Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 30–63

УДК 519.21+517.9

АНАЛИЗ БЕЛОГО ШУМА В ПРИЛОЖЕНИЯХ К СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2014 г. **И. В. МЕЛЬНИКОВА, М. А. АЛЬШАНСКИЙ**

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения возникают в многочисленных приложениях как математические модели, отражающие случайные воздействия типа белого шума на рассматриваемую систему. В дальнейшем мы ограничимся случаем гауссовского белого шума. Намерение ввести шум в дифференциальное уравнение встречает несколько препятствий, одно из которых связано с тем, что процесс белого шума (неформально) определяется как случайный процесс, значения которого при разных t являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с равными нулю математическими ожиданиями и бесконечными отклонениями. Это означает, что белый шум не является случайным процессом в обычном смысле.

Можно выделить два подхода к преодолению препятствия, связанного с сингулярностью белого шума. Первый состоит в использовании исчисления Ито. Главная идея этого подхода может быть в общих чертах описана следующим образом. Вместо того, чтобы работать собственно с шумом, работают с его «первообразной» — броуновским движением $B(t)$, или винеровским процессом. Основы этой теории были заложены Н. Винером [35], который первым ввел математическую модель броуновского движения, построив вероятностную меру на пространстве всех непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций так, что эти функции можно считать траекториями процесса броуновского движения. В силу конструкции меры Винера эти непрерывные траектории оказываются нигде не дифференцируемыми с вероятностью единица.

В основе исчисления Ито лежит понятие интеграла от стохастического процесса $X(t)$ по броуновскому движению — интеграла Ито:

$$\int_0^T X(t)\,dB(t).$$

Этот математический аппарат позволяет изучать задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения вида

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dB(t), \quad X(0) = \zeta,$$

которое, на самом деле, представляет собой краткую запись интегрального уравнения

$$X(t) - \zeta = \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s))\,dB(s).$$

Такие уравнения называются уравнениями Ито, а их решения — процессами Ито. Эти процессы можно считать функционалами траекторий броуновского движения, и исчисление Ито часто называют анализом броуновских функционалов.

Второй подход появился в последних декадах XX столетия и известен как анализ белого шума. Этот термин появился в работе Т. Хиды [13], где он предложил рассматривать функционалы броуновского движения как функционалы белого шума. Поскольку белый шум можно считать

Работа частично поддержана министерством образования и науки РФ (Программа 1.1016.2011), РФФИ, проект 13-01-00090, и программой государственной поддержки лидирующих университетов РФ (соглашение №. 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

производной броуновского движения, траектории которого непрерывны, но нигде не дифференцируемы в обычном смысле, естественно считать траектории белого шума элементами пространства Шварца $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста. Поэтому при построении вероятностного пространства белого шума, являющегося базовым понятием анализа белого шума, берут $\Omega = \mathcal{S}'$ и вводят гауссовскую нормализованную меру μ на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ борелевских подмножеств $\mathcal{S}'$. Построение этой меры основано на знаменитой теореме Бохнера—Минлоса—Сазонова. Этой теме и дальнейшему развитию анализа белого шума посвящена обширная литература (см., например, [7, 15, 17, 20–25, 30]).

Анализ белого шума дает математический аппарат, в рамках которого все случайные переменные рассматриваются как функционалы траекторий белого шума, т. е. функции, определенные на $\mathcal{S}'$. Для того, чтобы охватить все необходимые функционалы, Хида построил обобщение теории обобщенных функций Шварца на случай функций, определенных на $\mathcal{S}'$. С помощью теории оснащенных гильбертовых пространств он построил тройку Гельфанда

$$(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})^*, \tag{1}$$

которая является аналогом хорошо известной тройки $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$. Здесь (L^2) — пространство всех случайных величин на $\mathcal{S}'$ с конечным моментом второго порядка; в тройке (1) оно играет роль пространства $L^2(\mathbb{R})$. Значения белого шума принадлежат пространству $(\mathcal{S})^*$ в правой части тройки (1). Оно называется пространством обобщенных случайных величин, или распределений Хиды над пространством основных функций Хиды $(\mathcal{S})$.

В работе [20] Кондратьев и Стрейт расширили пространство Хиды обобщенных случайных величин $(\mathcal{S})^*$, столкнувшись с необходимостью охватить некоторые функционалы белого шума, необходимые в приложениях. Они ввели в рассмотрение пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}$ как правый элемент тройки Гельфанда с тем же пространством (L^2) в центре и более узким пространством основных функций $(\mathcal{S})_\rho$, где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ — фиксированный параметр. Пространства основных и обобщенных случайных величин Хиды стали частным случаем пространств Кондратьева и Стрейта, соответствующими случаю параметра $\rho = 0$, а именно, справедливы следующие вложения:

$$(\mathcal{S})_\rho \subset (\mathcal{S})_0 = (\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})^* = (\mathcal{S})_{-0} \subset (\mathcal{S})_{-\rho}.$$

Чрезвычайно важным является то, что в рамках анализа белого шума, процесс белого шума оказывается бесконечно дифференцируемой функцией переменной t со значениями в пространстве обобщенных случайных величин. Кроме того, становится возможным перейти от рассмотрения проинтегрированных уравнений Ито к изучению собственно дифференциальных уравнений.

Математический аппарат анализа белого шума позволяет не только ввести шум непосредственно в уравнение, но также ставить и решать стохастические дифференциальные уравнения без ограничений, связанных с такими понятиями, как адаптированность рассматриваемых процессов к фильтрации, порожденной броуновским движением, и предсказуемость. Наличие этих свойств у подынтегрального выражения существенно для определения интеграла Ито и, следовательно, для всех построений исчисления Ито. Адаптированность случайного процесса к фильтрации можно грубо описать как зависимость его значения в любой момент t только от истории броуновского движения до момента t (которая представлена фильтрацией) и независимость от будущего. В рамках анализа белого шума можно изучать и решать некоторые уравнения с «предвосхищением» (*anticipating equations*) (см., например, [2, 8, 26, 29]). Это дает перспективу введения «зависимости от будущего» в математическую модель, что уже нашло применения, например, в финансовой математике, где позволило моделировать рынки с учетом влияния инсайдерской информации (см., например, [1, 7, 16, 31]).

Стохастические дифференциальные уравнения в бесконечномерных гильбертовых пространствах начали изучать в начале 80-х (см. [18, 19], где впервые рассмотрено обобщение исчисления Ито на случай стохастических процессов со значениями в гильбертовом пространстве). Дальнейшее развитие этой теории можно найти в более поздних работах, таких, например, как [4, 5, 12]. Такие уравнения имеют многочисленные приложения в физике, математической биологии и финансовой математике (см., например, [11, 28, 33]).

Ввиду преимуществ, которыми обладает анализ белого шума по сравнению с исчислением Ито, представляется разумным и естественным расширить эту теорию на гильбертовозначный случай.

Первая попытка такого расширения была предпринята в работе [10], где были введены пространства основных и обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве и, с помощью преобразования Эрмита, изучены уравнения с аддитивным шумом. В настоящей работе рассматривается несколько другой подход, предложенный в работе [27]. Мы используем пространства скалярнозначных основных случайных величин чтобы определить обобщенные случайные величины со значениями в гильбертовом пространстве как линейные непрерывные операторы на этих пространствах со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, следуя подходу к определению обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве, использованному в работе [9]. Полученные таким образом пространства обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин имеют ту же линейную и топологическую структуру, что и пространства, построенные в [10], однако предлагаемый подход позволяет определить в гильбертовозначном случае S-преобразование, которое оказывается мощным инструментом исследования. С его помощью удается естественным образом определить произведение Уика и доказать связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды—Скорохода от операторнозначных случайных величин и, таким образом, обосновать постановку стохастических дифференциальных уравнений в пространствах гильбертовозначных обобщенных случайных величин как обобщение соответствующих уравнений Ито. Все это позволило получить результат о существовании единственного решения задачи Коши для уравнения с мультипликативным шумом.

Дадим описание настоящей работы по разделам.

В разделе 1 рассмотрено определение и основные свойства пространств обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, где $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и даны определения $\mathbb{H}$-значного цилиндрического белого шума и Q-белого шума как $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных процессов. В разделе 2 обсуждаются понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций.

В разделе 3 введено S-преобразование обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин, которое оказывается эффективным инструментом исследования линейных стохастических дифференциальных уравнений, и дана характеристическая теорема S-преобразований обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин. В разделе 4 с помощью S-преобразования определено произведение Уика операторнозначной и гильбертовозначной обобщенных случайных величин.

Раздел 5 посвящен понятию интеграла Хицуды—Скорохода от функции со значениями в пространстве операторнозначных обобщенных случайных величин. Показано (теорема 5.2), что этот интеграл можно считать обобщением интеграла Ито в бесконечномерном случае. Это оправдывает постановку стохастических дифференциальных уравнений в пространствах гильбертовозначных обобщенных случайных величин, которые рассмотрены далее в разделе 6.

В разделе 6 получен результат о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного бесконечномерного стохастического дифференциального уравнения с аддитивным шумом и с мультипликативным шумом. Заметим, что условия, при которых получены эти результаты, не требуют предсказуемости или адаптированности начальных значений задачи Коши.

1. Обобщенные случайные величины

Вероятностное пространство белого шума играет фундаментальную роль в нашей конструкции пространств гильбертовозначных обобщенных случайных величин. Дадим его определение и рассмотрим его основные свойства.

Пусть $\mathcal{S}'$ — пространство медленно растущих распределений над пространством быстро убывающих основных функций $\mathcal{S}$. Пространство $\mathcal{S}$ является счетно-гильбертовым. Это означает, что

$$\mathcal{S} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_p, \quad \text{где} \quad \mathcal{S}_p = \left\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid (\varphi,\varphi)_p < \infty\right\}, \tag{1.1}$$

и скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_p$ определяется равенством

$$(\varphi,\psi)_p := (\hat{D}^p\varphi, \hat{D}^p\psi)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{где} \quad \hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1.$$

Обозначим через $|\cdot|_p$ норму, порожденную этим скалярным произведением. Из определения пространств $\mathcal{S}_p$ следует, что для любого p вложение $\mathcal{S}_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{S}_p$ является ядерным оператором, т. е.

пространство $\mathcal{S}$ ядерное. В силу этого, по теореме Бохнера—Минлоса—Сазонова (см., например, [17, теорема 4.7]), существует единственная вероятностная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ подмножеств $\mathcal{S}'$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{i\langle\omega,\theta\rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}, \quad \theta \in \mathcal{S}, \tag{1.2}$$

где $|\cdot|_0$ — норма пространства $L^2(\mathbb{R})$ (в дальнейшем через $(\cdot,\cdot)_0$ будем обозначать скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$).

Мера μ называется нормализованной гауссовской мерой на $\mathcal{S}'$, т. к. для любых $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathcal{S}$, ортогональных в $L^2(\mathbb{R})$, случайная величина $\omega \mapsto (\langle\omega,\theta_1\rangle, \langle\omega,\theta_2\rangle, \ldots, \langle\omega,\theta_n\rangle)$ является гауссовской с плотностью распределения

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} |\theta_i|_0} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}\Big).$$

Эквивалентно,

$$E\Big(f\big(\langle\cdot,\theta_1\rangle, \ldots, \langle\cdot,\theta_n\rangle\big)\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} |\theta_i|_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}} dx_1 \ldots dx_n \tag{1.3}$$

для любой $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой, что существует интеграл в правой части равенства.

Тройка $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$ называется вероятностным пространством белого шума.

Обозначим через (L^2) пространство $L^2(\mathcal{S}', \mu; \mathbb{R})$ всех $\mathbb{R}$-значных интегрируемых с квадратом по μ функций (случайных величин), определенных на $\mathcal{S}'$. Обозначим через $\|\cdot\|_0$ норму этого пространства. Из равенства (1.3) следует, что для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ выполняются следующие равенства:

$$\big(\langle\cdot,\theta\rangle, \langle\cdot,\eta\rangle\big)_{(L^2)} = E\Big(\langle\cdot,\theta\rangle\langle\cdot,\eta\rangle\Big) = (\theta,\eta)_0, \quad \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_0^2 = E\langle\cdot,\theta\rangle^2 = |\theta|_0^2. \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что отображение $\theta \mapsto \langle\cdot,\theta\rangle$ можно по непрерывности продолжить с $\mathcal{S}$ на $L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, случайная величина $\langle\cdot,\theta\rangle$ определена как элемент пространства (L^2) для любого $\theta \in L^2(\mathbb{R})$. Равенство (1.2) остается верным для $\theta \in L^2(\mathbb{R})$, а равенство (1.3) остается верным для $\theta_1, \ldots, \theta_n \in L^2(\mathbb{R})$. В частности, для любого $t \geqslant 0$ случайная величина

$$B(t) := \langle\cdot, 1_{[0;t]}\rangle \tag{1.5}$$

определена как элемент пространства (L^2). Она является гауссовской с равным нулю математическим ожиданием, а из равенства (1.4) следует, что

$$E\big[B(t)B(s)\big] = (1_{[0;t]}, 1_{[0;s]})_0 = \min\{t,s\}, \quad E\big[B^2(t)\big] = |1_{[0;t]}|_0^2 = t.$$

Более того, при $0 \leqslant s < t$ имеет место равенство

$$E\big[(B(t)-B(s))^4\big] = E\big[\langle\cdot, 1_{(s,t]}\rangle^4\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx = 3(t-s)^2.$$

Отсюда по теореме Колмогорова о непрерывности (см. [34]) следует, что $B(t)$ имеет непрерывную версию, которая является броуновским движением. Будем далее обозначать ее тем же символом.

Как это обычно делается в теории обобщенных функций, запишем неформально правую часть равенства (1.5) в виде интеграла: $\langle\omega, 1_{[0;t]}\rangle = \int\limits_0^t \omega(s)\,ds$ для любого $\omega \in \mathcal{S}'$. Таким образом, получим

$$B(t) = \int\limits_0^t \omega(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) означает, что элементы пространства $\mathcal{S}'$, являющиеся элементарными исходами, в рамках аппарата вероятностного пространства белого шума можно представлять себе как траектории белого шума, который является производной броуновского движения.

