}^*$. Из условий Гюгонио получаем

$$\omega = \frac{[\varrho U]}{[\varrho]} = U_- + \varrho_+ \frac{[U]}{[\varrho]},$$

$$-\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = \varrho_+^2 \frac{[U]^2}{|[[\varrho]]|} + \varrho_+[U]^2 + 2[P] = 0.$$

В дальнейшем рассматриваем случай, когда

$$[\varrho] < 0, \quad [U] < 0. \quad (5.4)$$

Отсюда

$$|[U]| = \sqrt{\frac{2}{\varrho_+ \varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} |[[\varrho]]|, \quad \omega = U_- + \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}. \quad (5.5)$$

Как мы установили выше, собственные значения усеченной системы имеют вид

$$\lambda_1(\tau) = U - \sqrt{P'}, \quad \lambda_2(\tau) = U + \sqrt{P'}, \quad \lambda_3(\tau) = 2u_2.$$

Положим $\lambda_j^\pm = \lambda_j(\pm\infty)$. Теперь сформулируем условие Лакса существования сепаратрисного решения системы (5.1) усредненных компонент. Рассмотрим два случая.

Условие 5.1 (Условие устойчивости Лакса). Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства

$$\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \omega, \quad \lambda_1^- < \omega < \lambda_2^-. \quad (5.6)$$

Это условие определяет интервал устойчивых скоростей ω для ОДУ усредненных параметров (ϱ, U) . Неравенства (5.6) гарантируют существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (5.1) для усредненных параметров. Проверим справедливость этих неравенств для скорости ω , определяемой условием Гюгио при выбранном нами конусе скачков $[\varrho] < 0, [U] < 0$.

Лемма 5.1. Пусть $\varrho, U > 0, [\varrho] < 0, [U] < 0$. Дополнительно потребуем, чтобы

$$\varrho_- - 2\varrho_+ < 0. \quad (5.7)$$

Тогда скорость ω , определяемая условиями Гюгио (5.3), удовлетворяет неравенствам (5.6) условия Лакса для подсистемы первых двух уравнений (5.1) усредненных компонент.

В силу (5.5) неравенства (5.6) переписутся в виде

$$U_- - \sqrt{P'_-} < \omega = U_- + \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} < U_- + \sqrt{P'_-},$$

$$U_+ + \sqrt{P'_+} = U_- - \sqrt{\frac{2}{\varrho_+ \varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} |[[\varrho]]| + \sqrt{P'_+} < \omega = U_- + \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}},$$

что эквивалентно

$$\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} < \sqrt{P'_+} < \sqrt{\frac{2}{\varrho_+ \varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} |[[\varrho]]| + \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}} = \sqrt{\frac{2\varrho_-}{\varrho_+}} \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}},$$

или

$$(P_- - P_+) - \frac{\varrho_- - 2\varrho_+}{\varrho_-} (P_- - P_+) < P'_+(\varrho_- - \varrho_+) < (P_- - P_+) + \frac{2\varrho_- - \varrho_+}{\varrho_+} (P_- - P_+).$$

В силу выпуклости P вниз, имеем

$$(P_- - P_+) - P'_+(\varrho_- - \varrho_+) > 0. \quad (5.8)$$

Учтем неравенство (5.7). Тогда из (5.7) и (5.8) следует справедливость неравенств (5.6). Это завершает доказательство леммы. В дальнейшем будем считать ω выбранным условием Гюгио однофронтной задачи.

Нарушение условия Лакса. Теперь докажем существование двух критических решений системы ОДУ (5.1). Пусть в фазовом пространстве ось u_2 направлена вверх, перпендикулярно плоскости усредненных переменных (ϱ, U) .

Условие 5.2 (Условие устойчивости Лакса). Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства:

$$\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \omega < \lambda_3^+, \quad \lambda_1^- < \omega < \lambda_2^- < \lambda_3^-. \quad (5.9)$$

Это условие гарантирует существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (4.13). Здесь возможны два сценария управления устойчивыми ударными волнами (и их регуляризациями) для получения критических решений системы (4.13).

Одно критическое решение, которое назовем верхним, получим управлением левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь выше верхней ветви критического многообразия Σ_+ , уменьшая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr})$.

