Современная математика. Фундаментальные направления. Том 52 (2014). С. 3–143

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ: ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ

© 2014 г. **А. Б. МУРАВНИК**

СОДЕРЖАНИЕ

Автор поддержан грантом Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется задача Коши для параболических функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, которые содержат, кроме дифференциальных операторов, операторы сдвига (обобщенного сдвига), действующие по пространственным переменным. Эта задача принадлежит к классу нелокальных задач, изучение которых было начато еще в классических работах Я. Д. Тамаркина, М. Пиконе и Т. Карлемана. Дальнейшее свое развитие теория функционально-дифференциальных (в частности, дифференциально-разностных) уравнений получила в трудах А. Д. Мышкиса, а впоследствии она глубоко и интенсивно развивалась многими математиками (см. монографии [1, 91, 124] и имеющуюся там библиографию, а также цикл работ [5–10, 13], посвященный теории функционально-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах). Общая теория эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений (разрешимость, априорные оценки, гладкость обобщенных решений, спектральные свойства операторов) разрабатывалась в [11, 16, 69–71, 83–89, 96–98, 100, 101, 122–125, 129].

Указанные задачи имеют важные приложения, такие как теория многослойных пластин и оболочек (см. [68, 124]), теория диффузионных процессов, включая биоматематические приложения (см. [12, 123, 129]), модели нелинейной оптики (см. [3, 86, 121, 125–128]).

Основное внимание в работе сосредоточено на асимптотическом поведении решений исследуемых задач. Как известно, весьма характерным для параболических задач явлением является стабилизация их решений. Это явление, впервые отмеченное еще в довоенных работах И. Г. Петровского и А. Н. Тихонова, заключается в существовании у решения конечного предела (в том или ином смысле) при $t \to \infty$. Классическим примером результатов такого рода является необходимое и достаточное условие (поточечной) стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с ограниченной начальной функцией: указанное решение стремится (поточечно) к константе тогда и только тогда, когда предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\operatorname{mes}\{|x|<r\}} \int\limits_{|x|<r} u_0(x)dx$$

существует и равен той же константе. Это условие получено в [81] (см. также [82]), а впоследствии теория стабилизации решений параболических уравнений развивалась в [17–24, 26–28, 30–36, 60, 72, 73, 78–80, 94, 99, 106] и многих других работах различных авторов.

Стабилизация решений встречается и в эллиптической теории, когда рассматривается задача Дирихле в полупространстве (см. [29, 63, 95, 113]); в этом случае стабилизация решения происходит в направлении пространственной переменной, ортогональной граничной гиперплоскости, а необходимое и достаточное условие стабилизации идентично классическому условию из [81]. Таким образом, решение указанной эллиптической задачи ведет себя аналогично решениям параболических уравнений, однако стоит отметить, что полного совпадения здесь нет: скорость убывания фундаментального решения (один из ключевых моментов теории стабилизации) является, в отличие от параболического случая, степенной.

В настоящее время классическую теорию стабилизации можно считать в основном построенной; в последние десятилетия исследовательские интересы сместились в сторону неклассических параболических задач. Данная работа посвящена одной из таких неклассических областей — функционально-дифференциальным параболическим уравнениям.

Кроме регулярных уравнений (т. е. уравнений, коэффициенты которых не содержат особенностей), в данной работе изучаются сингулярные функционально-дифференциальные параболические уравнения, в которых по одной или нескольким пространственным переменным действует оператор Бесселя

$$\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

с положительным параметром k.

Особенности такого рода возникают в тех моделях математической физики, где характеристики среды (например, диффузионные или теплопроводящие) имеют вырождающиеся неоднородности степенного вида.

Функционально-аналитические методы, необходимые для исследования таких особенностей, и построенная на основе этих методов общая теория указанных сингулярных уравнений разработаны в [41] (см. также [37, 39, 40, 42]). Параболические уравнения, содержащие оператор Бесселя, глубоко и подробно исследовались в [43–45, 48–51, 53] (см. также имеющуюся в этих работах библиографию). Необходимые и достаточные условия стабилизации решений указанных сингулярных параболических уравнений найдены в [54, 57, 114].

В настоящей работе исследуются сингулярные уравнения, которые содержат, кроме оператора Бесселя, оператор обобщенного сдвига, введенный и исследованный в [47]. Таким образом, изучаемые функционально-дифференциальные уравнения являются не только дифференциально-разностными, но и интегродифференциальными.

Работа состоит из пяти глав. Главы, в свою очередь, делятся на разделы.

Первая глава — вводная.