1.1. Пространства обобщенных случайных величин: $(\mathcal{S})_{-\rho}$. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$, состоящий из функций Эрмита

$$\xi_k(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\big((k-1)!\big)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} h_{k-1}(x),$$

где $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита

$$h_k(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими известными оценками функций Эрмита (см. [14]):

$$\int\limits_0^t \xi_i(s)\, ds = O(i^{-\frac{3}{4}}), \tag{1.7}$$

$$\xi_i(t) = O\big(i^{-\frac{1}{4}}\big), \tag{1.8}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i(t)| = O(i^{-\frac{1}{12}}). \tag{1.9}$$

Пусть $\mathcal{T} \subset \big(\mathbb{N}\cup\{0\}\big)^{\mathbb{N}}$ — множество всех финитных мультииндексов. Стохастические полиномы Эрмита определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_k h_{\alpha_k}\big(\langle\omega,\, \xi_k\rangle\big), \quad \omega\in\mathcal{S}', \alpha\in\mathcal{T}.$$

Произведение здесь, на самом деле, является конечным, так как каждый мультииндекс α финитный и, значит, $h_{\alpha_k}(x) = h_0(x) = 1$ для всех достаточно больших k.

Пусть $\alpha,\beta\in\mathcal{T}$ и $n = \max\{k\in\mathbb{N} \,|\, \alpha_k \neq 0$ или $\beta_k\neq 0\}$. Из равенства (1.3) и ортогональности полиномов Эрмита в пространстве $L^2\left(\mathbb{R}; \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right)$ следует

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}_\alpha,\, \mathbf{h}_\beta)_{(L^2)} &= E\left[\prod_{k=1}^n h_{\alpha_k}\big(\langle\omega,\xi_k\rangle\big)\prod_{k=1}^n h_{\beta_k}\big(\langle\omega,\xi_k\rangle\big)\right] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^n |\xi_i|_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^n h_{\alpha_k}(x_k)\prod_{k=1}^n h_{\beta_k}(x_k) e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \frac{x_k^2}{|\xi_k|_0^2}}\, dx_1\ldots dx_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{k=1}^n \int\limits_{\mathbb{R}} h_{\alpha_k}(x_k) h_{\beta_k}(x_k) e^{-\frac{1}{2}x_k^2} dx_k = \begin{cases} 0, & \alpha\neq\beta, \\ \alpha!, & \alpha=\beta, \end{cases} \qquad \alpha! := \prod_k \alpha_k!.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, стохастические полиномы Эрмита образуют ортогональную систему в пространстве (L^2). Более того, $\{\mathbf{h}_\alpha \,|\, \alpha\in\mathcal{T}\}$ — ортогональный базис пространства (L^2) (см. [15, теорема 2.2.3]). Из этого факта и равенства (1.10) следует, что для скалярного произведения и нормы в (L^2) выполняются следующие равенства:

$$(\Phi,\Psi)_{(L^2)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha!\Phi_\alpha\overline{\Psi}_\alpha, \quad \|\Phi\|^2_{(L^2)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha!\Phi_\alpha^2,$$

где

$$\Phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \quad \Psi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Psi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \quad \Phi_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\Phi,\mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)}, \quad \Psi_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\Psi,\mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)}.$$

В силу равенства (1.10) можно неформально представлять себе пространство (L^2) как

$$L^2\left(\mathbb{R}^\infty; \prod_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}\, dx_k\right),$$

отождествляя любой элемент $\omega\in\mathcal{S}'$ с последовательностью его «коэффициентов Фурье» $\langle\omega,\xi_k\rangle$ по системе функций Эрмита. Таким образом, интегрируемые с квадратом случайные величины на вероятностном пространстве белого шума $(\mathcal{S}',\mathcal{B}(\mathcal{S}'),\mu)$ можно считать функциями бесконечного множества действительных переменных. Эта линейная структура области определения случайных величин приводит к обобщению на бесконечномерный случай теории распределений Шварца, при этом пространство (L^2) играет ту же роль, что $L^2(\mathbb{R})$ в тройке

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'.$$

В результате появляется тройка Гельфанда

$$(\mathcal{S})_\rho \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}, \tag{1.11}$$

где $\rho \in [0;1]$ фиксировано. Тройка (1.11) была впервые введена в работе [20] и используется в [15, 21] и других работах. Рассмотрим ее построение подробнее.

Напомним, что благодаря тому, что функции Эрмита ξ_i являются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{D} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$, для которых выполняются равенства $\hat{D}\xi_i = (2i)\xi_i$, $i \in \mathbb{N}$, пространства $\mathcal{S}_p$, определенные равенствами (1.1), можно описать в терминах разложений по функциям Эрмита следующим образом:

$$\mathcal{S}_p = \left\{ \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \xi_i \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\varphi, \varphi)_p = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^2 (2i)^{2p} < \infty \right\}.$$

Пространства $(\mathcal{S}_p)_\rho$ определяются по аналогии с $\mathcal{S}_p$:

$$(\mathcal{S}_p)_\rho = \Big\{ \varphi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (L^2) : \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} |\varphi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty \Big\},$$

с нормами $|\cdot|_{p,\rho}$, порожденными скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_{p,\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} \varphi_\alpha \overline{\psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{2p\alpha}, \quad \big(2\mathbb{N}\big)^{p\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} (2i)^{p\alpha_i}.$$

Чтобы прояснить эту аналогию, заметим, что другой способ определить скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{p,\rho}$ при $\rho = 0$ — сделать это в терминах так называемого оператора вторичного квантования $\Gamma(\hat{D})$, который обычно определяется через отождествление пространства (L^2) с пространством Фока $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ с помощью разложения хаоса Винера—Ито (см., например, [21]). Для упрощения изложения определим его эквивалентным образом, положив для любого $\alpha \in \mathcal{T}$

$$\Gamma(\hat{D})\mathbf{h}_\alpha := \prod_{i=1}^{\infty} (2i)^{\alpha_i} h_{\alpha_i}\big(\langle \cdot, \xi_i \rangle\big).$$

Тогда

$$(\varphi, \psi)_{p,0} = \Big(\Gamma(\hat{D})^p \varphi, \Gamma(\hat{D})^p \psi \Big)_{(L^2)}.$$

Пространство $(\mathcal{S})_\rho$ определяется как $(\mathcal{S})_\rho = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_p)_\rho$ с топологией проективного предела и называется пространством основных случайных переменных.

Пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}$ определяется как $(\mathcal{S})_{-\rho} = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ с топологией индуктивного предела, где $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ — сопряженное к пространству $(\mathcal{S}_p)_\rho$. Элементы $(\mathcal{S})_{-\rho}$ называются обобщенными случайными величинами. Пространство $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ можно отождествить с гильбертовым пространством всех формальных разложений $\Phi = \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{-p,-\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \Phi_\alpha \overline{\Psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{-2p\alpha}.$$

Будем обозначать норму пространства $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ через $|\cdot|_{-p,-\rho}$. Для $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}$, $\varphi = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_\rho$ имеем:

$$\langle \Phi, \varphi\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \Phi_\alpha \overline{\varphi}_\alpha.$$

В дальнейшем важную роль играет понятие ограниченного множества в пространстве $(\mathcal{S})_\rho$.

Определение 1.1. Множество $M \subseteq (\mathcal{S})_\rho$ называется *ограниченным*, если для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subseteq M$ и любой последовательности $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, последовательность $\{\varepsilon_n\varphi_n\}$ сходится к нулю в $(\mathcal{S})_\rho$.

Нетрудно получить следующую характеристику ограниченных множеств в $(\mathcal{S})_\rho$.

Предложение 1.1. *Множество ограничено в $(\mathcal{S})_\rho$ тогда и только тогда, когда оно ограничено в любом $(\mathcal{S}_p)_\rho$, $p \in \mathbb{N}$.*

1.2. Пространства гильбертовозначных обобщенных случайных величин: $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Пусть $\mathbb{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$. Через $(L^2)(\mathbb{H})$ будем обозначать пространство всех $\mathbb{H}$-значных функций, определенных на $\mathcal{S}'$, интегрируемых с квадратом по Бохнеру по гауссовской мере μ, определенной на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$.

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Тогда семейство $\{\mathbf{h}_\alpha e_j\}_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{H}$-значных функций образует ортогональный базис пространства $(L^2)(\mathbb{H})$. Любая функция $f \in (L^2)(\mathbb{H})$ раскладывается в ряд Фурье по этому базису следующим образом:

$$f = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} f_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_\alpha \mathbf{h}_\alpha = \sum_{j=1}^\infty f_j e_j, \tag{1.12}$$

$$f_{\alpha,j}\in\mathbb{R},\ f_\alpha = \sum_j f_{\alpha,j}e_j \in \mathbb{H},\ f_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha \in (L^2),$$

при этом

$$\|f\|^2_{(L^2)(\mathbb{H})} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}, j\in\mathbb{N}} \alpha! |f_{\alpha,j}|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \|f_\alpha\|^2_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^\infty \|f_j\|^2_{(L^2)}.$$

Обозначим через $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ пространство всех линейных непрерывных операторов $\Phi : (\mathcal{S})_\rho \to \mathbb{H}$, оснащенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Будем называть эту сходимость сильной сходимостью в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ а элементы этого пространства называть $\mathbb{H}$-значными обобщенными случайными величинами над пространством основных функций (случайных величин) $(\mathcal{S})_\rho$. Действие $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ на основную случайную величину $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ будем обозначать через $\Phi[\varphi]$.

Для построения анализа $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций переменной $t \in \mathbb{R}$ сначала опишем структуру этого пространства.

Предложение 1.2. *Любой элемент $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ является ограниченным оператором из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Для любого $p \in \mathbb{N}$ выберем $\varphi_p \in (\mathcal{S}_p)_\rho$ так, что $|\varphi_p|_{p,\rho} = 1$ и $\|\Phi[\varphi_p]\| \geqslant p$. В силу неравенств $|\varphi_k|_{p,\rho} \leqslant |\varphi_k|_{k,\rho}$, которые верны для всех $k > p$, последовательность $\left\{\dfrac{\varphi_k}{k}\right\}$ сходится к нулю в пространстве $(\mathcal{S})_\rho$. В то же время, имеем $\left\|\Phi\left[\dfrac{\varphi_k}{k}\right]\right\| \geqslant 1$, что противоречит непрерывности Φ. □

Пространство основных функций $(\mathcal{S})_\rho$ является счетно-гильбертовым ядерным пространством, так как для любого $p \in \mathbb{N}$ оператор вложения $I_{p,p+1} : (\mathcal{S}_{p+1})_\rho \hookrightarrow (\mathcal{S}_p)_\rho$ является оператором Гильберта—Шмидта. Чтобы проверить это, возьмем следующий ортонормированный базис пространства $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$:

$$\left\{ \frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}} \right\}.$$

Имеем:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\left|\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}}\right|^2_{p,\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\frac{1}{(2\mathbb{N})^{2\alpha}}. \tag{1.13}$$

В [15] доказано, что $A(p):=\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}}\frac{1}{(2\mathbb{N})^{p\alpha}}$ сходится для любого $p>1$. Таким образом, ряд (1.13) сходится.

Благодаря ядерности пространства $(\mathcal{S})_\rho$ имеет место следующая характеристика обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин.

Предложение 1.3. *Любой элемент $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ является оператором Гильберта—Шмидта из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. В силу предложения 1.2 элемент Φ ограничен как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\tilde{\Phi}$ его продолжение на $(\mathcal{S}_p)_\rho$ по непрерывности. Тогда оператор Φ может быть записан в виде $\tilde{\Phi}I_{p,p+1}$ как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$ в $\mathbb{H}$, а значит, является оператором Гильберта—Шмидта как композиция оператора Гильберта—Шмидта $I_{p,p+1}$ и ограниченного оператора $\tilde{\Phi}$. □

Далее в разделе 2 для исследования топологии равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$, которую мы ввели в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, нам понадобится представление этого пространства в виде счетного объединения сепарабельных гильбертовых пространств.

Для любого $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ обозначим через Φ_j линейный функционал, определенный для $\varphi\in(\mathcal{S})_\rho$ равенством $\langle\Phi_j,\varphi\rangle:=(\Phi[\varphi],e_j)$. Пусть p таково, что Φ является оператором Гильберта—Шмидта из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$. Тогда все Φ_j, $j\in\mathbb{N}$ принадлежат одному и тому же сопряженному пространству $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ и поэтому раскладываются в ряды

$$\Phi_j=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha,\quad \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}<\infty.$$

Обозначим через $\|\Phi\|_{-p,-\rho}$ норму Гильберта—Шмидта $\Phi:(\mathcal{S}_p)_\rho\to\mathbb{H}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|\Phi\|^2_{-p,-\rho}&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\left\|\Phi\left[\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\right]\right\|^2=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle\Phi_j,\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\right\rangle\right|^2=\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}.\end{aligned} \tag{1.14}$$

Обозначим через $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ пространство операторов Гильберта—Шмидта, действующих из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$. Это сепарабельное гильбертово пространство. Операторы $\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j$, $\alpha\in\mathcal{T}$, $j\in\mathbb{N}$, определенные равенством

$$(\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j)\varphi:=\big(\mathbf{h}_\alpha,\varphi\big)_{(L^2)}e_j,\quad \varphi\in(\mathcal{S}_p)_\rho,$$

образуют в нем ортогональный базис. Из предложения 1.3 следует, что

$$(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})=\bigcup_{p\in\mathbb{N}}(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$$

и любой $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ имеет следующее разложение:

$$\Phi[\cdot]=\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle\Phi_j,\cdot\rangle e_j=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}\Phi_{\alpha,j}(\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j)=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha(\mathbf{h}_\alpha,\cdot)_{(L^2)},$$

где $\Phi_j=(\Phi[\cdot],e_j)\in(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$, $\Phi_\alpha=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\Phi_{\alpha,j}e_j\in\mathbb{H}$, при этом

$$\begin{aligned}\|\Phi\|^2_{-p,-\rho}&=\sum_{j\in\mathbb{N}}|\Phi_j|^2_{-p,-\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}=\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$(\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subseteq (\mathcal{S}_{-p_2})_{-\rho}(\mathbb{H}), \quad p_1 < p_2, \tag{1.15}$$

и

$$\|\Phi\|_{-p_1,-\rho} \geqslant \|\Phi\|_{-p_2,-\rho}, \quad \Phi \in (\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H}). \tag{1.16}$$

1.3. Основные примеры гильбертовозначных обобщенных случайных процессов. Сначала введем последовательность независимых одинаково распределенных броуновских движений на вероятностном пространстве белого шума.