Второе критическое решение, которое назовем нижним, получим, если в фазовой плоскости будем управлять левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь ниже верхней ветви критического многообразия Σ_+ и увеличивая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr})$.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия леммы 5.1 и

$$\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} > 0. \quad (5.10)$$

Для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega + \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right)} \right) \quad (5.11)$$

существует монотонно убывающее стабилизирующееся решение уравнения (5.14), для которого $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr})$ принадлежат верхней ветви критического многообразия Σ_+ , и $u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\omega$. Более того, не существует однофронтного монотонно убывающего стабилизирующегося решения уравнения (5.14) с теми же компонентами (ϱ, U) , но для которого $u_{2,-} < u_{2,-}^{cr}$, отвечающего верхнему критическому решению.

Теорема 5.2. Пусть выполнены условия леммы 5.1 и

$$\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2 > 0. \quad (5.12)$$

Для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\omega \quad (5.13)$$

существует однофронтное монотонно убывающее стабилизирующееся решение $(\varrho^{cr}, U^{cr}, u_{2,-}^{cr})$ системы (4.13), для которого левое предельное значение $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr}) \in \Sigma_+$, и

$$u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega - \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_+} \left(\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2 \right)} \right).$$

Более того, не существует монотонно убывающего стабилизирующегося решения уравнения (5.14) с теми же компонентами (ϱ, U) , но для которого $u_{2,-} > u_{2,-}^{cr}$, отвечающего нижнему критическому решению.

Замечание 5.1. Отметим, что условие (5.12) справедливо, если

$$0 < U_- < \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}} \left(-1 + \sqrt{\frac{4\varrho_-}{c_0\varrho_+}} \right) \sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}.$$

Доказательство. Исследуем третье уравнение системы ОДУ (4.13) для однофронтовой задачи:

$$-\omega c_0(\varrho u_2 - \varrho_- u_{2,-}) + c_0(\varrho u_2^2 - \varrho_- u_{2,-}^2) + P - P_- = \dot{u}_2. \quad (5.14)$$

Рассмотрим уравнение для нулевых изоклин

$$-\omega u_2 + u_2^2 - \frac{\varrho_-}{\varrho} u_{2,-}^2 + \frac{\varrho_-}{\varrho} \omega u_{2,-} + \frac{P - P_-}{c_0 \varrho} = 0.$$

Для $2u_{2,-} = \omega + \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right)}$ имеем

$$\begin{aligned} u_{2,-}(\omega - u_{2,-}) + \frac{P - P_-}{c_0 \varrho_-} &= \frac{1}{4} \left(\omega + \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right)} \right) \left(\omega - \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right)} \right) + \frac{P - P_-}{c_0 \varrho_-} = \\ &= \frac{1}{4} \omega^2 - \frac{1}{4} \frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right) = \frac{1}{4} \frac{\varrho_+}{\varrho_-} \omega^2 + \frac{P - P_+}{c_0 \varrho_-} > 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнение для изоклин переписывается в виде

$$-\omega u_2 + u_2^2 + \frac{1}{4} \frac{\varrho_+}{\varrho} \omega^2 + \frac{P - P_+}{c_0 \varrho} = 0.$$

Отсюда дискриминант

$$D = \omega^2 - \frac{\varrho_+}{\varrho} \omega^2 - \frac{4(P - P_+)}{c_0 \varrho} = \frac{\varrho - \varrho_+}{\varrho} \omega^2 - \frac{4(P - P_+)}{c_0 \varrho} > 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

поскольку монотонно убывает ($\dot{D} < 0$, так как $\dot{\varrho} < 0$) и

$$D^+ = 0, \quad D^- = \frac{\varrho_- - \varrho_+}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \right) > 0$$

в силу условия (5.10). Следовательно, существуют нулевые изоклины $u_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega \pm D)$. Отсюда следует существование стабилизирующегося решения уравнения (5.14), которое есть поточечный предел строго монотонно убывающих не критических решений для $u_{2,-} > u_{2,-}^{cr}$.

Последнее. Если $u_{2,-} < u_{2,-}^{cr}$, нетрудно видеть, что $D^+ < 0$ и условие стабилизации (5.2) нарушается. Это завершает доказательство теоремы (5.1). Доказательство теоремы (5.2) аналогично. \square

Лемма 5.2. Для верхнего критического решения справедливы следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} u_2^{cr} &= u_{2,+}^{cr} + \frac{1}{\varrho_+} \frac{1}{\tau} + o\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow +\infty, \\ \dot{\varrho} &= o(\dot{u}_2^{cr}), \quad \tau \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Соответственно, для нижнего критического решения имеем

$$\begin{aligned} u_2^{cr} &= u_{2,-}^{cr} + \frac{1}{\varrho_-} \frac{1}{\tau} + o\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \rightarrow -\infty, \\ \dot{\varrho} &= o(\dot{u}_2^{cr}), \quad \tau \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Лемма есть следствие условия устойчивости Лакса (5.9) для ударных волн усеченной системы (2.4), регуляризация которой при этих условиях имеет сепаратрисные решения ОДУ однофронтной задачи.