Во второй главе изучаются уравнения, нелокальными в которых являются только младшие члены, причем члены нулевого порядка. Как известно, такие члены характеризуют диссипативные свойства моделируемого процесса, а нелокальными эти члены становятся тогда, когда эта диссипация происходит с запаздыванием. При этом наибольший интерес представляет случай анизотропной среды: диффузионный процесс является многомерным, и запаздывание в различных координатных направлениях различно (см., например, [123, 129]). Кроме того, нелокальные члены такого вида возникают и в математических моделях нелинейных оптических систем с двумерной обратной связью, используемых, например, в современных компьютерных технологиях и в исследованиях лазерных пучков (см., например, [86, 121, 125–128]).

Основными результатами главы 1 являются теорема о классической однозначной разрешимости задачи Коши (теорема 1.5.1) и теорема об обобщенной весовой асимптотической близости исследуемого решения и решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с преобразованной начальной функцией (теорема 1.6.1); из последней теоремы вытекают и следствия о (поточечной) стабилизации.

Отметим, что существование обобщенных (в различных смыслах) решений указанной задачи было известно значительно раньше (см., например, [14, 15, 76, 77]), однако теоремы о стабилизации являются утверждениями о поведении решения на многообразиях малых размерностей (вплоть до одномерных многообразий), а существование следа на таком многообразии не может быть гарантировано даже, вообще говоря, для сильного решения. Классическое же решение (т. е. решение, обладающие всеми входящими в уравнение производными в классическими смысле, удовлетворяющее уравнению в каждой точке полупространства $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ и удовлетворяющее начальному условию в смысле одностороннего предела при $t \to +0$ для каждого x из $\mathbb{R}^n$) обладает требуемыми свойствами, поэтому его существованию и интегральному представлению уделено такое внимание (разделы 1.1–1.4).

Доказанная весовая асимптотическая близость решений является обобщенной в следующем смысле: разность между решением исследуемого функционально-дифференциального уравнения (умноженным на соответствующую весовую функцию) и решением «эталонного» дифференциального уравнения (а именно уравнения теплопроводности) стремится к нулю, если аргумент исследуемого решения стремится к бесконечности по лучу, ортогональному начальной гиперплоскости, а аргумент «эталонного» решения стремится к бесконечности по лучу, составляющему с начальной гиперплоскостью некоторый угол; этот угол (вообще говоря, отличный от прямого) однозначно определяется коэффициентами младшей (т. е. нелокальной) части функционально-дифференциального уравнения:

$$\lim_{t\to+\infty} \left[e^{-t\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}} u(x,t) - w\left(\frac{x_1+q_1 t}{p_1}, \dots, \frac{x_n+q_n t}{p_n}, t\right)\right] = 0,$$

где $w(x,t)$ — ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $u_0(p_1x_1,\dots,p_nx_n)$, а постоянные p_j, q_j определяются коэффициентами нелокальной части исходного функционально-дифференциального уравнения (здесь a_{jk} — коэффициенты при операторах сдвига).

Такое поведение решения является принципиально новым эффектом по сравнению с классическим случаем дифференциального уравнения: хотя в классическом случае такое явление тоже встречается, происходит это только тогда, когда уравнение содержит младшие члены первого порядка. В нелокальном же случае для этого, оказывается, достаточно и членов нулевого порядка, хотя, как известно, их физический смысл — совершенно иной. Таким образом, качественно новые эффекты, порождаемые нелокальными членами уравнения, проявляются уже и в том случае, когда главная часть уравнения является классической. Отметим в этой связи полное соответствие общей параболической теории (см. [38]), согласно которой влияние младших членов параболического уравнения может (в отличие от, например, эллиптического случая) иметь принципиальное значение для качественного поведения его решений.

Третья глава посвящена регулярным уравнениям с главными членами, т. е. уравнениям, содержащим суперпозиции вторых производных (включая смешанные) и операторов сдвига по любым (пространственным) координатным направлениям. Рассматривается решение задачи Коши в смысле обобщенных функций (а именно в смысле [14, 15]), однако удается доказать, что внутри полупространства $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ это решение является классическим (теорема 2.7.3); это позволяет рассмотреть поведение решения на одномерных многообразиях и, соответственно, получить теоремы об асимптотической близости решений и об их стабилизации. Основной результат получен в теореме 2.7.4 и заключается в следующем: если правая часть уравнения представляет собой однородный сильно эллиптический оператор, то имеет место асимптотическая близость изучаемого решения и решения задачи Коши (с той же самой начальной функцией) для дифференциального параболического уравнения, получаемого из исходного функционально-дифференциального уравнения обнулением всех сдвигов:

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t)-v(x,t)]=0,$$

где $u(x,t)$ есть решение (функционально-дифференциального) уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k,j,m=1}^{n}a_{kjm}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\,(x_1,\dots,x_{m-1},x_m+h_{kjm},x_{m+1},\dots,x_n,t),$$

а $v(x,t)$ есть решение (дифференциального) уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\sum_{k,j,m=1}^{n}a_{kjm}\frac{\partial^2 v}{\partial x_k\partial x_j}$$

(с той же самой начальной функцией).