Для этого возьмем некоторую биекцию $n(\cdot,\cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющую условию

$$n(i,j) \geqslant ij, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Это может быть сделано разными способами, например, с помощью следующей таблицы:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
1	1	3	6	10	15	21	28	$\dots$
2	2	5	9	14	20	27		
3	4	8	13	19	26			
4	7	12	18	25				
5	11	17	24					$n(i,j)$.
6	16	23						
7	22							
	$\dots$							

Определим последовательность линейных операторов $\mathfrak{I}_j$, $j \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, положив

$$\mathfrak{I}_j f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \xi_i)\xi_{n(i,j)}. \tag{1.18}$$

Пусть $L^2(\mathbb{R})_j$ — замыкание линейной оболочки множества $\{\xi_{n(i,j)}, i \in \mathbb{N}\}$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ оператор $\mathfrak{I}_j$ является изометрическим изоморфизмом пространств $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})_j$, так как для любых $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$(\mathfrak{I}_j f, \mathfrak{I}_j g)_{L^2(\mathbb{R})_j} = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \xi_i)(g, \xi_i) = (f, g)_0. \tag{1.19}$$

Пространства $L^2(\mathbb{R})_j$ с разными индексами j порождаются непересекающимися семействами функций ξ_i, поэтому они являются попарно ортогональными подпространствами $L^2(\mathbb{R})$. Более того, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{\xi_{n(i,j)}\}_{i=1}^{\infty}$, откуда следует

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} L^2(\mathbb{R})_j.$$

В последствии нам потребуются ортогональные проекторы π_j, $j \in \mathbb{N}$, пространства $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})_j$, определенные равенствами

$$\pi_j \xi_n = \begin{cases} \xi_n, & n \in \{n(i,j), i \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & n \notin \{n(i,j), i \in \mathbb{N}\}. \end{cases} \tag{1.20}$$

Положим $1_{[a,b]}^j := \mathfrak{I}_j 1_{[a,b]}$, где $1_{[a,b]}$ — индикатор отрезка $[a,b]$. Для любых $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ функции $1_{[a,b]}^{j_1}$ и $1_{[c,d]}^{j_2}$, где $j_1 \neq j_2$, ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим случайные процессы, определенные равенствами

$$\beta_j(t) := \langle \cdot, 1_{[0,t]}^j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

В силу (1.4) и (1.19) имеем:

$$E\left[\beta_j(t)\beta_j(s)\right] = (1^j_{[0,t]}, 1^j_{[0,s]})_0 = (1^j_{[0,t]}, 1^j_{[0,s]})_{L^2(\mathbb{R})_j} = (1_{[0,t]}, 1_{[0,s]})_0 = \min\{t; s\},$$

кроме того,

$$E\left[\beta_{j_1}(t)\beta_{j_2}(s)\right] = (1^{j_1}_{[0,t]}, 1^{j_2}_{[0,s]})_0 = 0$$

при $j_1 \neq j_2$. Отсюда следует, что $\{\beta_j(t)\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность независимых броуновских движений.

Для них имеют место разложения

$$\beta_j(t) = \left\langle \cdot, \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s)\, ds\, \xi_{n(i,j)} \right\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s)\, ds\, \langle \cdot, \xi_{n(i,j)} \rangle = $$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \xi_i(s)\, ds\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}},$$

где $\varepsilon_n := (0, 0, \ldots, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$.

Случайный процесс, определенный формальным рядом

$$W(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j(t) e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}(t) := \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds\, e_{j(n)} \in \mathbb{H}, \tag{1.22}$$

где $i(n)$, $j(n) \in \mathbb{N}$ таковы, что $n(i(n), j(n)) = n$, и $t \in \mathbb{R}$, называется цилиндрическим винеровским процессом.

Пусть $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ — положительный оператор[1], определенный следующим разложением[2]:

$$Q = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 (e_j \otimes e_j). \tag{1.23}$$

Конечность следа Q означает $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \sigma_j^2 < \infty$.

Случайный процесс, определенный равенством

$$W_Q(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_j \beta_j(t) e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} W^Q_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad W^Q_{\varepsilon_n}(t) := \sigma_j \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds\, e_{j(n)} \in \mathbb{H},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

называется Q-винеровским процессом.

Легко проверить, что $W_Q(t) \in (L^2)(\mathbb{H})$, но $W(t) \notin (L^2)(\mathbb{H})$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В то же время, для любого $x \in \mathbb{H}$ имеем:

$$E\big(W(t), x\big)^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} (e_j, x)^2 E\big[\beta_j^2(t)\big] = t\|x\|^2.$$

Таким образом, $\big(W(t), x\big) \in L^2(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$. Из оценки (1.7) и условия (1.17), следует, что

$$\|W(t)\|^2_{-1,-\rho} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \int_0^t \xi_i(s)\, ds \right|^2 \big(2n(i,j)\big)^{-2} \leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{N}} O\left(i^{-\frac{3}{2}-2} j^{-2}\right) < \infty.$$

Поэтому $W(t) \in (\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для любого $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Определим $\mathbb{H}$-значный Q-белый шум равенством

$$\mathbb{W}_Q(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}^Q_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathbb{W}^Q_{\varepsilon_n}(t) = \sigma_j \xi_{i(n)}(t)\, e_{j(n)} \in \mathbb{H},$$

---

[1] Через $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ обозначаем пространство операторов с конечным следом, действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

[2] Для $v \in V$, $u \in U$, где V и U — гильбертовы пространства, обозначим через $v \otimes u$ оператор, действующий из U в V, определенный равенством $(v \otimes u)h := v(u, h)_U$.

полученным формальным дифференцированием равенства (1.24), и цилиндрический белый шум — равенством

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t)\, e_{j(n)} \in \mathbb{H}, \tag{1.25}$$

полученным формальным дифференцированием равенства (1.22). В силу оценки (1.8) имеем $\|\mathbb{W}_Q(t)\|^2_{-1,-\rho} < \infty$, и $\|\mathbb{W}(t)\|^2_{-1,-\rho} < \infty$. Таким образом, и Q-белый шум и цилиндрический белый шум принадлежат $(\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\rho \in [0;1]$.

В следующем разделе мы определим дифференцирование и интегрирование по переменной $t \in \mathbb{R}$ для $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций и покажем, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt} W_Q(t) = \mathbb{W}_Q(t) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} W(t) = \mathbb{W}(t).$$

2. Анализ $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций

Чтобы ввести дифференцирование и интегрирование $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций переменной $t \in \mathbb{R}$, сначала опишем более детально топологию в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, определенную как топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Для этого нам понадобится понятие ограниченности множества в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, которое определяется так же, как и в $(\mathcal{S})_\rho$.

Определение 2.1. Множество $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ называется *ограниченным*, если для любых последовательностей $\{\Phi_n\} \subseteq \mathcal{M}$ и $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$ сходимость $\varepsilon_n \to 0$ влечет за собой сходимость $\{\varepsilon_n \Phi_n\}$ к нулю в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Следующее предложение дает характеристику ограниченных множеств в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Предложение 2.1. *Множество $\mathcal{M}$ ограничено в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда для любого ограниченного множества $M \subset (\mathcal{S})_\rho$*

$$\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$$

является ограниченным множеством в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Чтобы доказать необходимость условия, возьмем некоторое ограниченное подмножество $\mathcal{M}$ пространства $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Предположим, существует ограниченное $M \subset (\mathcal{S})_\rho$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $\varphi_n \in M$ и $\Phi_n \in \mathcal{M}$, для которых $\|\Phi_n[\varphi_n]\| > n$. Тогда $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{n}\Phi_n[\varphi_k]\right\| \geqslant \left\|\frac{1}{n}\Phi_n[\varphi_n]\right\| > 1$ и, следовательно, $\left\{\frac{1}{n}\Phi_n\right\}$ не сходится к нулю равномерно на ограниченном множестве $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq M$. Таким образом, $\left\{\frac{1}{n}\Phi_n\right\}$ не сходится к нулю в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Достаточность условия очевидна. □

Предложение 2.2. *Множество $\mathcal{M} \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ ограничено тогда и только тогда, когда существуют такие $p \in \mathbb{N}$ и $K > 0$, что для любого $\Phi \in \mathcal{M}$ неравенство $\|\Phi[\varphi]\| \leqslant K|\varphi|_{p,\rho}$ выполняется для всех $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость этого условия. Предположим, что для любого $p \in \mathbb{N}$ существуют $\Phi_p \in \mathcal{M}$ и $\varphi_p \in M$ такие, что $\|\Phi_p[\varphi_p]\| > p|\varphi_p|_{p,\rho}$. Обозначим

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}.$$

Множество $M = \{\psi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $(\mathcal{S})_\rho$, так как для любого $p \in \mathbb{N}$ выполнено $|\psi_n|_{p,\rho} = \dfrac{|\varphi_n|_{p,\rho}}{|\varphi_n|_{n,\rho}} \leqslant 1$ при $n > p$. В силу предложения 2.1 множество $\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$ ограничено в $\mathbb{H}$, что противоречит неравенству $\|\Phi\,[\psi_n]\| > n$.

Для доказательства достаточности возьмем p и $K > 0$ так, что для любых $\Phi \in \mathcal{M}$ и $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ выполнено

$$\|\Phi[\varphi]\| \leqslant K|\varphi|_{p,\rho}. \tag{2.1}$$

Возьмем ограниченное множество $M \subset (\mathcal{S})_\rho$. Поскольку в силу предложения 1.1 оно ограничено в любом $(\mathcal{S}_p)_\rho$, из (2.1) следует, что множество $\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$ ограничено в $\mathbb{H}$. Доказательство завершается применением предложения 2.1. □

Отсюда следует:

Предложение 2.3. *Множество $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \subset (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. В силу предложения 2.2 любой $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничен как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, при этом

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathbb{H})} \leqslant K$$

для некоторого $K > 0$. Обозначая через $\tilde{\Phi}$ продолжение Φ по непрерывности на $(\mathcal{S}_p)_\rho$ и взяв произвольный ортонормированный базис $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$ в $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$, получаем

$$\|\Phi\|^2_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;\mathbb{H}\right)} = \|\tilde{\Phi} I_{p,p+1}\|^2_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;\mathbb{H}\right)} = \sum_{i=1}^\infty \left\|\tilde{\Phi} I_{p,p+1}\zeta_i\right\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant$$
$$\leqslant K^2 \sum_{i=1}^\infty \|I_{p,p+1}\zeta_i\|^2_{\mathbb{H}} = K^2 \|I_{p,p+1}\|_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;(\mathcal{S}_p)_\rho\right)}.$$

Обратное очевидно. □

Следующее предложение дает характеристику сильной сходимости в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Предложение 2.4. *Пусть $\Phi_n = \sum\limits_\alpha \Phi^{(n)}_\alpha \mathbf{h}_\alpha, \Psi = \sum\limits_\alpha \Psi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *$\{\Phi_n\}$ сходится к Ψ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*
2. *Для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\| = 0$, вся $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\{\Phi_n\}$ ограничена в этом пространстве.*
3. *Все элементы последовательности $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Psi\|_{-p,-\rho} = 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\{\Phi_n\}$ сходится к Ψ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ имеем

$$\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\| = \frac{1}{\alpha!}\|\Phi^{(n)}[\mathbf{h}_\alpha] - \Psi[\mathbf{h}_\alpha]\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В силу предложения 1.3, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Для любого ограниченного множества $M \subset (\mathcal{S})_\rho$ при достаточно больших n для всех $\varphi \in M$ выполнено неравенство $\|\Phi_n[\varphi] - \Psi[\varphi]\| < 1$, следовательно,

$$\|\Phi_n[\varphi]\| \leqslant 1 + \|\Psi\|_{-p,-\rho}|\varphi|_{p,\rho} \leqslant 1 + \|\Psi\|_{-p,-\rho}K_p,$$

где $K_p = \sup\limits_{\varphi\in M} |\varphi|_{p,\rho}$. В силу предложения 2.1 последовательность $\{\Phi_n\}$ ограничена в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Из предложения 2.3 следует, что последовательность принадлежит некоторому $(\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и ограничена в нем.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\{\Phi_n\}$ и Ψ удовлетворяют условию 2. В силу (1.15) и (1.16) можно считать, что существует такое q, что для всех $p > q$ последовательность $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и $\{\Phi_n\}$ ограничена по норме каждого из этих пространств некоторым $K > 0$.

Пусть $\operatorname{Index}\alpha := \max\{n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq 0\}$. Верна следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_n - \Psi\|^2_{-(p+1),-\rho} = \\
&= \sum_{\operatorname{Index}\alpha\leqslant k} (\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} + \sum_{\operatorname{Index}\alpha> k} (\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} \leqslant \\
&\leqslant \max_{\operatorname{Index}\alpha\leqslant k}\Big[(\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\|^2\Big] \sum_{\operatorname{Index}\alpha\leqslant k} (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} + \\
&\qquad + \sum_{\operatorname{Index}\alpha> k}\Big[(\alpha!)^{1-\rho}\big(2\|\Phi^{(n)}_\alpha\|^2 + 2\|\Psi_\alpha\|^2\big)(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}\Big](2\mathbb{N})^{-2\alpha} \leqslant \\
&\leqslant \max_{\operatorname{Index}\alpha\leqslant k}\Big[(\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\|^2\Big] A(2p+1) + 4K^2 \sum_{\operatorname{Index}\alpha> k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ сначала выберем k так, что

$$\sum_{\operatorname{Index}\alpha> k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha} < \frac{\varepsilon}{8K^2}.$$

Затем выберем N так, что для всех $n > N$ выполнено

$$\max_{\operatorname{Index}\alpha\leqslant k}\Big[(\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi^{(n)}_\alpha - \Psi_\alpha\|^2\Big] < \frac{\varepsilon}{2A(2p+2)}.$$

Тогда $\|\Phi_n - \Psi\|^2_{-(p+1),-\rho} < \varepsilon$ для всех $n > N$.