5.2. О бифуркации верхнего критического решения. Теперь получим бифуркацию типа горбатого кинка как возмущение верхнего критического решения, существующего при условии

$$\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0.$$

В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической однофронтной ударной волны на две: замедление критического решения и со старой скоростью сброс предвестника с немонотонным отрицательным профилем типа горбатого кинка. То есть мы понижаем правое предельное значение $u_{2,+}$, опуская его ниже критического $u_{2,+}^{cr}$ (переход каустики). Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн.

После подстановки вида двухфронтного решения (4.2) в систему ОДУ (4.15), (4.3) при u_2 вида

$$u_2 = a_0 \left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon} \right) + b_0 \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right) \quad (5.17)$$

получаем третье уравнение системы ОДУ двухфронтной задачи Римана:

$$\begin{aligned} & -\omega c_0(\varrho a_0 - \varrho_- a_0^-) - \omega_1 c_0(\varrho b_0 - \varrho_- b_0^-) + \\ & + (\omega_1 - \omega) c_0 \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} b_0 ds + c_0(\varrho(a_0 + b_0)^2 - \varrho(a_0^- + b_0^-)^2 + P - P^-) = (a_0 + b_0) \dot{\quad} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Выбор критического однофронтного решения. Потребуем выполнения условия

$$\omega^2 > \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \quad (5.19)$$

существования верхнего критического решения. Разложение (5.17) будем искать как возмущение верхнего критического решения. Для этого положим $b_0(x, t) = u_2^{cr} \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right)$, где $\dot{x}_1 = \omega_1$, тем самым ускоряя или замедляя верхнее критическое решение $u_2(x, t)$, где $u_2^{cr}(\tau)$ — решение ОДУ (5.14), отвечающее скорости фронта ω . Предельные константы верхнего критического решения:

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega + \sqrt{\frac{[\varrho]}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \right), \quad u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2} \omega. \quad (5.20)$$

Тогда для возмущения a_0 получим уравнение

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho(a_0 + 2u_{2,-}^{cr} - \omega)a_0 - c_0(\omega_1 - \omega)(\varrho u_{2,-}^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) + c_0(\omega_1 - \omega) \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_{2,-}^{cr} ds \quad (5.21)$$

с условиями стабилизации

$$a_0^- = 0, \quad (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^- = 0.$$

В рассматриваемом случае третье условие Гюнио двухфронтной задачи запишется в виде

$$\varrho_+(a_0^+ - \omega)a^+ - \frac{1}{2}(\omega - \omega_1)\varrho_{\pm} \sqrt{\frac{[\varrho]}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} = 0, \quad (5.22)$$

где плюс или минус в (5.22) выбираем в зависимости от знака $\omega_1 - \omega$. Здесь мы использовали справедливость соотношения

$$-\omega[\varrho u_{2,-}^{cr}] + [\varrho(u_{2,-}^{cr})^2] + \frac{1}{c_0}[P] = 0,$$

для критического управления u_2^{cr} . Прежде всего определимся со знаком $\omega_1 - \omega$. Для этого исследуем нулевые изоклины уравнения (5.21):

$$a_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-(2u_2^{cr} - \omega) \pm \sqrt{D_a} \right), \quad a_-^- = \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}, \quad a_-^+ = 0.$$

Дискриминант

$$D_a = (2u_2^{cr} - \omega)^2 - \frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho} \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + 4(\omega_1 - \omega) \left(u_2^{cr} - \frac{\varrho_-}{\varrho} u_{2,-}^{cr} \right).$$

Чтобы определить знак $\omega_1 - \omega$, исследуем поведение дискриминанта. Имеем

$$D_a^- = \frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right),$$

$$D_a^+ = -\frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho^+} \left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho_+ u_{2,+}^{cr} + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) \geq 0,$$

если

$$Z = \omega - \omega_1 > 0. \quad (5.23)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$G(Z, \tau) = (\omega - \omega_1) \left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho u_2^{cr} + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad (5.24)$$

