Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 64–132

УДК 517.972+517.982.22

ВВЕДЕНИЕ В СУБЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

© 2014 г. **И. В. ОРЛОВ**

Аннотация. На основе понятия компактного субдифференциала построено развитое субдифференциальное исчисление первого и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов. Введен и изучен обширный класс субгладких отображений, к которым применим построенный формализм. Разработан аппарат исследования одномерных экстремальных вариационных задач с субгладким интегрантом, включая достаточные условия. Рассмотрен ряд примеров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка проблемы и исходные задачи 65
   1.1. Введение 65
   1.2. K-субдифференциал для отображений скалярного аргумента с приложениями к интегралу Бохнера (краткий обзор) 66
2. Сублинейные операторы в нормированных конусах 68
   2.1. Абстрактные нормированные конусы и их свойства. Конус выпуклых компактов . . 68
   2.2. Сублинейные операторы и функционалы 71
   2.3. Сублинейные K-операторы и K-функционалы 76
   2.4. Симметризация сублинейных функционалов и K-функционалов 80
3. Компактные субдифференциалы. Исчисление первого порядка 81
   3.1. K-пределы и их основные свойства 81
   3.2. K-субдифференциалы по направлению 83
   3.3. Слабый K-субдифференциал, K-субдифференциал Гато, K-субдифференциал Фреше 85
   3.4. Общие свойства сильных K-субдифференциалов 88
   3.5. Теорема о среднем для K-субдифференцируемых отображений 94
   3.6. K-субдифференцируемость и субгладкость 96
   3.7. Связь K-субдифференцируемости на отрезке с обычной дифференцируемостью . . 100
4. Компактные субдифференциалы высших порядков 100
   4.1. K-субдифференциалы второго порядка. Теорема Юнга о симметричности 100
   4.2. K-субдифференциалы высших порядков. Общая теорема Юнга 103
   4.3. K-субдифференциалы высших порядков от функционалов 105
   4.4. K-субдифференциалы и субгладкость высших порядков 106
   4.5. Формула Тейлора в K-субдифференциалах и исследование на экстремум 108
5. Приложения к вариационным задачам с субгладким интегрантом 112
   5.1. K-субдифференциал основного вариационного функционала 112
   5.2. K-аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера—Лагранжа 116
   5.3. Второй K-субдифференциал основного вариационного функционала 121
   5.4. K-аналог необходимого условия Лежандра 124
   5.5. K-аналог достаточных условий Лежандра—Якоби 127
   Список литературы 131

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, Воронежский госуниверситет).

1. Постановка проблемы и исходные задачи

1.1. Введение. Обещания нужно выполнять. В заключительных замечаниях к статье о компактных субдифференциалах в банаховых пространствах и их применении к вариационным функционалам [19] авторы решились на следующее обещание:

«*Авторы отдают себе отчет в том, что существенное приложение теории K-субдифференциалов к невыпуклым вариационным задачам с негладким интегрантом должно включать, как минимум, обобщение уравнения Эйлера—Лагранжа, условия Лежандра, уравнения Якоби и условий Лежандра—Якоби. Базой таких приложений неизбежно обязано служить K-субдифференциальное исчисление высшего порядка.*

Построение исчисления высшего порядка (вообще говоря, "больное место" общей теории субдифференциалов), в рамках предложенной выше методики является вполне обозримой задачей, которую авторы надеются разрешить в оптимальные сроки.»

В настоящей работе строится такое субдифференциальное исчисление вместе с (пока одномерными) вариационными применениями.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике (см., например, [1, 4, 9–11, 29]). Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала (описанного в известной монографии Р. Рокафеллара [24]), появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие как известный субдифференциал Ф. Кларка, субдифференциал Б. Н. Пшеничного и многие другие (см. [8, 20–22]). В большинстве своем это определения для отображений в евклидовых пространствах, но имеются и более общие.

С целью применения к исследованию проблемы Радона—Никодима для интеграла Бохнера, первым из авторов несколько лет назад был введен и в совместных работах с Ф. С. Стонякиным (см. [16, 17, 39]) подробно изучен *компактный субдифференциал* (*K-субдифференциал*) для отображений вещественного аргумента в ЛВП. В случае пространств Фреше K-субдифференциал оказался адекватным инструментом и позволил найти топологическое решение проблемы Радона—Никодима (см. [27, 28]).

Естественным образом возник вопрос о переносе понятия на случай векторного аргумента. Вопрос диктуется не только внутренней логикой теории, но и соображением (возможно, более важным) о приложениях в вариационном исчислении. Приложения субдифференциалов к вариационным задачам с негладким интегрантом составляют неотъемлемую часть современного негладкого анализа (см., например, [2, 3, 5–7, 23, 35, 36]). Характерно, что в новейшей математической классификации MSC-2010 раздел «Негладкий анализ» входит в блок «Вариационное исчисление».

Движение по намеченному пути сразу же приводит нас от K-субдифференциала как компактного выпуклого множества (случай фиксированного направления) к многозначному субаддитивному оператору с компактными выпуклыми значениями (K-оператору). Таким образом, возникает потребность хотя бы в минимальном аппарате теории K-операторов. При всем богатстве потока работ по мультиоператорам (см., например, [12–14, 25, 26]), этот объект, насколько нам известно, не изучался.

Дуальная трудность состоит в том, что ограниченные K-операторы образуют не банахово пространство, а банахов конус, который не содержится ни в каком банаховом пространстве. Теория абстрактных локально выпуклых конусов возникла сравнительно недавно (см., например, [37, 38, 40, 41]), а описание абстрактных нормированных конусов также оказалось новой задачей.

Таким образом, обрисовались рамки существенно нового подхода, в котором место дифференциала Фреше (линейного оператора) занимает K-субдифференциал Фреше (многозначный сублинейный оператор). При этом место банахова пространства линейных ограниченных операторов занимает банахов конус ограниченных K-операторов.

Теория K-субдифференциалов первого порядка для этого случая была построена в наших с З. И. Халиловой работах [18, 19, 32–34] и включает в себя приложения к экстремальным вариационным задачам с негладким интегрантом.

Соответствующая функциональная база описана во втором разделе настоящей работы. Она включает в себя элементы теории абстрактных нормированных конусов, общей теории сублинейных операторов и функционалов, теории сублинейных K-операторов и K-функционалов.

На этой основе в третьем разделе работы построено K-субдифференциальное исчисление первого порядка. Отметим, что здесь, помимо необходимого технического аппарата, описан удобный для приложений новый класс *субгладких отображений*, которые заведомо K-субдифференцируемы. Установлено также, что любое K-субдифференцируемое на отрезке отображение почти всюду дифференцируемо в обычном смысле.

Примененный подход позволяет без труда дать индуктивное определение K-субдифференциалов второго и высших порядков. Четвертый раздел работы посвящен K-субдифференциальному исчислению высшего порядка. Получены аналоги основных результатов классического анализа Фреше, от теоремы Юнга до формулы Тейлора и теории экстремумов (включая достаточные условия). Частично эти результаты изложены в наших работах [19, 34]. Отметим следующие моменты. Во-первых, в случае нормированных пространств K-субдифференцируемость n-го порядка влечет обычную дифференцируемость $(n-1)$-го порядка, что существенно упрощает приложения. Во-вторых, понятие субгладкости распространяется на случай n-го порядка; такие отображения заведомо n раз K-субдифференцируемы.

Наконец, в пятом разделе работе детально рассмотрены приложения K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с *субгладким интегрантом* (одномерный случай). Получены субгладкие аналоги основной вариационной леммы, уравнения Эйлера—Лагранжа, простого и усиленного условий Лежандра, а также условий Лежандра—Якоби для основного вариационного функционала. Рассмотрен ряд примеров.

1.2. K-субдифференциал для отображений скалярного аргумента с приложениями к интегралу Бохнера (краткий обзор). K-субдифференциал для отображений отрезка возник в наших с Ф. С. Стонякиным работах [16, 17, 39] с целью приложений к интегралу Бохнера. Как известно, проблема Радона—Никодима для интеграла Бохнера состоит в том, что далеко не для всех банаховых пространств класс неопределенных интегралов Бохнера совпадает с классом сильно абсолютно непрерывных отображений. В связи с этим возникла идея ввести подходящее расширение классической дифференцируемости. Субдифференциалы Рокафеллара и Кларка, как и другие известные нам типы субдифференциалов, не устраивали нас по ряду причин. Возникло понятие *компактного субдифференциала* (*K-субдифференциала*), которое позволило, в конечном счете, найти топологическое решение проблемы Радона—Никодима в классе пространств Фреше. В этом кратком обзоре мы приводим только два результата по бохнеровской тематике (теоремы 1.4 и 1.5). Подробное изложение можно найти в работах [16, 17, 39] и кандидатской диссертации Ф. С. Стонякина [27].

Начнем с определения *K-предела*. Далее $U(0)$ — окрестность нуля в вещественном отделимом ЛВП E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в E.

Определение 1.1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым пересечением B. Множество B назовем *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta,$$

если

$$\forall U(0) \subset E \;\exists \delta_U > 0 : \; (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0)). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1.

1. Сходимость типа (1.1) можно характеризовать как внешнее равномерное топологическое стягивание множеств B_δ к их компактному пересечению. Отметим, что в случае компактных B_δ условие (1.1) в пространстве Фреше выполнено автоматически.
2. Если множество B одноточечно, то (1.1) — обычное условие стягивания к точке.
3. Свойства K-пределов будут изложены далее в п. 3.1, в рамках более общего определения.

Перейдем к определению *компактного субдифференциала*. Далее $f : I = [a; b] \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. *K-субдифференциал* отображения f в точке $x \in I$ есть K-предел замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений:

$$\partial_K f(x) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\middle|\, 0<|h|<\delta\right\}.$$

Замечание 1.2.

1. Очевидно, K-субдифференциал есть обобщение обычной производной:

$$(\exists f'(x)) \Rightarrow (\partial_K f(x) = \{f'(x)\}).$$

Если $\partial_K f(x)$ — одноточечный, то верно и обратное.

2. Для вещественных функций $f : I \to \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\partial_K f(x) = \left[\frac{df}{\underline{dx}}(x); \frac{\overline{df}}{dx}(x)\right];$$

при этом $\left(\exists\, \partial_K f(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{df}{\underline{dx}}(x) \text{ и } \frac{\overline{df}}{dx}(x)\right) \text{ конечны}\right)$. В частности, в угловых точках имеем

$$\partial_K f(x) = \left[\frac{df}{dx}(x-0); \frac{df}{dx}(x+0)\right].$$

Таким образом, для выпуклых вещественных функций K-субдифференциал совпадает с обычным субдифференциалом.

Отметим, что K-субдифференциал может существовать и в точках осцилляций.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Здесь $\partial_K f(0) = \left[\frac{df}{dx}(0); \frac{df}{dx}(0)\right] = [-1; 1]$.

Приведем ряд простейших свойств K-субдифференциалов.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения*:

а) (f *K-субдифференцируемо в точке* x) $\Rightarrow$ (f *непрерывно в точке* x);

б) $\partial_K(f_1+f_2)(x) \subset \partial_K f_1(x) + \partial_K f_2(x)$ (*субаддитивность*);

в) $\partial_K(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;

г) $(A \in L(E;F)) \Rightarrow (\partial_K(Af)(x) = A(\partial_K f(x))$;

д) $([a;b] \xrightarrow{f} [c;d] \xrightarrow{g} E) \Rightarrow (\partial_K(g(f))(x) \subset \partial_K f(x)\, \partial_K g(f(x))$;

е) $(f : [a;b] \to \mathbb{R},\ g : [a;b] \to E) \Rightarrow (\partial_K(fg)(x) \subset \partial_K f(x) g(x) + f(x)\partial_K g(x))$.

В случае, когда одно из отображений дифференцируемо в обычном смысле, включения в пунктах (б), (д), (е), *превращаются в точные равенства.*

Далее, в случае пространства Фреше E определению 1.2 можно придать секвенциальную форму.

Теорема 1.2. *Пусть E — пространство Фреше, $f : I \to E$. Тогда f K-субдифференцируемо в точке $x \in E$ в том и только в том случае, если для любой последовательности $h_k \to 0$ последовательность $\left\{\frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}\right\}$ имеет конечный частичный предел. При этом $\partial_K f(x)$ есть множество всех таких частичных пределов*:

$$\partial_K f(x) = \left\{\underset{k\to\infty}{\mathrm{part.lim}}\, \frac{f(x+h_k)-f(x)}{h_k}\middle|\, h_k \to 0\right\}.$$

Приведем также теорему о среднем для K-субдифференциалов.

Теорема 1.3. *Если отображение f непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо на $(a;b)$, то*

$$f(b)-f(a) \in \overline{co}\Bigl(\bigcup_{a<x<b} \partial_K f(x)\Bigr)(b-a).$$

В частности, если E — банахово пространство, то

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant \sup_{a<x<b}\,(\sup \|\partial_K f(x)\|)(b-a).$$

Важную информацию о связи K-субдифференцируемости почти всюду с обычной дифференцируемостью почти всюду дает следующий результат.

Теорема 1.4. *Пусть E — пространство Фреше, $f : I \to E$. Если отображение f K-субдифференцируемо почти всюду на I, и при этом f почти всюду сепарабельнозначно на I, то f дифференцируемо в обычном смысле почти всюду на I.*

В частности, утверждение теоремы справедливо, если f непрерывно и почти всюду K-субдифференцируемо на I (и тем более, если f всюду K-субдифференцируемо на I).

Наконец, приведем одно из приложений теории K-субдифференциалов к интегралу Бохнера. Известна так называемая *проблема Радона—Никодима*, состоящая в том, что (в отличие от скалярного случая) не все сильно абсолютно непрерывные отображения $f : I \to E$ (при $\dim E = \infty$) почти всюду дифференцируемы. Нами с Ф. С. Стонякиным получен следующий результат.

Теорема 1.5. *Пусть отображение $F : [a; b] \to E$ абсолютно непрерывно и K-субдифференцируемо почти всюду на $[a; b]$. Тогда любой селектор $\widehat{\partial}_K F$ многозначного отображения $\partial_K F$ интегрируем по Бохнеру на $[a; b]$, причем*

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x \widehat{\partial}_K F(t) dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

В частности, если E — пространство Фреше, то F дифференцируемо в обычном смысле почти всюду на $[a; b]$, и справедливо равенство:

$$F(x) = F(a) + (B) \int_a^x F'(t) dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

В заключение этого пункта отметим, что в наших с Ф. С. Стонякиным работах получено общее топологическое решение проблемы Радона—Никодима для интеграла Бохнера, на котором мы здесь не будем останавливаться.

2. Сублинейные операторы в нормированных конусах

2.1. Абстрактные нормированные конусы и их свойства. Конус выпуклых компактов. Перенос понятия K-субдифференциала на случай отображений векторного аргумента приводит к сублинейным операторам с компактными выпуклыми значениями. Такие операторы образуют уже не линейное пространство, а выпуклый (абстрактный) конус. Таким образом, построение замкнутого K-субдифференциального исчисления, включающего субдифференциалы высших порядков, приводит к необходимости с самого начала работать в рамках нормированных конусов. Эта теория была развита в работах З. И. Халиловой [32–34] и наших совместных работах [18, 19].

Мы рассматриваем здесь только *выпуклые конусы*. Напомним общее определение.

Определение 2.1. *Конусом* (выпуклым) назовем некоторое множество векторов $X = \{x\}$, снабженное операциями сложения векторов и умножения на неотрицательные скаляры. При этом операции обладают следующими свойствами:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $x + y = y + x \quad (\forall\, x, y, z \in X)$;
2. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (\forall x,\ y \in X\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0)$.

Замечание 2.1. Тривиальным примером конуса служит вещественное векторное пространство. В большинстве публикаций рассматриваются конусы, вложенные в векторные пространства (см. [38, 40]). Однако, начиная с 80-х годов прошлого века, активно исследуются и абстрактные конусы, разрабатывается общая теория локально выпуклых конусов (см. [37, 41]). По известному критерию («*cancellation law*»), выпуклый конус X может быть изоморфно вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда $(x + z = y + z) \Rightarrow (x = y)$ для любых $x, y, z \in X$. Простейший пример абстрактного конуса — конус всех подмножеств векторного пространства.

Тем не менее, теория нормированных конусов, основанная на общей теории локально выпуклых конусов, не обнаружена нами в литературе. Эта теория, как вспомогательный блок, изложена в нашей работе.

Дадим определение *нормированного конуса*.

Определение 2.2. Выпуклый конус X назовем *нормированным*, если для любого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная величина (*конус-норма*) $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:

1. $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$;
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
3. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \quad (\forall \lambda \geqslant 0)$.

Конус-норма индуцирует *локально выпуклую конус-топологию* в X, и, в частности приводит к следующим понятиям.

Определение 2.3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Введем понятия:

а) *ε-окрестность точки* $x \in X : O_\varepsilon(x) = \{x + h |\, h \in X,\ \|h\| < \varepsilon\}$.
б) *Сходящаяся последовательность* $x_n \to x : \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N\ (n \geqslant N) \Rightarrow (x_n \in O_\varepsilon(x))$.
в) *Квазифундаментальная последовательность* $\{x_n\}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ N(n \geqslant N, p \geqslant 0) \Rightarrow (x_{n+p} \in O_\varepsilon(x_n)).$$

г) *Квазиполнота*: X — *квазиполный конус*, если любая квазифундаментальная последовательность в X сходится. Квазиполный нормированный конус будем называть *банаховым конусом*.
д) *Квазиметрика*: если $y = x + h$, то полагаем $d(x, y) = \|h\|$.
е) *Ограниченность*: множество $B \subset X$ *ограничено*, если $\sup\limits_{x \in B} \|x\| < +\infty$.

Общие топологические понятия вводятся в X обычным образом.

Замечание 2.2. Конус-норма (как и вообще конус-топология) порождает не классическую равномерность в X, а лишь «направленную» *квазиравномерность*. В частности, квазиметрика, вообще говоря, не симметрична: если существует $d(x, y)$, то $d(y, x)$ может не существовать.

Важный для нас тип конусов образуют *конусы компактных выпуклых подмножеств*.

Определение 2.4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Обозначим через X_K множество всех компактных выпуклых подмножеств X. Нетрудно проверить, что X_K образует выпуклый конус относительно поэлементного сложения множеств и умножения на неотрицательные скаляры. Нулем в X_K является множество $\{0\}$.

Замечание 2.3.

1. В конусе X_K возможно, например (в случае векторного пространства X), умножение и на отрицательные скаляры, однако $(-1)C$ не есть противоположный элемент к C.
2. Конус X_K индуктивно упорядочен отношением вложения.
3. Вообще говоря (при $X \not\subset \mathbb{R}$), конус X_K не удовлетворяет «*cancellation law*».

Введем норму в X_K: $\|C\| = \sup\limits_{x \in C} \|x\|$.

Замечание 2.4. Легко видеть, что $\|C\|$ обладает всеми свойствами конус-нормы и согласована с отношением порядка в X_K.

Покажем теперь, что квазиполнота конуса X влечет квазиполноту и конуса X_K.

Лемма 2.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ квазифундаментальна в нормированном конусе X. Если некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится в E к $x_0 \in E$, то и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в X к x_0.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно определению сходимости, $x_{n_k} \in O_{\varepsilon/2}(x_0)$ для достаточно больших номеров n_k. В свою очередь, согласно определению квазифундаментальности, для достаточно больших номеров $n > N(\varepsilon)$ при любом $n_k > n$ верно $x_n \in O_{\varepsilon/2}(x_{n_k})$. В итоге получаем при $n > N(\varepsilon)$:

$$x_n \in \bigcup_{x_{n_k} \in O_{\varepsilon/2}(x_0)} \Big(O_{\varepsilon/2}(x_{n_k})\Big) \subset \bigcup_{x \in O_{\varepsilon/2}(x_0)} \Big(O_{\varepsilon/2}(x)\Big) = O_{\varepsilon/2}(x_0) + O_{\varepsilon/2}(0) \subset O_\varepsilon(x_0),$$

т. е. $x_n \to x_0$. □

Лемма 2.2. *Пусть X — банахов конус. Для ограниченных подмножеств $B \subset X$ введем норму $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$. Тогда если $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность компактов из X такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|C_i\| < \infty$, то множество*

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i := \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} y_i \Big| \, y_i \in C_i \Big\} \tag{2.1}$$

— также компакт в X.

Доказательство. Заметим сначала, что любой ряд справа в (2.1) абсолютно сходится, так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|C_i\| < \infty.$$

Отсюда, в силу квазиполноты F, обычным образом вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$.

Далее введем пространство $\prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, компактное в тихоновской топологии произведения, определяемой квазиметрикой

$$d(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|$$

при $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, $h_i = \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $z_i = y_i + h_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Рассмотрим отображение

$$\Sigma : \prod_{i=1}^{\infty} C_i \to F, \ \Sigma(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i.$$

Очевидно, $(z = y + h) \Rightarrow (\Sigma(z) = \Sigma(y) + \Sigma(h))$, откуда следует

$$d\Big(\Sigma(y), \Sigma(z)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\| = d(y, z).$$

Следовательно, Σ — непрерывное отображение, откуда по теореме Вейерштрасса множество $\Sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ — компакт в X. □

Приведем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 2.1. *Если X — банахов конус, то нормированный конус X_K — также банахов.*

Доказательство. Покажем, что любая квазифундаментальная последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X_K содержит сходящуюся подпоследовательность. По условию фундаментальности, $C_n = C_{n+p} + H_{np}$, где $\|H_{np}\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по p.

Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k > 0\}$ такую, что $\sum \varepsilon_k < +\infty$, и затем выберем возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ так, чтобы

$$\|H^k := H_{n_k, n_{k+1} - n_k}\| \leqslant \varepsilon_k.$$

Покажем, что соответствующая подпоследовательность $\{C_{n_k} = C_{n_{k+1}} + H^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в X_K. Положим

$$\widetilde{H}^k = \Big\{ \sum_{i=k}^{\infty} h_i \Big| \, h_i \in H^i \Big\} = \sum_{i=k}^{\infty} H^i \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \|H^i\| \leqslant \sum\limits_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$, то в силу леммы 2.2 множества $\widetilde{H}^k$ компактны в X. Поскольку выпуклость $\widetilde{H}^k$ следует из определения, то $\widetilde{H}^k \in X_K$.

Положим

$$C_0 := C_{n_1} + H^1 = C_{n_1} + (H^1 + \widetilde{H}^2) = C_{n_2} + \widetilde{H}^2 = \ldots = C_{n_k} + \widetilde{H}^k = \ldots.$$

Из $\|\widetilde{H}^k\| \to 0$ следует $C_{n_k} \to C_0$ в X_K. Тогда по лемме 2.1 также и $C_n \to C_0$, т. е. X_K — квазиполный конус. □

Замечание 2.5. Простейшим примером банахова конуса X_K является конус

$$\mathbb{R}_K = \Big\{[x_1; x_2] \subset \mathbb{R} \,\Big|\, x_1 \leqslant x_2\Big\}.$$

Это единственный (в классе банаховых пространств X) пример конечномерного конуса X_K. Конус $\mathbb{R}_K$ можно отождествить с полуплоскостью

$$\mathbb{R}^2_+ = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1 \leqslant x_2\Big\}.$$

При этом порядок в $\mathbb{R}^1_+$, соответствующий вложению в $\mathbb{R}_K$, следующий:

$$\Big((x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)\Big) \Leftrightarrow \Big(y_1 \leqslant x_1,\ y_2 \geqslant x_2\Big).$$

Заметим, что этот порядок не соответствует обычному порядку в $\mathbb{R}$ при диагональном вложении

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2_+ \quad (x \in \mathbb{R} \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^2_+).$$

В общем случае также, индуктивный порядок в X_K, определяемый вложением, не связан с возможным исходным порядком в X.

Замечание 2.6. В случае индуктивно упорядоченного конуса X, будем говорить, что конус-норма в X *согласована с порядком*, если $(x_1 \leqslant x_2) \Rightarrow (\|x_1\| \leqslant \|x_2\|)$. В этом случае возможна более грубая топология, также порождаемая нормой:

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X |\ x \preceq y \preceq x + h;\ \|h\| < \varepsilon\}.$$

2.2. Сублинейные операторы и функционалы. Использование сублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями удобнее проводить на основе достаточно развитой общей теории сублинейных операторов со значениями в упорядоченном конусе. Такое развитие общей теории сублинейных операторов излагается здесь впервые. Оно далеко не полно, но это тот минимум, который позволяет далее достаточно свободно строить основной аппарат K-субдифференциального исчисления.

Определение 2.5. Пусть E — выпуклый конус, F — индуктивно упорядоченный выпуклый конус. Оператор $A : E \to F$ назовем *сублинейным*, если:

1. $A(h_1 + h_2) \preceq Ah_1 + Ah_2$;
2. $A(\lambda h) = \lambda A h$ $(\forall h_1, h_2 \in E,\ \forall \lambda \geqslant 0)$.

Оператор A назовем *надлинейным*, если условие (1) заменить условием

3. $A(h_1 + h_2) \succeq Ah_1 + Ah_2$.

Определение 2.6. Пусть, в условиях определения 2.5, $F = \mathbb{R}$. Тогда сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}$ назовем *сублинейным функционалом*. В этом случае условия (1)-(2) перепишутся в следующем виде:

4. $f(h_1 + h_2) \leqslant f(h_1) + f(h_2)$; $f(\lambda h) = \lambda f(h) \quad (\lambda \geqslant 0)$.

Соответственно, для надлинейного функционала первое из неравенств (4) заменяется неравенством

5. $f(h_1 + h_2) \geqslant f(h_1) + f(h_2)$.

Замечание 2.7.

1. Иногда в определении сублинейного оператора равенство (2) заменяется неравенством $A(\lambda h) \preceq \lambda A h$. У нас не возникнет потребность в таком ослаблении условия, т. к. K-субдифференциал всегда обладает свойством (2).
2. Очевидно, сублинейность функционала f равносильна надлинейности функционала $(-f)$. Простейшим примером сублинейного функционала в нормированном конусе служит сама норма: $f(h) = \|h\|$.