Если же, кроме нелокальной главной части, уравнение содержит младшие члены, то асимптотическая близость становится весовой, а если эти младшие члены нелокальны, то возникают еще и специфические для нелокального случая эффекты, описанные в главе 1.

Отметим, что в третьей главе ключевую роль играет условие сильной эллиптичности оператора в правой части уравнения. При этом, как и в случае ограниченной области (см. [124, §9]), сильная эллиптичность дифференциального и дифференциально-разностного операторов различаются существенным образом.

В четвертой главе исследуется модельный случай сингулярного функционально-дифференциального уравнения — параболическое интегродифференциальное уравнение с одной пространственной переменной, по которой действуют оператор Бесселя и линейная комбинация операторов обобщенного сдвига. Как и в случае дифференциального сингулярного уравнения (см., например, [41]), для обеспечения единственности решения к начальному условию добавляется условие четности решения по пространственной переменной. Однозначная разрешимость такой задачи доказывается в теореме 3.5.1, а свойства построенного и изученного в этой главе одномерного фундаментального решения применяются в следующей главе для построения фундаментального решения в общем сингулярном случае.

Пятая глава посвящена общему сингулярному случаю — уравнению, в котором все пространственные переменные разбиты на две группы: неособые переменные, по которым действуют вторые производные и операторы сдвига, и особые переменные, по которым действуют операторы Бесселя и операторы обобщенного сдвига. Кроме начального условия, на решение накладываются условия четности по особым переменным. Доказываются однозначная разрешимость такой задачи (теоремы 4.5.1 и 4.6.1) и весовая асимптотическая близость ее решения и решения аналогичной задачи для некоторого дифференциального сингулярного уравнения (теорема 4.7.1).

Нумерация формул принята своя в каждой главе. Первая цифра номера формулы означает главу.

Нумерация теорем, лемм, следствий и замечаний — своя в каждом разделе. Первая цифра номера означает главу, следующая — номер раздела.

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание и поддержку на протяжении многих лет.

Глава 1

УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ МЛАДШИМИ ЧЛЕНАМИ

В этой главе рассматриваются уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x-h,t), \tag{1.1}$$

где $\mathcal{M}$ — конечное множество векторов $\mathbb{R}^n$, параллельных координатным осям (либо любой другой ортогональной системе векторов). Отметим, что, помимо чисто теоретического интереса, связанного с добавлением в параболическое уравнение неклассических младших членов, такие уравнения возникают, например, в задачах нелинейной оптики: как известно, например, из [127], модель нелинейной оптической системы с так называемыми многолепестковыми волнами описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1+\gamma\cos u_g),$$

где $u(x,t)$ есть фаза световой волны, $u_g = u(g(x),t)$, g — взаимно-однозначное преобразование пространственных переменных, отличное от тождественного, положительные коэффициенты D и γ есть соответственно коэффициент диффузии и видность интерференционной картины, а отличный от нуля коэффициент K есть коэффициент нелинейности, зависящий от интенсивности входного поля.

В [86, 125] это квазилинейное уравнение линеаризуется к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = D\Delta v - v - K\gamma\sin\omega v_g,$$

где постоянная ω (так называемое пространственно однородное стационарное решение) есть корень трансцендентного уравнения $\omega = K(1+\gamma\cos\omega)$.

Если теперь в качестве $g(x)$ взять оператор сдвига, то линеаризованное уравнение совпадает с уравнением (1.1), в котором множество $\mathcal{M}$ состоит лишь из двух элементов (один из которых — нулевой).