поскольку $G(Z, -\infty) = 0$ и

$$\dot{G} = (\omega - \omega_1) \dot{\varrho} u_2^{cr} > 0.$$

Таким образом, мы замедляем верхнее критическое решение и возмущение a_0 есть предвестник. Тогда получаем следующую спектральную задачу по параметру Z :

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0 + c_0 Z (\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) - c_0 Z \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds, \quad (5.25)$$

$$a_0^- = 0, \quad (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^+ = 0,$$

$$(a_0^+ - \omega) a^+ - \frac{\varrho_-}{2\varrho_+} Z \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} = 0. \quad (5.26)$$

Задача состоит в нахождении стабилизирующегося решения уравнения (5.25).

Немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи назовем *одногорбым кинком*, если его график $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает, стабилизируясь к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Соответственно, *двугорбым кинком* назовем немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи, график которого $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает до пересечения с ней в точке его максимума. Далее убывает, находясь между нулевыми изоклинами, и стабилизируется к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Теорема 5.3. Пусть выполнены условия леммы (5.1) и оценки (5.19).

1. Пусть

$$\omega \geq Z \geq \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}, \quad (5.27)$$

то существует немонотонное решение задачи (5.25) с профилем типа одногорбого кинка.

Более того, существует $Z_* < \sqrt{\frac{||[\varrho]||}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}$ такое, что для

$$0 < Z_* \leq Z \leq \sqrt{\frac{||[\varrho]||}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \quad (5.28)$$

существует немонотонное решение задачи (5.25) с профилем типа одnogорбого кинка.
2. Для

$$0 < Z < Z_* \quad (5.29)$$

существует немонотонное решение задачи (5.25) с профилем типа двугорбого кинка.

Доказательство. Имеем производную

$$\dot{D}_a = 4 \left((2u_2^{cr} - \omega - Z) \dot{u}_2^{cr} + Z \left[-\frac{1}{\varrho^2} \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \frac{1}{\varrho} u_2^{cr} - \frac{\varrho_-}{\varrho^2} u_{2,-}^{cr} \right] \dot{\varrho} \right).$$

В силу (5.24), если $Z > 0$, то

$$\dot{D}_a > 4(2u_2^{cr} - \omega - Z) \dot{u}_2^{cr} \geq 0$$

при

$$Z \geq \sqrt{\frac{||[\varrho]||}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}. \quad (5.30)$$

Теперь исследуем производную

$$\dot{a}_- = - \frac{2 \left[(\sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z) \dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) \dot{\varrho} \right]}{\sqrt{D_a}}.$$

Положим

$$K = \sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z = -2a_- - Z.$$

Отсюда

$$\dot{K} = \frac{4 \left[K \dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) \dot{\varrho} \right]}{\sqrt{D_a}},$$

или

$$\dot{K} = \frac{4 \dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} K + \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho}.$$

Интегрируя, получим

$$K = \left(\sqrt{\frac{||[\varrho]||}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} + \omega - Z \right) e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} + \\ + e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\int_{-\infty}^s \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho} ds > 0,$$

поскольку $Z \leq \omega$. Отсюда в силу леммы (5.2) следует, что $\dot{K} < 0$ для достаточно больших значений $\tau > \tau_*$. Из последнего следует, что

$$\dot{a}_- > 0, \quad \tau > \tau_*$$

т. е. нижняя изоклина возрастает в окрестности $\tau = \infty$. Имеем

$$K^+ - K^- = - \left(\sqrt{\frac{||[\varrho]||}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} + \omega - Z \right) \left(1 - e^{-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \right) +$$

$$+ e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\int_{-\infty}^s \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho} ds.$$

Покажем, что $K^+ - K^- < 0$. Для этого сделаем оценку интеграла:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\int_{-\infty}^s \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4 \left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho u_2^{cr} + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} (-\dot{\varrho}) ds \leq \\ &\leq \frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2} \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds, \end{aligned}$$

где

$$e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds = o(|\varrho|).$$

Отсюда следует, что $K^+ - K^- < 0$ при

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} + \omega - Z - \frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2} \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds = \\ &= \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \left(1 - \frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2} e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds \right) + \omega - Z > 0, \end{aligned}$$

что справедливо при условии $\omega - Z \geq 0$ и достаточно малом $|\varrho|$. Из $K^+ - K^- < 0$ получаем, что

$$a_-^+ - a_-^- > 0.$$

В то же время, в окрестности $\tau = -\infty$ в силу леммы (5.2) имеем

$$\dot{K} = \frac{4\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} K + \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho} = \frac{4K\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} + o(\dot{u}_2^{cr}) < 0,$$