В случае векторного пространства E легко описать связь сублинейности и линейности функционалов.

Теорема 2.2. *Пусть E — векторное вещественное пространство, $f : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный (соответственно — надлинейный) функционал. Тогда f линеен в том и только в том случае, если*

$$(f(-h) = -f(h) \quad (\forall h \in E)). \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна. Обратно, пусть f сублинеен и выполнено условие (2.2). Тогда $\forall\, h_1,\, h_2 \in E$ имеем:

$$\begin{cases} \text{а).}\ f(h_1+h_2) \leqslant f(h_1) + f(h_2); \\ \text{б).}\ (-f(-h_1-h_2) \leqslant f(-h_1) + f(-h_2) = -f(h_1) - f(h_2)) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow (f(h_1+h_2) = -f(-h_1-h_2) \geqslant f(h_1) + f(h_2)). \end{cases}$$

Отсюда следует аддитивность: $f(h_1+h_2) = f(h_1) + f(h_2)$. Кроме того, позитивная однородность f вместе с равенством (2.2) влечет полную вещественную однородность f. Таким образом, функционал f линеен. $\square$

Результат переносится и на сублинейные операторы $A : E \to F$, если F — упорядоченное векторное пространство.

Введем теперь для произвольных отображений в нормированных конусах понятия непрерывности и полунепрерывности.

Определение 2.7. Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $\Phi : E \to F$ определено в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$. Назовем Φ *непрерывным в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x+h) = \Phi(x) + y,\ \text{где}\ \|y\| < \varepsilon).$$

Пусть, кроме того, конус F индуктивно упорядочен и норма в F согласована с порядком. Назовем отображение Φ *полунепрерывным сверху в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x+h) \preceq \Phi(x) + y,\ \text{где}\ \|y\| < \varepsilon);$$

Φ *полунепрерывно снизу в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x) \preceq \Phi(x+h) + y,\ \text{где}\ \|y\| < \varepsilon).$$

Замечание 2.8. Одновременная полунепрерывность сверху и снизу равносильна полной непрерывности Φ лишь в случае, когда F — векторное пространство (в частности, для функционалов). В общем же случае мы можем только утверждать, что из полной непрерывности следует полунепрерывность сверху. Возможно, здесь следует ввести «ко-непрерывность» с условием: $\Phi(x) = \Phi(x+h) + y,\ \|y\| < \varepsilon$.

Обратимся теперь к вопросу о непрерывности сублинейных операторов. Вначале введем для них понятие *нормы*. Далее, E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен (согласованно с нормой: $(y_1 \preceq y_2) \Rightarrow (\|y_1\| \preceq \|y_2\|)$).

Определение 2.8. Пусть оператор $A : E \to F$ — сублинейный. Положим (по аналогии с линейным случаем):

$$\|A\| := \sup_{\|h\| \leqslant 1} \|Ah\|.$$

Если $\|A\| < +\infty$, назовем оператор A *ограниченным*.

Нетрудно проверить сохранение обычных свойств операторной нормы (с учетом $\lambda \geqslant 0$).

Предложение 2.1. *Пусть $A(A_i) : E \to F$ — сублинейные ограниченные операторы. Тогда*:

1. $(\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0)$;
2. $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$;
3. $\|\lambda A\| = \lambda \|A\|$ $(\lambda \geqslant 0)$.

Замечание 2.9. Свойства сублинейной операторной нормы позволяют ввести *нормированный операторный конус* $L_{sub}(E; F)$ ограниченных сублинейных операторов $A : E \to F$. Конус $L_{sub}(E; F)$ индуктивно упорядочен отношением $(A_1 \preceq A_2) \Leftrightarrow (A_1 h \preceq A_2 h\ (\forall h \in E))$. Важным обстоятельством является то, что, в случае банахова конуса F, конус $L_{sub}(E; F)$ — также банахов.

Теорема 2.3. *Пусть E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен. Тогда конус $L_{sub}(E;F)$ также нормированный. Если, кроме того, конус F — банахов, то $L_{sub}(E;F)$ — также банахов конус.*

Доказательство. Очевидно, сублинейная операторная норма создает в $L_{sub}(E;F)$ структуру нормированного конуса в соответствии с определением 2.8. Пусть теперь F — банахов конус. Докажем, что конус $L_{sub}(E;F)$ — также банахов.

Пусть последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в конусе $L_{sub}(E;F)$. Следовательно, согласно определению 2.3,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ (n \geqslant N,\, p > 0) \Rightarrow\ (A_n h = A_{n+p}h + B_{np}h,\ \text{ где } \|B_{np}\| < \varepsilon). \tag{2.3}$$

1. Зафиксируем $h \in E$, $\|h\| \leqslant 1$ и покажем, что последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F. Действительно, в силу (2.3)

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ (n \geqslant N,\, p > 0) \Rightarrow\ (A_n h = A_{n+p}h + B_{np}h), \tag{2.4}$$

причем из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ следует $\|B_{np}h\| \leqslant \|B_{np}\|\,\|h\| < \varepsilon\|h\|$. Таким образом, последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна $\forall\, h \in E$, $\|h\| \leqslant 1$. Но тогда $\forall\, h \in E$, $h \neq 0$, имеем

$$\{A_n h\}_{n=1}^{\infty} = \|h\| \left\{ A_n\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\}_{n=1}^{\infty},$$

откуда следует квазифундаментальность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$. В силу квазиполноты F, $\forall\, h \in E$ в F существует предел

$$Ah := \lim_{n\to\infty} A_n h.$$

2. Проверим сублинейность оператора $A : E \to F$:

а) $A(h_1 + h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(h_1+h_2) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}(A_n h_1 + A_n h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_1 + \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_2 = Ah_1 + Ah_2$;

б) $A(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda A_n h) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} A_n h = \lambda Ah$ (при $\lambda \geqslant 0$).

3. Проверим ограниченность по норме оператора A. В силу [19, лемма 2.1], квазифундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена: $\|A_n\| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что

$$\|A_n h\| \leqslant C\|h\|\ (\forall\, h \in E\ \forall\, n \in N).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|Ah\| \leqslant C\|h\|$, откуда $\|A\| \leqslant C$. Таким образом, $A \in L_{sub}(E;F)$.

4. Проверим, что $A_n \to A$ в $L_{sub}(E;F)$. Из условия (2.4), переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем:

$$A_n h = Ah + B_n h.$$

При этом из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ в пределе следует $\|B_n\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$, т. е. $B_n \to 0$ в $L_{sub}(E;F)$. Следовательно, $A_n = A + B_n \to A$ в $L_{sub}(E;F)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, нормированный конус $L_{sub}(E;F)$ — квазиполный, т. е. $L_{sub}(E;F)$ — банахов конус. □

Выясним связь ограниченности сублинейного оператора с его непрерывностью. Она отличается от классического линейного случая.

Теорема 2.4. *Для сублинейного оператора $A : E \to F$ следующие условия равносильны*:

1. $\|A\| < \infty$;
2. *A непрерывен в нуле*;
3. *A равномерно полунепрерывен сверху на E.*

Доказательство. 1. Если A ограничен по норме, то из неравенства $\|Ah\| \leqslant \|A\|\,\|h\|$ немедленно следует непрерывность A в нуле.

2. Пусть A непрерывен в нуле. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|Ah\| \leqslant \varepsilon). \tag{2.5}$$

При этом, ввиду субаддитивности A, для любого $x \in E$:

$$A(x+h) \leqslant Ax + Ah,\ \text{ где } \|Ah\| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. A равномерно субнепрерывен всюду на E.

3. Пусть A равномерно субнепрерывен всюду на E. Нетрудно видеть, что при этом A непрерывен в нуле, т. е. выполнено условие (2.5). Отсюда получаем:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \left\| A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\frac{\|h\|}{\delta}\right)\right\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \left(\frac{\|h\|}{\delta} A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\right)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty,$$

т. е. A ограничен по норме. □

Замечание 2.10. По аналогии с линейным случаем, нетрудно доказать, что все сублинейные функционалы $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ автоматически ограничены.

Перейдем к общим свойствам сублинейных ограниченных операторов. Вначале рассмотрим вопрос о сублинейной композиции и сублинейных операторных матрицах.

Теорема 2.5. *Пусть E, F, G — нормированные конусы, причем F и G индуктивно упорядочены. Если $A \in L_{sub}(E;F)$, $B \in L_{sub}(F;G)$, то композиция $B \cdot A \in L_{sub}(E;G)$, причем*

$$\|B \cdot A\| \leqslant \|A\|\,\|B\|. \tag{2.6}$$

Доказательство. Сублинейность $B \cdot A$ очевидна. Неравенство (2.6) проверяется по той же схеме, что и для линейных ограниченных операторов в нормированных пространствах. □

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных операторов. Далее подразумевается, что *прямая сумма* $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j$ и декартово произведение $F = \prod\limits_{i=1}^{m} F_i$ нормированных конусов определяются аналогично случаю нормированных пространств. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного оператора в прямую сумму*; он отличается от случая нормированных пространств.

Предложение 2.2. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j; F\Big)$. Обозначим $P_j : E \to E_j$ канонические проекции, и положим $A_j = A \cdot P_j$ $(j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*:

$$\left(A \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A \cdot P_j\right) \Leftrightarrow \left(Ah \preceq \sum_{j=1}^{n} A_j h_j \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\right).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного оператора*; здесь равенство сохраняется.

Предложение 2.3. *Пусть E и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(E; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим $Q_i : F_i \to F$ канонические инъекции и положим $A^i = Q_i \cdot A$ $(i = \overline{1,m})$. Тогда справедливо равенство*:

$$\left(A = (A^i)_{i=1}^{m} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot A\right) \Leftrightarrow \left(Ah = (A^i h)_{i=1}^{m} \quad (\forall h \in E)\right).$$

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного оператора в матрицу.

Теорема 2.6. *Пусть E_j и F_i — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E_j; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$, где $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,m}$. Обозначим, как и ранее, через $P_j : E \to E_j$ и $Q_i : F_i \to F$ соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим $A_{ij} = Q_i A P_j$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*:

$$\left(A \preceq (A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Q_i \cdot A \cdot P_j\right) \Leftrightarrow \left(Ah \preceq \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_j\right)_{i=1}^{m} \quad (\forall h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\right).$$

Введем теперь бисублинейные операторы и выпишем аналог известного изоморфизма между пространствами линейных и билинейных операторов.

Определение 2.9. Пусть E_1, E_2, F — выпуклые конусы, F индуктивно упорядочен. Оператор $B : E_1 \times E_2 \to F$ назовем *бисублинейным*, если он сублинеен по каждой переменной в отдельности, т. е.

1. $B(h_1 + h_2, k) \preceq B(h_1, k) + B(h_2, k)$; $B(h, k_1 + k_2) \preceq B(h, k_1) + B(h, k_2)$;
2. $B(\lambda h, k) = \lambda B(h, k)$; $B(h, \mu k) = \mu B(h, k)$ $(\lambda,\, \mu \geqslant 0)$.

Определение 2.10. Пусть, в условиях определения 2.9, конусы E_1, E_2, F нормированы. Введем норму бисублинейного оператора B равенством:

$$\|B\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1,\, \|k\| \leqslant 1} \|B(h, k)\|.$$

Если $\|B\| < \infty$, назовем оператор B *ограниченным*.

По аналогии с предложением 2.1 и теоремой 2.4, сформулируем свойства нормы бисублинейного оператора и связь его ограниченности с непрерывностью.

Теорема 2.7. *В условиях определений* 2.9-2.10 *верно*:

1. $(\|B\| = 0) \Leftrightarrow (B = 0)$;
2. $\|B_1 + B_2\| \leqslant \|B_1\| + \|B_2\|$;
3. $\|\lambda B\| = \lambda \|B\| \quad (\forall\, \lambda \geqslant 0)$;
4. $\|B(h, k)\| \leqslant \|B\|\, \|h\|\, \|k\|$.

Для бисублинейного оператора $B : E_1 \times E_2 \to F$ *следующие условия равносильны*:

а) $\|B\| < \infty$;
б) B *непрерывен в нуле*;
в) B *равномерно полунепрерывен сверху на* $E_1 \times E_2$.

Замечание 2.11. Свойства нормы бисублинейного оператора позволяют, по аналогии с сублинейным случаем, ввести нормированный операторный конус, индуктивно упорядоченный отношением

$$(B_1 \preceq B_2) \Leftrightarrow (B_1(h, k) \preceq B_2(h, k)) \quad (\forall h \in E_1,\, k \in E_2).$$

Обозначим его $L_{sub}(E_1, E_2; F)$.

Теорема 2.8. *Если* E_1, E_2, F — *нормированные конусы,* F *индуктивно упорядочен, то конус* $L_{sub}(E_1,\, E_2;\, F)$ — *также нормированный и индуктивно упорядоченный. При этом, если* F — *банахов конус, то конус* $L_{sub}(E_1,\, E_2;\, F)$ — *также банахов.*

Наконец, справедлив аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

Теорема 2.9. *В условиях и обозначениях теоремы* 2.8 *имеет место изометрия*:

$$L_{sub}(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2; F)), \tag{2.7}$$

которая устанавливается с помощью биекции

$$(B : E_1 \times E_2 \to F) \leftrightarrow (A_B : E_1 \to L_{sub}(E_2; F)),\ (A_B h)k = B(h, k).$$

Замечание 2.12. Нетрудно аналогичным образом ввести понятие полисублинейного оператора $P : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$, его нормы, а также нормированный упорядоченный конус полисублинейных ограниченных операторов $L_{sub}(E_1, \ldots E_n; F)$. Аналог изометрии (2.7) имеет вид:

$$L_{sub}(E_1, \ldots, E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2, \ldots, E_n; F)). \tag{2.8}$$

Далее в случае $E_1 = \ldots = E_n$ левую часть (2.8) будем кратко обозначать $L^n_{sub}(E; F)$.

Замечание 2.13. Используя определение 2.9, нетрудно задать бисублинейный оператор

$$B : \Bigl(\prod_{i=1}^{n} E_i^1\Bigr) \times \Bigl(\prod_{j=1}^{m} E_j^2\Bigr) \to F$$

как бисублинейную операторную матрицу $B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, где

$$B_{ij} \in L_{sub}(E_i^1, E_j^2; F) \cong L_{sub}(E_i^1; L_{sub}(E_j^2; F)).$$

В частности, в теории K-субдифференциалов для нас особенно будет важен случай квадратной бисублинейной «матрицы Гессе»:

$$B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}, \quad B : \Big(\prod_{i=1}^{n} E_i\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{n} E_j\Big) \to F.$$

2.3. Сублинейные K-операторы и K-функционалы. Здесь мы опишем важный тип сублинейных операторов, которые возникают далее в работе при общем определении компактных субдифференциалов. Начнем с общих определений.

Определение 2.11. Пусть E — выпуклый конус, F — нормированный конус, F_K — нормированный упорядоченный конус выпуклых компактных подмножеств F (см. определение 2.4). Сублинейный оператор $A : E \to F_K$ назовем *сублинейным K-оператором*, или, коротко, *K-оператором*.

Сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}_K$ назовем *сублинейным K-функционалом*, или, коротко, *K-функционалом*.

В случае нормированного конуса E, банахов конус сублинейных ограниченных K-операторов $L_{sub}(E; F_K)$ будем более коротко обозначать $L_K(E; F)$; банахов конус сублинейных ограниченных K-функционалов $L_{sub}(E; \mathbb{R}_K) = L_K(E; \mathbb{R})$ более коротко обозначим E_K^*.

Замечание 2.14. Если F — нормированное пространство, то для K-операторов из $L_K(E; F)$ можно ввести умножение на отрицательные скаляры: $((-\lambda)A)h = -A(\lambda h)$ $(\lambda \geqslant 0)$, а также *«скалярную разность»* K-операторов: $A - B = A + (-1)B$.

При этом $\|-A\| = \|A\|$, $\|A - B\| \geqslant |\|A\| - \|B\||$, однако, вообще говоря, $(A - B) + B \neq A$.

Для сублинейных K-функционалов возможно точное описание.

Теорема 2.10. *Пусть E — выпуклый конус, $f : E \to \mathbb{R}_K$. Тогда f — сублинейный K-функционал в том и только в том случае, если*

$$f(h) = [\underline{f}(h); \overline{f}(h)],$$

где $\underline{f} : E \to \mathbb{R}$ — надлинейный функционал, $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $\underline{f}(h) \leqslant \overline{f}(h)$ $(\forall h \in E)$.

При этом в случае нормированного конуса E, K-функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}]$ ограничен в том и только в том случае, если $\underline{f}$ равномерно полунепрерывен снизу на E, $\overline{f}$ равномерно полунепрерывен сверху на E.

Доказательство. 1. Так как значения f — компактные отрезки в $\mathbb{R}$, то можно принять обозначение $f(h) = [\underline{f}(h); \overline{f}(h)]$, где $-\infty < \underline{f}(h) \leqslant \overline{f}(h) < +\infty$. Согласно свойству субаддитивности f, для любых h_1, $h_2 \in E$ верно:

$$[\underline{f}(h_1 + h_2); \overline{f}(h_1 + h_2)] \subset [\underline{f}(h_1); \overline{f}(h_1)] + [\underline{f}(h_2); \overline{f}(h_2)] = [\underline{f}(h_1) + \underline{f}(h_2); \overline{f}(h_1) + \overline{f}(h_2)],$$

что равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \underline{f}(h_1 + h_2) \geqslant \underline{f}(h_1) + \underline{f}(h_2); \\ \overline{f}(h_1 + h_2) \leqslant \overline{f}(h_1) + \overline{f}(h_2). \end{cases}$$

Аналогично, $\forall \lambda \geqslant 0$, $\forall h \in E$ имеем:

$$[\underline{f}(\lambda h); \overline{f}(\lambda h)] = \lambda[\underline{f}(h); \overline{f}(h)] = [\lambda \underline{f}(h); \lambda \overline{f}(h)],$$

что равносильно системе равенств $\{\underline{f}(\lambda h) = \lambda \underline{f}(h); \overline{f}(\lambda h) = \lambda \overline{f}(h)\}$.

Таким образом, $\underline{f}$ надлинеен, $\overline{f}$ сублинеен. Обратное утверждение проверяется аналогично.

2. Если f ограничен по норме, то согласно теореме 2.4 f равномерно полунепрерывен сверху на E, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in E \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow ([\underline{f}(x + h); \overline{f}(x + h)] \subset (\underline{f}(x) - \varepsilon; \overline{f}(x) + \varepsilon)). \tag{2.9}$$

Условие справа в (2.9) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \underline{f}(x+h) > \underline{f}(x) - \varepsilon; \\ \overline{f}(x+h) < \overline{f}(x) + \varepsilon, \end{cases}$$

что означает равномерную полунепрерывность для $\underline{f}$ (снизу) и $\overline{f}$ (сверху). □

Замечание 2.15. Отметим также, что для любого K-функционала (не только суб- или надлинейного) $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R}_K$ свойство *полунепрерывности сверху* в точке $x \in E$ можно записать в следующем виде:

$$\underline{f}(x) \leqslant \varliminf_{n \to 0} \underline{f}(x+h) \leqslant \varlimsup_{n \to 0} \overline{f}(x+h) \leqslant \overline{f}(x).$$

Приведем простой класс примеров сублинейных ограниченных K-функционалов.

Пример 2.1. Пусть E — нормированное пространство, $\mathcal{C}$ — выпуклый компакт в E^* (в сильной топологии). Положим

$$f_{\mathcal{C}}(h) = \mathcal{C} \cdot h. \tag{2.10}$$

Тогда $f_{\mathcal{C}} \in E_K^*$, $\|f_{\mathcal{C}}\| = \|\mathcal{C}\|$. В случае, если E — вещественное гильбертово пространство, можно взять $\mathcal{C} \subset E$ и положить $f_{\mathcal{C}}(h) = (\mathcal{C}, h)$. В частности, при $E = \mathbb{R}$ имеем $f_{[a;b]}(h) = [a; b] \cdot h$.

Отметим, что K-функционал допускает представление

$$f_{\mathcal{C}}(h) = [\underline{f}_{\mathcal{C}}(h); \overline{f}_{\mathcal{C}}(h)], \quad \text{где } \underline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \min(\mathcal{C} \cdot h),\ \overline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \max(\mathcal{C} \cdot h).$$

Построенный пример нетрудно обобщить на *K-операторы конечного ранга* $A : E \to \mathbb{R}_K^n$

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad (\mathcal{C}_i \subset E^*),$$

а также на K-операторы со значениями в $(l_p)_K$, $p \geqslant 1$,

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad \Big(\mathcal{C}_i \subset E^*,\ \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathcal{C}_i\|^p < +\infty\Big).$$

Помимо рассмотренных в пункте 2.2 общих свойств сублинейных операторов, опишем некоторые специальные свойства сублинейных K-операторов. Вначале введем понятие *K-композиции*.

Определение 2.12. Пусть E, F, C — нормированные конусы, $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$. *K-композицией* $[B \cdot A]$ K-операторов A и B назовем многозначное отображение

$$[B \cdot A]h = \overline{co}\Big(\bigcup_{k \in Ah} Bk\Big).$$

Имеет место следующий неочевидный факт.

Теорема 2.11. *Если $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$, то $[B \cdot A] \in L_K(E; G)$. При этом выполнено неравенство*

$$\|[B \cdot A]\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Доказательство. Пусть $D = \bigcup\limits_{y \in Ah} By$. Для произвольной последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ возможны два случая.

1. Вся последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, или хотя бы некоторая ее подпоследовательность, содержится в одном By, при некотором $y \in Ah$. Так как множество By компактно, то из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2. Никакая подпоследовательность из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержится в каком-либо одном By, где $y \in Ah$, т. е. в каждом By может содержаться только конечное число z_n. Следовательно, существует некоторая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Ah$, такая, что каждое By_k содержит некоторую точку z_{n_k}.

а). Так как Ah — компакт, то из $\{y_k\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $y_{k_i} \to y_0 \in Ah$. Так как B непрерывен как отображение в $\widetilde{F}_K$, то

$$By_{k_i} \subset By_0 + E_{k_i}, \quad \text{где } \|E_{k_i}\| = \sup_{z \in E_{k_i}} \|z\| \to 0.$$

б). Следовательно, для любого $i = 1, 2, \ldots$ найдется такой элемент $\widetilde{z}_i \in By_0$, что $z_{n_{k_i}} = \widetilde{z}_i + e_i$, где $e_i \in E_{k_i}$, $\|e_i\| \to 0$ при $i \to \infty$.

Так как последовательность $\{\widetilde{z}_i\}_{i=1}^{\infty}$ содержится в компакте By_0, то из нее можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{z_{i_j}} \to z_0 \in By_0$. При этом $\widetilde{z_{i_j}} = e_{i_j} + z_{n_{k_{i_j}}}$, где $\|e_{i_j}\| \to 0$, $j \to \infty$, откуда следует, что $z_{n_{k_{i_j}}} \to z_0$ при некотором $z_0 \in \overline{D}$. Следовательно, множество $\overline{D}$ компактно, откуда множество $\overline{co}(D) = \overline{co}(\overline{D})$ также компактно.

Сублинейность отображения $[B \cdot A] : E \to G_K$ проверяется непосредственно. □

Замечание 2.16. Нетрудно аналогичным образом ввести *бисублинейные K-операторы* $B : E_1 \times E_2 \to F_K$. В этом случае каноническая изометрия между упорядоченными конусами бисублинейных и сублинейных операторов (2.7) принимает вид

$$L_K(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2; F)),$$

а в случае полисублинейных операторов

$$L_K(E_1, \ldots, E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2, \ldots, E_n; F)).$$

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных K-операторов. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного K-оператора в прямую сумму*; здесь сохраняется результат предложения 2.2.

Предложение 2.4. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j; F\Big)$. Обозначим $P_j : E \to E_j$ канонические проекции, и положим $A_j = A \cdot P_j$ $(j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*

$$\Big(A \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A \cdot P_j\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \preceq \sum_{j=1}^{n} A_j h_j \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\Big).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного K-оператора*. Здесь удобнее перейти к так называемому *K-набору* координатных операторов.

Предложение 2.5. *Пусть E и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(E; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим $Q_i : F_i \to F$ канонические инъекции и положим $A^i h = Q_i \cdot (Ah)$ $(i = \overline{1,m})$. Введем «K-набор» K-операторов $A^i : E \to (F_i)_K$:*

$$(A^1, \ldots, A^m)_K h = \prod_{i=1}^{m} (A^i h) \in \Big(\prod_{i=1}^{m} F_i\Big)_K.$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (A^1, \ldots, A^m)_K\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \prod_{i=1}^{m} (A^i h)\Big).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah) = A^i h$ $(i = \overline{1,m})$.

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного K-оператора в так называемую K-матрицу.

Теорема 2.12. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E_j; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим, как и ранее, через $P_j : E \to E_j$ и $Q_i : F_i \to F$ соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим $A_{ij} h_j = Q_i(AP_j h)$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.*

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} := \Big(\sum_{j=1}^{n} Q_i \cdot (AP_j)\Big)_K^{i=\overline{1,m}} \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \Big(\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}h_j\Big)\Big).$$

Опишем детально частный случай K-матриц для *сублинейных K-функционалов и K-операторов конечного ранга*. Вначале опишем разложение в прямую сумму K-функционалов.

Предложение 2.6. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ — нормированные конусы, $f = [\underline{f}; \overline{f}] \in \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} E_j\Big)_K^*$. Положим*

$$f_j = f \cdot P_j = [\underline{f} \cdot P_j; \overline{f} \cdot P_j] = [\underline{f_j}; \overline{f}_j] \quad (j = \overline{1,n}).$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(f \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} f \cdot P_j\Big) \Leftrightarrow \Big([\underline{f}(h); \overline{f}(h)] \subset \Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_j}(h_j); \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_j(h_j)\Big]\Big) \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E).$$

Перейдем к разложению в K-набор сублинейного K-оператора конечного ранга.