1.1. Определение фундаментального решения в случае одной пространственной переменной

Пусть $a,h\in\mathbb{R}^m$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{m} a_k u(x-h_k,t). \tag{1.2}$$

Определим на $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{a,h}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) d\xi. \tag{1.3}$$

Легко видеть, что

$$|\mathcal{E}(x,t)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} d\xi \leqslant \int\limits_0^\infty e^{(1-\xi^2)t} d\xi = e^t \int\limits_0^\infty e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\sqrt{t}} = \frac{e^t}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом, для любых $t_0, T \in (0,+\infty)$ интеграл (1.3) сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [t_0, T]$, следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ определена корректно на $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$. Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}$ под знаком интеграла:

$$\Big| \frac{\partial^m}{\partial t^l \partial x^{m-l}} \left(e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) \right) \Big| \leqslant P(\xi) e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)},$$

где $P(\xi)$ — полином степени, не большей, чем $m+2l$, значит,

$$\Big| \frac{\partial^m}{\partial t^l \partial x^{m-l}} \left(e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) \right) \Big| \leqslant A \xi^{m+2l} e^{(\sum\limits_{k=1}^m |a_k| - \xi^2)t}.$$

Далее,

$$\int\limits_0^\infty \xi^{m+2l} e^{(\sum\limits_{k=1}^m |a_k| - \xi^2)t} d\xi = e^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k| t} \int\limits_0^\infty \xi^{m+2l} e^{-\xi^2 t} d\xi = e^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k| t} \int\limits_0^\infty \frac{\eta^{m+2l}}{t^{\frac{m+2l}{2}}} e^{-\eta^2} \frac{d\eta}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{e^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k| t}}{t^{\frac{m+2l+1}{2}}} \int\limits_0^\infty \eta^{m+2l} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{\Gamma(\frac{m+2l+1}{2}) e^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k| t}}{2t^{\frac{m+2l+1}{2}}},$$

следовательно, интеграл, полученный после формального дифференцирования под знаком интеграла, сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [t_0, T]$ для любых $t_0, T \in (0,+\infty)$. Поэтому определенная равенством (1.3) функция $\mathcal{E}$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^1 \times (0,+\infty)$ и это дифференцирование можно производить под знаком интеграла. Отсюда

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \int\limits_0^\infty \Big[(\sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi - \xi^2) e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) +$$

$$+ e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \sin(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi \Big] d\xi =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \Big[(\sum_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi - \xi^2) \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) +$$

$$+ \sin(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) \sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi \Big] d\xi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = -\int\limits_0^\infty \xi e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \sin(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t(\xi^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k \xi) d\xi.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}-\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}=\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\left[\sum_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\cos\left(x\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\sin\left(x\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)\right]d\xi.$$

Последнее выражение равно

$$\sum_{k=1}^m a_k\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos h_k\xi\cos\left(x\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi+$$
$$+\sum_{k=1}^m a_k\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\sin h_k\xi\sin\left(x\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi=$$
$$=\sum_{k=1}^m a_k\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos\left[(x-h_k)\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right]d\xi=\sum_{k=1}^m a_k\mathcal{E}(x-h_k,t).$$

Таким образом, функция $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1.2) в области $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Назовем $\mathcal{E}(x,t)$ *фундаментальным решением* уравнения (1.2). Правомерность этого термина будет обоснована ниже — мы покажем, что свертка $\mathcal{E}_{a,h}$ с ограниченной начальной функцией на начальной оси обращается в саму начальную функцию.

1.2. Свертка фундаментального решения с ограниченными функциями

Оценим поведение $\mathcal{E}(x,t)$ при $x\to\infty$ (при фиксированном положительном t).

Докажем следующее утверждение:

Лемма 1.2.1. *Пусть* $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty}x^2\mathcal{E}(x,t)=0.$$

Доказательство. Разобьем функцию $\mathcal{E}(x,t)$ на четное и нечетное (по x) слагаемые $\mathcal{E}_1(x,t)$ и $\mathcal{E}_2(x,t)$:

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos x\xi\,\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\sin x\xi\,\sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi.$$

После замены переменной $\eta=x\xi$ получаем, что

$$\mathcal{E}_1(x,t)=\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-t(\frac{\eta}{x})^2}e^{t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k\eta}{x}}\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k\eta}{x}\right)\cos\eta\,d\eta=\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty\psi\left(\frac{\eta}{x}\right)f(\eta)d\eta,$$

где

$$f(\tau)=\cos\tau\in L_\infty(\mathbb{R}^1_+),$$
$$\psi(\tau)=e^{-t\tau^2}e^{t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\tau}\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\tau\right)\in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Теперь обозначим $e^{-t\tau^2}$ через $\psi_0(\tau)$. Очевидно, $\psi_0(\tau) \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, кроме того, преобразование Меллина функции $\psi_0(\tau)$ определено на всей вещественной оси и не имеет вещественных нулей; действительно,

$$\int_0^\infty \tau^{ix}\psi_0(\tau)d\tau = \frac{1}{2t^{\frac{1+ix}{2}}}\int_0^\infty z^{\frac{ix-1}{2}}e^{-z}dz = \frac{\Gamma(\frac{1+ix}{2})}{2t^{\frac{1+ix}{2}}}.$$

Далее

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi_0\left(\frac{\tau}{r}\right)f(\tau)d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{r^2}{4t}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Тогда в силу тауберовой теоремы Винера (см. [25, с. 163])

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi\left(\frac{\tau}{r}\right)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. $\mathcal{E}_1(x,t)$ стремится к нулю при $x\to\infty$ для любых фиксированных $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{E}_2(x,t)$.