$3 \Rightarrow 1$. Очевидно. □

Будем понимать предел функции $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ в точке $t_0 \in \mathbb{R}$ в смысле сильной сходимости в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Производная будет определена как обычно, с пределом, понимаемым в вышеописанном смысле.

Следующее следствие вытекает из предложения 2.4.

Следствие 2.1. *Пусть* $t_0 \in (a, b)$, $\Phi(t) = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$. *Пусть* $\Psi = \sum\limits_\alpha \Psi_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, *тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. $\lim\limits_{t\to t_0} \Phi(t) = \Psi$ *в пространстве* $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.
2. $\lim\limits_{t\to t_0} \|\Phi_\alpha(t) - \Psi_\alpha\| = 0$ *для любого* $\alpha \in \mathcal{T}$ *и существуют* $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $M > 0$ *такие, что* $\|\Phi(t)\|_{-p,-\rho} \leqslant M$ *для всех* $t \in (a; b)$, *удовлетворяющих* $0 < |t - t_0| < \delta$, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.
3. *Существуют* $\delta > 0, p \in \mathbb{N}$ *такие, что* $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a; b)$, *таких, что* $0 < |t - t_0| < \delta$, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *и* $\lim\limits_{t\to t_0} \|\Phi(t) - \Psi\|_{-p,-\rho} = 0$.

Доказательство целиком повторяет шаги доказательства предложения 2.4, поэтому мы его опускаем. Применяя следствие 2.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть* $t_0 \in (a, b)$, $\Phi(t) = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a, b) \setminus \{t_0\}$.

1. $\Phi(t)$ *дифференцируема в точке* t_0, *при этом* $\dfrac{d}{dt}\Phi(t_0) = \Psi$.
2. *Для любого* $\alpha \in \mathcal{T}$ *функция* $\Phi_\alpha : (a; b) \to \mathbb{H}$ *дифференцируема в точке* t_0, $\Psi := \sum\limits_\alpha \Phi'_\alpha(t_0)\mathbf{h}_\alpha$ *принадлежит* $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *и существуют* $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $M > 0$ *такие, что*
$$\left\|\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0}\right\|_{-p,-\rho} \leqslant M \quad \textit{для всех} \quad t \in (a; b) \quad \textit{таких, что} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$
3. $\dfrac{d\Phi}{dt} := \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0}$ *существует в пространстве* $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для некоторого* p.

Используя это следствие, можно доказать, что цилиндрический винеровский процесс $W(t)$, определенный равенством (1.22), дифференцируем всюду в $\mathbb{R}$ и его производная совпадает с белым шумом $\mathbb{W}(t)$, определенным равенством (1.25). Это действительно так, поскольку для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\dfrac{dW_{\varepsilon_n}}{dt}(t_0) = \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t_0)$. Более того, используя оценку (1.9), получаем

$$\left\|\frac{W(t)-W(t_0)}{t-t_0}\right\|_{-p,-\rho} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left\|\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} \xi_i(\tau)\,d\tau e_j\right\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i(t)|\right)^2 (2n(i,j))^{-2p} \leqslant K \sum_{i,j\in\mathbb{N}} i^{-2p-\frac{1}{6}} j^{-2p} < \infty$$

для любого $p \geqslant 1$, что показывает, что условие 2 следствия 2.2 выполнено.

Похожим образом, используя оценку (1.9) и известное свойство функций Эрмита

$$\xi_1'(t) = \xi_2(t), \quad \xi_i'(t) = \sqrt{\frac{i}{2}}\xi_{i-1}(t) + \sqrt{\frac{i+1}{2}}\xi_{i+1}(t),\ i = 2,3,\ldots,$$

из которых следует оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i^{(n)}(t)| = O(i^{-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}}),$$

можно показать, что $\mathbb{W}(t)$ бесконечно дифференцируема как $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значная функция.

Будем называть функцию $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ интегрируемой на измеримом множестве $C \subset \mathbb{R}$, если существует такое $p \in \mathbb{N}$, что $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для всех $t \in C$ и Φ интегрируема по Бохнеру на C как функция со значениями в гильбертовом пространстве $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Из равенства (1.14), выражающего норму $\|\cdot\|_{-p,-\rho}$, следует, что для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ имеем оценку

$$\|\Phi_\alpha\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{(2\mathbb{N})^{2p\alpha}}{(\alpha!)^{1-\rho}} \|\Phi\|^2_{-p,-\rho},$$

из которой следует, что если $\Phi(t) = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha$ интегрируема на C, то для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ функция $\Phi_\alpha(t)$ интегрируема по Бохнеру на C как $\mathbb{H}$-значная функция. Более того, имеет место следующее достаточное условие интегрируемости.

Предложение 2.5. *Пусть функция* $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *задана разложением*

$$\Phi(t) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha.$$

Если для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ *функции* $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *интегрируемы с квадратом по Бохнеру на множестве* $C \subset \mathbb{R}$ *с мерой Лебега* $\mu_L(C) < \infty$, $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in C$ *и*

$$\sum_\alpha (\alpha!)^{1-\rho} \int_C \|\Phi_\alpha(t)\|^2_{\mathbb{H}} dt \big(2\mathbb{N}\big)^{-2q\alpha} < \infty \tag{2.2}$$

для некоторого $q \in \mathbb{N}$, *тогда* $\Phi(t)$ *интегрируема на* C *и*

$$\int_C \Phi(t)\,dt = \sum_\alpha \int_C \Phi_\alpha(t)\,dt\,\mathbf{h}_\alpha. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\{\alpha^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ — фиксированное упорядочение множества мультииндексов $\mathcal{T}$. Пусть оно таково, что $\lim\limits_{k\to\infty} |\alpha^{(k)}| = \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Index}\alpha^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} \max\{n \in \mathbb{N}, \alpha_n^{(k)} \neq 0\} = \infty$. Поскольку $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$, последовательность

$$F_n(t) := \sum_{k=1}^n \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$$

сходится к $\Phi(t)$ в этом пространстве для любого $t \in C$. Из равенства

$$\|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}\|_{-p,-\rho} = (\alpha!)^{\frac{1-\rho}{2}} \|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|_{\mathbb{H}} (2\mathbb{N})^{-p\alpha}$$

следует, что любая $\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$, $k \in \mathbb{N}$, и, следовательно, все $F_n(t)$ интегрируемы по Бохнеру как $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значные функции для всех $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Таким образом, имеем $\int\limits_C \|F_n(t)\|_{-p,-\rho}dt < \infty$ для любого $p \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Легко также видеть, что

$$\int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}dt = \int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)dt\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$$

(заметим, что левая часть — интеграл Бохнера $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значной функции, а интеграл в правой части — интеграл Бохнера $\mathbb{H}$-значной функции). Таким образом,

$$\int\limits_C F_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\,dt\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}. \tag{2.4}$$

Используя условие (2.2), получаем

$$\int\limits_C \|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt \leqslant \sqrt{\mu_L(C)}\left(\int\limits_C \|F_n(t)\|^2_{-q,-\rho}dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{\mu_L(C)}\left(\sum_{k=1}^n \big((\alpha^{(k)})!\big)^{1-\rho}\int\limits_C \|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|^2_{\mathbb{H}}dt(2\mathbb{N})^{-2q\alpha^{(k)}}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\mu_L(C)}\left(\sum_{k=1}^\infty \big((\alpha^{(k)})!\big)^{1-\rho}\int\limits_C \|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|^2_{\mathbb{H}}dt(2\mathbb{N})^{-2q\alpha^{(k)}}\right)^{\frac{1}{2}} =: M.$$

Отсюда следует, что так как $\|F_n(t)\|_{-q,-\rho} \to \|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}$ при $t \in C$, то по теореме Фату $\int\limits_C \|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt < \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C \|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt = \int\limits_C \|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt.$$

Поэтому $\Phi(t)$ интегрируема по Бохнеру на C как $(\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значная функция.

Мы также получаем $\int\limits_C \|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt < M$ и

$$\int\limits_C \|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt \leqslant \int\limits_C \|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt + \int\limits_C \|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt \leqslant 2M.$$

Так как $\|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho} \to 0$, то по теореме Фату получаем $\int\limits_C \|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt \to 0$, а в силу того, что

$$\left\|\int\limits_C F_n(t)\,dt - \int\limits_C \Phi(t)\,dt\right\|_{-q,-\rho} \leqslant \int\limits_C \|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt,$$

в конце концов, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_C F_n(t)\,dt = \int\limits_C \Phi(t)\,dt$ в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$, так что равенство (2.3) следует из (2.4). □

3. S-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим функцию, определенную на $\mathcal{S}'$ равенством $\mathcal{E}_\theta(\cdot) := e^{\langle\cdot,\theta\rangle-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}$. Ее называют экспоненциальной функцией, ассоциированной с θ, или ренормализованной экспонентой. Она играет важную роль в анализе белого шума, в частности, она используется в определении S-преобразования.

Для $\mathcal{E}_\theta$ имеет место следующее разложение в ряд по стохастическим полиномам Эрмита:

$$\mathcal{E}_\theta = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_{\alpha,\theta}\mathbf{h}_\alpha, \quad \mathcal{E}_{\alpha,\theta} = \frac{1}{\alpha!}\prod_{i=1}^{\infty}(\theta,\xi_i)_0^{\alpha_i}. \tag{3.1}$$

Это можно увидеть из следующего непосредственного вычисления. Возьмем $\theta \in \mathcal{S}$ и стохастический полином Эрмита $\mathbf{h}_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}\big(\langle\cdot,\xi_i\rangle\big)$. Обозначая $\theta^\perp := \theta - \sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0\xi_i$, получим разложение θ в конечную сумму попарно ортогональных слагаемых:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0\xi_i + \theta^\perp.$$

Поскольку

$$\mathcal{E}_{\alpha,\theta} = \frac{1}{\alpha!}\big(\mathcal{E}_\theta,\mathbf{h}_\alpha\big)_{(L^2)} = \frac{1}{\alpha!}E\left[\mathcal{E}_\theta\mathbf{h}_\alpha\right] = \frac{1}{\alpha!}\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{\langle\omega,\theta\rangle-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}\mathbf{h}_\alpha(\omega)\,d\mu(\omega) =$$
$$= \frac{1}{\alpha!}\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\omega,\xi_i\rangle(\theta,\xi_i)_0+\langle\omega,\theta^\perp\rangle-\frac{1}{2}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0^2+|\theta^\perp|_0^2\Big)}\prod_{i=1}^{n}h_{\alpha_i}\big(\langle\omega,\xi_i\rangle\big)d\mu(\omega),$$

можем применить формулу (1.3), где

$$f(x_1,\ldots,x_{n+1}) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\theta,\xi_i)_0+x_{n+1}-\frac{1}{2}\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0^2+|\theta^\perp|_0^2\Big)}\prod_{i=1}^{n}h_{\alpha_i}(x_i).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\alpha,\theta} = E\Big[f\big(\langle\cdot,\xi_1\rangle,\ldots,\langle\cdot,\xi_n\rangle,\langle\cdot,\theta^\perp\rangle\big)\Big] =$$
$$= \frac{1}{\alpha!(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}|\theta^\perp|_0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x_1,\ldots,x_{n+1})e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{x_{n+1}^2}{|\theta^\perp|_0^2}}dx_1\ldots dx_{n+1} =$$
$$= \frac{1}{\alpha!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{x_i(\theta,\xi_i)_0-\frac{1}{2}(\theta,\xi_i)_0^2}h_{\alpha_i}(x_i)e^{-\frac{1}{2}x_i^2}dx_i \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}|\theta^\perp|_0}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{x-\frac{1}{2}|\theta^\perp|_0^2-\frac{1}{2}\frac{x^2}{|\theta^\perp|_0^2}}dx.$$

Вспоминая, что для производящей функции полиномов Эрмита

$$\psi(x,t) := e^{xt-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}h_n(x)$$

имеет место равенство

$$\big(\psi(\cdot,t),h_n\big)_{L^2\left(\mathbb{R};\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{xt-\frac{t^2}{2}}h_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = t^n, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

получаем (3.1).

Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ экспоненциальная функция $\mathcal{E}_\theta$ принадлежит $(\mathcal{S})_\rho$ при любом $0 \leqslant \rho < 1$ со следующей оценкой для любого $p \in \mathbb{N}$:

$$|\mathcal{E}_\theta|_{p,\rho} \leqslant 2^{\rho/2}\exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right] \tag{3.2}$$

(см., например, [21]).

Это позволяет определить S-преобразование элемента $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \leqslant \rho < 1$ равенством

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) := \Phi[\mathcal{E}_\theta], \quad \theta \in \mathcal{S}. \tag{3.3}$$

S-преобразование элемента $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ — это $\mathbb{H}$-значная функция от $\theta \in \mathcal{S}$. Заметим, что если $\Phi \in (L^2)(\mathbb{H})$, то для всех $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = \int\limits_{\mathcal{S}'} \Phi(\omega)\mathcal{E}_\theta(\omega)\, d\mu(\omega) = E(\Phi\mathcal{E}_\theta). \tag{3.4}$$

Очень важным свойством экспоненциальных функций $\mathcal{E}_\theta, \theta \in \mathcal{S}$ является то, что они образуют линейно плотное подмножество в $(\mathcal{S})_\rho$ $(0 \leqslant \rho < 1)$ и, таким образом, в (L^2) и в каждом $(\mathcal{S}_p)_\rho$. Отсюда следует, что выполнение равенства $(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathcal{S}$ влечет за собой $\Phi = 0$. Таким образом, каждый элемент пространства $(\mathcal{S})_{-\rho}, (0 \leqslant \rho < 1)$ единственным образом определяется своим S-преобразованием.