Предложение 2.7. *Пусть E — нормированный конус, $A \in L_K(E; \mathbb{R}^m)$, $Q_i : \mathbb{R}_{(i)} \to \mathbb{R}^m$ — канонические инъекции. Положим*

$$f_i h = [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)] = Q_i(Ah), \quad f_i \in (E)_K^* \quad (i = \overline{1,m}).$$

Введем «K-набор» K-функционалов $f_i : E \to \mathbb{R}_K$:

$$(f^1, \ldots, f^m)_K \cdot h = \prod_{i=1}^{m} [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)] \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (f^1, \ldots, f^m)_K\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \prod_{i=1}^{m} [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)]\Big) \quad (\forall h \in E).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah) = [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)]$.

Наконец, опишем общее разложение K-оператора конечного ранга в K-матрицу.

Теорема 2.13. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\sum_{j=1}^{n} E_j; \mathbb{R}^m\Big)$. Положим*

$$f_{ij}(h_j) = [\underline{f_{ij}}(h_j); \overline{f}_{ij}(h_j)] = Q_i(AP_j h) \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Тогда $\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E$ справедлива оценка

$$\Big(A \preceq ([\underline{f_{ij}}; \overline{f}_{ij}])_K = \Big(\Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}}; \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_{ij}\Big]\Big)_K^{i=\overline{1,m}}\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \Big(\prod_{i=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}}(h_j); \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_{ij}(h_j)\Big]\Big). \tag{2.11}$$

Замечание 2.17. Приведем полезную для приложений *параметрическую модель K-матрицы* (в случае K-операторов конечного ранга).

Вводим «нижнюю» и «верхнюю» матрицы K-оператора A:

$$\underline{A} = (\underline{f_{ij}})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}, \quad \overline{A} = (\overline{f}_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Тогда оценка (2.11) позволяет интерпретировать K-матрицу $[\underline{f_{ij}}; \overline{f}_{ij}]$ как набор матриц

$$\Big((1 - t_i)\underline{f_{ij}} + t_i \cdot \overline{f}_{ij}\Big)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} \quad (0 \leqslant t_i \leqslant 1).$$

Будем записывать это множество как *m-мерный матричный прямоугольник* $[\underline{A}; \overline{A}]$, стягивающий (вдоль главной диагонали) матрицы $\underline{A}$ и $\overline{A}$. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, часть строк которых берется из $\underline{A}$, а другая часть строк — из $\overline{A}$.

Перейдем к *бисублинейным K-функционалам*. Здесь справедлив аналог теоремы 2.10.

Теорема 2.14. *Пусть E_1, E_2 — выпуклые конусы, $\varphi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_K$. Тогда φ — бисублинейный K-функционал в том и только в том случае, если*

$$\varphi(h_1, h_2) = [\underline{\varphi}(h_1, h_2); \overline{\varphi}(h_1, h_2)],$$

где $\underline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бинадлинейный функционал, $\overline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бисублинейный функционал, $\underline{\varphi}(h_1, h_2) \leqslant \overline{\varphi}(h_1, h_2)$.

При этом, если E_1, E_2 — нормированные конусы, то K-функционал $\varphi = [\underline{\varphi}; \overline{\varphi}]$ ограничен в том и только в том случае, когда $\underline{\varphi}$ полунепрерывен снизу, $\overline{\varphi}$ полунепрерывен сверху на $E_1 \times E_2$.

Рассматривая, по аналогии сублинейным случаем, бисублинейный K-функционал

$$B \in L_K(E_1 \bigoplus \ldots \bigoplus E_n, E_1 \bigoplus \ldots \bigoplus E_n; \mathbb{R}),$$

мы приходим к порожденной им квадратной бисублинейной K-матрице

$$M_B = (\varphi_{ij} = [\underline{\varphi_{ij}}; \overline{\varphi_{ij}}])_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Аналогом оценки (2.11) здесь служит следующая квадратичная оценка.

Теорема 2.15. *В рассмотренных условиях справедлива оценка*

$$B(h)^2 \subset M_B \cdot (h)^2 \subset \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [\underline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j); \overline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j)].$$

Отметим в заключение, что замечание 2.17 естественным образом распространяется и на бисублинейные K-матрицы.

2.4. Симметризация сублинейных функционалов и K-функционалов. Как уже отмечалось в примере 2.1, естественное вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ ($x \mapsto \{x\}$) инъективно, сохраняет операции, но не сохраняет порядок: ($x_1 < x_2$ в $\mathbb{R}$)$\not\Rightarrow$($\{x_1\} \preceq \{x_2\}$ в $\mathbb{R}_K$); более того, $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ несравнимы. Вследствие несогласованности исходного порядка в $\mathbb{R}$ и порядка по вложению в $\mathbb{R}_K$, возникает «дисбаланс» между сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R}$ и однозначными сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$:

1. если K-функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ (т. е. $\underline{f} = \overline{f}$) сублинеен относительно вложения в $\mathbb{R}_K$, то f — *линейный функционал*;
2. если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен относительно обычного порядка в $\mathbb{R}$ (например, $f(x) = \|x\|$), то линейность f отсюда не следует.

Таким образом, если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то функционал $\{f\} : h \mapsto \{f(h)\}$, вообще говоря, не сублинеен. Наша цель — устранить этот «дисбаланс» с помощью простого преобразования «*симметризации*». Вначале введем его для функционалов $f : E \to \mathbb{R}$. Далее E — нормированное пространство.

Определение 2.13. Пусть функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен. Введем симметризованный K-функционал f^s равенством:

$$f^s(h) = [-f(-h); f(h)] =: [\underline{f}^s(h); \overline{f}^s(h)]. \tag{2.12}$$

Предложение 2.8. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то определение* (2.12) *корректно и K-функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Доказательство. Если f сублинеен, то $\overline{f^s} = f$ также сублинеен. Для $\underline{f}^s$ имеем:

$$\underline{f}^s(h + k) = -f(-h - k) \geqslant -f(-h) - f(-k) = \underline{f}^s(h) + \underline{f}^s(k); \quad \underline{f}^s(\lambda h) = -f(-\lambda h) f(-h) = \lambda \underline{f}(h).$$

Таким образом, $\underline{f}^s$ надлинеен, т. е. $f^s = [\underline{f}^s; \overline{f^s}]$ сублинеен. При этом:

$$f^s(-h) = [-f(h); f(-h)] = -[-f(-h); f(h)] = -f^s(h).$$

□

Теперь распространим определение симметризации на сублинейные K-функционалы.

Определение 2.14. Пусть K-функционал $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен. Введем *симметризованный K-функционал* f^s равенством

$$f^s(h) = [\min(\underline{f}(h), -\overline{f}(-h)); \max(\overline{f}(h); -\underline{f}(-h))]. \tag{2.13}$$

Предложение 2.9. *Если $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен, то определение* (2.13) *корректно и K-функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Доказательство. Если f сублинеен, то имеем импликации:

$$(\underline{f} \text{ надлинеен}) \Rightarrow (-\underline{f}(-h) \text{ сублинеен}) \Rightarrow (\overline{f^s}(h) = \max(\overline{f}(h), -\underline{f}(-h)) \text{ сублинеен});$$
$$(\overline{f} \text{ сублинеен}) \Rightarrow (-\overline{f}(-h) \text{ надлинеен}) \Rightarrow (\underline{f^s}(h) = \min(\underline{f}(h), -\overline{f}(-h)) \text{ надлинеен}).$$

Нечетность f^s проверяется аналогично случаю $f : E \to \mathbb{R}$. □

Замечание 2.18.

1. Из сублинейности f в обоих рассмотренных случаях непосредственно следует неравенство $\underline{f^s} \leqslant \overline{f^s}(h)$.
2. Нечетность f^s влечет его однородность $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}: \ f^s(\lambda h) = \lambda f^s(h)$. Однако отсюда не следует линейность функционала f^s ввиду его многозначности.
3. Повторная симметризация не меняет вид f^s: $f^{ss} = f^s$.

Наконец отметим, что в случае $f : E \to \mathbb{R}$ симметризации f и $\{f\}$ совпадают, что решает поставленную в начале пункта задачу.

Предложение 2.10. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то $\{f\}^s = f^s$. Таким образом, в этом случае формулы* (2.12) (*для f*) *и* (2.13) (*для $\{f\}$*) *дают один и тот же результат. В частности, если f линеен, то $f^s = \{f\}$.*

Доказательство. Имеем:

$$\{f\}^s(h) = [\min(f(h), -f(-h));\ \max(f(h), -f(-h))] = [-f(-h); f(h)] = f^s(h).$$

□

Замечание 2.19. Отметим в заключение, что процедуру симметризации можно применить также и к сублинейным операторам $A : E \to F$, $B : E \to F_K$, если конус F *решеточно* упорядочен. Заметим также, что записанные в этом разделе свойства K-функционалов распространяются на случай симметризованных функционалов.

3. Компактные субдифференциалы. Исчисление первого порядка

3.1. K-пределы и их основные свойства. Понятие K-предела, введенное ранее в пункте 1.2, мы изложим здесь уже в категории нормированных конусов.

Определение 3.1. Пусть E — нормированный конус, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым компактным пересечением B. Множество B назовем *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta,$$

если $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

Таким образом, «K-сходимость» множеств B_δ, в рамках определения 3.1 (как и ранее в рамках определения 1.1) можно охарактеризовать как равномерное внешнее топологическое стягивание множеств B_δ к их компактному пересечению.

Перейдем к простейшим свойствам K-пределов. Следующие два свойства легко следуют из определения и не используют в доказательстве компактность K-предела.

Предложение 3.1. *Пусть в условиях определения* 3.1 *существует* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$. *Если* $B^2_\delta \subset B^1_\delta$ ($\forall\, \delta > 0$), *то существует и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *причем выполнено включение*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta \subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta.$$

Предложение 3.2. *Если существует* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta$, *то при любом* $\lambda \geqslant 0$ *существует и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(\lambda B_\delta)$, *причем выполнено равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(\lambda B_\delta) = \lambda \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta.$$

Доказательство свойства *обобщенной аддитивности* уже требует компактности хотя бы одного из двух K-пределов.

Предложение 3.3. *Если существуют* K*-пределы* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$ *и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *то существует и* K*-предел их замкнутой суммы* (*по Минковскому*) $\{\overline{B^1_\delta + B^2_\delta}\}_{\delta>0}$, *причем выполнено равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta + \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta.$$

Доказательство. Обозначим пределы справа, соответственно, через B^1 и B^2. Непосредственно проверяется, что выполняется включение

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \supset \bigcap_{\delta>0} B^1_\delta + \bigcap_{\delta>0} B^2_\delta = B^1 + B^2.$$

Для проверки обратного включения воспользуемся свойством из определения 3.1. Для заданной окрестности нуля $U = U(0) \in E$ выберем такую окрестность нуля $U' = U'(0) \in E$ и подходящее $\delta_{U'}$, чтобы $U' + U' \subset U$ и выполнялось:

$$\left(0 < \delta < \delta_{U'}\right) \Leftrightarrow \left(B^1_\delta \subset B^1 + U', B^2_\delta \subset B^2 + U'\right).$$

Отсюда следует:

$$\overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \subset (B^1 + U') + (B^2 + U') = (B^1 + B^2) + (U' + U') \subset (B^1 + B^2) + U.$$

Таким образом, условие из определения 3.1 для $B^1(h) + B^2(h)$ выполнено. При этом

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \subset \bigcap_{U(0)\in E} [B^1 + B^2) + U] = B^1 + B^2,$$

так как $B^1 + B^2$ замкнуто. Таким образом, условие из определения 3.1 для $B^1 + B^2$ также выполнено и равенство доказано. □

Предложение 3.4. *Пусть* $B^1_\delta \subset E_1$, $B^2_\delta \subset E_2$ $(\forall \delta > 0)$, *где* E_1, E_2 — *нормированные конусы. Если существуют* K*-пределы* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$ *и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *то существует и* K*-предел их декартова произведения* $\{B^1_\delta \times B^2_\delta\}_{\delta>0}$ *в* $E_1 \times E_2$, *причем имеет место равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(B^1_\delta \times B^2_\delta) = (\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta) \times (\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta). \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим пределы справа в (3.1), соответственно, через B^1 и B^2. Тогда

$$\bigcap_{\delta>0}(B^1_\delta \times B^2_\delta) = \left(\bigcap_{\delta>0} B^1_\delta\right) \times \left(\bigcap_{\delta>0} B^2_\delta\right) = B^1 \times B^2,$$

т. е. условие из определения 3.1 для $B^1 \times B^2$ выполнено. Далее, для любых окрестностей $U_i(0) \in E_i$ $(i = 1, 2)$ выберем такие $\delta_{U_i} > 0$, что

$$(0 < \delta < \delta_{U_i}) \Rightarrow (B^1_\delta \subset B^2_\delta), \qquad i = 1, 2.$$

Пусть $U = U_1 \times U_2, \delta_U = \min(\delta_{U_1}, \delta_{U_2})$. Следовательно,

$$(0 < \delta < \delta_{U_i}) \Rightarrow B^1 \times B^2 \subset (B^1_\delta + U_1) \times (B^2_\delta + U_2) = (B^1 \times B^2) + (U_1 + U_2) \subset (B^1 \times B^2) + U,$$

т. е., условие из определения 3.1 для $B^1 \times B^2$ также выполняется. Следовательно, равенство (3.1) доказано. □

Наконец, справедлив следующий важный критерий «K-сходимости», который мы, по аналогии с известным признаком Вейерштрасса, назовем *признаком Вейерштрасса для* K*-пределов*.

Теорема 3.1. *В условиях и обозначениях определения* 3.1 K*-предел* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta$ *существует тогда и только тогда, когда найдется такой выпуклый компакт* $\widetilde{B} \subset E$, *что*

$$\forall\, U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0: \ \ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset \widetilde{B} + U(0)). \tag{3.2}$$

При этом $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta \subset \widetilde{B}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B = \underset{\delta\to 0}{K\text{-}\lim} B_\delta$. Тогда, подставляя $B = \widetilde{B}$ во второе условие из определения 3.1, мы сразу же приходим к условию (3.2).

Достаточность. Пусть (3.2) выполнено. Тогда $B = \bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta$ компактно, т. к.

$$(B = \bigcap_{\delta>0} B_\delta \subset \tilde{B} + U) \ \Rightarrow \ (B \subset \bigcap_{U(0)} (\widetilde{B} + U) = \widetilde{B}).$$

Допустим, что $B \neq \underset{\delta\to 0}{K\text{-}\lim} B_\delta$, т. е. условие из определения 3.1 не выполняется. Следовательно, существует такая открытая окрестность $U_0(0) \subset E$ и такая последовательность $\delta_n \searrow 0$, что

$$B_{\delta_n} \bigcap B + U_0 \neq \varnothing, \ n = 1, 2, \ldots. \tag{3.3}$$

Выберем $\forall\, n \in \mathbb{N}$ точку $x_n \in B_{\delta_n} \backslash (B + U_0)$. Так как $\delta_n \to 0$, то из (3.2) следует

$$d(x_n, B) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Из определения квазиметрики теперь следует, что $\forall\, n$ существует такой $\tilde{x}_n \in \tilde{B}$, что $d(x_n, \tilde{x}_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Ввиду компактности $\tilde{B}$, из последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\tilde{x}_{n_k} \to x_0 \in \tilde{B}$ при $k \to \infty$.

При этом, в силу (3.3), $x_{n_k} \notin B + U_0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, откуда следует в пределе $x_0 \notin B$. С другой стороны, из-за убывания $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в каждом B_δ, начиная с некоторого номера n_{k_0} (для которого $\delta_{n_{k_0}} \leqslant \delta$).

Следовательно, ввиду замкнутости B_δ имеем $x_0 \in B_\delta$ $\forall\, \delta > 0$, откуда $x_0 \in B$. Получено противоречие, следовательно, условие из определения 3.1 выполнено. □

Замечание 3.1.

1. Условие (3.2) можно, видимо, трактовать как условие «полунепрерывности сверху» отображения $\delta \mapsto B_\delta$ в конусе E_B выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств E.
2. Теорема 3.1 служит далее базой для получения критериев K-субдифференцируемости.

3.2. K-субдифференциалы по направлению. Определяя K-субдифференциалы в нормированных конусах, мы стараемся придерживаться классической схемы Гато—Адамара—Фреше: дифференциал по направлению — слабый дифференциал — дифференциал Гато — дифференциал Фреше. Замена основных объектов следующая: пространства $\mapsto$ конусы, линейные операторы $\mapsto$ сублинейные операторы, дифференциалы $\mapsto$ K-субдифференциалы.

Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $h \in E$ — произвольное направление в E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F.

Определение 3.2. Назовем *K-субдифференциалом* отображения f в точке x следующий K-предел (если он существует):

$$\partial_K f(x, h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} \overbrace{\overline{co}\, \{Y \in F \,|\, f(x + th) = f(x) + tY,\, 0 < t < \delta\}}^{\partial_\delta f(x,h)}. \tag{3.4}$$

В случае, когда F — нормированное пространство, выражение под знаком K-предела в (3.4) можно выразить в более привычной форме, через разностные отношения:

$$\partial_K f(x, h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left\{ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \right| \left. 0 < t < \delta \right\}.$$

Заметим, что если конус F не погружается в векторное пространство, то в (3.4) при каждом фиксированном $t > 0$ определяется Y, вообще говоря, *не единственным образом*.

Приведем некоторые *элементарные свойства* K-субдифференциалов по направлению.

Предложение 3.5. *Справедливы соотношения*:

1. $\partial_K(\lambda f)(x,h) = \lambda\partial_K f(x,h)$ $(\forall\lambda \geqslant 0)$;
2. $\partial_K(f_1 + f_2)(x,h) \subset \partial_K f_1(x,h) + \partial_K f_2(x,h)$.

Доказательство. Имеем:

$$\partial_K(f_1+f_2)(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)+f_2(x+th)-f_1(x)-f_2(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} =$$

$$= K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left(\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\right\} + \left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\right\}\,\middle|\, 0<t<\delta\right) \subset$$

$$\subset K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\left[\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} + \overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\}\right] =$$

$$= K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\left[\overline{\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} + \overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\}}\right].$$

Таким образом, получаем:

$$\partial_K(f_1+f_2)(x,h) \subset K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} +$$

$$+ K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} = \partial_K f_1(x,h) + \partial_K f_2(x,h).$$

□

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по f выполнено в полном объеме:

3. $\partial_K(\lambda f)(x,h) = \lambda\partial_K f(x,h) \quad (\forall\lambda \in \mathbb{R})$.

Предложение 3.6. *Справедливо соотношение*:

1. $\partial_K(f)(x,\lambda h) = \lambda\partial_K f(x,h) \quad (\forall\lambda \geqslant 0)$;

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по h выполнено в полном объеме:

2. $\partial_K f(x,\lambda h) = \lambda\partial_K f(x,h) \quad (\forall\lambda \in \mathbb{R})$.

Доказательство. Имеем:

$$\partial_K f(x,\lambda h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{\frac{f(x+t(\lambda h))-f(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\} =$$

$$= K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{\frac{f(x+(t\lambda)h)-f(x)}{t\lambda}\lambda\,\middle|\, 0<t\lambda<\lambda\delta\right\} =$$

$$= \left|\tilde\delta = \lambda\delta,\ \tilde\delta\to+0,\ t\lambda = \tilde t\right| = K\text{-}\lim_{\tilde\delta\to+0}\left[\lambda\overline{co}\left\{\frac{f(x+\tilde t h)-f(x)}{\tilde t}\,\middle|\, 0<\tilde t<\tilde\delta\right\}\right] = \lambda\partial_K f(x,h).$$

□

Предложение 3.7. *Если $f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$, то справедливы равенства*:

$$pr_{F_i}(\partial_K f(x,h)) = \partial_K f_i(x,h) \quad (i = 1,2).$$

В частности,

$$\partial_K(f_1,f_2)(x,h) \subset \partial_K f_1(x,h) \times \partial_K f_2(x,h).$$

Выделим важный случай K-субдифференцирования функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_K f(x,h)$.

Теорема 3.2. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке*: $\overline{\partial} f(x,h)$ *и* $\underline{\partial} f(x,h)$. *При этом имеет место равенство*:

$$\partial_K f(x,h) = \Big[\underline{\partial} f(x,h);\ \overline{\partial} f(x,h)\Big]. \tag{3.5}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$. Поскольку при $0 < t \leqslant 1$

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t},$$

то отсюда следует

$$\partial_K f(x,h) = \partial_K \varphi(0) = \Big[\underline{\frac{d\varphi}{dt}}(0);\ \overline{\frac{d\varphi}{dt}}(0)\Big] = \Big[\underline{\partial f}(x,h);\ \overline{\partial f}(x,h)\Big].$$

□

Замечание 3.2. Формулы для вычисления $\underline{\partial} f(x,h)$ и $\overline{\partial} f(x,h)$ имеют обычный вид, коническая структура E его не усложняет:

$$\underline{\partial} f(x,h) = \varliminf_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \quad \overline{\partial} f(x,h) = \varlimsup_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Как следствие, отметим уже приведенный в пункте 1.2 результат (замечание 1.2).

Следствие 3.1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны нижняя и верхняя частные производные в этой точке*: $\underline{\dfrac{df}{dx}}(x)$ *и* $\overline{\dfrac{df}{dx}}(x)$. *При этом имеет место равенство*

$$\partial_K f(x) = \left[\underline{\frac{df}{dx}}(x); \overline{\frac{df}{dx}}(x)\right].$$

Следствие 3.2. *Отображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ K-субдифференцируемо в точке $x \in \mathbb{R}$ по направлению h тогда и только тогда, когда все координатные функционалы f_i K-субдифференцируемы в этой точке по направлению h. При этом выполнена оценка*

$$\partial_K (f_1, \ldots, f_m)(x,h) \subset \prod_{j=1}^{m} \Big[\underline{\partial} f_j(x,h);\ \overline{\partial} f_j(x,h)\Big]. \tag{3.6}$$

При этом прямоугольная оценка (3.6) *точна по проекциям.*

3.3. Слабый K-субдифференциал, K-субдифференциал Гато, K-субдифференциал Фреше. Отправляясь от K-субдифференциала по фиксированному направлению h и действуя по аналогии с классической схемой, мы теперь вводим слабый K-субдифференциал как сублинейный K-оператор по h, K-субдифференциал Гато — как ограниченный сублинейный K-оператор, и наконец, K-субдифференциал Фреше «по схеме Гато» плюс «равномерная по направлениям сходимость в K-пределе $\partial_K f(x,h)$».

Далее, как и в пункте 3.2, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.3. Будем говорить, что отображение f *слабо K-субдифференцируемо* в точке x, если f K-субдифференцируемо в этой точке по любому направлению $h \in E$ и K-субдифференциал по направлению $\partial_K f(x,h)$ сублинеен по h. Примем в этом случае обозначение $\partial_K f(x)h = \partial_K f(x,h)$. Здесь $\partial_K f(x) : E \to F_K$ — сублинейный K-оператор.

Определение 3.4. Будем говорить, что отображение f *K-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если f слабо K-субдифференцируемо в этой точке и слабый K-субдифференциал $\partial_K f(x)$ ограничен (или, что равносильно, равномерно полунепрерывен сверху на E). В этом случае сублинейный ограниченный оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K-субдифференциалом Гато* отображения f в точке x.

Определение 3.5. Будем говорить, что отображение f *K-субдифференцируемо по Фреше* (или *сильно K-субдифференцируемо*) в точке x, если f K-субдифференцируемо по Гато в этой точке и сходимость в K-пределе

$$\partial_K f(x)h = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\{Y \in F | f(x+h) = f(x) + tY,\ 0 < t < \delta\} \tag{3.7}$$

равномерна по всем направлениям h, $0 < \|h\| \leqslant 1$. В этом случае K-оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K-субдифференциалом Фреше* (или *сильным K-субдифференциалом*) отображения f в точке x.

В случае нормированного пространства F равенство (3.7) принимает вид:

$$\partial_K f(x)h = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t};\ 0 < t < \delta \right\}.$$

Приведем теперь критерии для всех типов K-субдифференцируемости в терминах малости остаточного члена (доказательство опирается на признак Вейерштрасса для K-пределов). С этой целью введем понятие *многозначного малого отображения*.

Определение 3.6. Обозначим через F_B нормированный выпуклый конус всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств F с суммой $\overline{(B_1 + B_2)}$ и с нормой $\|B\| = \sup\limits_{y\in B} \|y\|$.

Отображение $\Psi : \mathbb{R} \supset U(0) \to F_B$ назовем *малым* (в нуле), если $\|\Psi(t)\| \to 0$ при $t \to 0$. Примем обычную запись: $\Psi(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Теорема 3.3. *Отображение f слабо K-субдифференцируемо в точке x в том и только в том случае, если найдутся сублинейный K-оператор $B : E \to F_K$ и отображение $\psi : E \to F_B$ такие, что*

$$f(x+h) \in f(x) + Bh + \psi(h), \quad \textit{где} \ \ \frac{\psi(th)}{t} \to 0 \ \ \textit{при} \ \ t \to +0 \quad (\forall h \in E). \tag{3.8}$$

При этом $\partial_K f(x)h \subset Bh$ $(\forall h \in E)$.