Обозначим функцию $e^{-t\tau^2}e^{t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\tau}\sin\left(t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin h_k\tau\right)$ через $\psi(\tau)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, а $\sin\tau$ — через $f(\tau)\in L_\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Получим, что

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi_0\left(\frac{\tau}{r}\right)f(\tau)d\tau = \frac{r}{2t}F\left(1,\frac{3}{2},-\frac{r^2}{4t}\right) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(здесь через F обозначена вырожденная гипергеометрическая функция второго рода).

Таким образом, условия тауберовой теоремы Винера выполнены. Следовательно, для любых фиксированных $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \psi\left(\frac{\tau}{x}\right)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Итак, для любого положительного t и любых $a,h\in\mathbb{R}^m$

$$\lim_{x\to\infty}\mathcal{E}(x,t)=0.$$

Однако доказанного стремления к нулю недостаточно, чтобы обосновать сходимость свертки фундаментального решения с ограниченной начальной функцией. Нужно оценить скорость такого стремления. Для этого проинтегрируем по частям слагаемое $\mathcal{E}_1(x,t)$:

$$\int_0^\infty e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\cos(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\cos(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\sin x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} + t\int_0^\infty e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\left((2\xi+\sum_{k=1}^m h_ka_k\sin h_k\xi)\cos(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)+\sin(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\sum_{k=1}^m h_ka_k\cos h_k\xi\right)\sin x\xi d\xi\right] =$$

$$= \frac{t}{x}\int_0^\infty e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\cos(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)+\sum_{k=1}^m a_kh_k\sin(h_k\xi+t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\right)\sin x\xi d\xi.$$

Теперь обозначим производную (по ξ) от

$$e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\cos(t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)+\sum_{k=1}^m a_kh_k\sin(h_k\xi+t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\right)$$

через $\psi(\xi)$ и снова выполним интегрирование по частям. Получим, что

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \frac{t}{x^2}\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\cos(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\sin(h_k\xi+t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\right)\cos x\xi\Big|_{\xi=\infty}^{\xi=0}+\int\limits_0^{\infty}\psi(\xi)\cos x\xi d\xi\right]=\frac{t}{x^2}\int\limits_0^{\infty}\psi(\xi)\cos x\xi d\xi,$$

т. е. $x^2\mathcal{E}_1(x,t)=\dfrac{t}{x}\int\limits_0^{\infty}\psi\left(\dfrac{\eta}{x}\right)\cos\eta d\eta$.

Поскольку $\psi(\xi)\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, то условия тауберовой теоремы Винера выполнены. Следовательно, $x^2\mathcal{E}_1(x,t)\xrightarrow{x\to\infty}0$ для любых фиксированных $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$.

Проанализируем таким же образом второе слагаемое фундаментального решения.

$$\mathcal{E}_2(x,t)=\frac{1}{x}\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\sin(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi\Big|_{\xi=\infty}^{\xi=0}-\right.$$

$$-\int\limits_0^{\infty}e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(t(\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\sin h_k\xi+2\xi)\,\sin(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)-\right.$$

$$\left.\left.-\,t\cos(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\cos h_k\xi\right)\cos x\xi d\xi\right].$$

Таким образом, второе слагаемое фундаментального решения равно

$$-\frac{t}{x}\int\limits_0^{\infty}e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\sin(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)-\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\cos(h_k\xi+t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\right)\cos x\xi d\xi=$$

$$=-\frac{t}{x^2}\left[\sin x\xi\, e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\sin(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)-\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\cos(h_k\xi+t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\right)\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^{\infty}\psi(\xi)\sin x\xi d\xi\right]=\frac{t}{x^3}\int\limits_0^{\infty}\psi(\frac{\eta}{x})\sin\eta d\eta,$$

где

$$\psi(\xi)=\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi-\xi^2)}\left(2\xi\sin(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)-\sum_{k=1}^{m}a_kh_k\cos(h_k\xi+t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\right)\right]'\in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Отсюда в силу тауберовой теоремы Винера $x^2\mathcal{E}_2(x,t)\xrightarrow{x\to\infty}0$ для любых фиксированных $t>0$, $a,h\in\mathbb{R}^m$.