следовательно, $\dot{a}_0 >$ в окрестности $\tau = -\infty$, и нижняя изоклина в этой окрестности возрастает. Отсюда следует существование немонотонного стабилизирующего решения задачи (5.25) типа одностороннего кинка. Это завершает доказательство теоремы (5.3). \square

Осталось исследовать случай, когда

$$0 < Z < \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}. \quad (5.31)$$

В этом случае в силу леммы (5.2) существует τ_* такое, что

$$\dot{a}_- = -\frac{2(\sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} + o(\dot{u}_2^{cr}) > 0 \quad \forall \tau < \tau_*,$$

и такое τ_{**} , что

$$\dot{a}_- = -\frac{2(\sqrt{D_a^+} - Z)\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} + o(\dot{u}_2^{cr}) < 0 \quad \forall \tau > \tau_{**},$$

где

$$\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho_+ u_{2,+}^{cr} + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds = \varrho_+ \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} (u_2^{cr} - u^{cr}) ds > \frac{\varrho_+}{4} Z,$$

если выполнено условие (5.31). Таким образом, существует точка максимума функции a_- . Отсюда следует существование $Z_* < \sqrt{\frac{[\varrho]}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)}$, и для $Z \in \left[Z_*, \sqrt{\frac{[\varrho]}{\varrho_-} \left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} \right)} \right)$ есть немонотонное стабилизирующееся решение задачи (5.25) типа одnogорбого кинка.

Для $Z \in (0, Z_*)$ существует решение типа двугорбого кинка, график которого $y = a_-$ стар-тует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает до пересечения с ней в точке его максимума. Далее убывает, находясь между нулевыми изоклинами, и стабилизируется к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Причиной появления решения такого профиля является уменьшение показателя стабилизации u_2^{cr} при $\tau \rightarrow -\infty$ с уменьшением Z и увеличением максимума a_- .

5.3. О бифуркации нижнего критического решения. Теперь исследуем возмущение нижнего критического однофронтного решения, существующего при условии

$$\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0.$$

В этом пункте мы построим бифуркации как возмущения нижнего критического однофронтного решения.

В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, нижнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом снизу к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка подняться выше критического многообразия приводит к распаду классической однофронтной ударной волны на две: замедленную критическую волну и со старой скоростью сброс предвестника. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн.

Итак, рассмотрим ОДУ, соответствующее третьему уравнению системы (4.1) в быстрых переменных для двухфронтной задачи. После подстановки двухфронтного решения (4.10) в виде $u_2 = a_0 \left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon} \right) + b_0 \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right)$ получаем бифуркацию типа горбатого кинка как возмущение верхнего критического решения. В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка подняться выше критического многообразия приводит к распаду классической однофронтной ударной волны на две: ускорение нижнего критического решения и со старой скоростью сброс послевестника с немонотонным отрицательным профилем. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн.

Так же как выше, после подстановки вида двухфронтного решения (4.2) в систему (4.15), (4.3) для u_2

$$u_2 = a_0 \left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon} \right) + b_0 \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right) \tag{5.32}$$

получаем третье уравнение системы ОДУ двухфронтной задачи Римана:

$$\begin{aligned} & -\omega c_0(\varrho a_0 - \varrho_- a_0^-) - \omega_1 c_0(\varrho b_0 - \varrho_- b_0^-) + \\ & + (\omega_1 - \omega) c_0 \int_{-\infty}^{\tau} \varrho b_0 ds + c_0(\varrho(a_0 + b_0)^2 - \varrho(a_0^- + b_0^-)^2 + P - P^-) = (a_0 + b_0) \dot{\quad} \end{aligned} \tag{5.33}$$

Выбор критического однофронтного решения. Потребуем выполнения условия

$$\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} > \omega^2 \tag{5.34}$$

существования нижнего критического решения. Разложение (5.32) будем искать как возмущение нижнего критического решения. Для этого положим $b_0(x, t) = u_2^{cr} \left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon} \right)$, где $\dot{x}_1 = \omega_1$, тем самым, ускоряя или замедляя верхнее критическое решение $u_2^{cr}(\tau)$, отвечающее скорости фронта ω . Предельные константы нижнего критического решения:

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\omega, \quad u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2} \left(\omega - \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)} \right). \quad (5.35)$$