В случае нормированного пространства F представление (3.8) *можно переписать в виде*

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in Bh + \lambda(t,h), \quad \textit{где} \ \ \lambda(t,h) \to 0 \ \ \textit{при} \ \ t \to +0 \quad (\forall h \in E).$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f слабо K-субдифференцируемо в точке x. Тогда для любого фиксированного $h \in S_1$ применимо условие (3.8). Полагая $U = U_\varepsilon(0)$, найдем $\delta = \delta_h(\varepsilon) > 0$, для которого

$$(\delta < \delta_h(\varepsilon)) \Rightarrow (\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_\varepsilon), \tag{3.9}$$

причем оператор $Bh = \partial_K f(x)h$ — сублинейный по h. Так как при этом $\delta_h(\varepsilon)$ можно уменьшать, то без ограничения общности можно считать, что $\delta_h(\varepsilon)$ строго убывает к нулю при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда существует обратная функция $\varepsilon = \varepsilon_h(\delta)$ (также строго убывающая к нулю при $\delta \searrow 0$), для которой

$$\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_{\varepsilon_h}(\delta).$$

Так как (для y из (3.9)) верно, что $y \in \partial_\delta f(x,h)$ при $0 < t < \delta$, то отсюда получаем

$$f(x+th) \in f(x) + B(th) + t\varepsilon_h(t), \tag{3.10}$$

где $\varepsilon_h(t) \to 0$ при $t \to 0$. Положим $\psi(th) = t\varepsilon_h(t)$ (в частности, $\psi(h) = \varepsilon_h(1)$). Тогда

$$\psi(th)/t = \varepsilon_h(t) \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

т. е. условие (3.8) выполняется.

Проверим достаточность. Пусть выполняется (3.8). Тогда, заменяя $h \mapsto th$ в (3.8), получим:

$$f(x+th) \in f(x) + B(th) + \psi(th),$$

что равносильно включению (для y из (3.9))

$$y \in Bh + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Следовательно,

$$\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_\varepsilon$$

при $\delta \leqslant \delta_h(\varepsilon)$, т. е. условие выполнено для любого h, $\|h\| = 1$, откуда отображение f K-субдифференцируемо по любому направлению h. □

Теорема 3.4. *Отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x в том и только в том случае, если выполнена оценка* (3.8)*, где $B \in L_K(E;F)$.*

Доказательство. Если (3.8) выполнено, то по теореме 3.3 $\partial_K f(x)h =: Ah \subset Bh$, откуда $\|A\| \leqslant \|B\| < \infty$, т. е. A ограничен. Таким образом, отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x. Обратно, если f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, подставим в (3.8) $Bh = \partial_K f(x)h$. □

Теорема 3.5. *Отображение f K-субдифференцируемо по Фреше в том и только в том случае, если выполнена оценка* (3.8)*, где $B \in L_K(E;F)$ и*

$$\frac{\psi(th)}{t} \rightrightarrows 0 \quad \text{при } t \to +0 \ (\text{равномерно по } \|h\| \leqslant 1); \tag{3.11}$$

или, что равносильно,

$$\|\psi(h)\| = o(\|h\|).$$

Доказательство. Если выполнено (3.11), то, повторяя выкладку из доказательства достаточности в теореме 3.3, получим:

$$\partial_K f(x)h \subset Ah + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Так как $\psi(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то $(\psi(th)/t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Следовательно,

$$Ah \subset \partial_K f(x,t)h \subset Ah + U \text{ при } |t| < \delta_U \ (\forall \|h\| \leqslant 1),$$

т. е. выполнено определение K-субдифференцируемости по Фреше.

Обратно, если f K-субдифференцируемо по Фреше, т. е.

$$\partial_\delta f(x,h) \rightrightarrows \partial_K f(x,h) \quad \text{при} \quad \delta \to +0, \ \|h\| \leqslant 1,$$

то в доказательстве необходимости теоремы 3.3 определение $\delta_h(\varepsilon)$, а значит, и определение $\psi(th)$, не зависит от выбора h, т. е. зависит только от $\|\tilde{h} = th\| = t$. Таким образом, заменяя $th = \tilde{h}$, получаем

$$f(x + \tilde{h}) \in f(x) + \partial_K f(x, \tilde{h}) + \psi(\tilde{h}),$$

где $\psi(\tilde{h}) \to 0$ при $\|\tilde{h}\| \to 0$, т. е. выполнено (3.11). □

Отметим некоторые *свойства сильных K-субдифференциалов*, непосредственно вытекающие из определения и критерия 3.5. Прежде всего, это очевидная связь между K-субдифференцируемостью и непрерывностью.

Теорема 3.6. *Если отображение f сильно K-субдифференцируемо в точке x, то f непрерывно в этой точке.*

Далее, в случае нормированных пространств очевидно, что $\partial_K f(x)$ — обобщение производной Фреше. Менее очевидно, что существует и обратная связь.

Теорема 3.7. *Пусть E, F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Тогда*:

1. *Если f сильно дифференцируемо в точке x, то f также и сильно K-субдифференцируемо в точке x, причем $\partial_K f(x) = f'(x)$.*
2. *Обратно, если f дифференцируемо по каждому направлению в точке x, причем* (*обозначая $\partial f(x,h) = \lim\limits_{t\to+0}(f(x+th) - f(x)/t)$*):

$$\partial f(x,-h) = -\partial f(x,h),$$

и f сильно K-субдифференцируемо в точке x, то f сильно дифференцируемо (*в обычном смысле*) *в этой точке.*

Доказательство. 1. Очевидно, существование $\partial f(x,h)$ влечет равенство $\partial_K f(x;h) = \partial f(x,h)$, так как определение одноточечного K-предела сводится к обычному условию стягивания.

2. Далее, для K-оператора с одноточечными значениями свойство сублинейности (при условии $A(-h) = -Ah$) переходит в свойство линейности. Таким образом, $\partial_K f(x) \in L(E;F)$, а в этом случае определение 3.5 сильной K-субдифференцируемости тождественно определению сильной дифференцируемости по Фреше. □

Простой пример $\partial_K f \neq f'$ дает функция $f(x) = |x|$. Имеем $\partial_K f(x) = f'(x) = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$, $\partial_K f(0) = [-1;1]$.

Здесь мы также выделим важный *случай K-субдифференцирования функционалов*.

Замечание 3.3. В случае сильного K-субдифференцирования функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, а также (покоординатно) отображений $f : E \to \mathbb{R}^m$ нам удобнее будет использовать *симметризованный K-субдифференциал* $\partial_K^s f(x)h$. Используя равенства (3.5) и (2.12), получаем:

$$\partial_K^s f(x)h = [\min(\underline{\partial} f(x,h), -\overline{\partial} f(x,-h)); \max(\overline{\partial} f(x,h), -\underline{\partial} f(x,-h))]. \tag{3.12}$$

Смысл симметризации легко уяснить, переходя к языку нижних и верхних частных производных. Фиксируя нормированное направление h, равенство (3.5) можно переписать в виде:

$$\partial_K f(x)h = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0)\right] \tag{3.13}$$

(где справа выписаны нижняя и верхняя правосторонние частные производные f в точке x по прямой $\{\lambda h \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ с положительным направлением h).

Тогда

$$\partial_K f(x)(-h) = \left[-\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0); -\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\right] \tag{3.14}$$

(где справа выписаны уже левосторонние нижняя и верхняя производные f в точке x).

Отсюда, подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), получаем:

$$\partial_K^s f(x)h = \left[\min\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0); \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\right); \max\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0)\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right] \tag{3.15}$$

Теорема 3.8. *Пусть E — нормированный конус. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сильно K-субдифференцируем в точке x, то $\forall\, h \in E$ справедливо равенство*

$$\partial_K f(x)h = \left[\underline{\partial} f(x)h; \overline{\partial} f(x)h\right], \tag{3.16}$$

где $\underline{\partial} f(x)$ — надлинейный, полунепрерывный снизу по h функционал, $\overline{\partial} f(x)$ — сублинейный, полунепрерывный сверху по h функционал.

В частности, если E — нормированное пространство и $\|h\| = 1$, то

$$\partial_K^s f(x)h = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right]. \tag{3.17}$$

Доказательство. Равенство (3.16) для K-субдифференциала по направлению было доказано в теореме 3.2. Так как $\partial_K f(x)$ — сублинейный ограниченный K-функционал, то требуемые свойства функционалов $\underline{\partial} f(x,h)$ и $\overline{\partial} f(x,h)$ вытекают из теоремы 2.10. Равенство (3.17) выведено в замечании 3.3. □

3.4. Общие свойства сильных K-субдифференциалов. Мы начнем с необходимого условия K-субдифференцируемости.

Теорема 3.9. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — нормированные конусы. Если отображение $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ K-субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по совокупности переменных, то f K-субдифференцируемо в этой точке по каждой из переменных в отдельности. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x_1, \ldots, x_n) h_i.$$

Доказательство. 1. По определению частных K-субдифференциалов

$$\partial_\delta f^{x_j}(x_i, h_i) = \overline{co}\left\{y_j \;\Big|\, f(x_j + th_j, x_i) = f(x_1, x_2) + ty_j \; 0 < t < \delta\right\} \; (i, j = 1, 2).$$

С другой стороны,

$$\partial_\delta f((x_1, x_2), (h_1,\, 0)) = \overline{co}\left\{y_1 \;\Big|\, f(x_1 + th_1, x_2) = f(x_1, x_2) + ty_1 \; 0 < t < \delta\right\},$$

$$\partial_\delta f((x_1, x_2), (0,\, h_2)) = \overline{co}\left\{y_2 \;\Big|\, f(x_1, x_2 + th_2) = f(x_1, x_2) + ty_2 \; 0 < t < \delta\right\}.$$

Переходя в этих равенствах к пределу по направлениям $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно, получим:

$$\partial_K^{x_1} f(x_1, x_2)h_1 = \partial_K f(x_1, x_2)(h_1, 0), \; \partial_K^{x_2} f(x_1, x_2)h_2 = \partial_K f(x_1, x_2)(0, h_2).$$

2. Если отображение f слабо K-субдифференцируемо в точке (x_1, x_2), $h = (h_1, h_2) = (h_1, 0) + (0, h_2)$, то, ввиду сублинейности K-субдифференциалов по h,

$$\partial_K f(x_1, x_2)(h_1, h_2) \subset \partial_K f(x_1, x_2)(h_1, 0) + \partial_K f(x_1, x_2)(0, h_2) = \partial_K^{x_1} f(x_1, x_2)h_1 + \partial_K^{x_2} f(x_1, x_2)h_2.$$

□

Следствие 3.3. *Пусть* $E_1, \ldots, E_n$ *— нормированные пространства. Если функционал* $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to \mathbb{R}$ *сильно* K*-субдифференцируем в точке* x*, то имеет место «формула полного* K*-субдифференциала»* $(\forall\, h = (h_1, \ldots, h_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n)$ *в оценочной форме*:

$$\partial_K^s f(x)(h_1, \ldots h_n) \subset \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial f}{\partial h_i}\Big)_K^s (x) h_i = \Big[\sum_{i=1}^n \underline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^n \overline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x)\Big], \tag{3.18}$$

где через $(\partial f/\partial h_i)_K^s$ *обозначены симметризованные частные* K*-субдифференциалы по переменным* $h_i \in E_i$.

В частности, если функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *сильно* K*-субдифференцируем в точке* x*, то в этой точке существуют и конечны нижние и верхние частные производные* f *по всем переменным, причем выполнена оценка*

$$\partial_K^s f(x)(h_1, \ldots h_n) \subset \Big[\sum_{i=1}^n \underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i; \sum_{i=1}^n \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i\Big] = \Big[\underline{\nabla} f(x); \overline{\nabla} f(x)\Big] \cdot h,$$

где $\underline{\nabla} f(x) = \Big(\underline{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}$, $\overline{\nabla} f(x) = \Big(\overline{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}$.

Теперь рассмотрим вопрос о покоординатной K-субдифференцируемости отображения $f : E \to F_1 \times \ldots \times F_m$, где $E,\ F_1, \ldots,\ F_m$ — нормированные конусы.

Теорема 3.10. *Отображение* f K*-субдифференцируемо в точке* $x \in E$ *тогда и только тогда, когда все координатные отображения* f_j, $j = \overline{1, m}$, K*-субдифференцируемы в точке* x*. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K f(x)h \subset \prod_{j=1}^m \left(\partial_K f_j(x)h\right). \tag{3.19}$$

В частности, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$*, то последняя оценка принимает вид*

$$\partial_K^s f(x)h \subset \prod_{j=1}^m \bigg(\Big[\underline{\frac{df_j}{dx}}(x); \overline{\frac{df_j}{dx}}(x)\Big] \cdot h\bigg). \tag{3.20}$$

При этом прямоугольные оценки (3.19) *и* (3.20) *точны по проекциям.*

Доказательство. Напомним свойство покоординатной сходимости для K-предела (предложение 3.4):

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(B_\delta^1 \times \ldots \times B_\delta^n) = (\underset{t\to+0}{K\text{-}\lim}\, B_\delta^1) \times \ldots \times (\underset{t\to+0}{K\text{-}\lim}\, B_\delta^n).$$

Отсюда, применяя определение K-субдифференциала к отображению

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to F_1 \times \ldots \times F_m,$$

получаем ($\forall\, h \in E$):

$$\partial_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{(y_1,\ldots,y_m)\in F_1\times F_2\times\ldots\times F_m \;\Big|\; (f_1(x+th),\ldots,f_m(x+th)) =$$
$$= (f_1(x),\ldots,f_m(x)) + t(y_1,\ldots,y_m);\ 0<t<\delta\Big\} \subset$$
$$\subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big[\Big\{y_1\in F_1 \;\Big|\; f_1(x+th)=f_1(x)+ty_1;\ 0<t<\delta\Big\}\times\ldots\times$$
$$\times\Big\{y_m\in F_m \;\Big|\; f_m(x+th)=f_m(x)+ty_m;\ 0<t<\delta\Big\}\Big] =$$
$$= \Big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{y_1\in F_1 \;\Big|\; f_1(x+th)=f_1(x)+ty_1;\ 0<t<\delta\Big\}\Big)\times\ldots\times$$
$$\times\Big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{y_m\in F_m \;\Big|\; f_m(x+th)=f_m(x)+ty_m;\ 0<t<\delta\Big\}\Big) =$$
$$= \partial_K f_1(x,h)\times\ldots\times\partial_K f_m(x,h). \tag{3.21}$$

При этом, в силу предложения 3.4, $\partial_K f(x,h)$ существует тогда и только тогда, когда существуют все $\partial_K f_j(x,h)$, $j=\overline{1,m}$. Далее, в силу предложения 2.3, $\partial_K f(x,h)$ — сублинейный ограниченный (по h) K-оператор тогда и только тогда, когда $\partial_K f_j(x,\cdot)\in L_K(E;F_j)$, $j=\overline{1,m}$. Наконец, в силу точности по проекциям оценки в (3.21), сходимость в K-пределе $\partial_K f(x,h)$ равномерна по $\|h\|\leqslant 1$ тогда и только тогда, когда это справедливо для всех K-пределов $\partial_K f_j(x,h)$ $j=\overline{1,m}$. Таким образом, оценка (3.19) выполнена и точна по проекциям. □

Перейдем к вопросу о K-матрице Якоби для отображений $f:\prod\limits_{i=1}^{n}E_i\to\prod\limits_{j=1}^{m}F_j$, где E_i $(i=\overline{1,n})$, F_j $(j=\overline{1,m})$ — нормированные конусы. Используя предыдущие результаты, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 3.11. *Если отображение f K-субдифференцируемо в точке $x=(x_1,\ldots x_n)$, то*

$$\partial_K f(x_1,\ldots x_n)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x_1,\ldots,x_n)h_i\Big). \tag{3.22}$$

Доказательство. Последовательно применяя теоремы 3.10 и 3.9, имеем:

$$\partial_K f(x_1,\ldots x_n)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}(\partial_K f_j(x_1,\ldots x_n)(h_1,\ldots,h_n))\subset\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x_1,\ldots,x_n)h_i\Big).$$

□

Определение 3.7. K-матрицу сублинейных K-операторов

$$J_K f(x)=\Big(\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x)\Big)_K^{i=\overline{1,n},\,j=\overline{1,m}}\qquad\Big(\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x)\in L_K(E_i;F_j)\Big)$$

назовем *K-матрицей Якоби* отображения f в точке x.

Выделим случай евклидовых пространств, где оценка (3.22) существенно уточняется.

Теорема 3.12. *Пусть $E_1,\ldots,E_n$ — нормированные пространства. Если отображение f : $E_1\times\ldots\times E_n\to\mathbb{R}^m$ сильно K-субдифференцируемо в точке x, то $\forall\, h=(h_1,\ldots,h_n)$ справедлива оценка*

$$\partial_K^s f(x)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x);\sum_{i=1}^{n}\overline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x)\Big].$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ получаем

$$\partial_K^s f(x)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)h_i;\sum_{i=1}^{n}\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)h_i\Big]=\prod_{j=1}^{m}\Big([\underline{\nabla} f_j(x);\overline{\nabla} f_j(x)],\,h\Big)=[\underline{J}_f(x);\overline{J}_f(x)]\cdot h,$$

где $\underline{J}_f(x) = \Big(\underline{\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, $\overline{J}_f(x) = \Big(\overline{\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ *— соответственно, нижняя и верхняя матрицы Якоби* f *в точке* x, $[\underline{J}_f(x); \overline{J}_f(x)]$ *—* m*-мерный отрезок, стягивающий эти матрицы* (*см. замечание* 2.14).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.10 и следствия 3.3. □

Перейдем к вопросу о K-субдифференцировании композиции.

Теорема 3.13. *Если отображение* $f : E \to F$ K*-субдифференцируемо в точке* $x \in E$, *отображение* $g : F \to G$ K*-субдифференцируемо в точке* $y = f(x) \in F$, *то композиция* $g \circ f : E \to G$ *также* K*-субдифференцируема в точке* $x \in E$. *При этом*

$$\partial_K (g \circ f)(x)h \subset [\partial_K g(y) \cdot \partial_K f(x)]h. \tag{3.23}$$

Доказательство. Обозначим $Ah = \partial_K f(x)h$, $Bk = \partial_K g(y)k$. Применяя теорему 3.3 к f в точке x и к g в точке y, соответственно, получаем:

$$f(x+h) \in f(x) + Ah + \varphi(h), \text{ где } \frac{\varphi(th)}{t} \to 0 \text{ при } t \to 0 \quad (\forall h \in E),$$

$$g(y+k) \in g(y) + Bk + \psi(h), \text{ где } \frac{\psi(tk)}{t} \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to 0 \ (\forall k \in E, \ \|k\| \leqslant 1).$$

Подставляя во второе включение $y = f(x)$, $f(x+h) = f(x) + k$, получаем:

$$g(f(x+h)) \in g(f(x)) + Bk + \psi(k) \in B(Ah + \varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h)). \tag{3.24}$$

Поскольку отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, а отображение g K-субдифференцируемо по Фреше в точке y, то:

а). Так как B субаддитивен, то из (3.24) получаем:

$$\begin{aligned} g(f(x+h) &\in g(f(x)) + B(Ah) + [B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h))] \subset \\ &\subset [BA]h + [B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h))]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

При этом $[BA] \in L_K(E; G)$ в силу сублинейности и ограниченности A и B.

б). Так как $(\varphi(th)/t) \to 0)$ при $t \to 0$ для любого $h \in E$ и B непрерывен в нуле, то

$$\frac{B(\varphi(th))}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) \to 0 \quad \text{ при } t \to 0.$$

в). Так как $\psi(tk)/(t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$ ($\|k\| \leqslant 1$), то для любого фиксированного $h \in E$

$$\frac{\psi(A(th) + \varphi(th))}{t} = \frac{\psi\left(t\left[Ah + \dfrac{\varphi(th)}{t}\right]\right)}{t} =: \frac{\psi(tk_t)}{t} \rightrightarrows 0$$

при $t \to 0$, так как множество Ah ограничено при $\|h\| \leqslant 1$, $\dfrac{\varphi(th)}{t} \to 0$ и, следовательно, множество $k_t = Ah + \dfrac{\varphi(th)}{t}$ ограничено при достаточно малых t. Отсюда, обозначая

$$\lambda(h) = B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h)),$$

получаем:

$$(\lambda(th)/t) \to 0 \text{ при } t \to 0 \, \forall \, h \in E. \tag{3.26}$$

Поскольку из (3.25) следует

$$(g \circ f)(x+h) \in (g \circ f)(x) + [BA]h + \lambda(h),$$

то отсюда и из (3.26) по теореме 3.3 следует K-субдифференцируемость по Гато $g \circ f$ и оценка (3.23).

2. Если f также K-субдифференцируемо по Фреше в точке x, то $\dfrac{\varphi(th)}{t} \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Отсюда следует уточнение пункта б) в первой части доказательства:

$$\frac{B\left(\varphi(th)\right)}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) \rightrightarrows 0 \qquad \text{при } t \to 0, \ \|h\| \leqslant 1.$$

Следовательно, в пункте в) доказательства первой части имеем теперь:

$$\frac{\lambda(th)}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) + \frac{\psi(A(th)+\varphi(th))}{t} \rightrightarrows 0$$

при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Итак,

$$(g \circ f)(x+h) \in (g \circ f)(x) + [BA]h + \lambda(h),$$

где $\lambda(h) \to 0$ при $\|h\| \to 1$. Отсюда по теореме 3.3 следует, что отображение $(g \circ f)$ K-субдифференцируемо по Фреше в точке x. □

Для приложений важен вопрос о K-матрице Якоби композиции.

Рассмотрим случай

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i \xrightarrow{f=(f_1,..,f_m)} F = \prod_{j=1}^{m} F_j \xrightarrow{g=(g_1,...,g_l)} \prod_{k=1}^{l} G_k = G.$$

Напомним, что в определении 2.12 была введена *K-композиция* $[B \cdot A]$ K-операторов. Это позволяет ввести соответствующее произведение K-матриц:

$$(A_{ij})_K \times (B_{jk})_K = \Big(\sum_j [A_{ij} \cdot B_{jk}]\Big)_K.$$

Теорема 3.14. *Если отображение f K-субдифференцируемо в точке $x \in E$, а отображение g K-субдифференцируемо в точке $y = f(x) \in F$, то справедлива оценка* (*в обозначениях определения* 2.12):

$$\partial_K(g \circ f)(x) \preceq J_K(g \circ f)(x) \preceq J_K g(y) \times J_K f(x) = \left(\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j}\right)_K (y) \cdot \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K (x)\right]\right)_K^{k=\overline{1,l},\, i=\overline{1,n}}, \quad (3.27)$$

или

$$\partial_K(g \circ f)(x) \preceq J_K(g \circ f)(x) \subset \prod_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j}\right)_K (y) \cdot \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K (x)\right] h_i\right) \quad (h = (h_1, \ldots, h_n) \in E).$$

В частности, если в условиях теоремы выполняется $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, $G = \mathbb{R}^l$, то

$$\partial_K^s(g \circ f)(x) \subset (J_K g(y) \times J_K f(x))h = \prod_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y); \frac{\overline{\partial g}_k}{\partial y_j}(y)\right] \cdot \left[\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x); \frac{\overline{\partial f}_j}{\partial x_i}(x)\right] \cdot h_i\right). \quad (3.28)$$

В случае, если f дифференцируемо в обычном смысле, оценка (3.28) *принимает вид*

$$J_K^s(g \circ f)(x)h \subset \prod_{k=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i; \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\overline{\partial g}_k}{\partial y_j}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i\right].$$

Доказательство. Оценка (3.28) вытекает из последовательного применения теорем 3.10 и 3.11. □

Рассмотрим теперь вопрос о K-субдифференцировании оператора композиции.

Теорема 3.15. *Пусть $B(u)(x) = f(u(x))$, где $B : C^1(I) \to C(I)$. Если f всюду K-субдифференцируема на I, то оператор композиции $B(u)(x)$ также всюду K-субдифференцируем в $C^1(I)$, причем*

$$\big(\partial_K B(u)h\big)(x) \subset \big(\partial_K f(u(x))h\big)h(x) = [\underline{\partial} f(u(x)); \overline{\partial} f(u(x))]h(x).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$B(u)(x) = f(u(x)), \quad B : C^1(I) \to C(I),$$

где f — заданная K-субдифференцируемая функция. Зафиксируем направление $h(\cdot) \in C^1(I)$, $t \neq 0$. Тогда

$$\frac{B(u+th) - B(u)}{t}(x) = \frac{f(u(x)+th(x)) - f(u(x))}{t} = \frac{f(u(x)+th(x)) - f(u(x))}{th(x)} \cdot h(x).$$

Перейдем к выпуклым оболочкам:

$$co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\,|0<t<\tau\right\}(x)=co\left\{\frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{th(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}.$$

Пусть $|th(x)|=|k(x)|$, тогда

$$co\left\{\frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{th(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}=co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}\subset$$

$$\subset co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}\cdot h(x).$$

Отсюда, переходя к замыканиям, получаем:

$$\partial^\tau B(u,h)(x)=\overline{co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\middle|0<t<\tau\right\}(x)}\subset\overline{co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\middle|0<t<\tau\right\}(x)}\subset$$

$$\subset\overline{co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\middle|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}}h(x)=$$

$$=\left(\overline{co}\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\middle|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}\right)\cdot h(x)=\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x),h(x)).$$

Переходя к K-пределам, находим:

$$\left(K\text{-}\lim_{\tau\to0}\partial_\tau B(u,h)\right)(x)\subset K\text{-}\lim_{\tau\to0}\left(\partial_\tau B(u,h)(x)\right)\subset$$

$$\subset K\text{-}\lim_{\tau\to0}\left(\left(\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x)\right)h(x)\right)=\left(K\text{-}\lim_{\tau\to0}\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x))\right)h(x).$$

Отсюда имеем

$$\big(\partial_K B(u)h\big)(x)\subset\big(\partial_K f(u(x))h\big)h(x)=[\underline{\partial}f(u(x));\overline{\partial}f(u(x))]h(x).$$

$\square$

Отметим, наконец, случай композиции с билинейным оператором (аналог «производной произведения»).