Лемма 1.2.1 доказана. □

Теперь оценим поведение производных фундаментального решения на бесконечности.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 1.2.2. *Пусть* $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty}x^2\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}(x,t)=0.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}_1(x,t)}{\partial x^2}=-\int\limits_0^{\infty}\xi^2e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi\,d\xi.$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\sin x\xi\Big|_{\xi=\infty}^{\xi=0} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \left(\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right)'\sin x\xi\, d\xi\right] =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right)'\sin x\xi\, d\xi.$$

Еще раз применим формулу интегрирования по частям. Получим, что

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}\left(\left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right]'\cos x\xi\Big|_{\xi=\infty}^{\xi=0} + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right]''\cos x\xi\, d\xi\right) = \frac{1}{x^3}\int_0^\infty \psi(\frac{\eta}{x})\cos\eta\, d\eta,$$

где

$$\psi(\xi) = \left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right]'' \in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Таким образом, условия тауберовой теоремы Винера выполнены, и значит, $x^2\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_1(x,t)}{\partial x^2} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любых фиксированных $t > 0$, $a, h \in \mathbb{R}^m$.

Аналогично

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_2(x,t)}{\partial x^2} = -\int_0^\infty \xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\sin x\xi\, d\xi.$$

После интегрирования по частям последнее выражение принимает вид

$$\frac{1}{x}\left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \left(\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right)'\cos x\xi\, d\xi\right] =$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^\infty \left(\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right)'\cos x\xi\, d\xi.$$

Проинтегрировав по частям еще раз, получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_2(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}\left(\left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right]'\sin x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=\infty} - \int_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi d\xi\right),$$

где

$$\psi(\xi) = \left[\xi^2 e^{-t(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\cos h_k\xi)}\sin(t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin h_k\xi)\right]'' \in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Тем самым условия тауберовой теоремы Винера выполнены, и следовательно,

$$x^2\frac{\partial^2 \mathcal{E}_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\int_0^\infty \psi(\frac{\eta}{x})\sin\eta\, d\eta \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\ .$$

Лемма 1.2.2 доказана. □

Поскольку, как доказано в предыдущем разделе, $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, из лемм 1.2.1 и 1.2.2 следует

Лемма 1.2.3. *Пусть* $t>0,\ a,h\in\mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} x^2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)=0.$$

Впрочем, последняя лемма может быть доказана и непосредственно (доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 1.2.2).

Из лемм 1.2.1–1.2.3 и того факта, что $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.2) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, очевидным образом вытекает следующее утверждение:

Теорема 1.2.1. *Пусть* $u_0(x)$ *непрерывна и ограничена в* $\mathbb{R}^1$. *Тогда функция*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi$$

удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1.2) *в* $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Замечание 1.2.1. Требование непрерывности и ограниченности функции u_0 можно заменить требованием ее принадлежности к $L_\infty(\mathbb{R}^1)$. Но и указанная свертка, вообще говоря, будет в этом случае п. в. решением уравнения (1.2), а не классическим решением.

Замечание 1.2.2. Продолжим интегрирование по частям в леммах 1.2.1-1.2.2; получим, что

$$\lim_{x\to\infty} x^m\frac{\partial^{k+l}\mathcal{E}}{\partial t^k\partial x^l}(x,t)=0$$

для любых натуральных m,k,l и любого положительного t.

1.3. Решение задачи Коши

Обозначим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi$ через $u(x,t)$ и наряду с уравнением (1.2) рассмотрим начальное условие

$$u\big|_{t=0}=u_0(x), \tag{1.4}$$

где $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^1$.

Функция $u(x,t)$ определена на $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$. Возьмем произвольное вещественное x_0 и изучим поведение $u(x_0,t)$ при $t\longrightarrow 0$.

Заменой переменной $\eta=\dfrac{x_0-\xi}{2\sqrt{t}}$ получаем:

$$u(x_0,t)=2\sqrt{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)d\eta.$$

Далее

$$\sqrt{t}\,\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)=\sqrt{t}\int\limits_0^\infty e^{-t\left(\xi^2-\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi\right)}\cos\left(2\sqrt{t}\eta\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi\right)d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\eta-t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)dz.$$

Значит,

$$u(x_0,t)=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x_0-2\sqrt{t}\eta)\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_kz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\eta-t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)dzd\eta. \tag{1.5}$$

С другой стороны, $u_0(x_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0) e^{-\eta^2} d\eta$.