Тогда для возмущения a_0 получим уравнение

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0 - c_0 (\omega_1 - \omega) (\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) + c_0 (\omega_1 - \omega) \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \quad (5.36)$$

с условиями стабилизации

$$a_0^- = 0, \quad (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^- = 0.$$

В рассматриваемом случае третье условие Гюнио двухфронтной задачи запишется в виде:

$$\varrho_+ (a_0^+ - \omega) a^+ + \frac{1}{2} (\omega - \omega_1) \varrho_{\pm} \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)} = 0, \quad (5.37)$$

где плюс или минус в (5.37) выбираем в зависимости от знака $\omega_1 - \omega$. Здесь мы использовали справедливость соотношения

$$-\omega [\varrho u_2^{cr}] + [\varrho (u_2^{cr})^2] + \frac{1}{c_0} [P] = 0$$

для критического управления u_2^{cr} . Прежде всего определимся со знаком $Z = \omega - \omega_1$. Для этого исследуем поведение дискриминанта. Имеем

$$\dot{D}_a = 4 \left((2u_2^{cr} - \omega - Z) \dot{u}_2^{cr} + \frac{Z}{\varrho^2} \left[- \int_{\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} \right] \dot{\varrho} \right) > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

поскольку, как мы показали выше,

$$- \int_{\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} < 0,$$

и

$$2u_2^{cr} - \omega - Z \leq -Z \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

если

$$Z = \omega - \omega_1 > 0. \quad (5.38)$$

Таким образом, мы замедляем нижнее критическое решение и возмущение a_0 есть предвестник. Тогда получаем следующую спектральную задачу по параметру $Z = \omega - \omega_1$:

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0 + c_0 Z (\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) - Z \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds, \quad (5.39)$$

$$a_0^- = 0, \quad a_0^+ = a^+(Z, \omega), \quad (\dot{a}_0)^{\pm} = 0,$$

$$\varrho_+ (a_0^+ - \omega) a^+ - \frac{1}{2} Z \varrho_- \sqrt{\frac{|\varrho|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)} = 0.$$

Задача состоит в нахождении стабилизирующегося решения уравнения (5.39).

Теорема 5.4. Пусть выполнены условия леммы (5.1), неравенства (5.34).

1. Пусть выполнено неравенство

$$Z > \exp \left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds \right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds. \quad (5.40)$$

Тогда существует монотонно убывающее, стабилизирующееся решение задачи (5.39). Более того, существует такое

$$Z_{**} \in \left(0, \exp \left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds \right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds \right),$$

что для

$$Z_{**} \leq Z < \exp \left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds \right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds \quad (5.41)$$

также существует монотонно убывающее, стабилизирующееся решение задачи (5.39).

2. Для

$$0 < Z < Z_{**} \quad (5.42)$$

существует немонотонное стабилизирующееся решение задачи (5.39) типа одnogорбого кинка.

Доказательство. Из оценки $D_a > 0$ при справедливости условия (5.38) следует существование нулевых изоклин a_{\pm} . Теперь исследуем производную

$$\dot{a}_- = - \frac{2 \left[(\sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z) \dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) \dot{\varrho} \right]}{\sqrt{D_a}}.$$

Положим

$$K = \sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z = -2a_- - Z, \quad 2a_- = -K - Z.$$

Отсюда

$$\dot{K} = \frac{4 \left[K \dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2} \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right) \dot{\varrho} \right]}{\sqrt{D_a}},$$

или

$$\dot{K} = \frac{4\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} K + \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho}.$$

Интегрируя, получим

$$K = -Z e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} + e^{-\int_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\int_{-\infty}^s \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho} ds. \quad (5.43)$$

Оценим

$$\int_{-\infty}^{\tau} e^{-\int_{-\infty}^s \frac{4}{\sqrt{D_a}} \dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4 \left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \right)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} \dot{\varrho} ds \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{\frac{4}{\sqrt{D_a^+}}(u_{2,-}^{cr} - u_{2,+}^{cr})} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{4(\varrho(u_{2,-}^{cr} - u_{2,+}^{cr}) + \int_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho}(u_{2,-}^{cr} - u_{2,+}^{cr}) ds)}{\varrho^2 \sqrt{D_a}} (-\dot{\varrho}) ds \leq \\ &\leq \exp\left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds\right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds, \end{aligned}$$

где

$$\exp\left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds = o(|[\varrho]|).$$