Теорема 3.16. *Пусть E — нормированный конус, F_1, F_2, G — нормированные пространства. Если отображение $f=(f_1,f_2):E\to F_1\times F_2$ K-субдифференцируемо в точке $x\in E$, и $B:F_1\times F_2\to G$ — билинейный непрерывный оператор, то отображение $B(f_1,f_2):E\to G$ также K-субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_K B(f_1,f_2)(x)h\subset B(f_1(x),\partial_K f_2(x)h)+B(\partial_K f_1(x)h,f_2(x)).$$

Доказательство. По теореме 3.13 о K-субдифференцировании композиции

$$\partial_K B(f_1,f_2)\subset[(\partial_K B)(f_1(x),f_2(x))\circ\partial_K(f_1,f_2)(x)].$$

При этом для любого $h:\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h$. Поскольку

$$\partial_K(f_1,f_2)(x):h\longmapsto\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset(\partial_K f_1(x)h)\times(\partial_K f_2(x)h),$$

$$\partial_K f_1(x):h\longmapsto\partial_K f_1(x)h,\ \partial_K f_2(x):h\longmapsto\partial_K f_2(x)h,$$

то $\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h]$.

Итак,

$$\partial_K B(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K B(f_1(x),f_2(x))h\circ\partial_K(f_1,f_2)(x)h];\ \partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h].$$

Так как билинейный оператор B дифференцируем по Фреше, то

$$\partial_K B(f_1(x),f_2(x))=B(f_1(x),\cdot)+B(\cdot,f_2(x)),$$

следовательно,

$$\partial_K B(f_1, f_2)(x)h \subset [\partial_K B(f_1(x), f_2(x))h \circ [\partial_k f_1(x)h \times \partial_K f_2(x)h]] =$$
$$= [(B(f_1(x), \cdot) + B(\cdot, f_2(x)))[\partial_K f_1(x)h \times \partial_K f_2(x)h]] =$$
$$= [(B(f_1(x), \partial_K f_2(x))h + B(\partial_K f_1(x), f_2(x))h] = B(f_1(x),\, \partial_K f_2(x))h + B(\partial_K f_1(x),\, f_2(x))h.$$

□

3.5. Теорема о среднем для K-субдифференцируемых отображений. Напомним классическую схему вывода теоремы о среднем в банаховых пространствах.

1. Формула конечных приращений для непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$: для возрастающей непрерывной на $[a;b]$ и дифференцируемой на $(a;b)$ функции $g(x)$ и замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ справедлива импликация

$$(f'(x) \in g'(x) \cdot B,\, a < x < b) \Rightarrow (f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B).$$

2. Общая форма теоремы о среднем для непрерывных на отрезке и дифференцируемых внутри него отображений $f : E \supset U([a;b]) \to F$:

$$f(b) - f(a) \in \overline{co}\{f'(x) | a < x < b\} \cdot (b - a).$$

3. Простейшая форма теоремы о среднем (в той же ситуации):

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x \in (a;b)} \|f'(x)\| \cdot \|b - a\|.$$

При переходе к нормированным конусам, придерживаясь в целом изложенной выше схемы, мы вынуждены оценку $f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B$ заменять оценкой: $f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)] \cdot B$.

Теорема 3.17. *Пусть F — нормированный конус, отображения $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a;b]$ и K-субдифференцируемы на $(a;b)$, причем g возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ выполнена локальная оценка*

$$\partial_K f(x) \in \partial_K g(x) \cdot B \quad (a < x < b),$$

то справедлива глобальная оценка

$$f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{3.29}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.29) *можно записать в виде*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B.$$

Доказательство. 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение K-субдифференциала, выберем для каждого $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < |h| < \delta) \Rightarrow \begin{cases} \{y | f(x + h) = f(x) + h \cdot y\} \subset O_\varepsilon(\partial_K g(x) \cdot B); \\ \dfrac{g(x + h) - g(x)}{h} \in O_\varepsilon(\partial_K g(x)). \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$(f(x + h) = f(x) + h \cdot y,\ 0 < |h| < \delta) \Rightarrow \left(y \in O_{2\varepsilon}\left(\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \cdot B\right)\right). \tag{3.30}$$

2. Из покрытия $\{O_\delta(x)\}_{x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]}$ выберем конечное покрытие $[a + \varepsilon; b - \varepsilon] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{\delta_i}(x_i)$.

Впишем в это покрытие разбиение $a + \varepsilon = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_m = b - \varepsilon$ так, чтобы каждый отрезок разбиения содержался в некотором $O_{\delta_i}(x_i)$, причем один из его концов совпадал с x_i.

Фиксируем отрезок разбиения $[\overline{x}_{j-1}; \overline{x}_j]$; пусть, например, $x_i = \overline{x}_{j-1}$. Положим $h = \overline{x}_j - \overline{x}_{j-1}$. Тогда из (3.30) получаем:

$$f(\overline{x}_j) = f(\overline{x}_{j-1}) + \Delta\overline{x}_j \cdot y_j, \quad \text{где} \quad y_j \in O_\varepsilon\left(\frac{g(\overline{x}_j) - g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x_j}} \cdot B\right) \quad (j = \overline{1, m}). \tag{3.31}$$

В равенствах (3.30) последовательной подстановкой $(j=1)\mapsto(j=2)\mapsto\ldots(j=m-1)\mapsto(j=m)$ получаем:

$$f(b-\varepsilon)=f(a+\varepsilon)+\sum_{j=1}^{m}\Delta\overline{x}_j\cdot y_j:=f(a+\varepsilon)+y_\varepsilon.$$

При этом, используя выпуклость B, имеем:

$$y_\varepsilon=(b-a-2\varepsilon)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\,y_j\in(b-a-2\varepsilon)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(\overline{x}_j)-g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x}_j}\cdot B\right)\subset$$

$$\subset(b-a-2\varepsilon)\cdot O_\varepsilon\left(\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\cdot\frac{g(\overline{x}_j)-g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x}_j}\Big]\cdot B\right)=(b-a-2\varepsilon)\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)}{b-a-2\varepsilon}\cdot B\right)=$$

$$=O_\varepsilon([g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)]\cdot B).$$

Отсюда получаем:

$$f(b-\varepsilon)\in f(a+\varepsilon)+O_\varepsilon([g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)]\cdot B). \tag{3.32}$$

3. Переходя в (3.32) к пределу при $\varepsilon\to 0$, с учетом замкнутости B и непрерывности f и g, получаем:

$$f(b)\in f(a)+[g(b)-g(a)]\cdot B.$$

□

Перейдем к теореме о среднем для отображений вещественного аргумента.

Теорема 3.18. *Пусть F — нормированный конус, отображение $f:\mathbb{R}\supset[a;b]\to F$ непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо на $(a;b)$. Тогда выполняется оценка*

$$f(b)\in f(a)+\overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)\cdot(b-a). \tag{3.33}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.33) *можно записать в виде*

$$f(b)-f(a)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Достаточно в условиях теоремы 3.17 положить $g(x)=x$, $B=\overline{co}\Big(\bigcup\limits_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)$, а затем применить формулу (3.29). □

Из последнего результата легко следует общая форма теоремы о среднем в нормированных конусах. Здесь удобнее перейти к локальным обозначениям.

Теорема 3.19. *Пусть E и F — нормированные конусы, отображение $f:E\supset U([x;x+h])\to F$ непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо на $(a;b)$. Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h)\in f(x)+\overline{co}\left(\bigcup_{0<\theta<1}(\partial_K f(x+\theta h)\cdot h)\right). \tag{3.34}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.34) *можно записать в виде*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\left(\bigcup_{0<\theta<1}(\partial_K f(x+\theta h)\cdot h)\right).$$

Доказательство. Достаточно применить оценку (3.33) к функции $\varphi(\theta)=f(x+\theta h)$, $\varphi:[0;1]\to F$. □

Наконец, предъявим теорему о среднем с оценкой по норме.

Теорема 3.20. *В условиях теоремы* 3.19 *справедливы представление и оценка*

$$f(x+h) = f(x) + y, \quad \text{где} \quad \|y\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{3.35}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.35) *можно записать в виде*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|.$$

Доказательство. Здесь следует применить оценку (3.35) и учесть, что

$$\sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h) \cdot h\| \leqslant \Big(\sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|.$$

□

Выделим теперь важный случай функционалов.

Теорема 3.21. *Пусть E — нормированный конус, отображение $f : E \supset U([x; x+h]) \to \mathbb{R}$ непрерывно на $[x; x+h]$ и K-субдифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда справедлива оценка*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \left(\max\left(\left|\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+\theta h)\right|, \left|\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+\theta h)\right|\right)\right) \cdot \|h\|. \tag{3.36}$$

Если, в частности, $E = \mathbb{R}^n$, то оценка (3.36) *принимает вид*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} (\max(\|\underline{\nabla} f(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f(x+\theta h)\|)) \cdot \|h\|. \tag{3.37}$$

Из (3.37) вытекает оценка аналогичного типа для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Следствие 3.4. *Пусть отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \supset U([x; x+h]) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на $[x; x+h]$ и K-субдифференцируемо в $(x; x+h)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \sum_{j=1}^{m} \max\Big(\|\underline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|.$$

3.6. K-субдифференцируемость и субгладкость. Напомним определение полунепрерывности сверху (см. пункт 2.2).

Определение 3.8. Пусть E, F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ *полунепрерывно сверху* (или *субнепрерывно*) в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon). \tag{3.38}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т. е. при $\Lambda = \partial_K F : E \to L_K(E; F)$) в условии (3.38) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_K f(x)$ на произвольный элемент нормированного конуса $L_K(E; F)$. Это и есть *общая форма достаточного условия K-субдифференцируемости.*

Теорема 3.22. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно в точке x и K-субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$ этой точки. Если для некоторого K-оператора $\mathcal{D}_{f,x} \in L_K(E; F)$ выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial_K f(x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon), \tag{3.39}$$

то f K-субдифференцируемо в точке x, причем $\partial_K f(x) \preceq \mathcal{D}_{f,x}$.

Доказательство. Фиксируем $h \in E$, $\|h\| < \delta_0$. Из условия (3.39) вытекает оценка при $0 < \theta < 1$:

$$\partial_K f(x+\theta h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y(\theta h), \text{ где } \|Y(h)\| \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0.$$

Отсюда, применяя на отрезке $[x; x+h]$ к f теорему о среднем 3.17, получаем:

$$f(x+h) \in f(x) + \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K f(x+\theta h) \cdot h\Big) \subset f(x) + \overline{co}\Big(\mathcal{D}_{f,x} \cdot h + \bigcup_{0<\theta<1} Y(\theta h) \cdot h\Big) \subset$$

$$\subset f(x) + \mathcal{D}_{f,x} \cdot h + O_\varepsilon(0) \cdot h, \text{ при } \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$f(x+h) \in f(x) + \mathcal{D}_{f,x} \cdot h + o(\|h\|),$$

т. е. выполнено условие критерия сильной K-субдифференцируемости (теорема 3.5) для f в точке x. Напомним, что доказательство этого критерия опирается на признак Вейерштрасса для K-пределов (теорема 3.1). □

Замечание 3.4. Таким образом, в случае отображения $\Lambda = \partial_K f$ условия (3.38) и (3.39) равносильны. Поэтому мы можем принять условие (3.39) за определение *полунепрерывности сверху*, или *субнепрерывности* отображения $\partial_K f$ в точке x: $\partial_K f \in C_{sub}(x)$. Будем писать также в этом случае: $f \in C^1_{sub}(x)$ и называть отображение f *субгладким* (точнее, C^1-*субгладким*) в точке x.

Перейдем к субгладкости частных K-субдифференциалов как достаточному условию K-субдифференцируемости.

Теорема 3.23. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — нормированные конусы, $f : E_1 \times \ldots \times E_n \supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x);\ i = \overline{1,n}\right) \Rightarrow (f\ K\text{-субдифференцируемо в точке } x).$$

Доказательство. Поскольку

$$\partial_K f(x) = \bigoplus_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x), \tag{3.40}$$

то из субнепрерывности $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K$ в точке x в силу (3.39) легко следует субнепрерывность $\partial_K f$ в этой точке. Обратно, субнепрерывность $\partial_K f$ в точке x, согласно определению (3.39), с учетом (3.40) означает:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon\right). \tag{3.41}$$

При этом в силу разложения $L_K(\bigoplus\limits_{i=1}^n E_i; F) = \bigoplus\limits_{i=1}^n L_K(E_i; F)$ имеем:

$$\mathcal{D}_{f,x} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y = \bigoplus_{i=1}^n Y^i, \text{ где } \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y^i \in L_K(E_i; F).$$

Отсюда и из (3.41) следует $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,\delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}^i_{f,x} + Y^i, \text{ где } \|Y^i\| < \varepsilon\right),$$

т. е., в силу (3.39), $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x)$ при $i = \overline{1,n}$. □

Рассмотрим теперь случай функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, опираясь на результаты пунктов 3.2–3.4. Здесь мы выходим на узловые условия *полунепрерывности снизу* (по x) $\dfrac{\partial f}{\underline{\partial h}}$ и *полунепрерывности сверху* (по x) $\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial h}$, которые в совокупности равносильны *субнепрерывности*

$$\partial_K f = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}; \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}\right] : E \to \mathbb{R}_K.$$

Теорема 3.24. *Пусть E — нормированный конус, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\ \frac{\overline{\partial f}}{\partial h} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\ K\text{-субдифференцируем в точке } x).$$

Доказательство. Применяя определение субнепрерывности 3.8 в нашем случае, получаем:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\|k\|<\delta)\Rightarrow\left(\left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+k);\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+k)\right]\subset\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)-\varepsilon;\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)+\varepsilon\right)\right). \tag{3.42}$$

Включение справа в (3.42) равносильно выполнению (при $\|k\|<\delta$) пары неравенств

$$\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+k)>\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)-\varepsilon;\ \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+k)<\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)+\varepsilon,$$

что в точности означает полунепрерывность в точке x для $\dfrac{\partial f}{\underline{\partial h}}$ (сверху) и $\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial h}$ (снизу). □

В частности, для функционалов многих переменных справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.25. *Пусть $E_1,\ldots,\ E_n$ — нормированные конусы, $f:E_1\times\ldots\times E_n\supset U(x)\to\mathbb{R}$. Тогда*

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\underline{\nabla}_K f=\left(\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен снизу в точке}\ \ x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}_K f=\left(\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен сверху в точке}\ x\right)$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируем в точке}\ \ x).$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имеем:

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\underline{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен снизу в точке}\ x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla} f=\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируем в точке}\ x).$$

Наконец, выразим условия субгладкости в терминах верхней и нижней K-матриц Якоби.

Теорема 3.26. *Пусть $E_1,\ldots,E_n;\ F_1,\ldots,F_m$ — нормированные конусы, $f:E_1\times\ldots\times E_n\supset U(x)\to F_1\times\ldots\times F_m$. Тогда*

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\ \textit{матрица}\left(\underline{J}_K f=\left(\left(\frac{\partial f_j}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна снизу (поэлементно) в}\right.$$

$$\left.\textit{точке}\ x,\quad\textit{матрица}\ \overline{J}_K f=\left(\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируемо в точке}\ \ x).$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ имеем:

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\ \textit{матрица}\ \underline{J}f=\left(\frac{\partial f_j}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна снизу в точке}\ \ x,\right.$$

$$\left.\textit{матрица}\ \overline{J}f=\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируемо в точке}\ \ x).$$

Дадим некоторое описание класса субгладких функционалов на компакте $C^1_{sub}(D)$. Прежде всего, легко видеть, что все такие функционалы удовлетворяют *условию Липшица*.

Теорема 3.27. *Пусть D — компакт в нормированном конусе E. Тогда $Lip(D)\supset C^1_{sub}(D)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $f \in C^1_{sub}(D)$, т. е. $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ субнепрерывны на D, соответственно, снизу и сверху. Тогда из соответствующих версий теоремы Вейерштрасса следует ограниченность $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ на D (по норме), а значит, и (равномерная по $x \in D$) ограниченность разностных отношений $(f(x+h) - f(x)/h)$. Это означает локальную липшицевость f на D, что в силу компактности D влечет глобальную липшицевость. □

Простые примеры показывают, что $Lip(D) \neq C^1_{sub}(D)$.

Пример 3.1. Пусть $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Непосредственное вычисление показывает:

$$\varliminf_{x\to 0} f'(x) = -1 < f'(0) = 0 < \varlimsup_{x\to 0} f'(x) = 1.$$

Таким образом, $f \notin C^1_{sub}(0)$. При этом, ввиду ограниченности f', $f \in Lip(\mathbb{R})$.

Сравним теперь субгладкость с кусочной гладкостью. Здесь мы будем понимать кусочную гладкость в самом широком смысле:

$$f \in C^1_{p.s.}\biggl(\bigcup_{i=1}^{n} D_i\biggr),$$

если каждое сужение $f\big|_{D_i}$ принадлежит классу $C^1(D_i)$. При этом D_i — произвольные замкнутые области в E, пересекающиеся по границе.

Теорема 3.28. *Если* $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i \subset E$, *то верно включение*

$$C^1_{p.s.}(D) \subset C^1_{sub}(D).$$

Доказательство. Пусть $f \in C^1_{p.s.}(D)$, $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{m} \partial D_{i_k}$. В силу C^1-гладкости сужений $f\big|_{D_{i_k}}$ в точке x, имеем:

$$\lim_{x \xrightarrow{D_{i_k}} x_0} f'(x) = \Bigl(f\big|_{D_{i_k}}\Bigr)'(x_0) \quad (k = \overline{1,m}).$$

Отсюда следует:

$$\varlimsup_{x\to x_0} \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\biggl(\frac{\partial}{\partial h}\Bigl(f\big|_{D_{i_k}}\Bigr)(x)\biggr) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant m}\biggl(\frac{\partial}{\partial h}\Bigl(f\big|_{D_{i_k}}\Bigr)(x_0)\biggr) = \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x_0),$$

$$\varliminf_{x\to x_0} \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant m}\biggl(\frac{\partial}{\partial h}\Bigl(f\big|_{D_{i_k}}\Bigr)(x)\biggr) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant m}\biggl(\frac{\partial}{\partial h}\Bigl(f\big|_{D_{i_k}}\Bigr)(x_0)\biggr) = \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x_0),$$

т. е. $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ полунепрерывны в D, соответственно, сверху и снизу. □

Аналогичные выкладки для «кусочно-субгладких» отображений приводят к несколько неожиданному выводу: *«кусочная» субгладкость совпадает с «полной» субгладкостью.*

Теорема 3.29. *Если* $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i \subset E$, *то* $(C^1_{sub})_{p.s.}(D) = C^1_{sub}(D)$.

Заметим, что существуют и осциллирующие, не всюду дифференцируемые функции класса $C^1_{sub}(D)$.

Пример 3.2. Пусть $f(x) = x \sin\biggl(\dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}\biggr)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Здесь

$$\varliminf_{x\to 0} f'(x) = 1 = \overline{f'}(0); \;\; \varlimsup_{x\to 0} f'(x) = -1 = \underline{f'}(0).$$

Резюмируя, заметим, что в случае компактной области D имеет место двухсторонняя строгая оценка класса $C^1_{sub}(D)$:

$$C^1_{p.s.}(D) \subsetneqq C^1_{sub}(D) \subsetneqq Lip(D).$$

3.7. Связь K-субдифференцируемости на отрезке с обычной дифференцируемостью. Здесь мы опираемся на результат, полученный Ф. С. Стонякиным (теорема 1.4) в связи с обобщением теоремы Данжуа—Янг—Сакса на случай K-субдифференциалов [28]. Напомним его.

Теорема 3.30. *Пусть F — банахово пространство, $F : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$. Если отображение f непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо почти всюду на $[a;b]$, то f почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Отсюда легко следует, что непрерывная K-субдифференцируемость f в любой точке отрезка влечет обычную дифференцируемость в этой точке.

Теорема 3.31. *Если в условиях теоремы* 3.30 *отображение f непрерывно K-субдифференцируемо в некоторой точке $x \in [a;b]$, то f дифференцируемо в точке x в обычном смысле. В частности, класс непрерывно K-субдифференцируемых на отрезке отображений $C^1_K([a;b],F)$ совпадает с классом $C^1([a;b],F)$ отображений $f : [a;b] \to F$, непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Доказательство. Допустим противное: f не дифференцируемо в точке x в обычном смысле, т. е. $\partial_K f(x)$ — неодноточечное множество из F_K. Поскольку в силу теоремы 3.31 f почти всюду дифференцируемо в обычном смысле в некоторой окрестности точки x, то найдется такая последовательность $x_n \to x$ в $[a;b]$, для которой $\{f'(x_n)\} \to \partial_K f(x)$ в нормированном конусе F_K при $n \to \infty$.

Легко видеть, что сходимость одноточечных множеств к многоточечному в F_K *невозможна*. Действительно, по определению сходимости в нормированном конусе имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ (n > N) \Rightarrow (f'(x_n) = \partial_K f(x) + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon). \tag{3.43}$$

При этом множество $\partial_K f(x) + Y$ всегда многоточечно, в силу многоточечности $\partial_K f(x)$, поэтому равенство справа в (3.43) невозможно в принципе. Таким образом, f дифференцируемо в точке $x \in [a;b]$. Остается заметить, что для отображений $x \mapsto \{f'(x)\}$ $([a;b] \to F_K)$ и отображения $x \mapsto f'(x)$ $([a;b] \to F)$ свойство непрерывности совпадает, поскольку F изометрично множеству своих одноточечных подмножеств $\widetilde{F} \subset F_K$. □

Эти результаты нетрудно распространить на случай векторного аргумента.

Теорема 3.32. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U([a;b]) \to F$. Если отображение f K-субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то f дифференцируемо в обычном смысле всюду на $[a;b] \setminus e$, где*

$$\operatorname{mes} \varphi^{-1}(e) = 0 \quad (\varphi(t) = (1-t)a + tb, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

В частности, если f непрерывно K-субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то $f \in C^1[a;b]$.

Доказательство. Достаточно применить теоремы 3.30 и 3.31 к композиции

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb, \quad \varphi : \mathbb{R} \supset [0;1] \to F.$$

□

Замечание 3.5. Последний результат будет далее играть важную роль в теории K-субдифференциалов высших порядков. Из него будет следовать, что, в случае банаховых пространств, n-кратная K-субдифференцируемость на отрезке влечет $(n-1)$-кратную обычную дифференцируемость.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации окажется, что собственно K-субдифференциал (не совпадающий с обычным субдифференциалом) может существовать лишь для старшего порядка и лишь на множестве меры нуль.

4. Компактные субдифференциалы высших порядков

4.1. K-субдифференциалы второго порядка. Теорема Юнга о симметричности. Приведем вначале определение K-субдифференциала 2-го порядка, следуя стандартной индуктивной схеме. Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 4.1. Пусть отображение f (сильно) K-субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Если отображение
$$\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E; F)$$
K-субдифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f *дважды K-субдифференцируемо* в точке x, и введем *K-субдифференциал второго порядка* от f стандартным индуктивным образом:
$$\partial_K^2 f(x) := \partial_K(\partial_K f)(x).$$

Замечание 4.1.

1. В силу определения, $\partial_K^2 f(x) \in L_{sub}(E; L_K(E; F))$. Однако, используя каноническую изометрию конусов сублинейных и бисублинейных операторов (теорема 2.9), можно считать, что $\partial_K^2 f(x) \in L_K(E, E; F)$, т. е. $\partial_K^2 f(x)$ является *бисублинейным ограниченным оператором.*

2. Используя определение $\partial_K f(x)$, приведем выражение $\partial_K^2 f(x)$ через K-предел:
$$\partial_K^2 f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{Z|\,\partial_K f(x+th) = \partial_K f(x) + tZ,\ 0<t<\delta\Big\},\ \text{где}\ \ Z \in L_K(E; F).$$
Отсюда, используя свойства K-пределов, можно получить оценку:
$$\partial_K^2 f(x)(h;k) \subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{Y \in F_K|\,\partial_K f(x+th)k = \partial_K f(x)k + tY,\ 0<t<\delta\Big\} = \partial_K(\partial_K f(\cdot,k))(x)h.$$
Из последней оценки нетрудно получить следующую:
$$\partial_K f(x)(x+h)k \in \partial_K f(x)k + \partial_K^2 f(x)(h,k) + o(\|h\|\,\|k\|),$$
служащую K-аналогом классической формулы в банаховых пространствах:
$$(f'(x+h) - f'(x))k = f''(x)(h,k) + o(\|h\|\,\|k\|).$$

В случае нормированных пространств E и F, повторная K-субдифференцируемость f, в силу результатов предыдущего пункта, влечет обычную однократную дифференцируемость f в точке x.

Теорема 4.1. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо в обычным смысле в этой точке. В частности, если f дважды K-субдифференцируемо в окрестности $U(x)$, то*
$$\partial_K^2 f(x) = \partial_K(f')(x).$$

Доказательство. Действительно, по условию, отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E; F)$ K-субдифференцируемо в точке x, а значит, и непрерывно в этой точке. Таким образом, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно K-субдифференцируемо в точке x. Но тогда, согласно теореме 3.31, f дифференцируемо (в обычном смысле) в точке x. □

На K-субдифференциалы 2-го порядка обобщается *классическая теорема Юнга о симметричности* второго сильного дифференциала. Вначале введем вспомогательное понятие.

Определение 4.2. Для фиксированных $h, k \in E$ предположим, что существует следующий K-предел:
$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{z \in F\Big|f(x+th+sk) + f(x) = f(x+th) + f(x+sk) + (st)z\Big|0<t,s<\delta\Big\}, \tag{4.1}$$
который назовем *бисимметрическим вторым K-субдифференциалом* f в точке x по паре направлений (h,k).

Замечание 4.2.

1. В случае, если F — нормированное пространство, равенство (4.1) принимает вид:
$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{\frac{f(x+th+sk) - f(x+th) - f(x+sk) + f(x)}{st};\ 0<t,s<\delta\Big\}. \tag{4.2}$$

2. Если $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)$ — бисублинейный K-оператор, назовем его *слабым бисимметрическим K-субдифференциалом*. Понятия *бисимметрических K-субдифференциалов Гато и Фреше* вводятся аналогично случаю $\partial_K f$.