Рассмотрим теперь следующую разность:

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x_0 - \xi, t) u_0(\xi) d\xi - u_0(x_0) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2}{\pi} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2 + t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{\pi}} u_0(x_0) e^{-\eta^2} \right] d\eta = \int\limits_{-\infty}^{-A} + \int\limits_{-A}^{A} + \int\limits_{A}^{+\infty} \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2 + I_3. \tag{1.6}$$

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 1.3.1.

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2 + t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz \xrightarrow{t \to +0} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\eta^2}$$

равномерно по $\eta \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Нужно показать, что для любого положительного ε существует такое положительное δ, что для любого $t \in (0, \delta)$ и для любого вещественного η

$$\left| \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2 + t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} \cos 2z\eta \, dz \right| < \varepsilon.$$

Итак, пусть $\varepsilon > 0$.

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} \left[e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos 2z\eta \right] dz =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} \left[e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \left(\cos 2z\eta \cos\left(t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin 2z\eta \sin\left(t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) - \cos 2z\eta \right] dz.$$

Выберем δ из $(0, 1]$ настолько малым, что синус монотонен на промежутке $\left(-\delta \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|, \delta \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|\right)$ и неравенство

$$\sin\left(\delta \sum_{k=1}^{m} |a_k|\right) < \frac{\varepsilon}{2} \left(e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|} \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right)^{-1}$$

выполняется для любого $t \in (-\delta, \delta)$. Тогда при $t \in (0, \delta)$

$$\left| \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \sin 2z\eta \sin\left(t \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left(e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|} \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} dz \right)^{-1} \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} e^{t \sum\limits_{k=1}^{m} |a_k|} dz = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Осталось показать, что это (достаточно малое) δ можно выбрать так, что для любых вещественных z, η при $t \in (0, \delta)$ выполняется еще и следующее неравенство:

$$|\cos 2z\eta|\left|e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz\right)^{-1}.$$

То есть достаточно показать, что

$$e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \overset{t\to+0}{\longrightarrow} 1$$

равномерно по $z \in \mathbb{R}^1$.

$$e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 =$$

$$= e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}}\left[1 - 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] - 1 =$$

$$= e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} - 1 - 2e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}}\sin^2\left(\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right).$$

Выберем t настолько малым, что $\sin^2\left(\frac{t}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{8}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}$. Поскольку синус монотонен в достаточно малой положительной полуокрестности начала координат, неравенство

$$2\sin^2\left(\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4}e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}$$

справедливо для выбранного t. Без ограничения общности можно считать, что выбранное t принадлежит промежутку $(0, 1)$, следовательно, для любого вещественного z

$$2\sin^2\left(\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Итак, осталось оценить $e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} - 1$.

Без ограничения общности можно считать, что t настолько мало, что

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} < e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|t} < e^{\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|t} < 1 + \frac{\varepsilon}{4},$$

следовательно,

$$1 - \frac{\varepsilon}{4} < e^{-\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|t} < e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} < e^{\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|t} < 1 + \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$.

Отсюда

$$\left|e^{t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

для любого $z \in \mathbb{R}^1$. Лемма 1.3.1 доказана. □

Теперь мы можем вернуться к оценке интегралов суммы (1.6).

Сначала оценим $|I_3|$.

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\cos 2\eta z dz =$$

$$= e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \frac{\sin 2\eta z}{2\eta}\Big|_{z=0}^{z=\infty} -$$

$$-\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z' \sin 2\eta z\, dz =$$

$$= -\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z' \sin 2\eta z dz$$

(поскольку $\eta > A > 0$).

Последнее выражение можно представить в виде

$$-\frac{1}{2\eta}\left(\left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z' \frac{\cos 2\eta z}{2\eta}\Big|_{z=\infty}^{z=0} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\eta}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z'' \cos 2\eta z dz\right) =$$

$$= \frac{1}{4\eta^2}\left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z' \cos 2\eta z\Big|_{z=0}^{z=\infty} -$$

$$-\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z'' \cos 2\eta z\, dz.$$

Учитывая, что $\eta > A > 0$, получаем, что последнее выражение равно

$$-\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]_z'' \cos 2\eta z dz.$$

Последний интеграл сходится равномерно по $\eta \in \mathbb{R}^1$ и при $t < 1$ оценивается сверху по абсолютной величине константой, зависящей только от векторов $a, h \in \mathbb{R}^m$; обозначим эту константу через M. Точно так же оценивается и

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) \sin 2\eta z\, dz$$

— второе слагаемое внутреннего интеграла в I_3.