Поскольку любой $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ принадлежит $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, из оценки (3.2) следует, что для любого $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|(\mathrm{S}\Phi)(\theta)\| = \|\Phi[\mathcal{E}_\theta]\| \leqslant \|\Phi\|_{-p,-\rho}\|\mathcal{E}_\theta\|_{p,\rho} \leqslant 2^{\rho/2}\|\Phi\|_{-p,-\rho} \exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right]. \tag{3.5}$$

Оказывается, оценка такого типа является достаточным условием для $\mathbb{H}$-значной функции, действующей из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{H}$, чтобы быть S-преобразованием обобщенной $\mathbb{H}$-значной случайной величины, а именно, справедлива следующая характеристическая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \leqslant \rho < 1$. Тогда функция $F = \mathrm{S}\Phi$ удовлетворяет условиям*:

1. *для любого $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ функция $F(\theta + z\eta)$ является целой аналитической функцией от $z \in \mathbb{C}$;*
2. *существуют $K > 0, a > 0$, $p \in \mathbb{N}$, такие, что*

$$\|F(\theta)\| \leqslant K \exp\left[a|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right], \quad \theta \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

Если функция $F : \mathcal{S} \to \mathbb{H}$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то существует единственная $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ такая, что $F = \mathrm{S}\Phi$ для любого q, при котором $e^2\left(\dfrac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)} < 1$, и верно неравенство:

$$\|\Phi\|_{-q,-\rho} \leqslant K\left(1 - e^2\left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2}. \tag{3.7}$$

Мы опускаем доказательство, так как оно почти полностью повторяет доказательство в $\mathbb{R}$-значном случае (см., например, [21]).

Пример. Рассмотрим S-преобразования Q-белого шума и цилиндрического белого шума. Имеем:

$$\left[\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(t)\right](\theta) = \mathbb{W}_Q(t)\left[\mathcal{E}_\theta\right] = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)\sigma_j e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_j e_j[\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta](t), \tag{3.8}$$

и, аналогично,

$$\left[\mathrm{S}\mathbb{W}(t)\right](\theta) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j[\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta](t). \tag{3.9}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\left\|\left[\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(\cdot)\right](\theta)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j^2\left|(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0\right|^2$$

и, так как функции $\xi_i(t)e_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$,

$$\left\|\left[\mathrm{S}\mathbb{W}(\cdot)\right](\theta)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left|(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0\right|^2 = |\theta|_0^2.$$

4. Произведение Уика обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовых пространствах

Пусть H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$ операторов Гильберта—Шмидта, действующих из $\mathbb{H}$ в H является сепарабельным гильбертовым пространством, поэтому можем ввести пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$ $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$-значных обобщенных случайных величин над пространством основных функций $(\mathcal{S})_\rho$ так же, как это сделано в пункте 1.2. Рассмотрим $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Их S-преобразования удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 3.1. Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ имеем: $\mathrm{S}\Psi(\theta) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$, $\mathrm{S}\Phi(\theta) \in \mathbb{H}$, поэтому значения функции $F(\theta) := \mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta)$ принадлежат H, и для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ функция $F(\theta + z\eta)$ переменной $z \in \mathbb{C}$ является целой аналитической. Имеем неравенство

$$\|\mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta)\|_H \leqslant \|\mathrm{S}\Psi(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)}\|\mathrm{S}\Phi(\theta)\|_{\mathbb{H}} \leqslant K_1K_2\exp\left[(a_1+a_2)|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right],$$

где K_1, K_2, a_1, a_2 — константы из условия 2 теоремы 3.1, которое выполнено для Ψ и Φ соответственно (очевидно, можно считать эти условия выполненными с одним и тем же p). Таким образом, F является S-преобразованием некоторой обобщенной случайной величины $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$. Это обосновывает следующее определение.

Определение 4.1. Пусть $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ $(0 \leqslant \rho < 1)$. Обобщенная случайная величина $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ такая, что

$$\mathrm{S}\Theta = \mathrm{S}\Psi\mathrm{S}\Phi,$$

называется *произведением Уика* Ψ и Φ и обозначается через $\Psi \diamond \Phi$.

Следующие равенства следуют из разложения (3.1):

$$\mathrm{S}\Psi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Psi_\alpha\prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\alpha_i}, \quad \mathrm{S}\Phi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\alpha_i},$$

где $\Psi_\alpha \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$, $\Phi_\alpha \in \mathbb{H}$. Отсюда следует

$$\mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta) = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\Psi_\alpha\Phi_\beta\right)\prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\gamma_i}.$$

В силу единственности S-преобразования получаем

$$\Psi \diamond \Phi = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}}\left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma}\Psi_\alpha\Phi_\beta\right)\mathbf{h}_\gamma.$$

5. Интеграл Хицуды—Скорохода

5.1. Определения и основные свойства. Пусть $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ — положительный оператор, определенный равенством (1.23), где $\{e_j\}$ — фиксированный выше ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Обозначим через $\mathbb{H}_Q$ пространство $Q^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H})$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathbb{H}_Q} = (Q^{-\frac{1}{2}}u, Q^{-\frac{1}{2}}v)_{\mathbb{H}}$.

Предложение 5.1. *При любом $t \in \mathbb{R}$ выполнено $\mathbb{W}_Q(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$ для любого $\rho \in [0; 1)$ и положительного $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ вида* (1.23). *Если, кроме того, выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^{-2}j^{-2p} < \infty \quad \textit{для некоторого } p \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

то $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из оценки

$$\|\mathbb{W}^Q_{\varepsilon_{n(i,j)}}\|^2_{\mathbb{H}_Q}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} = |\xi_i(t)|^2\big(2n(i,j)\big)^{-2p} \leqslant \frac{|\xi_i(t)|^2}{\big(2ij\big)^{2p}} = O\big(i^{-2p-\frac{1}{2}}j^{-2p}\big).$$

Второе утверждение следует из оценки

$$\|\mathbb{W}_{\varepsilon_{n(i,j)}}\|^2_{\mathbb{H}_Q}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} = |\xi_i(t)|^2\sigma_j^{-2}\big(2n(i,j)\big)^{-2p} \leqslant \frac{|\xi_i(t)|^2}{\sigma_j^2\big(2ij\big)^{2p}} = O\big(\sigma_j^{-2}i^{-2p-\frac{1}{2}}j^{-2p}\big).$$

□

Пусть опять H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathbb{H}$ в H. Поскольку оно не является сепарабельным гильбертовым пространством, нельзя определить пространство $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значных обобщенных случайных величин так же, как выше было определено пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\big)$. Несмотря на это, введем понятие обобщенной операторнозначной случайной величины с помощью следующего определения.

Определение 5.1. Линейный непрерывный оператор $\Phi : (\mathcal{S})_\rho \to \mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ называется *обобщенной $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значной случайной величиной.*

Предложение 5.2. *Любая обобщенная $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значная случайная величина Φ принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)\big)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что рассуждениями, аналогичными тем, что были проделаны при доказательстве предложения 1.2, можно показать, что любая обобщенная $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значная случайная величина Φ принадлежит $\mathcal{L}\big((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathcal{L}(\mathbb{H};H)\big)$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$, и, таким образом, мы имеем

$$\|\Phi[\varphi]\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} \leqslant \|\Phi\|_{\mathcal{L}\big((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathcal{L}(\mathbb{H};H)\big)}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2}\,\|\varphi\|_{p,\rho},\quad \varphi\in(\mathcal{S})_\rho.$$

Отсюда следует, что Φ — непрерывный оператор из $(\mathcal{S})_\rho$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)$. □

Из предложений 5.1 и 5.2 следует, что для любого обобщенного $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значного случайного процесса $\Phi(t)$ произведение Уика $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)$ определено для всех t и принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, так как $\Phi(t)$ можно считать $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;\mathbb{H})\big)$-значным процессом. Взяв оператор Q, удовлетворяющий условию (5.1) и рассматривая $\Phi(t)$ как $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;\mathbb{H})\big)$-значный процесс, получим, что произведение Уика $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)$ также определено и принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Это обосновывает следующее определение.

Определение 5.2. Будем называть обобщенный $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значный случайный процесс $\Phi(t)$ *интегрируемым по Хицуде—Скороходу* по Q-белому шуму $\mathbb{W}_Q(t)$ (или цилиндрическому белому шуму $\mathbb{W}(t)$ на $[0;T]$), если $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)$ (или $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)$, соответственно) интегрируемо на $[0;T]$ как $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значная функция. В таком случае будем называть интегралы

$$\int_0^T \Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\,dt$$

интегралами Хицуды—Скорохода от $\Phi(t)$.

5.2. Связь интеграла Хицуды—Скорохода и интеграла Ито. В этом разделе мы установим связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды—Скорохода, а именно, покажем, что последний является обобщением интеграла Ито по винеровскому процессу. Для простоты рассмотрим случай Q-винеровского процесса и соответствующего Q-белого шума. Доказательство, которое мы представляем, использует идеи [6], где эта связь доказана в одномерном случае. Мы обобщаем их на бесконечномерный случай.

Пусть $\{\mathcal{B}_t, t\geqslant 0\}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $(W_Q(s),x)_{\mathbb{H}}$, где $0\leqslant s\leqslant t$, $x\in\mathbb{H}$. Семейство $\{\mathcal{B}_t\}$ называется *фильтрацией*, порожденной Q-винеровским процессом $W_Q(t)$, $t\geqslant 0$. Легко видеть, что $\{\mathcal{B}_t, t\geqslant 0\}$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными величинами вида

$$(W(s),x)_{\mathbb{H}} := \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j(t)(e_j,x)_{\mathbb{H}},\quad 0\leqslant s\leqslant t,\quad x\in\mathbb{H}.$$

Здесь скалярное произведение в левой части не определено, так как $W(s)$ не принадлежит H почти наверное. Несмотря на это, ряд в правой части сходится в (L^2), так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} E\left[\beta_j(t)(e_j,x)_{\mathbb{H}}\right]^2 = t\sum_{j=1}^{\infty}(e_j,x)_{\mathbb{H}}^2 < \infty.$$

Заметим, что броуновские движения $\beta_j(t)$ ($j\in\mathbb{N}$, $t\geqslant 0$) являются мартингалами относительно $\mathcal{B}_t$.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. $\mathcal{H}$-значный случайный процесс $\Phi(t), t\geqslant 0$ называется *$\mathcal{B}_t$-адаптированным*, если $\Phi(t)$ $\mathcal{B}_t$-измерима для каждого $t\geqslant 0$.

Мы будем далее рассматривать интегралы Ито по определенному выше $\mathbb{H}$-значному Q-винеровскому процессу. Они определены для предсказуемых подынтегральных функций $\Phi(t)$, $t\in[0;T]$, со значениями в $\mathcal{H}=\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)$. Напомним, что $\mathcal{H}$-значный процесс называется *предсказуемым*, если он измерим как отображение из $\big([0;T]\times\mathcal{S}',\mathcal{P}_T\big)$ в $\big(\mathcal{H},\mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$, где $\mathcal{P}_T$ — предсказуемая σ-алгебра подмножеств $[0;T]\times\mathcal{S}'$. Последняя определяется как σ-алгебра, порожденная множествами вида

$$(s;t]\times B,\quad 0\leqslant s<t\leqslant T,\quad B\in\mathcal{B}_s.$$

Нам понадобится несколько лемм, которые характеризуют $\mathcal{B}_t$-измеримые случайные величины в терминах их S-преобразований. Они используют операторы $\mathfrak{J}_j$, $j\in\mathbb{N}$, определенные равенствами (1.18), являющиеся изометрическими изоморфизмами $L^2(\mathbb{R})$ и пространств $L^2(\mathbb{R})_j$, и ортогональные проекторы π_j, $j\in\mathbb{N}$, пространства $L^2(\mathbb{R})$ на пространства $L^2(\mathbb{R})_j$, определенные равенствами (1.20).

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Для любого $\Theta,\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ равенство $\Theta=E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)$ верно тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{S}\Theta(\theta)=\mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty}\theta_{t,j}\right) \tag{5.2}$$

для любого $\theta\in\mathcal{S}$, где $\theta_{t,j}:=\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]}\big)$.