3. Очевидно, $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \widehat{\partial}_K^2 f(x)(k,h)$.

Основной результат этого раздела: в случае *банаховых пространств* E и F второй K-субдифференциал $\partial_K^2 f(x)$, если он существует, совпадает со вторым бисимметрическим K-субдифференциалом $\widehat{\partial}_K^2 f(x)$ и, как следствие, является *симметрическим бисублинейным оператором.*

Теорема 4.2. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если отображение f дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f также бисимметрически K-субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k).$$

В частности,

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \partial_K^2 f(x)(k,h) \quad (\forall h, k \in E).$$

Доказательство. 1. Согласно общему определению второго K-субдифференциала в банаховых конусах,

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta_t \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\Big\{ Y \,|\, \partial_K f(x+th)\cdot k = \partial_K f(x)\cdot k + tY,\ 0 < t < \delta_t \Big\}. \tag{4.3}$$

Поскольку f дифференцируемо обычным образом в некоторой окрестности точки x, то

$$\partial_K f(x+th)\cdot k = f'(x+th)\cdot k = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+th+sk) - f(x+th)}{s}, \tag{4.4}$$

$$\partial_K f(x)\cdot k = f'(x)\cdot k = \lim_{s\to 0} \frac{f(x+sk) - f(x)}{s}. \tag{4.5}$$

Заметим, что в силу повторной K-субдифференцируемости, отображение f' непрерывно, поэтому предел в (4.4) — равномерный по $0 < t < \delta_t$.

С учетом (4.4)–(4.5), равенство (4.3) принимает вид:

$$\partial_K^2 f(x)(h;k) = \underset{\delta_t \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\bigg\{ \frac{f'(x+th) - f'(x)}{t}\cdot k,\ 0 < t < \delta_t \bigg\}. \tag{4.6}$$

Наконец, вычитая (4.4) и (4.5) почленно, находим:

$$\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t}\cdot k = \lim_{s\to +0} \frac{f(x+th+sk) - f(x+th) - f(x+sk) + f(x)}{ts}, \tag{4.7}$$

где $f(x+th+sk) - f(x+th) - f(x+sk) + f(x)$ обозначим через $\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)$.

2. Из (4.7) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$ и $0 < t < \delta_t$ верно:

$$\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t}\cdot k \in O_\varepsilon\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts} \bigg), \tag{4.8}$$

где $\delta_s(\varepsilon)$ не зависит от выбора $t \in (0;\delta_t)$ в силу равномерности по t предела (4.7). Из (4.7) и (4.8) получаем, что при $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$, $0 < t < \delta_t$

$$\overline{co}\bigg\{ \frac{f'(x+th) - f'(x)}{t}\cdot k \bigg| 0 < t < \delta_t \bigg\} \subset \overline{co}\bigg\{ O_\varepsilon\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts} \bigg) \bigg| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s(\varepsilon) \bigg\} =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}\bigg(\overline{co}\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts} \bigg) \bigg| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s(\varepsilon) \bigg). \tag{4.9}$$

Переходя в (4.9) к K-пределу при $\delta_t \to 0$, $\delta_s \to 0$, с учетом (4.6) и K-признака Вейерштрасса, имеем при любом $\varepsilon > 0$:

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) \subset O_\varepsilon\bigg(\underset{\delta_t \to 0, \delta_s \to 0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\bigg\{ \frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts} \bigg| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s \bigg\} \bigg) = \overline{O_\varepsilon}(\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)). \tag{4.10}$$

Так как множество $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)$ замкнуто, то переходя справа в (4.10) к пересечению по всем $\varepsilon > 0$, приходим к включению:

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) \subset \widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k). \tag{4.11}$$

3. Проверим теперь справедливость обратного включения. Из (4.7) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$ и $0 < t < \delta_t$ верно:

$$\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts} \in O_\varepsilon\left(\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t} \cdot k\right). \tag{4.12}$$

Из (4.7) и (4.12) получаем, что при $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$, $0 < t < \delta_t$

$$\overline{co}\left\{\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x; th, sk)}{ts}\middle| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s(\varepsilon)\right\} \subset \overline{co}\left\{O_\varepsilon\left(\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t} \cdot k\right)\middle| 0 < t < \delta_t\right\} =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}\left(\overline{co}\left(\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t} \cdot k\right)\middle| 0 < t < \delta_t\right). \tag{4.13}$$

Переходя в (4.13) к пределу при $\delta_t \to 0$, $\delta_s \to 0$, с учетом признака Вейерштрасса имеем при любом $\varepsilon > 0$:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) \subset \overline{O}_\varepsilon\left(\underset{\delta_t \to 0, \delta_s \to 0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co}\left\{\frac{f'(x+th) - f'(x)}{t} \cdot k\middle| 0 < t < \delta_t, 0 < s < \delta_s\right\}\right) =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}(\partial^2_K f(x)(h,k)). \tag{4.14}$$

Отсюда, приходим к включению:

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) \subset \partial^2_K f(x)(h,k). \tag{4.15}$$

4. Наконец, из взаимно-обратных включений (4.11) и (4.15) следуют равенства из условий теоремы. □

Замечание 4.3. Отметим, в заключении этого пункта, что симметричность $\partial^2_K f(x)$ — лишь следствие более важного результата: возможности представления $\partial^2_K f(x)$ через «одинарный» K-предел (4.2).

4.2. K-субдифференциалы высших порядков. Общая теорема Юнга. Примененный нами подход позволяет использовать индукцию для определения K-субдифференциала n-го порядка. Далее, как и в предыдущем пункте, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 4.3. Пусть отображение f K-субдифференцируемо $(n-1)$ раз в $U(x)$. Если отображение

$$\partial^{n-1}_K f : E \supset U(x) \to L_K(\underbrace{E, \ldots, E}_{n-1}; F) =: L^{n-1}_K(E; F)$$

K-субдифференцируемо в точке x, то мы будем говорить, что f *n раз K-субдифференцируемо* в точке x и введем *K-субдифференциал n-го порядка* от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial^n_K f(x) := \partial_K(\partial^{n-1}_K f)(x).$$

Замечание 4.4. В силу определения, $\partial^n_K f(x) \in L_{sub}(E; L^{n-1}_K(E; F))$. Однако, используя (как и при $n = 2$) каноническую изометрию (теорема 2.9), можно считать, что $\partial^n_K f(x) \in L^n_K(E; F)$, т. е. является *$n$-сублинейным ограниченным K-оператором*.

В случае нормированных пространств E и F n-кратная K-субдифференцируемость f в точке x влечет обычную $(n-1)$-кратную дифференцируемость f в этой точке.

Теорема 4.3. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо $(n-1)$ раз в обычном смысле в этой точке. В частности, если f n раз K-субдифференцируемо в $U(x)$, то*

$$\partial^n_K f(x) = \partial_K\left(f^{(n-1)}\right)(x). \tag{4.16}$$

Доказательство. Достаточно применить индукцию, опираясь на теорему 4.1 ($n = 2$). □

Отметим также, по аналогии с теоремой 3.7, связь кратной K-субдифференцируемости с обычной кратной дифференцируемостью.

Теорема 4.4. *Пусть E, F — нормированные пространства. Тогда*:

1. *Если f n раз сильно дифференцируемо в точке $x \in E$, то f n раз сильно K-субдифференцируемо в этой точке, причем*
$$\partial_K^n f(x) = \{f^{(n)}(x)\}.$$
2. *Обратно, пусть f n раз сильно K-субдифференцируемо в точке x. Если для каждого набора направлений $\{h_1, \ldots, h_n\} \subset E$ выполнены условия*:
   а). $\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n)$ — *одноэлементное множество*;
   б). $\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n)$ *антисимметричен по каждому направлению h_i $(i = \overline{1,n})$*;
   — *то f сильно дифференцируемо n раз* (*в обычном смысле*) *в точке x*.

Далее, для переноса теоремы Юнга на случай K-субдифференциалов n-го порядка нам понадобится понятие полисимметрического K-субдифференциала. Здесь мы для простоты рассмотрим только случай нормированных пространств.

Определение 4.4. Пусть E, F—нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$, $(h_1, \ldots, h_n) \subset E$. Выражение
$$\widehat{\Delta}^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = f\Big(x + \sum_{k=1}^{n} h_k\Big) - \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n-1} \leqslant n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-1} h_{k_i}\Big) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n-2} \leqslant n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-2} h_{k_i}\Big) - \ldots + (-1)^n f(x)$$
назовем *полисимметрической разностью n-го порядка* для f в точке x, отвечающей набору направлений $(h_1, \ldots h_n)$.

Если существует K-предел
$$\widehat{\partial}_K^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \Big\{ \frac{\widehat{\Delta}^n f(x; t_1 h_1, t_2 h_2 \ldots, t_n h_n)}{t_1 \ldots t_n} \Big| 0 < t_1, \ldots, t_n < \delta \Big\},$$
то назовем его *полисимметрическим K-субдифференциалом* f в точке x по полинаправлению $(h_1, \ldots, h_n)$.

Замечание 4.5.

1. Если $\widehat{\partial}_K^n f(x, h_1, \ldots, h_n)$ — n-сублинейный K-оператор, назовем его *слабым полисимметрическим K-субдифференциалом.* Понятия полисимметрических K-субдифференциалов Гато и Фреше вводятся аналогично случаю $\partial_K f$.
2. Очевидно,
$$\widehat{\partial}_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \widehat{\partial}_K^n f(x)(h_{p(1)}, \ldots, h_{p(n)})$$
для любой перестановки p набора $(1, \ldots, n)$.

Общая теорема Юнга для K-субдифференциалов n-го порядка имеет следующий вид.

Теорема 4.5. *Пусть E и F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K-субдифференцируемо в точке x, то существует и n-симметрический K-субдифференциал f в этой точке, причем эти K-субдифференциалы совпадают*:
$$\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \widehat{\partial}_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) \quad (\forall h_1, \ldots, h_n \subset E).$$
В частности, $\partial_K^n f(x)$ — симметрический n-сублинейный K-оператор:
$$\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \partial_K^n f(x)(h_{p(1)}, \ldots, h_{p(n)}) \quad (\forall h_1, \ldots, h_n \subset E)$$
для любой перестановки p набора индексов $1, \ldots, n$.

Доказательство. Доказательство может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 4.2 $(n = 2)$. □

4.3. K-субдифференциалы высших порядков от функционалов. Используя теоремы 4.3 и 3.2, нетрудно вывести формулу K-субдифференциала n-го порядка для случая $f : E \to \mathbb{R}$, если E — *нормированное пространство*. Далее для $h \in E$ обозначим через $(h)^n$ диагональный поливектор $\underbrace{(h, \ldots, h)}_{n}$.

Теорема 4.6. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в $U(x)$, то $\forall\, h \in E$ имеет место равенство*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x); \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x)\right] = \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}; \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\right]\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial h^{n-1}}\right)(x)\cdot(h)^n.$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\partial_K^n f(x) = \left[\underline{\frac{d}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x); \overline{\frac{d}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x)\right] := \left[\underline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x); \overline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x)\right].$$

Доказательство. Согласно теореме 4.3, из n-кратной K-субдифференцируемости f в $U(x)$ следует $(n-1)$-кратная обычная дифференцируемость f в некоторой окрестности $U(x)$ и равенство $\partial_K^n f(x) = \partial_K(f^{(n-1)})(x)$. При этом $f^{(n-1)} : E \supset U'(x) \to L_{n-1}(E; \mathbb{R})$, откуда при любом фиксированном $h \in E$ имеем:

$$f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1} : E \supset U'(x) \to \mathbb{R}.$$

Из формулы (4.16) для K-субдифференциала по направлению теперь следует

$$\partial_K^n f(x)\cdot(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)})(x)(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})(x)h =$$

$$= \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x); \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)\right].$$

□

Рассмотрим далее случай функционала от нескольких переменных $f : E_1 \times \ldots \times E_m \to \mathbb{R}$, где $E_1, \ldots, E_m$ — *нормированные пространства*. Здесь мы опираемся на теорему 3.9 и известную формулу для дифференциалов Фреше, используя стандартные сокращения.

Теорема 4.7. *Пусть $E_1, \ldots, E_m$ — нормированные пространства. Если функционал $f : E_1 \times \ldots \times E_m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в точке $U(x)$, то имеет место оценка*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n \subset \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_K \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1}\cdot f\right](x)\cdot h_i. \tag{4.17}$$

Доказательство. В силу «формулы полного K-субдифференциала» (теорема 3.3) имеем:

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})\cdot h \subset \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_K (f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})\cdot h_i,$$

что приводит к оценке (4.17). □

Выделим случай функционала $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, когда оценка (4.17) переходит *в точное равенство*.

Теорема 4.8. *Если функционал $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в $U(x)$, то справедливо равенство*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \left[\sum_{i=1}^m \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}}h_i; \sum_{i=1}^m \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}}h_i\right]\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1}\cdot f\right)(x). \tag{4.18}$$

Доказательство. Достаточно использовать «формулу полного K-субдифференциала» с точным равенством (теорема 3.3) для функционала $f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}$. □

Замечание 4.6. Отметим, что вводя в случае $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю матрицы Якоби n-го порядка*:

$$\underline{J}^n f=\left(\frac{\underline{\partial}}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{n-1}}}\right)\right)=:\left(\underline{\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}}\right),$$

$$\overline{J^n} f=\left(\frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1}f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{n-1}}}\right)\right)=:\left(\frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}\right),$$

равенство (4.18) можно записать в виде:

$$\partial^n_K f(x)\cdot(h)^n=[\underline{J}^n f(x);\overline{J^n}f(x)]\cdot(h)^n,$$

где $[\underline{J}^n f(x);\overline{J^n}f(x)]$ — (n^m)-мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали).

В частности, в важном далее для приложений случае $n=2$, мы получаем равенство

$$\partial^2_K f(x)\cdot(h)^n=[\underline{J}^2 f(x);\overline{J}^2 f(x)]\cdot(h)^2,$$

где $[\underline{J}^2 f(x);\overline{J}^2 f(x)]$ — 2^m-мерный матричный прямоугольник, соединяющий *нижнюю и верхнюю матрицы Гессе*. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, одна часть строк которых берется из $\underline{J}^2 f(x)$, а другая часть строк — из $\overline{J}^2 f(x)$.

Следствие 4.1. *Если отображение $f=(f_1,\dots,f_l):\mathbb{R}^m\supset U(x)\to\mathbb{R}^l$ K-субдифференцируемо n раз в $U(x)$, то имеет место оценка*

$$\partial^n_K f(x)(h)^n\subset\prod_{j=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\underline{\partial}}{\partial x_i}h_i;\sum_{i=1}^{m}\frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}h_i\right]\cdot\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\ldots+\frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^n\cdot f_j\right)(x).$$

4.4. K-субдифференциалы и субгладкость высших порядков. Здесь, опираясь на результаты пунктов 3.6 и 4.3, мы вводим понятие *субгладкости n-го порядка* и показываем, что такая субгладкость является достаточным условием K-субдифференцируемости n-го порядка. Вначале приведем обобщение теоремы 3.22.

Теорема 4.9. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f:E\supset U(x)\to F$ $(n-1)$ раз K-субдифференцируемо в точке x и n раз K-субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot U(x)$. Если отображение $\partial^n_K f:E\supset\dot U(x)\to L^n_K(E;F)$ субнепрерывно в точке x ($\partial^n_K f\in C_{sub}(x)$), т. е. при некотором $\mathcal{D}^n_{f,x}\in L^n_K(E;F)$ верно*:

$$\forall\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;(0<\|h\|<\delta)\Rightarrow(\partial^n_K f(x+h)\preceq\mathcal{D}^n_{f,x}+Y,\ \text{где}\ \|Y\|<\varepsilon),$$

то f K-субдифференцируемо n раз в точке x, причем $\partial^n_K f(x)\preceq\mathcal{D}^n_{f,x}$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.22 к отображению

$$\partial^{n-1}_K f:E\supset U(x)\to L^{n-1}_K(E;F),$$

учитывая изоморфизм $L^n_K(E;F)\cong L_K(E;L^{n-1}_{sub}(E;F))$. □

Определение 4.5. Будем говорить, что $f:E\supset U(x)\to F$ — *субгладкое отображение n-го порядка* (или *C^n-субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f\in C^n_{sub}(x)$, если $\partial^n_K f\in C_{sub}(x)$. В случае $n=0$ мы отождествляем классы $C^0_{sub}(x)$ и $C_{sub}(x)$.

Перенесем на случай высших порядков достаточное условие n-кратной K-субдифференцируемости в терминах частных K-субдифференциалов (теорема 3.23).

Теорема 4.10. *Пусть $E_1,\dots,E_n,F$ — нормированные конусы, $f:E_1\times\ldots\times E_m\supset U(x)\to F$. Тогда*

$$(f\in C^n_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_n}}\right)_K\in C_{sub}(x),\ (\forall\,1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_n\leqslant m)\right)\Rightarrow\left(\exists\,\partial^n_K f(x)\right).$$

Доказательство. Применяя разложение (3.40), по индукции получаем:

$$\partial_K^n f(x) = \partial_K(\partial_K^{n-1} f)(x) = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (\partial_K^{n-1} f) \right)_K (x) = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} (\partial_K^{n-2} f) \right)_K (x) = \ldots =$$

$$= \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \ldots \bigoplus_{i_n=1}^{n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x). \tag{4.19}$$

В силу равенства (4.19), из субнепрерывности $(\partial^n f / \partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n})_K$ в точке x легко следует субнепрерывность $\partial_K^n f$ в этой точке. Обратно, субнепрерывность $\partial_K^n f$ в точке x, согласно определению 4.5, означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\bigoplus_{i_1, \ldots, i_n = 1} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x}^n + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon \right). \tag{4.20}$$

При этом

$$\mathcal{D}_{f,x}^n = \bigoplus_{i_1, \ldots, i_n = 1} \mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1, \ldots, i_n)}, \quad Y = \bigoplus_{i_1, \ldots, i_n = 1} Y^{(i_1, \ldots, i_n)},$$

где $\mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1, \ldots, i_n)}$, $Y^{(i_1, \ldots, i_n)} \in L_K(E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_n}; F)$. Отсюда и из (4.20) следует $\forall \, i_1, \ldots, i_n = \overline{1, m}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x + h) \preceq \mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1, \ldots, i_n)} + Y^{(i_1, \ldots, i_n)}, \text{ где } \|Y^{(i_1, \ldots, i_n)}\| < \varepsilon \right),$$

т. е., в силу теоремы 4.9, $\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K \in C_{sub}(x)$ при $i_1, \ldots, i_n = \overline{1, m}.$ □

Рассмотрим теперь случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, опираясь на результаты пунктов 3.6 и 4.3.

Теорема 4.11. *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C_{sub}^n(x)) \Leftrightarrow \Bigg(\textit{все} \quad \frac{\partial}{\underline{\partial x_{i_n}}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right) \textit{ и } \frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right)$$

$$\textit{полунепрерывны в точке } x, \textit{ соответственно, снизу и сверху} \Bigg) \Rightarrow \left(\exists \, \partial_K^n f(x) \right).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.24, соответствующая полунепрерывность элементов пар

$$\left(\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}} ; \frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)$$

влечет субнепрерывность K-функционалов $\left[\underline{\nabla}; \overline{\nabla} \right] \cdot \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}$, а значит, и субнепрерывность

$$\left[\underline{\nabla}; \overline{\nabla} \right] \cdot J^{n-1} f(x).$$

Тогда из оценки (4.17) следует C^n-субгладкость f в точке x. Обратная импликация следует из точности оценки (4.18) по каждой компоненте кратной прямой суммы. □

Приведем простой пример.

Пример 4.1. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i)^{n-1} \cdot |x_i|$. Тогда:

$$\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_i}}(x) = \begin{cases} (n-1)! \operatorname{sign} x_i, \; x_i \neq 0; \\ -(n-1)!, \qquad x_i = 0; \end{cases} \quad \frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} (n-1)! \operatorname{sign} x_i, \; x_i \neq 0; \\ (n-1)!, \qquad x_i = 0. \end{cases}$$

Кроме того, все смешанные верхние и нижние частные производные от f равны нулю. Легко видеть, что все $(\partial^n f / \underline{\partial x_i^n})$ полунепрерывны снизу, а все $(\overline{\partial^n f} / \partial x_i^n)$ полунепрерывны сверху. Таким образом, в силу теоремы 4.11 имеем $f \in C_{sub}^n(0)$.

Замечание 4.7.

1. Вводя нижнюю и верхнюю K-матрицы Якоби n-го порядка:

$$\underline{J^n} f = \underline{\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\right)}; \ \overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\right),$$

теорему 4.11 можно сформулировать так:

$(f \in C^n_{sub}(x)) \Leftrightarrow \big(\underline{J^n} f$ *и* $\overline{J^n} f)$ *полунепрерывны в точке* x, *соответственно, снизу и сверху*$\big)$.

2. Наконец, опираясь на описание класса $C^1_{sub}(D)$ в пункте 3.6 и определение класса $C^n_{sub}(D)$, нетрудно дать примерное описание класса $C^n_{sub}(D)$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^m$.

а). Очевидно, $(f \in C^n_{sub}(D)) \Rightarrow (f^{(n-1)} \in Lip(D))$, что мы кратко запишем в виде

$$C^n_{sub}(D) \subset Lip^n(D).$$

Модификация примера 3.1: $f(x) = x^{2n} \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, показывает, что последнее включение является строгим.

б). Теорема 3.28 без труда переносится на случай кусочной гладкости и субгладкости высших порядков:

$$C^n_{p.s.}(D) \subset C^n_{sub}(D).$$

Это включение также является строгим. При этом «кусочная» субгладкость n-го порядка не отличается от «полной» субгладкости:

$$\left(C^n_{sub}\right)_{p.s.}(D) = C^n_{sub}(D).$$

Таким образом, в случае компактной области $D \subset \mathbb{R}^m$ имеем:

$$C^n_{p.s.}(D) \subsetneqq C^n_{sub}(D) = (C^n_{sub})_{p.s.}(D) \subsetneqq Lip^n(D).$$

4.5. Формула Тейлора в K-субдифференциалах и исследование на экстремум. Мы рассмотрим здесь формулу Тейлора в форме Пеано лишь в случае отображений в *нормированных пространствах*. В этом случае только последнее слагаемое в многочлене Тейлора будет многозначным, что существенно упрощает применение.

Теорема 4.12. *Пусть* E, F — *нормированные пространства,* $f : E \supset U(x) \to F$. *Если* f K-*субдифференцируемо* n *раз в точке* x, *то*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x) \cdot (h)^n = o(\|h\|^n). \tag{4.21}$$

Если при этом f K-*субдифференцируемо* n *раз в окрестности* x, *то равенство* (4.21) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial_K \Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x) h = o(\|h\|^n).$$

Доказательство. 1. Так как f n-кратно K-субдифференцируемо в точке x, то существует $(n-1)$-кратная обычная дифференцируемость f в точке x, откуда получаем:

$$\begin{cases} \partial^l_K f(x) & = \{\partial^l f(x)\} \text{ при } 0 < l \leqslant n-1, \\ \partial^n_K f(x) & = \partial(\partial^{(n-1)} f)(x). \end{cases}$$

Следовательно, (4.26) можно записать в виде:

$$\left(f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l\right) - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x)(h)^n = o(\|h\|^n).$$

2. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathbf{r_n}(f, h) = f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x)(h)^n,$$

которая действует из банахового пространства E в банахов конус F_K. Применим математическую индукцию.

а). При $n = 1$ получим определение K-субдифференциала из критерия K-субдифференцируемости: $f(x+h) - f(x) - \partial_K f(x)h = o(\|h\|)$.

б). Воспользуемся индукцией по n. Предположим, что формула (4.26) верна для $n-1$. Вычислим K-субдифференциал вспомогательной функции $\mathbf{r_n}$, получим:

$$\partial_K \mathbf{r_n}(f,h) = f'(x+h) - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l-1)!}\partial^l f(x)(h)^{l-1} - \frac{1}{(n-1)!}\partial_K^n f(x)(h)^{n-1} =$$

$$= f'(x+h) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\partial^l f(x)(h)^k - \frac{1}{(n-1)!}\partial_K^{n-1}(f')(x)(h)^{n-1} = \mathbf{r_{n-1}}(f',h),$$

что по допущению индукции означает:

$$\partial_K \mathbf{r_n}(f,h) = \mathbf{r_{n-1}}(f',h) = o(\|h\|^{n-1}).$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\|\mathbf{r_n}(f,h)\| = \|\mathbf{r_n}(f,h) - r_n(f,0)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K \mathbf{r_n}(f,\theta h)\| \cdot \|h\| = \sup_{0<\theta<1} \|\mathbf{r_{n-1}}(f',\theta h)\| \cdot \|h\| =$$

$$= \sup_{0<\theta<1} o(\|\theta h\|^{n-1}) \cdot \|h\| = o(\|h\|^{n-1})\,\|h\|) = o(\|h\|^n).$$

Таким образом, мы получили формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. □

Следствие 4.2. *В условиях теоремы* 4.12 *справедлива оценка*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] \in \left[\frac{1}{n!}\partial_K^n f(x)(h)^n + o(\|h\|^n)\right]. \tag{4.22}$$

Если при этом f K-субдифференцируемо n раз в окрестности x, то оценка (4.22) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] \in \frac{1}{n!}\partial_K \Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h + o(\|h\|^n).$$

Заметим, что условие (4.22) не равносильно условию (4.21), ввиду многозначности обоих слагаемых справа в (4.22). Выделим здесь также случай функционалов, опираясь на результат пункта 4.4.