Отсюда следует, что $K < 0$, если

$$Z > \exp\left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds\right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds.$$

Тогда K монотонно возрастает, поскольку $\dot{K} > 0$; соответственно, a_- монотонно убывает. Отсюда следуют существование монотонно убывающего стабилизирующегося решения задачи (5.39). Это завершает доказательство теоремы (5.4). \square

Осталось исследовать случай, когда

$$0 < Z < \exp\left(4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{u}_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}} ds\right) \frac{4(\varrho_- + |[[\varrho]|]) \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\right)}}{\varrho_+^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}} ds. \quad (5.44)$$

В этом случае существует τ_* такое, что $K > 0$ при $\tau > \tau_*$. В силу леммы (5.2), в этом случае получим, что

$$\dot{K} = \frac{4\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}} K + o(\dot{u}_2^{cr}) < 0$$

при $\tau > \tau_*$. Тогда $\dot{a}_- > 0$ для достаточно больших $\tau \tau_*$. В этом случае существует немонотонное стабилизирующееся решение типа одnogорбого кинка.

5.4. Проблема трансзвука. Это может быть дополнительным подтверждением существования бифуркации типа двугорбого кинка при возмущении верхнего критического решения и существования бифуркации типа одnogорбого кинка при возмущении нижнего критического решения. Рассмотрим случай, пограничный к рассмотренным выше критическим решениям, когда

$$\omega_{cr}^2 = \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}. \quad (5.45)$$

Также как выше, $\varrho > 0$, $U > 0$, $[\varrho] < 0$, $[U] < 0$ и $P = P_0\varrho^\gamma$, $P_0 = \text{const} > 0$, $\gamma > 1$.

О природе трансзвукового потока. Заметим, что функция $\frac{1}{2}\omega + S^\pm$, где S^\pm — знакопостоянные, так называемые однофронтные солитонные функции ($S^+ > 0$, $S^- < 0$, $S^+(\pm\infty) = S^-(\pm\infty) = 0$), есть поточечный предел бифуркации верхнего (с двугорбым возмущением) и нижнего (с одnogорбым возмущением) критических решений u_2^{cr} при $\omega_1 \rightarrow \omega_{cr} + \pm 0$, соответственно. Таким образом, солитонное решение образуется при разрушении ударной волны. Такой эффект можно назвать трансзвуковым.

Подставив функцию $u_2 = \frac{1}{2}\omega + S^\pm$ в третье уравнение однофронтной задачи, получим

$$c_0\varrho S^2 + \frac{1}{4}c_0\omega^2(\varrho_- - \varrho) + P - P_- = \dot{S}. \quad (5.46)$$

Теорема 5.5. Пусть существует стабилизирующееся решение ϱ, U первых двух уравнений системы (4.15), (4.3) для усредненных компонент (ϱ, U) (справедливы условия леммы (5.1)), для скорости ω выполнено условие (5.45), а функция

$$F(\tau) = -(P - P_-) + \frac{1}{4}c_0\omega_{cr}^2(\varrho - \varrho_-) > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

(где $F(-\infty) = F(\infty) = 0$) выпукла вверх. Тогда существует два знакопостоянных солитонных решения $(S^+(\pm\infty) = S^-(\pm\infty) = 0)$ уравнения (5.46).

Доказательство. Тогда S удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{S} &= c_0\varrho S^2 - \frac{[P]}{[\varrho]}(\varrho - \varrho_-) + P - P_-, \\ S^- &= S^+ = 0. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Нужно доказать существование знакопостоянного солитона $S(z)$, $S(\pm\infty) = 0$, где ϱ — положительная, стабилизирующаяся на бесконечности, строго монотонно убывающая функция, $\varrho(-\infty) > \varrho(+\infty)$. Для $P = P_0\varrho^\gamma < \gamma$, $\gamma > 1$, функция F выпукла вверх. Отсюда следует существование выпуклых верхней и нижней нулевых изоклин $S_\pm = \pm\sqrt{\frac{F(\varrho)}{\varrho}}$. Поэтому существует изоклина $S^- < 0$, график которой стартует из нуля и находится при $z \rightarrow +\infty$ сначала между нулевыми изоклинами до пересечения с нижней изоклиной в точке минимума функции S^- . Далее, находясь под нижней изоклиной, $S^- \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$. Наоборот, S^+ стартует из нуля и находится при $z \rightarrow +\infty$ выше верхней нулевой изоклины до пересечения с ней в точке максимума функции S^+ . Далее, находясь между нулевыми изоклинами, убывая, график $S^- \rightarrow 0$ при $z \rightarrow +\infty$.