Доказательство. Пусть $\theta_{t,j}^{\perp}=\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)$, $j\in\mathbb{N}$, для $\theta\in\mathcal{S}$. Имеем

$$\pi_j\theta=\mathfrak{J}_j\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta=\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]}+\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)=\theta_{t,j}+\theta_{t,j}^{\perp},$$

кроме того, функции $\theta_{t,j}$ и $\theta_{t,j}^{\perp}$ ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\theta_{t,j},\theta_{t,j}^{\perp})_0=\Big(\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]}\big),\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)\Big)_{L_2(\mathbb{R})}=\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]},\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})}=0.$$

Так как для любых ортогональных в $L^2(\mathbb{R})$ функций θ и η

$$\mathcal{E}_{\theta+\eta}=e^{\langle\cdot,\theta+\eta\rangle-\frac{1}{2}\|\theta+\eta\|_0^2}=e^{\langle\cdot,\theta\rangle-\frac{1}{2}\|\theta\|_0^2}e^{\langle\cdot,\eta\rangle-\frac{1}{2}\|\eta\|_0^2}e^{(\theta,\eta)_0}=\mathcal{E}_\theta\mathcal{E}_\eta, \tag{5.3}$$

отсюда следует, что

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(\Theta\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\pi_j\theta}\right)=E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\pi_j\theta}\right)=E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}+\theta_{t,j}^{\perp}}\right).$$

Снова используя свойство (5.3), получаем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}\right).$$

Заметим, что для любого $s\in[0;t]$

$$E\left(\beta_j(s)\langle\cdot,\theta_{t,j}^{\perp}\rangle\right)=\left(\langle\cdot,\mathfrak{J}_j1_{[0,s]}\rangle,\langle\cdot,\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)\rangle\right)_{(L^2)}=$$
$$=\left(\mathfrak{J}_j1_{[0,s]},\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)\right)_{L_2(\mathbb{R})}=\big(1_{[0,s]},\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})}=0,$$

таким образом, случайные величины $\langle\cdot,\theta_{t,j}^{\perp}\rangle$ и, следовательно, $\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}$, $j\in\mathbb{N}$, не зависят от $\mathcal{B}_t$. Приближая θ в $L_2(\mathbb{R})$ финитными ступенчатыми функциями, можно легко доказать, что случайные величины $\langle\cdot,\theta_{t,j}\rangle$, $j\in\mathbb{N}$, и, следовательно, функции $\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}$ являются $\mathcal{B}_t$-измеримыми. Таким образом, если $\Theta=E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)$, в силу свойств условных математических ожиданий имеем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}\right)=$$
$$=E\left(E\left(\Phi\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\middle|\mathcal{B}_t\right)\right)E\left(\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}\right)=E\left(\Phi\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\right)E\left(\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}\right).$$

Снова используя равенство (5.3), получаем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(\Phi\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{t,j}}\right)E\left(\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{t,j}^{\perp}}\right)=\mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{t,j}\right).\tag{5.4}$$

Поскольку сходимость последовательности θ_n к θ в $L_2(\mathbb{R})$ влечет за собой сходимость $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta_n}\big)$ к $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta}\big)$ в $\mathcal{H}$ для любого $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$, получаем равенство (5.2), устремляя $n\to\infty$ в равенстве (5.4). □

Следствие 5.1. *$\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ является $\mathcal{B}_t$-измеримой тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{S}\Phi(\theta)=\mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{t,j}\right),\quad \theta_{t,j}:=\mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]}\big),\quad \theta\in\mathcal{S}.$$

Лемма 5.2. *Если случайная величина $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ является $\mathcal{B}_t$-измеримой, то для любых $k\in\mathbb{N}$, $b>t>0$ верно*

$$\mathrm{S}\Big(\Phi\langle\cdot,1_{(t,b]}^k\rangle\Big)(\theta)=(1_{(t,b]}^k,\theta)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\Phi(\theta),\quad \theta\in\mathcal{S}.\tag{5.5}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}\Big(\Phi\langle\cdot,1_{(t,b]}^k\rangle\Big)(\theta)=\\&=E\left(\Phi\langle\cdot,1_{(t,b]}^k\rangle\mathcal{E}_\theta\right)=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}E\left(\Phi\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha\langle\cdot,1_{(t,b]}^k\rangle+\langle\cdot,\theta\rangle}\Big|_{\alpha=0}\right)=\\&=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}E\left(\Phi\, e^{\langle\cdot,\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta\rangle-\frac12|\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta|_0^2}\,e^{\frac12|\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta|_0^2}\right)\Big|_{\alpha=0}=\\&=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}\left(e^{\frac12|\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta|_0^2}\mathrm{S}\Phi\big(\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta\big)\right)\Big|_{\alpha=0}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Далее, имеем

$$\frac{d}{d\alpha}e^{\frac12|\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta|_0^2}\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}e^{\frac12\left(\alpha^2|1_{(t,b]}^k|_0^2+2\alpha(1_{(t,b]}^k,\theta)_{L_2(\mathbb{R})}+|\theta|_0^2\right)}\Big|_{\alpha=0}=\big(1_{(t,b]}^k,\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}e^{\frac{|\theta|_0}{2}}.$$

Кроме того, в силу $\mathcal{B}_t$-измеримости Φ, предложения 5.1 и равенства

$$(1_{(t,b]}^k)_{t,j}=\mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j 1_{(t,b]}^k\cdot 1_{[0,t]}\big)=\begin{cases}\mathfrak{I}_j\big(0\cdot 1_{[0,t]}\big)=0, & k\neq j,\\ \mathfrak{I}_j\big(1_{(t,b]}\cdot 1_{[0,t]}\big)=0, & k=j,\end{cases}$$

получим

$$\mathrm{S}\Phi\big(\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta\big)=\mathrm{S}\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\big(\alpha(1_{(t,b]}^k)_{t,j}+\theta_{t,j}\big)\Big)=\mathrm{S}\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{t,j}\Big).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{d}{d\alpha}\mathrm{S}\Phi\big(\alpha 1_{(t,b]}^k+\theta\big)=0$. Таким образом, из равенства (5.6) следует (5.5). □

Теорема 5.1. *Для любого предсказуемого $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$-значного процесса, удовлетворяющего условию*

$$E\left[\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} dt\right] < \infty, \tag{5.7}$$

верно равенство

$$\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t) = \int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}_Q(t)\, dt. \tag{5.8}$$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, вспомним, что интеграл Ито по Q-винеровскому процессу сначала определяется для так называемых элементарных процессов, т. е. для процессов вида

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k 1_{(t_k, t_{k+1}]}(t), \tag{5.9}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, а Ψ_k — $\mathcal{L}(\mathbb{H}; H)$-значные $\mathcal{B}_{t_k}$-измеримые случайные величины для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Затем определение распространяется на все предсказуемые $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$-значные подынтегральные функции, удовлетворяющие условию (5.7). Используя равенство

$$E\left\|\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)\right\|^2_H = E\left[\int_0^T \|\Psi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} dt\right] =: |||\Psi|||_T,$$

которое можно проверить для любого элементарного процесса $\Psi(t)$, и тот факт, что любой предсказуемый процесс $\Psi(t)$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$ может быть аппроксимирован последовательностью элементарных процессов $\{\Psi^{(n)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0; T]$, сходящихся к Ψ по норме $|||\cdot|||_T$, можно определить интеграл $\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)$ как предел в $(L^2)(H)$ соответствующей последовательности интегралов от элементарных процессов $\int_0^T \Psi^{(n)}(t)\, dW_Q(t)$.

Таким образом, достаточно доказать равенство (5.8) для элементарного процесса $\Psi(t)$ вида (5.9). Поскольку операторы $g_i \otimes e_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, где $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, образуют линейно плотное подмножество в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$, можно без ограничения общности предположить, что Ψ_k имеют вид

$$\Psi_k = \sum_{i,j=1}^{M} \psi_{k,i,j}(g_i \otimes e_j), \quad \psi_{k,i,j} \in (L^2),$$

где функции $\psi_{k,i,j}$ $\mathcal{B}_{t_k}$-измеримы для всех $i, j = 1, \ldots, M$, $k = 0, 1, \ldots N-1$. Рассмотрим S-преобразование левой части равенства (5.8). Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ имеем:

$$\mathrm{S}\left[\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)\right](\theta) = \mathrm{S}\left[\sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k\big(W_Q(t_{k+1}) - W_Q(t_k)\big)\right](\theta) =$$

$$= \mathrm{S}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \psi_{k,i,j}(g_i \otimes e_j) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\big(\beta_j(t_{k+1}) - \beta_j(t_k)\big)e_j\right] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j \mathrm{S}\left[\psi_{k,i,j}\langle 1^j_{(t_k, t_{k+1}]}, \cdot\rangle\right](\theta) g_i.$$

В силу леммы 5.2 получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[\int\limits_0^T \Psi(t)\,dW_Q(t)\right](\theta) &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j\big(1^j_{(t_k,t_{k+1}]},\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j\big(1_{(t_k,t_{k+1}]},\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \big[\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big](t)dt\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)\big[\sigma_j g_i\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big](t)dt.
\end{aligned}$$

Вспоминая формулу (3.8) и определение Ψ_k, окончательно получим

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}\left[\int\limits_0^T \Psi(t)\,dW_Q(t)\right](\theta) &= \sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathrm{S}\Psi_k(\theta)\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(t)(\theta)dt = \\
&= \int\limits_0^T \mathrm{S}\big[\Psi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)\big](\theta)dt = \mathrm{S}\Big[\int\limits_0^T \Psi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)dt\Big](\theta).
\end{aligned}$$

В силу единственности S-преобразования это равенство влечет за собой (5.8). □

Следующая теорема устанавливает связь между интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу и интегралом Хицуды—Скорохода по цилиндрическому белому шуму. Она доказывается аналогично, с использованием равенства (3.9) вместо (3.8).

Теорема 5.2. *Для любого предсказуемого $\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)$-значного процесса, удовлетворяющего условию*

$$E\left[\int\limits_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)}dt\right] < \infty,$$

верно равенство

$$\int\limits_0^T \Psi(t)\,dW(t) = \int\limits_0^T \Psi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\,dt. \tag{5.10}$$

6. Стохастические дифференциальные уравнения в пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин

Для того, чтобы рассмотреть стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах как дифференциальные уравнения в пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин, сначала распространим действие линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_i$ — сепарабельные гильбертовы пространства, на соответствующие пространства обобщенных случайных величин.

Пусть сначала $A\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Определим его действие как оператора из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$ равенством

$$A\Phi := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} A\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \ \text{ for } \ \Phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1). \tag{6.1}$$

Определенный таким образом, оператор A становится линейным непрерывным оператором, действующим из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$.

Если A неограничен, определим $(\operatorname{dom} A)$ как множество всех $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ таких, что $\Phi_\alpha \in \operatorname{dom} A$ для всех $\alpha \in \mathcal{T}$ и условие

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}\|A\Phi_\alpha\|^2_{H_2}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\alpha} < \infty$$

выполнено для некоторого $p \in \mathbb{N}$.

Тогда равенство (6.1) определяет на $(\operatorname{dom} A)$ линейный оператор, действующий из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$. Нетрудно проверить его замкнутость для оператора A, замкнутого как оператор, действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$.

Предложение 6.1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Для любого $\Phi \in (\mathrm{dom}A) \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$, $\rho \in [0;1)$, верно $\big[\mathrm{S}\Phi\big](\theta) \in \mathrm{dom}A \subseteq \mathcal{H}_1$ при всех $\theta \in \mathcal{S}$, и*

$$\big[\mathrm{S}A\Phi\big](\theta) = A\big[\mathrm{S}\Phi\big](\theta), \quad \theta \in \mathcal{S}.$$

6.1. Уравнения с аддитивным шумом. Пусть $\mathbb{H}$ и H — сепарабельные гильбертовы пространства, A — замкнутый линейный оператор, действующий в H, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. Рассмотрим следующую стохастическую задачу Коши:

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad X(0) = \zeta, \tag{6.2}$$

где $W(t)$ — $\mathbb{H}$-значный цилиндрический винеровский процесс. Это дифференциальная форма записи уравнения Ито

$$X(t) = \int_0^t AX(t)\,dt + \int_0^t B\,dW(t).$$

Из связи между интегралами Ито и Хицуды—Скорохода следует, что во введенных выше пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин это уравнение может быть записано в виде

$$X(t) = \int_0^t AX(t)\,dt + \int_0^t B \diamond \mathbb{W}(t)\,dt.$$

Принимая во внимание то, что $B \diamond \mathbb{W}(t) = B\mathbb{W}(t)$ в силу того, что B детерминирован, видим, что задача Коши (6.2) в введенных выше пространствах обобщенных случайных величин принимает следующий вид:

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), \quad t \geqslant 0, \qquad X(0) = \zeta, \tag{6.3}$$

где $\mathbb{W}(t)$ — $\mathbb{H}$-значный белый шум. В этом разделе мы получим результат о существовании и единственности решения этой задачи в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, т. е. о существовании и единственности $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значной дифференцируемой функции $X(t)$, удовлетворяющей (6.3).

Теорема 6.1. *Пусть A является генератором полугруппы $\{S(t), t \geqslant 0\}$ класса C_0 в гильбертовом пространстве H, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, $\mathbb{W}$ — определенный выше цилиндрический белый шум. Тогда*

$$X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds \tag{6.4}$$

— единственное решение задачи Коши (6.3) *в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ для любого $\zeta \in \big(\operatorname{dom} A\big)$.*

Доказательство. Пусть $X(t) = \sum\limits_\alpha X_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, $\zeta = \sum\limits_\alpha \zeta_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in \big(\operatorname{dom} A\big)$. Процесс $X(t)$ является решением задачи (6.3), только если функции $X_\alpha(t)$ являются решениями задач Коши

$$X'_{\varepsilon_n}(t) = AX_{\varepsilon_n}(t) + B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t), \quad X_{\varepsilon_n}(0) = \zeta_{\varepsilon_n}, \quad \text{при } \alpha = \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{6.5}$$

$$X'_\alpha(t) = AX_\alpha(t), \quad X_\alpha(0) = \zeta_\alpha \qquad \text{при } \alpha \neq \varepsilon_n \tag{6.6}$$

в пространстве H.

Поскольку A является генератором полугруппы класса C_0, а $\zeta_\alpha \in \operatorname{dom} A$,

$$X_\alpha(t) := S(t)\zeta_\alpha \tag{6.7}$$

— единственное решение задачи (6.6) для любого $\alpha \neq \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t) = Be_j\xi_i(t)$, где $i, j \in \mathbb{N}$ и $n = n(i,j)$, непрерывно дифференцируема при любом $t \in \mathbb{R}$. Поэтому функция

$$v_n(t) := \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds = \int_0^t S(s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t-s)\,ds$$

дифференцируема и, в силу известных свойств полугрупп класса C_0, непрерывна и принимает значения, принадлежащие $\operatorname{dom} A$ при всех $t > 0$. Таким образом, по [32, теорема 2.4], задача Коши (6.5) имеет единственное решение

$$X_{\varepsilon_n}(t) = S(t)\zeta_{\varepsilon_n} + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

Рассмотрим $X(t) = \sum\limits_{\alpha} X_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha$, где $X_\alpha(t)$ определены равенствами (6.7) и (6.8). Покажем, что $X(t) \in (\mathcal{S})_{-0}(H)$ и верно (6.4).