Теорема 4.13. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Если функционал f K-субдифференцируем n раз в окрестности x, то*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}; \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\right]\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h = o(\|h\|^n). \tag{4.23}$$

В случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ равенство (4.23) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1 + \ldots + \underline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\right); \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1 + \ldots + \overline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\right)\right] \times$$

$$\times \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1} \cdot f(x)\right) = o(\|h\|^n). \tag{4.24}$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенство (4.24) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\underline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x); \overline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x)\right] \cdot h^n = o(\|h\|^n), \tag{4.25}$$

где $\underline{\dfrac{d^n f}{dx^n}} = \underline{\dfrac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$, $\overline{\dfrac{d^n f}{dx^n}} = \overline{\dfrac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$.

Замечание 4.8. Многозначное равенство (4.25) можно записать в виде однозначного равенства с параметром:

$$\left[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right]-\frac{1}{n!}\left[(1-t)\frac{d^nf}{\underline{dx^n}}(x)++t\cdot\frac{\overline{d^nf}}{dx^n}(x)\right]=o(\|h\|^n)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

В аналогичном виде можно записать также равенства (4.23)-(4.24).

Перейдем к *условиям экстремума в терминах K-субдифференциалов*. Начнем с K-аналога леммы Ферма в традиционной для выпуклого анализа форме.

Теорема 4.14. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E\supset U(x)\to\mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального экстремума в точке x и K-субдифференцируем в этой точке, то $\forall h\in E$*:

$$(0\in\partial^s_K f(x)h)\Leftrightarrow\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)\leqslant 0\leqslant\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right).\tag{4.26}$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ условие (4.26) *принимает вид конечной системы двойных неравенств*:

$$\left\{\frac{\partial f}{\underline{\partial x_i}}(x)\leqslant 0\leqslant\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}(x)\right\}_{i=\overline{1,m}}.\tag{4.27}$$

Наконец, в случае $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ система (4.27) *сводится к неравенству*

$$\frac{df}{\underline{dx}}(x)\leqslant 0\leqslant\frac{\overline{df}}{dx}(x).$$

Доказательство. Пусть, например, f достигает минимума в точке x. Тогда $f(x+th)-f(x)\geqslant 0$ при достаточно малых t, откуда следует:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0)\geqslant 0,\ \ \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0)\geqslant 0;\ \ \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0)\leqslant 0,\ \ \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\leqslant 0.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)=\max\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0),\,\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0)\right)\geqslant 0;\ \ \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)=\min\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0),\,\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\right)\leqslant 0.$$

□

Рассмотрим теперь условия 2-го порядка, предварительно введя необходимый аппарат теории квадратичных K-форм.

Определение 4.6. Пусть E — выпуклый конус. Отображение $B:E\to\mathbb{R}_K$ назовем *квадратичной K-формой*, если:

$$B(\lambda h)=\lambda^2\cdot B(h)\quad(\forall h\in E,\ \forall\lambda\geqslant 0).$$

K-форма B *неотрицательна* ($B\geqslant 0$), если

$$\max B(h)\geqslant 0\quad(\forall\ h\in E).$$

K-форма B *положительна* ($B>0$), если

$$\min B(h)>0\quad(\forall\ h\in E\setminus\{0\}).$$

В случае, когда E — нормированный конус, скажем, что K-форма B *положительно определена* ($B\gg 0$), если для некоторой положительной константы γ^2

$$\min B(h)\geqslant\gamma^2\|h\|^2\quad(\forall\ h\in E).$$

Условия $B\leqslant 0$, $B<0$ и $B\ll 0$ вводятся, как обычно, с помощью перехода к K-форме $(-B)$.

Теорема 4.15. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f:E\supset U(x)\to\mathbb{R}$ дважды K-субдифференцируем в окрестности точки x, то $\forall h\in E$, $\|h\|=1$, выполнено равенство*

$$(\partial^2_K)f(x)(h)^2=\left[\frac{\partial}{\underline{\partial h}}(f'(\cdot)h);\frac{\overline{\partial}}{\partial h}(f'(\cdot)h)\right]=:\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial h^2}}(x);\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial h^2}(x)\right].$$

Приведем необходимое условие второго порядка для минимума.

Теорема 4.16. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального минимума в точке x и дважды K-субдифференцируем в окрестности этой точки, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено неравенство*

$$\Big((\partial_K^2)^s f(x)(h)^2 \geqslant 0\Big) \Leftrightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x)(h)^2 \geqslant 0\right). \tag{4.28}$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ неравенство (4.28) *принимает вид условия неотрицательности максимума m-мерного отрезка, соединяющего «нижнюю» и «верхнюю» матрицы Гессе для f*:

$$\max\left[\underline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x)\right)(h)^2; \overline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}\right)(x)(h)^2\right] \geqslant 0. \tag{4.29}$$

Обозначая $J_1^2 f(x), \ldots, J_{2^m}^2 f(x)$ — вершины матричного отрезка, условие (4.29) *можно переписать в более простой форме*:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant 2^m} \Big(J_k^2 f(x)(h)^2\Big) \geqslant 0 \quad (\forall\, h \in \mathbb{R}^m). \tag{4.30}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ матричное неравенство (4.30) *превращается в скалярное неравенство*

$$\overline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. Из повторной K-субдифференцируемости f в окрестности x следует обычная однократная дифференцируемость f и равенство $\partial_K^2 f(x) = \partial_K(f')(x)$. Поэтому условие K-леммы Ферма $0 \in {\partial_K}^s f(x)$ переходит в равенство $f'(x) = 0$.

По K-формуле Тейлора второго порядка, при достаточно малых h имеем:

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2),$$

откуда, с учетом $f'(x) = 0$, получаем:

$$f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2). \tag{4.31}$$

Фиксируя теперь $h \in E$ и заменяя в (4.31) $h \mapsto th$, получаем:

$$0 \leqslant \frac{f(x+th) - f(x)}{t^2} \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + \frac{o(t^2)}{t^2},$$

откуда при $t \to 0$, с учетом компактности $\partial_K^2 f(x)(h)^2$, следует $\max \partial_K^2 f(x)(h)^2 \geqslant 0$. □

Выпишем теперь достаточного условие локального минимума в терминах второго K-субдифференциала. Заметим, что вывод условия (4.33) в нем опирается на *конечномерную форму теоремы Крейна—Мильмана* (см. [15]).

Теорема 4.17. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$, функционал f дважды K-субдифференцируем в точке x, причем $f'(x) = 0$. Если выполнено условие*

$$\partial_K^2 f(x) \gg 0, \tag{4.32}$$

то f достигает строгого локального минимума в точке x.

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ неравенство (4.32) *принимает вид условия положительной определенности набора «крайних» точек m-мерного отрезка $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$*:

$$J_1^2 f(x) \gg 0;\ J_2^2 f(x) \gg 0; \ldots; J_{2^m}^2 f(x) \gg 0. \tag{4.33}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ система матричных неравенств (4.33) *сводится к одному скалярному неравенству*

$$\underline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) > 0.$$

Доказательство. По K-лемме Ферма, $0 \in \partial_K{}^s f(x)$, и если существует $\partial_K^2 f(x)$, то существует f' в окрестности точки x, т. е. приходим к условию $f'(x) = 0$.

По обобщенной формуле Тейлора второго порядка для любого достаточно малого h получаем: $f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2)$, откуда при достаточно малых $\|h\|$ верно:

$$0 \leqslant f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2). \tag{4.34}$$

Выберем ε настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина $o(\|h\|^2)$ в равенстве (4.34) удовлетворяла условию $\|o(\|h\|^2)\| < \dfrac{\gamma^2}{2}\|h\|^2$. Тогда при $\|h\| < \varepsilon$

$$\Big(\inf \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th)^2 + o(\|th\|)^2\Big) > \frac{\gamma^2}{2}\|h\|^2 > 0. \tag{4.35}$$

Из формулы Тейлора, как уже отмечалось, вытекает включение

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2).$$

Отсюда, в силу (4.35), получаем

$$f(x+h) - f(x) \geqslant \gamma^2\|h\|^2 > 0$$

при достаточно малом $\|h\| > 0$, т. е. f достигает строгого локального минимума в точке x. $\square$

В заключение рассмотрим простой пример.

Пример 4.2. Зададим в $\mathbb{R}^m$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2, \ x_1 x_2 \dots x_m \geqslant 0, \\ 2\|x\|^2, \ x_1 x_2 \dots x_m \leqslant 0, \end{cases}$$

достигающую, очевидно, строгого минимума в нуле. Имеем

$$\nabla f(x) = \begin{cases} 2x, \ x_1 x_2 \dots x_m \geqslant 0, \\ 4x, \ x_1 x_2 \dots x_m \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда 0 — единственная стационарная точка. Наконец, как легко видеть, все «крайние» матрицы Гессе $J_k^2 f(0)$ являются диагональными матрицами, диагонали которых — наборы из чисел 2 и 4. Следовательно,

$$J_k^2 f(0) \gg 0 \quad (k = 1, \dots, 2^m).$$

Таким образом, условие (4.32) теоремы 4.17 выполнено.

5. Приложения к вариационным задачам с субгладким интегрантом

5.1. K-субдифференциал основного вариационного функционала. Напомним классический результат. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), u = f(x,y,z)). \tag{5.1}$$

Тогда вариационный функционал (5.1) сильно дифференцируем в $C^1[a;b]$, причем первая вариация Φ имеет вид:

$$\Phi'(y)h = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right]dx \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.2}$$

Наша цель — обобщить равенство (5.2) на случай *субгладких интегрантов*. В этом случае точное равенство переходит в оценку K-субдифференциала $\partial_K \Phi(y)$.

Теорема 5.1. *Пусть для вариационного функционала* (5.1) *интегрант f является C^1-субгладким: $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$* (*см. определение* 3.8). *Тогда Φ сильно K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем справедлива оценка*

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right]$$

$$(\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.3}$$

Доказательство. Введем вначале вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A: C^1[a,b] \to \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Введем еще два вспомогательных отображения — нелинейный оператор композиции

$$B_f(\widetilde{A})(y) = f(\widetilde{A}(y)),\ \widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]),$$

$$B_f : L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]) \to C[a,b],$$

и линейный интегральный функционал

$$G(v) = \int\limits_a^b v(x)dx, \qquad G: C[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Φ может быть записан в виде композиции

$$\Phi(y) = G(B_f(Ay)). \tag{5.4}$$

Применяя к композиции (5.4) теорему о K-субдифференцировании композиции, получаем

$$\partial_K \Phi(y,h) = \partial_K (G \circ B_f \circ A)(y)h \subset [\partial_K G(v) \cdot [\partial_K^{u_2 u_3} B_f(u) \cdot \partial(A(y))]]h. \tag{5.5}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (5.5).

1. Так как A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно,
$$\partial_K (Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)).$$
2. Для оператора $B_f(u) = B_f((u_1,u_2,u_3))$ мы вычисляем K-субдифференциал по u_2, u_3. Применяя теорему 3.13 и следствие 3.3, получаем:
$$\partial_K^{yz} B_f(A(y))h \subset \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right].$$
3. Так как G — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $G'(v) \equiv G$.

Отсюда:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right]dx =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \Big(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\Big)dx; \int\limits_a^b \Big(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\Big)dx\right]. \tag{5.6}$$

□

Отметим частный случай оценки (5.3), когда интегрант образован внешней композицией субгладкой функции с гладкой.

Теорема 5.2. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \Bigg[\int\limits_a^b \underline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \overline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\Bigg] \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi(f(x,y,y'))dx, \tag{5.8}$$

где $f \in C^1$, φ всюду K-субдифференцируема. По формуле (5.6) имеем:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y'))h + \frac{\partial}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y'))h + \frac{\overline{\partial}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx\Bigg]. \tag{5.9}$$

При этом, учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y')) = \underline{\varphi'}(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y'); \quad \frac{\partial}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y')) = \underline{\varphi'}(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y');$$

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y')) = \overline{\varphi'}(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y'); \quad \frac{\overline{\partial}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y')) = \overline{\varphi'}(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y'). \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9) и вынося общие множители, приходим к оценке (5.7). □

Еще один существенный частный случай представляет внутренняя композиция субгладкой функции с гладкой. Здесь, для простоты, мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 5.3. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi'}(y')h'dx; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi'}(y')h'dx\right] \quad (h \in C^1[a;b]). \tag{5.11}$$

Доказательство. Учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial}{\underline{\partial y}}f(x,y,\varphi(y')) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi}'(y');\quad \frac{\partial}{\underline{\partial z}}f(x,y,\varphi(y')) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi}'(y');$$

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial y}f(x,y,\varphi(y')) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi}'(y');\quad \frac{\overline{\partial}}{\partial z}f(x,y,\varphi(y')) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi}'(y'). \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.6) и вынося общие множители, приходим к оценке (5.11). □

Отметим, в качестве конкретных примеров, случаи интегрантов, образованных композицией гладкой функции и модуля.

Пример 5.1. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{5.13}$$

Здесь, в обозначениях теоремы 5.2, $\varphi(t) = |t|$, откуда

$$[\underline{\varphi}(t);\overline{\varphi}(t)] = \begin{cases} \operatorname{sign} t,\ t\neq 0;\\ [-1;1],\ t=0.\end{cases} \tag{5.14}$$

Подстановка (5.14) в (5.7), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \left(\int\limits_{(y'>0)}(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx - \int\limits_{(y'<0)}(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx\right) + \int\limits_{(y'=0)}[-1;1](\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx. \tag{5.15}$$

В частности, если $\mathrm{mes}(y'=0)=0$, то оценка (5.15) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b \mathrm{sign}(y')\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx.$$

Пример 5.2. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Здесь также $\varphi(t) = |t|$, но уже в обозначениях теоремы 5.3. Подстановка (5.14) в (5.11), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx + \int\limits_{(y'\neq 0)}\mathrm{sign}(y')\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx +$$
$$+\left[-\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx; +\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx\right]. \tag{5.16}$$

В частности, если $\mathrm{mes}(y'=0)=0$, то оценка (5.16) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)h + \mathrm{sign}(y')\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'\right]dx. \tag{5.17}$$

Пример 5.3. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,|y|,y')dx.$$

Здесь, после аналогичных преобразований, приходим к оценке:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \int_a^b \Big(\Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'dx + \int_{(y\neq 0)} \operatorname{sign} y \frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')hdx +$$

$$+\Big[-\int_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx; + \int_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx\Big]. \tag{5.18}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y=0)=0$, то оценка (5.18) превращается в точное равенство:

$$\partial_K \Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b \Big[\operatorname{sign} y \frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'\Big]dx.$$

5.2. K-аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера—Лагранжа. Напомним классическую «основную вариационную лемму»: если

$$\int_a^b \varphi(x)h(x) \equiv 0 \quad (\varphi \in C[a;b], \forall h \in C[a;b]),$$

то $\varphi(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Наше обобщение принимает форму оценки.

Теорема 5.4. *Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[a;b]$. Если*

$$0 \in \Big[\int_a^b \varphi_1(x)h(x)dx; \int_a^b \varphi_2(x)h(x)dx\Big] \quad (\forall h \in C[a;b]),$$

то $0 \in [\varphi_1;\varphi_2] \subset L_2[a;b]$.

Доказательство. Произвольный элемент $\varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]$ представим в виде

$$\varphi = (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2 = \varphi_1 + t(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

1. Вначале рассмотрим случай гильбертового пространства $L_2[a;b] = H$. Обозначим через $H^1 = \{\varphi_2 - \varphi_1\}^\perp$. Тогда для любого $h \in H^1$ выполняется $(\varphi_2 - \varphi_1, h) = 0$, т. е. $\int_a^b \varphi_2 h = \int_a^b \varphi_1 h$. Допустим, что φ_1 неколлинеарно $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Тогда существует $h_0 \in H$ такой, что φ_1 неортогонально h_0, т. е. $(\varphi_1, h_0) \neq 0$. Следовательно, $(\varphi_2 - \varphi_1, h_0) = 0$, $(\varphi_1, h_0) \neq 0$, откуда $(\varphi_2, h_0) - (\varphi_1, h_0) = 0$, $(\varphi_1, h_0) \neq 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $(\varphi_2, h_0) = (\varphi_1, h_0) \neq 0$. Отсюда для любого $t \in [0;1]$ получаем:

$$\int_a^b \big((1-t)\varphi_1 + t\varphi_2\big)h_0 dx = \int_a^b \big(\varphi_1 h_0 + t(\varphi_2 - \varphi_1)\big)h_0 dx = \int_a^b \varphi_1 h_0 dx + t\int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)h_0 dx \neq 0.$$

Таким образом, существует h_0 такой, что $0 \overline{\in} \int_a^b [\varphi_1;\varphi_2]h_0 dx$, что противоречит условию леммы. Отсюда получаем, что φ_1 коллинеарен $(\varphi_2 - \varphi_1)$, т. е. весь отрезок $[\varphi_1;\varphi_2]$ состоит из коллинеарных функций $[\varphi_1;\varphi_2] = \{\lambda\varphi_3\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2}$. Тогда $\int_a^b [\varphi_1;\varphi_2]hdx = \{\lambda \int_a^b \varphi_3 hdx\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2}$. Следовательно, условие $\Big(0 \in \int_a^b [\varphi_1;\varphi_2]hdx \; \forall h\Big)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\Big(0 \in \{\lambda \int_a^b \varphi_3 hdx\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2} \; \forall h\Big).$$

Возможны два случая:

а). $0 \in [\lambda_1; \lambda_2]$. Тогда $0 \in [\varphi_1; \varphi_2] = \{\lambda\varphi_3\}$.

б). $0 \overline{\in} [\lambda_1; \lambda_2]$, следовательно, $\int\limits_a^b \varphi_3 h dx = 0 \, \forall \, h$, откуда $(\varphi_3, h) = 0 \, \forall \, h \Rightarrow \ \varphi_3 = 0 \Leftrightarrow [\varphi_1; \varphi_2] = \{0\}$.

Таким образом, утверждение в $L_2[a;b]$ доказано.

2. Теперь рассмотрим случай, когда $[\varphi_1; \varphi_2] \subset C^1[a;b]$, $h \in C^1[a;b]$, т. е. $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h dx$ при любом $h \in C^1[a;b]$. Так как $C^1[a;b]$ непрерывно плотно вложено в $L_2[a;b]$, то из непрерывности вложения легко следует $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h dx$ и для любого $h \in L_2$. Действительно, для любого $h_0 \in L_2$ существует последовательность $h_n \overset{L_2}{\to} h_0$, где $h_n \in C^1$. Поскольку по условию для любого h_n верно $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h_n dx = \left\{ (1-t) \int\limits_a^b \varphi_1 h_n dx + t \int\limits_a^b \varphi_2 h_n dx \right\}$, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h_0 \, dx$ при любом $h_0 \in L_2[a;b]$. Отсюда, в силу первой части доказательства, $0 \in [\varphi_1; \varphi_2]$.

$\square$

Напомним теперь классическое уравнение Эйлера—Лагранжа: для вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b)$$

условие $\Phi'(y) = 0$ равносильно выполнению уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y') \right) = 0. \tag{5.19}$$

В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то уравнение (5.19) для y верно.

Теорема 5.4 вместе с оценкой (5.3) для K-субдифференциала от Φ позволяют обобщить условие (5.19) на случай *C^1-субгладкого интегранта*; при этом результат принимает форму оценки.

Теорема 5.5. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.20}$$

Тогда условие $0 \in \partial_K \Phi(y)$ равносильно выполнению «включения Эйлера—Лагранжа»:

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right); \ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) \right] \tag{5.21}$$

почти всюду на $[a;b]$. В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то включение (5.21) для y выполнено почти всюду на $[a;b]$.

Доказательство. По K-лемме Ферма, $0 \in \partial^s_K \Phi(y) h$ ($\forall \, h \in C^1[a;b], \ h(a) = h(b) = 0$. В силу линейности по h обеих частей оценки $\partial_K \Phi(y) h$ (формула (5.3), теорема 5.1), эта же оценка сохраняется и для симметризованного K-функционала:

$$0 \in \partial^s_K \Phi(y) h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') h' \right) dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') h' \right) dx \right] =$$

$$= \left\{ \int\limits_a^b \left[\left((1-t) \underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') + t \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') \right) \cdot h + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left((1-t) \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') + t \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) h' \right] dx \, \middle| \, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =: \Big\{ I_1(t) + I_2(t) | \ 0 \leqslant t \leqslant 1 \Big\}. \tag{5.22}$$

Применим к $I_2(t)$ в (5.22) интегрирование по частям:

$$I_2(t) = \left| \begin{array}{c} u = (1-t)\dfrac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y') + t\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y'); \\ dv = h'dx,\ v = h \\ du = ((1-t)\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')) + t\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\Big)dx \end{array} \right| =$$

$$= \left((1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')) + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\cdot h\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left[(1-t)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\right) + t\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right]dx. \tag{5.23}$$

Отсюда, подставляя (5.23) в (5.22), находим:

$$0 \in \left\{ \int\limits_a^b \left[(1-t)\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\Big) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + t\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right)\right]hdx \,\right|\, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\Big)\right]hdx; \int\limits_a^b \left[\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right]hdx\right]. \tag{5.24}$$

Из (5.24) по основной лемме (теорема 5.4) следует включение Эйлера—Лагранжа (5.21). □

Решение включения (5.21) назовем *субэкстремалью* функционала (5.20).

Замечание 5.1. Включение Эйлера—Лагранжа (5.21) можно равносильным образом переписать в виде «уравнения Эйлера—Лагранжа с параметром»:

$$\left[(1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y')\right] - \frac{d}{dx}\left[(1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y') + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Субэкстремаль $y(\cdot)$ является решением этого уравнения при некотором $t \in [0;1]$.

Исследуем, в качестве существенного частного случая, случай модулированного интегранта из примера 5.1.

Теорема 5.6. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.25}$$

Для функционала (5.25) *включение Эйлера—Лагранжа принимает вид альтернативы*:

$$\left[\begin{array}{l} \textit{либо } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } f(x,y,y') \neq 0); \\ \textit{либо } f(x,y,y') = 0 \ (\textit{без дополнительных условий}). \end{array}\right. \tag{5.26}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(f(x,y,y') = 0)$, *мы приходим к обычному уравнению Эйлера—Лагранжа для* f (*почти всюду*).

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x,y,z) = |f(x,y,z)|$. Используя результат примера (5.1), получаем:

$$\partial_K^y\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial y}, & f(x,y,z)<0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}, & f(x,y,z)>0, \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right], & f(x,y,z)=0, \end{cases} \qquad \partial_K^z\varphi = \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial z}, & f(x,y,z)<0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}, & f(x,y,z)>0, \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial z}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right], & f(x,y,z)=0. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\partial_K^y\varphi = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z)<0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z)>0 \\ (2\lambda-1)\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z)=0, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1 \end{array} \right\},$$

$$\partial_K^z\varphi = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z)<0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z)>0 \\ (2\mu-1)\dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z)=0, \quad 0\leqslant\mu\leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Отсюда находим сублагранжиан:

$$L_K(\varphi)(y) \overset{\text{п.в.}}{=} \left\{ \begin{array}{c} -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right),\ f(x,y,z)<0 \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right),\ f(x,y,z)>0 \\ (2\lambda-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} - (2\mu-1)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right),\ f(x,y,z)=0, \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1; 0\leqslant\mu\leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, включение Эйлера—Лагранжа примет вид:

$$\left[\begin{array}{l} L(f)(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right),\ f(x,y,z)\neq 0, \\ \left\{L_{\alpha\beta}(f)(y) = \alpha\dfrac{\partial f}{\partial y} - \beta\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right), -1\leqslant\alpha,\beta\leqslant 1\right\}, \quad f(x,y,z)=0. \end{array} \right.$$

В частности, при $\alpha=\beta=0$ равенство $L_{00}(f)(y)\equiv 0$ тождественно выполнено, поэтому включение Эйлера—Лагранжа (5.26) при $f(x,y,z)$ также тождественно выполнено. Таким образом, в нашем случае включение Эйлера—Лагранжа приводится в следующим условиям

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,\ \text{при } f(x,y,z)\neq 0, \\ \text{либо} & f(x,y,z)=0 \text{ (без дополнительных условий).} \end{array} \right. \tag{5.27}$$

□

Рассмотрим конкретный пример «*модулированного*» *гармонического осциллятора* (см. [30, 31]).

Пример 5.4. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx. \tag{5.28}$$

Здесь $f(y,z) = z^2 - y^2$, $L(f)(y) = -2y - 2y''$. При этом $f(y,y') = y'^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = \pm y$, поэтому условие (5.27) примет вид:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y'' + y = 0,\ \text{при } y'\neq \pm y, \\ \text{либо} & y' = \pm y,\ \text{при } y' = \pm y. \end{array} \right. \tag{5.29}$$

Решая уравнения в (5.29), приходим к условиям

$$\left[\begin{array}{ll}\text{либо} & y = C_1\cos x + C_2\sin x,\\ \text{либо} & y = Me^{\pm x}.\end{array}\right. \tag{5.30}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \sin x, \ \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}e^x, \ \text{при } \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2.\end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий (5.30). Таким образом $y_0(x)$ — субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\pi/4 - 0) = \sin\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0(\pi/4 + 0),\\ y_0'(\pi/4 - 0) = \cos\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0'(\pi/4 + 0),\end{cases}$$

откуда следует, что $y_0 \in C^1[0;\pi/2]$.

При этом прямая проверка достаточных условий Лежандра—Якоби показывает, что на экстремали $y_1(x) = \sin x$ вариационный функционал

$$\Phi_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2)dx$$

достигает строгого локального минимума. Тогда из неравенства

$$\widehat{\Phi}_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} |y'^2 - y^2|dx \geqslant \Phi_1(y) \geqslant \Phi_1(y_1)$$

следует, что вариационный функционал $\widehat{\Phi}_1(y)$ тем более достигает на экстремали $y_1(x)$ строгого локального минимума. Далее, поскольку вариационный функционал

$$\Phi_2(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx$$

неотрицателен и на экстремали $y_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}e^x$ обращается в нуль, то Φ_2 достигает строгого локального минимума на экстремали $y_2(x)$. Наконец, поскольку

$$\Phi(y) = \widehat{\Phi}_1\Bigl(y\Big|_{[0;\pi/4]}\Bigr) + \Phi_2\Bigl(y\Big|_{[\pi/4;\pi/2]}\Bigr),$$

то вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого локального минимума на субэкстремали

$$y_0(x) = \begin{cases} y_1(x), \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\\ y_2(x), \ \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2.\end{cases}$$

Таким образом, на данной субэкстремали $y_0(x)$ достигается строгий локальный минимум вариационного функционала (5.28).