Случай $Z = 0$. Отдельно рассмотрим случай, когда $Z = 0$. В этом случае задача для послевестника имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{a}_0 &= c_0\varrho(a_0 + 2u_2^{cr} - \omega)a_0, \\ a_0^- &= 0, \quad (\dot{a}_0)^\pm = 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$a_+ \equiv 0, \quad a_- = -F, \quad F = (2u_2^{cr} - \omega), \quad F^- = 0, \quad F^+ = -\sqrt{\frac{[\varrho]}{\varrho_+} \left(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 \right)}.$$

Есть стабилизирующееся монотонно убывающее решение! □

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Какие можно сделать выводы?

1. Мы получили семейства бифуркаций верхнего и нижнего критический решений, определяемые, при фиксированном значении ω , выбором либо значения скорости $\omega_1 \in (0, \omega)$, либо значения a_0^+ . Эта многозначность связана с тем, что мы не описали неустойчивость, рождающую всплеск (a_0^+) в стадии зарождения бифуркации для усеченной системы Эйлера. Из численного эксперимента (см. [16]) следует, что в полной приведенной системе это можно отнести на счет неустойчивости константы в данных Коши концентрации активной компоненты из области лабильности уравнения Кана. Начальный всплеск определяется уравнением для концентрации в приведенной системе. Рождение всплеска в полной приведенной системе и распад его на две ударной волны можно назвать *внутренней турбулентностью*.

2. В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтной ударной волны. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической однофронтной ударной волны на две: замедление верхнего критического решения и со старой скоростью сброс предвестника с немонотонным отрицательным профилем. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтных ударных волн. То же происходит и при возмущении нижнего критического решения.

3. Полученные бифуркации типа многогорбых кинков имеют сверхзвуковой характер, связанный с критической скоростью $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{4[P]}{c_0[\rho]}}$ превышающей скорость звука.

4. Возможно, появление солитонных решений для критической скорости $\omega = \omega_{cr}$ и появление колебаний возмущения (многогорбость) связано с проблемой трансзвука.

5. Все полученные эффекты суть внутренние свойства самой системы Эйлера, связанные со структурой собственного пространства на критических многообразиях Σ_{\pm} (появление присоединенных векторов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. Теория детонации. — М.: Гостехиздат, 1955.
2. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
3. Иванов М. Я., Терентьева Л. В. Элементы газодинамики диспергирующей среды. — М.: Информконверсия, 2002.
4. Косоруков А. Л., Радвогин Ю. Б. Осесимметрическое сверхзвуковое обтекание конуса неравновесно реагирующим воздухом// Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1984. — 119.
5. Лакс П. Д. Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
6. Митидьери Э., Похожаев С. И. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. — М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2001.
7. Суржиков С. Т. Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. — М.: ИПМ им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2011.
8. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит, 1959.
9. Эванс Л. К. Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 1998.
10. Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Палин В. В., Радкевич Е. В. Многокомпонентная система Эйлера, невязкие решения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — В печати.
11. Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V. Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// Eur. J. Appl. Math. — 1999. — 10. — С. 55–77.
12. Lukashov E. A., Radkevich E. V. Solidification and structuresation of instability zones// Appl. Math. — 2010. — 1. — С. 159–178.
13. Majda A., Pego R. Stable viscosity matrices for system of conservation laws// J. Differ. Equ. — 1985. — 56. — С. 229–262.
14. Radkevich E. V. On the nature of bifurcations of one-front solutions of the truncated Euler system// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2014. — 196, № 3. — С. 388–404.
15. Wagner J. L. Experimental studies of unstart dynamics in inlet. Isolator configurations in a Mach 5 flow// Dissertation. — Fac. Grad. School, Univ. Texas Austin, 2011.
16. Yakovlev N. N., Lukashov E. A., Palin V. V., Radkevich E. V. Nonclassical regularization of the multicomponent Euler system// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2014. — 196, № 3. — С. 322–345.

В. В. Палин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: grey_stranger84@mail.ru

Е. В. Радкевич

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: evrad07@gmail.com

Н. Н. Яковлев

Тураевское машиностроительное конструкторское бюро «Союз»

E-mail: amntksoyuz@mail.ru

Е. А. Лукашев

Тураевское машиностроительное конструкторское бюро «Союз»

E-mail: elukashov@yandex.ru