Пусть $M > 0$ и $a > 0$ таковы, что $\|S(t)\| \leqslant Me^{at}$ при $t \geqslant 0$. Из оценки

$$\int_0^t \big\|S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\big\|_H^2\,ds \leqslant M^2\|B\|^2 \int_0^t e^{2a(t-s)}|\xi_{i(n)}(s)|^2\,ds \leqslant M^2\|B\|^2 e^{2at}$$

следует, что при $p \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^t \big\|S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\big\|_H^2\,ds(2\mathbb{N})^{-2p\varepsilon_n} < \infty.$$

В силу предложения 2.5, отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds$ существует как элемент $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ при всех $t \geqslant 0$ и

$$\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds.$$

Очевидно, $S(t)\zeta = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} S(t)\zeta_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-0}(H)$, таким образом, $X(t)$ в равенстве (6.4) определен как элемент $((S))_{-0}(H)$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что $X(t)$ дифференцируема при $t \geqslant 0$. Тогда (6.3) следует из (6.5), (6.6) и замкнутости A.

Пусть $t \in [0;T)$, тогда, поскольку $\zeta_\alpha \in \operatorname{dom} A$ для всех $\alpha \in \mathcal{T}$, имеем

$$\left\|\frac{S(t+h)\zeta_\alpha - S(t)\zeta_\alpha}{h}\right\| = \frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h} S(s)A\zeta_\alpha\,ds\right\| \leqslant Me^{aT}\|A\zeta_\alpha\|.$$

Так как $\zeta \in (\operatorname{dom} A) \subset (\mathcal{S})_{-0}(H)$, имеем $\|A\zeta\|_{-p,-0}^2 = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} (\alpha!)\|A\zeta_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, таким образом, для всех $h \in \mathbb{R}$ таких, что $t + h \in [0;T]$, имеем

$$\left\|\frac{S(t+h)\zeta - S(t)\zeta}{h}\right\| \leqslant Me^{aT}\|A\zeta\|_{-p,-0}. \tag{6.9}$$

Кроме того,

$$\left\|\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(t+h-s)\mathbb{W}_{\varepsilon_{n(i,j)}}(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds\right)\right\| =$$
$$= \frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h} S(s)\xi_i(t+h-s)Be_j\,ds + \int_0^t S(s)\big(\xi_i(t+h-s)-\xi_i(t-s)\big)Be_j\right\| \leqslant$$
$$\leqslant Me^{aT}\|B\|\big(\sup_{[0;T]}|\xi_i(t)| + T\sup_{[0;T]}|\xi_i'(t)|\big) = O(i^{\frac{5}{12}})$$

в силу оценки (6.9) равномерно по h таким, что $t+h\in[0;T]$. Отсюда следует, что

$$\left\|\frac{1}{h}\left(\int_0^{t+h} S(t+h-s)B\mathbb{W}(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds\right)\right\|_{-p,\rho} \leqslant K \tag{6.10}$$

при $p\geqslant 2$ для некоторых $K>0$ и h, таких, что $t+h\in[0;T]$. Из (6.9) и (6.10) следует, что $\left\|\dfrac{X_\alpha(t+h)-X_\alpha(t)}{h}\right\|_{-p,-0}$ ограничено при $t+h\in[0;T]$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$. В силу следствия 2.2 отсюда и из дифференцируемости всех X_α, $\alpha\in\mathcal{T}$, следует, что $X'(t)$ существует. □

6.2. Пример. Стохастическое уравнение теплопроводности. Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t} = \triangle u(t,\bar{x}), && t\geqslant 0, && \bar{x}=(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^m,\\
&u(t,\bar{x}) = 0, && t\geqslant 0, && \bar{x}\in\partial\mathcal{D},\\
&u(0,\bar{x}) = \zeta(\bar{x}), && \bar{x}\in\partial\mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Через $\partial\mathcal{D}$ обозначаем границу области $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^m$. Эту задачу можно записать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t\geqslant 0, \quad u(0)=\zeta \tag{6.11}$$

в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}=L^2\big(\mathcal{D}\big)$, где $A=\Delta$ с областью определения $\operatorname{dom} A$ в пространствах Соболева:

$$\operatorname{dom} A = \left\{u\in L^2\big(\mathcal{D}\big)\,\middle|\, u\in\mathcal{H}^{2,2}\cap\mathcal{H}^{1,2}_0\right\}.$$

Предположим, что $\mathcal{D}=[0;1]^m$. В этом случае множество функций

$$\left\{\varphi_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m) := 2^{m/2}\prod_{k=1}^m \sin(\pi n_k x_k)\,\middle|\, n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\} \tag{6.12}$$

состоит из собственных функций определенного выше оператора A и образует ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Соответствующие собственные значения

$$\left\{-\sum_{k=1}^m \pi^2 n_k^2\,\middle|\, n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right\} \tag{6.13}$$

образуют его спектр. Зафиксируем некоторое упорядочение множеств (6.12) и (6.13) и обозначим их через $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ соответственно. Оператор A порождает полугруппу класса C_0, определенную формулой

$$S(t)u = \sum_{j=1}^\infty e^{\lambda_j t}(e_j,u)_{\mathbb{H}}e_j.$$

Рассмотрим следующее стохастическое возмущение задачи (6.11):

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + \mathbb{W}(t), \quad u(0)=\zeta.$$

По теореме 6.1 эта задача имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Для него есть точная формула (6.4), откуда мы получаем

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}(e_j, \zeta)_{\mathbb{H}} e_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j.$$

Рассмотрим норму $X(t)$ в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(H)$. Имеем

$$\|X(t)\|^2_{-p,-\rho} = \|S(t)\zeta\|^2_{\mathbb{H}} + \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \int_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \right|^2 \big(2n(i,j)\big)^{-2p}. \tag{6.14}$$

Легко увидеть, что она конечна для любого $p \geqslant 1$. Таким образом, решение принимает значения в $(\mathcal{S}_{-1})_{-0}(H)$.

Заметим, что, поскольку мы имеем

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \int_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \right|^2 = \left\| e^{\lambda_j(t-\cdot)} 1_{[0;t]} \right\|^2_0 = \int_0^t e^{2\lambda_j(t-s)} ds = \frac{1-e^{2\lambda_j t}}{2|\lambda_j|} \leqslant \frac{1}{2|\lambda_j|},$$

ряд в правой части равенства (6.14) сходится при $p = 0$ и $\rho = 0$, только если $m = 1$. Таким образом, это единственный случай, когда решение принимает значения в пространстве $(L^2)(H) = (\mathcal{S}_{-0})_{-0}(H)$.

6.3. Уравнения с мультипликативным шумом. Пусть H и $\mathbb{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства, A — линейный замкнутый оператор, действующий в H, $B(\cdot) \in \mathcal{L}\big(H, \mathcal{L}(\mathbb{H}; H)\big)$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A) \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$dX(t) = AX(t)dt + B(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \quad X(0) = \zeta,$$

где $W(t)$ — $\mathbb{H}$-значный цилиндрический винеровский процесс. Она соответствует следующему интегральному уравнению Ито:

$$X(t) = \zeta + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t B(X(s))dW(s),\ t \geqslant 0.$$

Заменяя интеграл Ито на интеграл Хицуды—Скорохода и дифференцируя по t, мы приходим к задаче Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B\big(X(t)\big) \diamond \mathbb{W}(t),\ t \geqslant 0, \quad X(0) = \zeta. \tag{6.15}$$

Изучим существование и единственность ее решения в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, где $\rho \in [0; 1)$, т. е. существование и единственность $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значной дифференцируемой функции, удовлетворяющей (6.15). Заметим, что если Q — ядерный оператор, действующий в $\mathbb{H}$ и удовлетворяющий условию предложения 5.1 для некоторого $p \in \mathbb{N}$, то из того факта, что для любого $X(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ имеем $B\big(X(t)\big) \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; \mathbb{H})\big)$, следует, что произведение Уика в уравнении (6.15) определено.

Применяя S-преобразование к задаче (6.15), получим следующую задачу:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t,\theta) = A\hat{X}(t,\theta) + B\big(\hat{X}(t,\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta),\ t \geqslant 0, \quad \hat{X}(0,\theta) = \hat{\zeta}(\theta), \quad \theta \in \mathcal{S}, \tag{6.16}$$

где $\hat{X}(t,\theta) := \mathrm{S}[X(t)](\theta)$, $\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) := \mathrm{S}[\mathbb{W}(t)](\theta)$, $\hat{\Phi}(\theta) := \mathrm{S}\Phi(\theta)$ и $\hat{\zeta}(\theta) := \mathrm{S}\zeta(\theta)$.

Будем предполагать впоследствии, что оператор B в уравнении удовлетворяет следующему условию:

Предположение 6.1. *Для любого* $y \in \mathbb{H}$

(B1) $B(\mathrm{dom}A)y \subseteq \mathrm{dom}A$;

(B2) *Ограничен оператор* $C(\cdot)y : \mathrm{dom}A \to \mathcal{L}(H)$, *определенный равенством*
$$C(x)y := AB(x)y - B(Ax)y, \quad x \in \mathrm{dom}A;$$

(B3) $\ker B(\cdot)y = \{0\}$ *для всех* $y \in \mathbb{H}$, $y \neq 0$.

Заметим, что из принципа равномерной ограниченности следует, что если оператор B удовлетворяет предположению 6.1, то существует $M_{AB} > 0$ такое, что выполняется следующая оценка:
$$\|C(x)y\| \leqslant M_{AB}\|x\|\,\|y\|, \quad x \in \mathrm{dom}A, \; y \in \mathbb{H}. \tag{6.17}$$
Пусть A является генератором полугруппы $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$ класса C_0. Пусть $M > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ таковы, что выполнено
$$\|U(t)\| \leqslant Me^{at}, \quad t \geqslant 0. \tag{6.18}$$
Используем метод последовательных приближений для доказательства существования решения задачи (6.16).

Определим последовательность линейных операторов $\{T_k(t,\theta)\}$, $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$, положив
$$T_0(t,\theta) = U(t),$$
$$T_k(t,\theta)x = \int\limits_0^t U(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds, \quad x \in H, \; k = 1,2,\ldots.$$
Для получения главного результата нам понадобится несколько лемм.

Лемма 6.1. *Для любых* $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$ *и* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполняется следующая оценка*:
$$\|T_k(t,\theta)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M^{k+1}\|B\|^k e^{at}|\theta|_0^k \sqrt{\frac{t^k}{k!}}, \tag{6.19}$$
где $M > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ — *константы из оценки* (6.18), $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(\mathbb{H};H))}$.

Доказательство. Предположим, что (6.19) выполняется для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in H$ имеем:
$$\begin{aligned}
\|T_{k+1}(t,\theta)x\| &= \left\|\int\limits_0^t U(t-s)B\big(T_k(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds\right\| \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_0^t \big\|U(t-s)B\big(T_k(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\big\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M\|B\|\int\limits_0^t e^{a(t-s)}\|T_k(s,\theta)x\|\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k \int\limits_0^t \sqrt{\frac{s^k}{k!}}\,\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds\,\|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k \left(\int\limits_0^t \frac{s^k}{k!}\,ds\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^t \|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|^2\,ds\right)^{1/2} \|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k \sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\|\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};H)}\,\|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^{k+1} \sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\,\|x\|.
\end{aligned}$$

Поскольку оценка (6.19) верна при $k = 0$, отсюда следует по индукции, что она верна для всех $k \in \mathbb{N}$. □

Лемма 6.2. *Для любых* $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$ *выполнена оценка*

$$\|AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant M^{k+1}\|B\|^{k-1}|\theta|_0^k e^{at}\sqrt{\frac{t^k}{k!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + kM_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big), \tag{6.20}$$

где $M > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ — *константы из оценки* (6.18)*,* $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(\mathbb{H};H))}$, M_{AB} — *константа из оценки* (6.17).

Доказательство. При $k = 0$, используя свойства полугрупп класса C_0, получим:

$$\|AT_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| = \|AU(t)\hat{\zeta}(\theta)\| = \|U(t)A\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant Me^{at}\|\hat{\zeta}(\theta)\|. \tag{6.21}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) &= \int_0^t AU(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = \\ &= \int_0^t U(t-s)AB\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = \\ &= \int_0^t U(t-s)\Big[B\big(AT_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta) + C\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\Big]\,ds. \end{aligned}$$

Если (6.20) верно для некоторого $k \in \mathbb{N}$, в силу полученного выше представления и оценки (6.19), получаем:

$$\begin{aligned} &\Big\|AT_{k+1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\Big\| \leqslant \\ &\leqslant \int_0^t Me^{a(t-s)}\Bigg[M^{k+1}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{as}\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + kM_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\| + \\ &\qquad + M_{AB}M^{k+1}\|B\|^k e^{as}|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\Bigg]\,ds = \\ &= M^{k+2}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{at}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\int_0^t\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds \leqslant \\ &\leqslant M^{k+2}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{at}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\times \\ &\qquad \times\Bigg(\int_0^t\frac{s^k}{k!}\,ds\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int_0^t\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|^2\,ds\Bigg)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant M^{k+2}\|B\|^k|\theta|_0^{k+1}e^{at}\sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big). \end{aligned}$$

Отсюда и из (6.21), по индукции, следует утверждение леммы. □

Рассмотрим ряд

$$T(t,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t,\theta). \tag{6.22}$$

Из леммы 6.1 следует, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ верна следующая оценка:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+m} \|T_k(t,\theta)\| &\leqslant Me^{at} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\left(M\sqrt{2}\|B\||\theta|_0\sqrt{t}\right)^k}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \leqslant \\ &\leqslant Me^{at} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^k} \right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.23}$$

Отсюда следует, что ряд (6.22) абсолютно сходится в $\mathcal{L}(H)$ для любых $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$. Таким образом, $T(t,h) \in \mathcal{L}(H)$.

Предложение 6.2. *Для любых* $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$, $\theta \in \mathcal{S}$ *функция* $\hat{X}(t,\theta) := T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ *является единственным решением задачи* (6.16).