В заключении рассмотрим вариационную задачу с модулем под знаком интегранта (см. пример 5.2).

Теорема 5.7. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, |y'|)dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.31}$$

Для функционала (5.31) *включение Эйлера—Лагранжа принимает вид следующей альтернативы*:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } y'>0); \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,-y') + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,-y')\right) = 0 \ (\textit{при } y'<0); \\ 0 \in \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,0) + \left[-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right); +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right)\right] \ (\textit{при } y'=0). \end{array}\right.$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y'=0)=0$, *мы приходим к уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - (\operatorname{sign} y')\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right) = 0 \quad (\textit{п. в.}) \tag{5.32}$$

Доказательство. Рассмотрим для простоты только случай $\operatorname{mes}(y'=0)=0$. В этом случае интегрирование по частям в (5.16) (пример 5.2) приводит к равенству

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sign} y' \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right)\right] h dx = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - \operatorname{sign} y' \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right] h dx$$

при любом $h \in C^1[a;b]$, $h(a)=h(b)=0$. Отсюда стандартным путем следует уравнение (5.32). □

5.3. Второй K-субдифференциал основного вариационного функционала. Напомним классическую формулу второй вариации. Если

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]), \tag{5.33}$$

то функционал (5.33) дважды сильно дифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем для любого $h \in C^1[a;b]$:

$$\Phi''(y)(h)^2 = \int_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,y')h \cdot h' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')h'^2\right] dx. \tag{5.34}$$

Мы обобщим здесь это условие на случай субгладких интегрантов класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$. При этом, как и в случае $\partial_K \Phi$, точное равенство (5.34) переходит в оценку $\partial^2_K \Phi$.

Теорема 5.8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]). \tag{5.35}$$

Функционал (5.35) *дважды K-субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$, *причем справедлива оценка*:

$$\begin{aligned} \partial^2_K \Phi(y)(h)^2 \subset \Biggl[& \int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx; \\ & \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx\Biggr] + \\ + \Biggl[& \int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx; \ \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx\Biggr]. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Доказательство. Так как f дважды K-субдифференцируем, то f один раз дифференцируем обычным образом, т. е. существует f'. Тогда вариационный функционал $\Phi(y)$ также один раз дифференцируем в обычном смысле и его дифференциал выглядит следующим образом:

$$\Psi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b (f'_y(x,y,y')h + f'_z(x,y,y')h')dx. \tag{5.37}$$

Введем вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A: C^1[a,b] \to \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Теперь введем оператор композиции

$$B(\widetilde{A}(y)) = \Big(f'_y(\widetilde{A}(y)),\ f'_z(\widetilde{A}(y)) =: \Big(B_1(\widetilde{A}(y)),\ B_2(\widetilde{A}(y))\Big)\Big),$$

где

$$\widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]).$$

Введем также линейный по u, v и по h интегральный оператор:

$$D(u,v) = \int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)]dx, \qquad D: C[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Ψ может быть записан в виде композиции

$$\Psi(y)h = D[(B_{f'_y}(A), B_{f'_z}(A))]h. \tag{5.38}$$

Применяя к композиции (5.38) теорему 3.13 о K-субдифференцировании композиции, получаем

$$\partial_K \Psi(y)h = \partial_K(D[(B(Ay)])h \subset [\partial_K D(B(Ay)) \cdot [\partial_K B(Ay) \cdot \partial_K A(y)]]\, h. \tag{5.39}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (5.39).

1. Так как A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно, $\partial_K(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x))$.

2. Для операторов $B = (B_1, B_2)$, используя теорему о покоординатной K-субдифференцируемости 3.10, имеем:

$$\partial_K B(Ay)h \subset (\partial_K B_1(Ay)h) \times (\partial_K B_2(Ay)h) \subset$$
$$\subset [\underline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_y(x,y,y'))h + \underline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_y(x,y,y'))h'; \overline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_y(x,y,y'))h + \overline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_y(x,y,y'))h'] \times$$
$$\times [\underline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_z(x,y,y'))h + \underline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_z(x,y,y'))h'; \overline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_z(x,y,y'))h + \overline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_z(x,y,y'))h'].$$

3. Так как D — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $D'(v) \equiv D$. Отсюда:

$$\partial_K \Psi(y)h \subset \int_a^b \Bigg(\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h';\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h\right] \cdot h +$$
$$+ \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h';\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'\right] \cdot h'\Bigg)dx =$$
$$= \left[\int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx;\ \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx\right] +$$
$$+ \left[\int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;\ \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx\right]. \tag{5.40}$$

□

Здесь, как и при оценке $\partial_K\Phi$, мы также выделим случай интегранта, образованного внешней композицией субгладкой функции (теперь уже класса C^2_{sub}) с гладкой функцией.

Теорема 5.9. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (\varphi \in C^2_{sub}(\mathbb{R}), f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда Φ дважды K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b \varphi'(f)\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2 f dx +$$

$$+\left[\int_a^b \underline{\varphi''}(f)\left((f_y)^2h^2 + f_y zhh'\right)dx; \int_a^b \overline{\varphi''}(f)\left((f_y)^2h^2 + f_y zhh'\right)dx\right] +$$

$$+\left[\int_a^b \underline{\varphi''}(f)\left(f_y zhh' + (f_z)^2h'^2\right)dx; \int_a^b \overline{\varphi''}(f)\left(f_y zhh' + (f_z)^2h'^2\right)dx\right]. \tag{5.41}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления дают:

$$\underline{\varphi}(f)_{y^2} = \underline{\varphi}''(f_y)^2 + \varphi'(f)f_{y^2}; \;\; \overline{\varphi}(f)_{y^2} = \overline{\varphi''}(f)(f_y)^2 + \varphi'(f)f_{y^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{z^2} = \underline{\varphi}''(f_z)^2 + \varphi'(f)f_{z^2}; \;\; \overline{\varphi}(f)_{z^2} = \overline{\varphi''}(f)(f_z)^2 + \varphi'(f)f_{z^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{yz} = \underline{\varphi}'' f_y f_z + \varphi'(f)f_{yz}; \;\; \overline{\varphi}(f)_{yz} = \overline{\varphi''}(f)f_y f_z + \varphi'(f)f_{yz}.$$

Подстановка этих величин в (5.36) приводит, после преобразований, к оценке (5.41). □

Рассмотрим, в качестве конкретного примера, класс интегрантов вида $f(x,y,y')|f(x,y,y')|$.

Теорема 5.10. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')|f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b |f|\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial y}h'\right)^2 f dx + 2\int\limits_{(f\neq 0)} \operatorname{sign} f\left(f_y h + f_z h'\right)^2 dx +$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx; +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx\right] +$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx; +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx\right]. \tag{5.42}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(f(x,y,y')=0)=0$, то оценка (5.42) переходит в точное равенство:

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int_a^b |f|\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2 f dx + 2\int_a^b \operatorname{sign} f\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)^2 f dx.$$

В заключение приведем простейший пример.

Пример 5.5. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b y'|y'|dx.$$

Здесь применение оценки (5.42) приводит к точному равенству:

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = 2\int_{(y'\neq 0)} (\operatorname{sign} y')h'^2 dx = 2\int_{(y'>0)} h'^2 dx - 2\int_{(y'<0)} h'^2 dx.$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y'=0)=0$, получаем:

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 = \Phi_K(y)(h)^2 = 2\int_a^b (\operatorname{sign} y')h'^2 dx.$$

5.4. K-аналог необходимого условия Лежандра. Напомним классическое необходимое условие Лежандра для минимума основного вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a)=y_a, y(b)=y_b). \tag{5.43}$$

Если функционал (5.43) достигает локального минимума в точке $y \in C^1[a;b]$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y') \geqslant 0 \text{ всюду на } [a;b].$$

Мы обобщим здесь это условие на класс интегрантов второго порядка субгладкости. Как и в классическом случае, базовым является соответствующее условие неотрицательности квадратичного функционала.

Теорема 5.11. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int_a^b \left[P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right] dx \quad (h \in C^1[a;b], h(a)=h(b)=0).$$

Если коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены, $P(x)$ полунепрерывен сверху всюду на $[a;b]$, и $\widetilde{\Phi}(h) \geqslant 0$ при всех допустимых h, то

$$P(x) \geqslant 0 \text{ всюду на } [a;b].$$

Доказательство. Допустим противное: $P(x_0) < 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда, в силу полунепрерывности сверху в точке x_0, $P(x) < 0$ в некоторой δ-окрестности x_0. Положим, следуя классической схеме:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta}\left(1 + \dfrac{x-x_0}{\delta}\right) & \text{при } x_0-\delta \leqslant x \leqslant x_0, \\ \sqrt{\delta}\left(1 - \dfrac{x-x_0}{\delta}\right) & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0+\delta, \\ 0 \quad \text{при остальных } x \in [a;b]. \end{cases}$$

Стандартная выкладка приводит к равенству

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Q(x)h^2 dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} P(x)h'^2 dx =: \widetilde{\Phi}_Q(h) + \widetilde{\Phi}_P(h). \tag{5.44}$$

Оценим оба слагаемых в (5.44).

В силу ограниченности Q,

$$|\widetilde{\Phi}_Q(h)| \leqslant M_Q \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = 2M_Q\delta. \tag{5.45}$$

В силу теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных сверху функций, $P(x) \leqslant -m_P < 0$ при $x \in [x_0 - \delta;\, x_0 + \delta]$. Отсюда

$$\widetilde{\Phi}_P(h) \leqslant -m_P \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = -m_P \frac{1}{\delta} 2\delta = -\frac{m_P}{2}. \tag{5.46}$$

Из (5.45)-(5.46) получаем:

$$\widetilde{\Phi}(h) \leqslant -\frac{m_P}{2} + 2M_Q\delta^2 < 0$$

при достаточно малых $\delta > 0$, что противоречит условию. □

Из теоремы 5.11, общей оценки $\partial_K^2(\Phi)$ (теорема 5.8) и общего необходимого условия минимума в терминах второго K-субдифференциала (теорема 4.16) нетрудно получить необходимое условие второго порядка для минимума вариационного функционала с интегрантом из класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 5.12. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.47}$$

Если функционал (5.47) *достигает локального минимума в точке* $y \in C^1[a; b]$, *то*

$$\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x, y, y') \geqslant 0 \text{ всюду на } [a; b]. \tag{5.48}$$

Доказательство. Применим по формуле (5.36) оценки $\partial_K^2\Phi(y)(h)^2$ интегрирование по частям к слагаемым под интегралами, содержащим множитель hh', и преобразуем полученную сумму отрезков как выпуклую оболочку крайних точек:

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x, y, y')\right)\right) h^2 dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x, y, y')\right)\right) h^2 dx\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x, y, y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right) h^2\right) dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x, y, y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x, y, y')\right) h^2\right) dx\Bigg] =$$

$$= co\Bigg\{\int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x, y, y')h'^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x, y, y')\right)\right) h^2\right] dx;$$

$$\int\limits_a^b \left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x, y, y')'h^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x, y, y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x, y, y')\right)\right) h^2\right] dx;$$

$$\int\limits_a^b \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\left.\int\limits_a^b \left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx\right\} =:$$

$$=: co\,\{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\}\,. \tag{5.49}$$

Далее, по необходимому условию второго порядка для минимума (теорема 4.16),

$$\max\, \partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \geqslant 0 \quad (\forall\, h \in C^1[a;b],\ h(a) = h(b) = 0).$$

Из оценки (5.49) и последнего условия получаем:

$$\max\,\{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\} \geqslant 0. \tag{5.50}$$

Обозначим теперь:

$$P(x) = \max\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y'),\ \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\right) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y');$$

$$\begin{aligned} Q(x) = \max\Bigg[&\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right),\\ &\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right),\\ &\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right),\\ &\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Положим $I(h) = \int\limits_a^b (P(x)h'^2 + Q(x)h^2)dx$. Тогда из неравенств $I_k(h) \leqslant I(h)$ $k = \overline{1,4}$ и неравенства (5.50) следует $I(h) \geqslant 0$ при любом $h \in C^1[a;b]$ $h(a) = h(b) = 0$. Применяя теперь к $I(h)$ теорему 5.11, получим

$$P(x) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

□

Приведем конкретный пример с еще одним вариантом модуляции гармонического осциллятора.

Пример 5.6. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y'|y'| - y^2)dx \quad (y \in C^1[0; \frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in C^1[0;T]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $\mathrm{mes}(y' = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{ll} y'' + y = 0 & \text{при } y' > 0 \\ \text{(почти всюду на } [0;T]); & \\ y'' - y = 0 & \text{при } y' < 0. \end{array}\right. \tag{5.51}$$

Далее,

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') = \begin{cases} 2, & y' \geqslant 0, \\ -2, & y' < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ни одна немонотонная функция не удовлетворяет ни условию (5.48), ни сопряженному неравенству для максимума:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y') \leqslant 0 \text{ почти всюду на } [a;b].$$

Среди монотонных функций (при данных граничных условиях) уравнению (5.51) удовлетворяют функции $y = \sin x$ и $y = sh\, x / sh\, \dfrac{\pi}{2}$.

5.5. K**-аналог достаточных условий Лежандра—Якоби.** Вначале напомним классические результаты, связанные с понятием сопряженной точки.

Определение 5.1. Рассмотрим квадратичный функционал

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right)dx \quad (P, Q \in C[a;b],\ h \in C^1[a;b]). \tag{5.52}$$

Точка $\widetilde{x} \in (a;b)$ называется *сопряженной* с a для функционала (5.52), если уравнение Эйлера—Лагранжа для $\widetilde{\Phi}$

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0 \quad (h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

имеет ненулевое решение $h(x)$ такое, что $h(\widetilde{x}) = 0$.

Достаточное условие Лежандра—Якоби положительной определенности квадратичного функционала (5.52) имеет следующий вид.

Теорема 5.13. *Если для квадратичного функционала* (5.52) *выполнены условия*

1. $P(x) > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$,
2. *отрезок* $(a;b]$ *не содержит точек, сопряженных с* a,

то квадратичный функционал (5.52) *положительно определен в* $C^1[a;b]$.

На основе теоремы 5.13 и формулы второй вариации доказываются достаточные условия Лежандра—Якоби для минимума вариационного функционала.

Теорема 5.14. *Пусть для вариационного функционала*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

функция y — *экстремаль. Если вдоль* y *выполнены условия*

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y') > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$ (*усиленное условие Лежандра*),
2. *для уравнения Якоби*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')h'\right) - \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,y')\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')\right]h = 0 \quad (h(a) = 0,\ h'(a) = 1) \tag{5.53}$$

выполнено условие Якоби отсутствия сопряженных точек,

то Φ *достигает в точке* y *строгого локального минимума.*

Наша цель — обобщить результат теоремы 5.13 на случай квадратичных функционалов с *ограниченными* и *полунепрерывными снизу* коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$, и на этой основе обобщить результат теоремы 5.14 на случай C^2-субгладкого интегранта. Заметим, что понятие *сопряженной точки* переносится на этот случай без изменений. Сформулируем аналог теоремы 5.13.

Теорема 5.15. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right)dx \quad (h \in C^1[a;b]), \tag{5.54}$$

коэффициенты которого $P(x)$ *и* $Q(x)$ *ограничены и полунепрерывны снизу на* $[a;b]$. *Если для функционала* (5.52) *выполнены условия Лежандра—Якоби* (1)-(2) *из теоремы* 5.13, *то он положительно определен в* $C^1[a;b]$.

Доказательство. Следуя стандартной схеме доказательства для гладкого случая, добавим к выражению, стоящему под знаком интеграла в (5.54), величину вида $d(wh^2)$; при этом значение интеграла не изменится. Если $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(Q + w') = w^2, \tag{5.55}$$

то функционал (5.54) приводится к виду:

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b P(h' + \frac{w}{P}h)^2 dx.$$

Стандартным образом проверяется, что $\widetilde{\Phi}(h) > 0$ при $h \neq 0$, с учетом того, что из полунепрерывности P снизу на $[a;b]$ следует $P(x) \geqslant \gamma^2 > 0$ и ограниченность $(1/P(x))$. Отсюда в силу квадратичности функционала $\widetilde{\Phi}$, следует его положительная определенность.

Остается показать, что уравнение Риккати (5.55) имеет решение. Стандартными преобразованиями оно приводится к уравнению

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0,$$

т. е. к уравнению Якоби для функционала (5.54). По условию, это уравнение имеет решение $u(x)$, которое не обращается в нуль при $a < x \leqslant b$. Тогда существует и решение уравнения (5.55), определенное равенством $w = -Pu'u^{-1}$. Итак, функционал (5.54) положительно определен на $C^1[a;b]$.

□

Теперь перейдем к центральному результату — C^2-субгладкому аналогу теоремы 5.14.

Теорема 5.16. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.56}$$

Предположим, что y — *субэкстремаль функционала* (5.56), *т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа. Пусть вдоль субэкстремали* y *выполнены следующие условия*:

1. $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$ (*«нижнее» усиленное условие Лежандра*);
2. *для каждого из четырех уравнений Якоби, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x);\ \overline{J}^2 f(x)]$:

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.57}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.58}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.59}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.60}$$

$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1) \tag{5.61}$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряженных точек.

Тогда функционал (5.56) *достигает строгого локального минимума в точке* y.

Доказательство. Воспользуемся оценкой для $\partial^2_K\Phi(y)(h)^2$, полученной в доказательстве теоремы 5.12:

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 \subset co\Bigg\{\int\limits_a^b\Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Bigg)\Bigg)h^2\Bigg]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Bigg)\Bigg)h^2\Bigg]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Bigg)\Bigg)h^2\Bigg]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Bigg)\Bigg)h^2\Bigg]dx\Bigg\} =:$$

$$=: co\Big\{J_1(h),\, J_2(h),\, J_3(h),\, J_4(h)\Big\}. \tag{5.62}$$

Проведем оценку каждого из интегралов $J_k(h)$, $k=\overline{1,4}$, пользуясь результатом теоремы 5.15.

1. Положим

$$P_1(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y');\ Q_1(x)=\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Bigg)\Bigg).$$

Тогда уравнение Якоби для квадратичного функционала

$$J_1(h)=\int\limits_a^b[P_1(x)h'^2+Q_1(x)h^2]dx$$

примет вид (5.57). Таким образом, если выполнено условие Якоби для уравнения (5.57) и усиленное условие Лежандра

$$P_1(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0 \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

то квадратичный функционал $J_1(h)$ положительно определен:

$$J_1(h)\geqslant\gamma_1^2\|h\|^2 \quad (\forall h\in C^1[a;b],\ h(a)=h(b)=0).$$

2. Аналогичным образом, обозначая через $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, соответственно, коэффициенты при h'^2 и h^2 для функционалов

$$J_k(h)=\int\limits_a^b[P_k(x)h'^2+Q_k(x)h^2]dx \quad (k=2,3,4),$$

мы приходим к условию Якоби для уравнений (5.58)–(5.60) и усиленным условиям Лежандра следующего вида:

$$P_2(x)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0;\quad P_3(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0;\quad P_4(x)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0 \quad (a\leqslant x\leqslant b).$$

Отсюда вытекает положительная определенность квадратичных функционалов $J_k(h)$, $k=2,3,4$:

$$J_2(h)\geqslant\gamma_2^2\|h\|^2;\quad J_3(h)\geqslant\gamma_3^2\|h\|^2;\quad J_4(h)\geqslant\gamma_4^2\|h\|^2 \quad (\forall h\in C^1[a;b],\ h(a)=h(b)=0).$$

Таким образом, обозначая $\gamma^2=\min\{\gamma_1^2,\,\gamma_2^2,\,\gamma_3^2,\,\gamma_4^2\}>0$, приходим к следующему итогу.

При выполнении Якоби для каждого из уравнений (5.57)–(5.60) и усиленного условия Лежандра в форме

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0 \quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

выполнены неравенства

$$J_k(h) \geqslant \gamma^2 \|h\|^2.$$

Но тогда из оценки (5.62) вытекает неравенство $\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \geqslant \gamma^2\|h\|^2$, т. е. $\partial_K^2\Phi(y)$ также положительно определен. Следовательно, в силу общей теоремы 4.17, Φ достигает строгого локального минимума в точке y. □

Замечание 5.2. При переходе к достаточным условиям максимума в теореме 5.16, условие (1) заменяется на условие:

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') < 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

Условие (2) остается без изменения.

В заключении рассмотрим пример применения теоремы 5.16 к еще одному варианту «модулирования» гармонического осциллятора.

Пример 5.7. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big],\ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1,\ y\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \tag{5.63}$$

Здесь уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{aligned} &y'' + y = 0 \ \ (y' \geqslant 0),\\ &y'' - y = 0 \ \ (y' \leqslant 0). \end{aligned}\right.$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ $\Big(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\Big)$, $y = -shx$ $\Big(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\Big)$, является субэкстремалью функционала (5.63); при этом $y \in C^2\Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

«*Нижнее*» условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = 2 > 0.$$

«*Нижнее*» уравнение Якоби (5.57) принимает вид:

$$\left[\begin{aligned} &h'' + h = 0 \quad (y' \geqslant 0),\\ &\Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big)\\ &h'' - h = 0 \quad (y' \leqslant 0). \end{aligned}\right.$$

Отсюда

$$h(x) = \begin{cases} \sin x ch\,\dfrac{\pi}{2} + \cos x sh\,\dfrac{\pi}{2} & \Big(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\Big),\\ sh\,\Big(x + \dfrac{\pi}{2}\Big) & \Big(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\Big), \end{cases}$$

и условие Якоби для уравнения (5.57), как легко видеть, выполнено. Условие Якоби для уравнений (5.57)–(5.61) проверяется аналогично.

Таким образом, вариационный функционал (5.63) достигает на субэкстремали

$$y = \begin{cases} \sin x, & (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}),\\ -sh\,x, & (-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0) \end{cases}$$

строгого локального минимума.

В заключение скажем несколько слов о *субгладкости*. Как представляется, практические применения построенного в работе формализма определяются именно возможностью работать с субгладкими задачами так же уверенно, как классический анализ работает с гладкими задачами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басаева Е. К.* О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов// Владикавказ. мат. журн. — 2006. — *8*, № 4. — С. 6–12.
2. *Благодатских В. И.* Введение в оптимизацию. — М.: Высшая школа, 2001.
3. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2000.
4. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры// Владикавказ. мат. журн. — 2006. — *8*, № 4. — С. 19-31.
5. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.
6. *Дмитрук А. В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ; МАКС Пресс, 2012.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
8. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1982. — *19.* — С. 155–206.
10. *Кутателадзе С. С.* Выпуклые операторы// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 1. — С. 167–196.
11. *Левин В. Л.* О субдифференциалах выпуклых функционалов// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4 (154). — С. 183-184.
12. *Линке Ю. Э.* Применения теоремы Майкла и ее обращение к сублинейным операторам// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 1. — С. 67–75.
13. *Линке Ю. Э.* Условия продолжения ограниченных линейных и сублинейных операторов со значениями в пространствах Линденштраусса// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 6. — С. 1340–1358.
14. *Линке Ю. Э.* Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 547–557.
15. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
16. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34.* — С. 121–138.
17. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона—Никодима справедлива в любом пространстве Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37.* — С. 55–69.
18. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых конусах// Укр. мат. вестн. — 2013. — *10*, № 4. — С. 532–558.
19. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49.* — С. 99–131.
20. *Половинкин Е. С.* Выпуклый анализ: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2006.
21. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.
22. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1971.
23. *Решетняк Ю. Г.* Условия экстремума для одного класса функционалов вариационного исчисления с негладким интегрантом// Сиб. мат. ж. — 1987. — *28*, № 6. — С. 90–101.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
25. *Рубинов А. М.* Сублинейные операторы и их приложения// Усп. мат. наук. — 1977. — *32*, № 4. — С. 113–174.
26. *Рубинов А. М.* Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. — Ленинград: Наука, 1980.
27. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа—Юнг—Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования// Тр. ИПММ НАН Украины. — 2010. — Том 20. — С. 168–176.
28. *Стонякин Ф. С.* Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах// Дисс. к.ф.-м.н. — Симферополь, 2011.
29. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1987. — *14.* — С. 5–101.
30. *Тихонов А. И., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
31. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны. — М.: Физматлит, 2001.
32. *Халилова З. И.* *K*-сублинейные многозначные операторы и их свойства// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2011. — *24 (63)*, № 3. — С. 110–122.

33. *Халилова З. И.* Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2012. — *25 (64)*, № 2. — С. 140–160.
34. *Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам// Динам. сист. — 2013. — *3(31)*, № 1-2. — С. 115-134.
35. *Bertsekas D. P., Nedic A., Ozdaglar A. E.* Convex analysis and optimization. — Belmont: Athena Scientific, 2003.
36. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. — Oxford: North Holland; New York: Elsevier, 1976.
37. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex cones. — Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland, 1981.
38. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation. — Heidelberg—Berlin—New York: Springer, 1992.
39. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral// Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — *15* (*1*). — С. 74–90.
40. *Ranjbari A., Saiflu H.* Some results on the uniform boundedness theorem in locally convex cones// Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — *15*, № 4. — С. 361-368.
41. *Roth W.* A uniform boundedness theorem for locally convex cones// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*, №7. — С. 1973–1982.

И. В. Орлов
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
проспект Вернадского, 4, Симферополь, Украина, 95007
E-mail: igor_v_orlov@mail.ru