Доказательство. Из предложения 6.1 и свойств полугрупп класса C_0 следует, что $T_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) \in \mathrm{dom} A$ для любых $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$, $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. Условие (B1) влечет за собой $B\big(\mathrm{dom} A\big)\hat{W}(t,\theta) \subseteq \mathrm{dom} A$ для всех $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. По индукции отсюда следует, что $T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) \in \mathrm{dom} A$ для всех $\zeta \in (\mathrm{dom} A), k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. Из (B1) также следует, что $B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) \in \mathrm{dom} A$. Кроме того, имеем

$$\frac{d}{dt} U(t-s) B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) = AU(t-s)B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta), \quad t \geqslant 0, \theta \in \mathcal{S}.$$

Таким образом, для любого $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$ получаем

$$\frac{d}{dt} T_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = AT_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta), \tag{6.24}$$

$$\frac{d}{dt} T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = \int_0^t AU(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\, ds + B\big(T_{k-1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta). \tag{6.25}$$

Поскольку A замкнут, можем переписать равенство (6.25) в виде

$$\frac{d}{dt} T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) + B\big(T_{k-1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta). \tag{6.26}$$

В силу леммы 6.2 получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{m} &\|AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant \\ &\leqslant Me^{at} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{(\sqrt{2}M\|B\||\theta|_0\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \right) \|A\hat{\zeta}(\theta)\| + \\ &+ \frac{M}{\|B\|} e^{at} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{(\sqrt{2}M\|B\||\theta|_0\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \frac{k}{\sqrt{2^k}} \right) M_{AB} \|\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant \\ &\leqslant Me^{at} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k} \right)^{1/2} \|A\hat{\zeta}(\theta)\| + \\ &+ \frac{M}{\|B\|} e^{at} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{k^2}{2^k} \right)^{1/2} M_{AB} \|\hat{\zeta}(\theta)\|.\end{aligned}$$

Из этой оценки следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ сходится в пространстве H для всех $\theta \in \mathcal{S}$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$. Суммируя равенства (6.24) и (6.26) по $k \in \mathbb{N}$, получим в правой части ряд, сходящийся в H при всех $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$. Таким образом, доказано, что $\hat{X}(t,\theta) = T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ является решением задачи (6.16).

Чтобы доказать единственность, заметим, что если $\hat{X}(\cdot,\theta)$ — решение задачи (6.16) для некоторого $\theta\in\mathcal{S}$, то это решение уравнения

$$\hat{X}(t,\theta)=U(t)\hat{\zeta}(\theta)+\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds. \quad t\geqslant 0.$$

(Обратное, вообще говоря, неверно.) Поэтому достаточно доказать, что уравнение

$$\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds=0, \quad t\geqslant 0, \tag{6.27}$$

имеет только тривиальное решение $X(\cdot,h)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для любого $\theta\in\mathcal{S}$.

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (6.27), получим при $\operatorname{Re}\lambda>a$:

$$\int\limits_0^\infty dt\,e^{\lambda t}\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_s^\infty e^{\lambda t}U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,dt=$$
$$=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^\infty e^{\lambda(t+s)}U(t)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,dt=(\lambda-A)^{-1}\int\limits_0^\infty e^{\lambda s}B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds.$$

Из свойств резольвенты A и преобразования Лапласа следует, что если $\hat{X}(\cdot,\theta)$ — решение уравнения (6.27) при любом $\theta\in\mathcal{S}$, то $B(\hat{X}(\cdot,\theta))\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для любого $\theta\in\mathcal{S}$. Полагая $\theta=\xi_{n(i,j)}, i,j\in\mathbb{N}$, получим $B(\hat{X}(\cdot,\theta))\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)=B(\xi_i(\cdot)\hat{X}(\cdot,\xi_{n(i,j)}))e_j\equiv 0$ на $[0;\infty)$. Следовательно, $\hat{X}(\cdot,\theta)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для всех $\theta\in\mathcal{S}$. □

Теорема 6.2. *Пусть A — линейный, плотно определенный в H генератор полугруппы класса C_0, $B(\cdot):H\to\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ удовлетворяет предположению* 6.1. *Тогда задача Коши* (6.15) *имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ для любого $\zeta\in(\mathrm{dom}A)\subseteq(\mathcal{S})_{-0}(H)$.*

Доказательство. Из предложения 6.2 следует, что в условиях теоремы задача (6.16) имеет единственное решение $\hat{X}(t,\theta)=T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ для любых $\zeta\in(\mathrm{dom}A)$, $\theta\in\mathcal{S}$. При этом из (6.23) следует оценка:

$$\|T(t,\theta)\|\leqslant\sum_{k=0}^\infty\|T_k(t,\theta)\|\leqslant Me^{at}\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(M\sqrt{2}\|B\||\theta|_0\sqrt{t}\right)^k}{\sqrt{k!}}\frac{1}{\sqrt{2^k}}\leqslant$$
$$\leqslant Me^{at}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t\right)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2^k}\right)^{1/2}=M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\left(M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t\right).$$

В силу (3.5) имеем:

$$\|\hat{\zeta}(\theta)\|\leqslant\|\zeta\|_{-p,-0}\exp\left(|h|_p^2\right), \quad \theta\in\mathcal{S},$$

для некоторого $p\in\mathbb{N}$. Следовательно, для всех $t\geqslant 0$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\|\hat{X}(t,\theta)\|&\leqslant M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\left(M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t+|\theta|_p^2\right)\|\zeta\|_{-p,-0}\leqslant\\&\leqslant M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\Big(\left(M^2\|B\|^2t+1\right)|\theta|_p^2\Big)\|\zeta\|_{-p,-0}, \quad \theta\in\mathcal{S}.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Отсюда следует, что для любого $t\geqslant 0$ $\hat{X}(t,\theta)$ является S-преобразованием единственной обобщенной случайной величины $X(t)\in(\mathcal{S})_{-0}(H)$, которая является единственным решением задачи (6.16). □

6.4. Пример из популяционной динамики. Рассмотрим пример введения стохастического возмущения в уравнение в частных производных. Рассмотрим упрощенный пример уравнения, возникающего в популяционной динамике.

Начнем с детерминированного уравнения

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = -\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - m(s)u(t,s), \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{6.29}$$

Это уравнение Мак Кендрика—фон Ферстера популяции, структурированной по возрасту. Здесь t — время, s обозначает возраст, $u(t,s)$ — функция плотности, так что $u(t,s)ds$ представляет собой количество особей в популяции, возраст которых лежит в интервале $[s; s+ds]$ в момент t. Структура популяции меняется в результате процессов старения и смерти. Старение моделируется первым слагаемым в правой части, так как оператор $-\dfrac{\partial}{\partial s}$ является генератором полугруппы правого сдвига. Множитель $m(s)$ представляет собой долю особей возраста s, которые погибают. Предположим, что $m \in L_\infty[0;1]$. Для простоты рассмотрим граничное условие

$$u\,(t,0) = 0, \quad t > 0. \tag{6.30}$$

Начальная структура популяции описывается условием

$$u(0,s) = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{6.31}$$

Задача (6.29)–(6.31) может быть записана как задача Коши

$$u'(t) = Au(t),\ t \geqslant 0, \quad u(0) = \varphi \tag{6.32}$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2[0,1]$, где A — оператор, определенный равенством

$$[A\varphi](s) = -\frac{d}{ds}\varphi(s) - m(s)\varphi(s) \tag{6.33}$$

с областью определения

$$\operatorname{dom}(A) = \left\{\varphi \in H,\ \varphi' \in H, \varphi(0) = 0,\ t > 0\right\}.$$

Используя методы теории возмущения полугрупп, можно показать, что A является генератором полугруппы класса C_0 в H (см., например, [3, параграф 3.5]).

Предположим теперь, что процесс гибели особей подвержен случайным флуктуациям вследствие влияния внешней среды. Естественно полагать, что функция m представляет среднее значение доли погибающих особей. Таким образом, мы должны заменить эту функцию в уравнении на $m + \mu(t)$, где $\mu(t)$ — «шум». Здесь возникает проблема, связанная с тем, что в данной ситуации невозможно использовать определенные выше гауссовские белые шумы (Q-белый шум и цилиндрический белый шум) непосредственно, так как для любого t величина $\mu(t)$ должна быть функцией переменной s такой, что умножение на нее является ограниченным оператором в $H = L^2[0,1]$. Чтобы преодолеть эту проблему, положим $\mathbb{H} = L^2[0;1]$ и рассмотрим следующий оператор:

$$\big[B(u)v\big](s) := \varepsilon(s)u(s)\int_0^1 \psi(s-\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad u \in H, \quad v \in \mathbb{H},$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\varepsilon \in L_\infty[0;1]$ — фиксированные функции. Взяв подходящую функцию в качестве множителя ψ в свертке (это может быть, например, подходящий элемент последовательности, сходящейся в некотором смысле к δ-функции Дирака), мы можем сделать B как оператор, действующий на u, оператором умножения на «гладкую аппроксимацию v».

Для любых $u \in H$ и $v \in \mathbb{H}$ имеем:

$$\|B(u)v\|_H \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)| \|u\|_H \|v\|_{\mathbb{H}}.$$

Таким образом, $B(\cdot) \in \mathcal{L}\big(H; \mathcal{L}(\mathbb{H}; H)\big)$.

Рассмотрим стохастическое возмущение задачи Коши (6.32) вида (6.15) с определенным выше оператором B. Поскольку значения $\mathbb{W}(t)$ при каждом t представлены рядом

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)e_j(s)\mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}(\omega),$$

расходящимся в $\mathbb{H}$ для любого $\omega \in \mathcal{S}'$, где $\{e_j\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{H}\big(= L^2[0;1]\big)$, можно неформально представлять себе эти значения нерегулярными функциями переменной s. Когда в уравнении в качестве аргумента v оператора B мы подставляем «$\diamond\mathbb{W}(t)$», мы получаем своего рода гладкую аппроксимацию такой функции. Таким образом, оператор $B(\cdot)\diamond\mathbb{W}(t)$ в уравнении можно считать оператором определенного рода умножения на сглаженные значения белого шума, что представляется вполне естественным способом введения стохастического возмущения в оператор умножения на $m(s)$.

Для любых $v \in \mathbb{H}$, $u \in \mathrm{dom}(A)$ имеем:

$$\big[C(u)v\big](s) := \big[AB(u)v - B(Au)v\big](s) = -u(s)\int\limits_0^1 \psi'(s-\tau)v(tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $C(\cdot)v$ — ограниченный оператор в H и условие (B2) предположения 6.1 выполнено. Условия (B1) и (B3), очевидно, также выполнены, и в результате задача Коши (6.32) удовлетворяет условиям теоремы 6.1 и, следовательно, имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-0}(H)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Øksendal B.* A general stochastic integral approach to insider trading// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*, №4. — С. 167—181.
2. *Buckdahn R.* Anticipating linear stochastic differential equations. — Springer, 1989. — С. 18–23.
3. *Clément Ph., Heijmans H. J. A. M., Angenent S., van Duijn C. J., de Pagter B.* One-parameter semigroups. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1987.
4. *Da Prato G.* Stochastic evolution equations by semigroup methods. — Barcelona: Center de Recerca Matematica, 1997.
5. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1992.
6. *Deck Th., Potthoff J., Våge G.* A rewiev of white noise analysis from a probabilistic standpoint// Acta Appl. Math. — 1997. — *48*, №1. — С. 91–112.
7. *DiNunno G., Øksendal B., Proske F.* Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
8. *Esunge J.* A class of anticipating linear stochastic differential equations// Commun. Stoch. Anal. — 2009. — *3*, № 1. — С. 155–164.
9. *Fattorini H. O.* The Cauchy problem. — Addison-Wesley: Reading. Mass. etc., 1993.
10. *Filinkov A., Sorensen J.* Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions// Stoch. Stoch. Rep. — 2002. — *72*, № 3-4. — С. 129–173.
11. *Filipović D.* Term-structure models. A graduate course. — Berlin: Springer, 2009.
12. *Gawarecki L., Mandrekar V.* Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
13. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals. — Ottawa: Carleton Univ., 1975.
14. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semigroups. — Providence: AMS, 1957.
15. *Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T.* Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach. — Basel: Birkhauser, 1996.
16. *Hu Y., Øksendal B.* Optimal smooth portfolio selection for an insider// J. Appl. Probab. — 2007. — *44*, №3. — С. 742-–752.
17. *Huang Z., Yan J.* Introduction to infinite dimensional stochastic analysis. — Dordrecht: Kluver Academic Publishers, 2000.
18. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations// J. Math. Anal. App. — 1982. — *90*. — С. 12–44.
19. *Ichikawa A.* Semilinear stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures// Stochastics. — 1984. — *12*. — С. 1—39.
20. *Kondratiev Yu. G., Streit L.* Spaces of white noise distribution: constructions, descriptions, applications. I// Rep. Math. Phys. — 1993. — *33*. — С. 341–366.
21. *Kuo H.-H.* White noise distribution theory. — Boca Raton: CRC Press, 1996.
22. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. I// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1980. — *56A*. — С. 376–380.
23. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. II// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1980. — *56A*. — С. 411–416.

24. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. III// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1981. — *57A*. — С. 433–437.
25. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. IV// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1982. — *58A*. — С. 186–189.
26. *Lèon J. A., Protter P.* Some formulas for anticipative Girsanov transformations// В сб.: «Chaos expansions, multiple Wiener—Itô integrals and their applications». — Boca Raton: CRC Press, 1994. — С. 267–291.
27. *Melnikova I. V., Alshanskiy M. A.* The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *280*, (Suppl. 1). — С. 134–150.
28. *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale methods in financial modelling. — Berlin: Springer, 2005.
29. *Nualart D., Pardoux E.* Stochastic calculus with anticipating integrands// Probab. Theory Related Fields. — 1988. — *78*. — С. 535–581.
30. *Obata N.* White noise calculus and Fock space. — Berlin: Springer, 1994.
31. *Øksendal B.* A universal optimal consumption rate for an insider// Math. Finance. — 2006. — *16*, №1. — С. 119-–129.
32. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
33. *Shreve S. E.* Stochastic calculus for finance. II. Continuous-time models. — New York: Springer, 2004.
34. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1979.
35. *Wiener N.* Differential space// J. Math. Phys. (M.I.T.). — 1923. — *2*. — С. 131–174.

И. В. Мельникова
Уральский федеральный университет
Институт математики и компьютерных наук
Кафедра математического анализа и теории функций
E-mail: `Irina.Melnikova@usu.ru`

М. А. Альшанский
Уральский федеральный университет
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики
E-mail: `mxalsh@gmail.com`