Итак,

$$|I_3| \leqslant \frac{4M\sup|u_0|}{\pi}\int\limits_A^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} + \frac{\sup|u_0|}{\sqrt{\pi}}\int\limits_A^\infty e^{-\eta^2} d\eta = \sup|u_0|\left(\frac{4M}{\pi A} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_A^\infty e^{-\eta^2} d\eta\right).$$

Очевидно, $|I_1|$ удовлетворяет такой же оценке.

Пусть ε — произвольное положительное число. Без ограничения общности можно считать, что $t \leqslant 1$. Выберем положительное A настолько большим, что $|I_1| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}$, и зафиксируем это A. Рассмотрим

$$I_2 = \int\limits_{-A}^{A} \left[\frac{2}{\pi} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) \int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}} \times\right.$$

$$\left.\times \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} u_0(x_0) e^{-\eta^2}\right] d\eta.$$

В силу леммы 1.3.1 и непрерывности функции $u_0(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что из неравенств $t < \delta$, $|2\sqrt{t}\eta| < \delta$ следует неравенство

$$\Big|\frac{2}{\pi}u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta)\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)dz - \frac{u_0(x_0)}{\sqrt{\pi}}e^{-\eta^2}\Big| < \frac{\varepsilon}{6A};$$

обозначим $\min\left(\delta, \dfrac{\delta^2}{4A^2}\right)$ через t_0; тогда $|I_2| < \dfrac{\varepsilon}{3}$, как только $t < t_0$. Отсюда в силу произвольности выбора положительного ε

$$\lim_{t\to+0}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x_0-\xi,t)u_0(\xi)d\xi - u_0(x_0)\right] = 0.$$

Тем самым в силу произвольности выбора вещественного x_0 доказана следующая

Теорема 1.3.1. *Пусть начальная функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^1$. Тогда функция $u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi$ является классическим решением задачи* (1.2), (1.4).

С помощью доказанной теоремы можно, в частности, вычислить интеграл от фундаментального решения по всей вещественной оси:

Лемма 1.3.2.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(x,t)dx = \pi e^{\sum\limits_{k=1}^m a_k t}.$$

Доказательство. Рассмотрим $u_0(x) \equiv 1$; она ограничена, следовательно, в силу теоремы 1.3.1,

$$y(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi$$

в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению (1.2) с начальным условием $y(x,0) \equiv 1$; однако $y(x,t)$ не зависит от x:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi = y(t),$$

т. е. в действительности $y(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y' - \sum_{k=1}^m a_k y = 0$$

и начальному условию $y(0) = 1$. Таким образом, $y(t) = e^{\sum\limits_{k=1}^m a_k t}$. Лемма 1.3.2 доказана. □

1.4. Многомерный случай

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{k=1}^m a_k u(x - b_k h, t), \tag{1.7}$$

где a, b — произвольные параметры из $\mathbb{R}^m$, h — фиксированный вектор единичной длины в $\mathbb{R}^n$.

Определим на $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ функцию

$$\mathcal{E}_{a,b,h,n}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{(n)}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t(|\xi|^2 - \sum\limits_{k=1}^m a_k\cos b_k h\cdot\xi)}\cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^m a_k\sin b_k h\cdot\xi\right)d\xi. \tag{1.8}$$

Тогда

$$|\mathcal{E}_{(n)}(x,t)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} d\xi \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{(\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| - |\xi|^2)t} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant e^{\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| t} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t|\xi|^2} d\xi = e^{\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| t} \int\limits_0^\infty \int\limits_{|\xi|=r} e^{-t|\xi|^2} dS_\xi dr =$$

$$= C_n e^{\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| t} \int\limits_0^\infty e^{-tr^2} r^{n-1} dr = \frac{C_n}{2} e^{\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k| t} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) t^{-\frac{n}{2}}$$

(здесь dS_ξ обозначает поверхностную меру в $\mathbb{R}^n$, C_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$).

Следовательно, для любых $t_0, T \in (0,+\infty)$ интеграл (1.8) сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$, т. е. $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ определена корректно на $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$.

Продифференцируем формально $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{(n)}}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\sum_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2) e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \times$$

$$\times \cos(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \times$$

$$\times \sin(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) \sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi d\xi.$$

Это выражение равно

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \Bigg[(\sum_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2) \cos(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi \sin(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) \Bigg] d\xi.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{(n)}}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\sum_{k=1}^{m} a_k \cos\left((x - b_k h)\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi \right) -$$

$$- |\xi|^2 \cos(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) \Bigg] e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} d\xi.$$

Далее

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_j^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \cos(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) d\xi, \quad j = \overline{1,n}.$$

Отсюда

$$\Delta \mathcal{E}_{(n)} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \cos(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi) d\xi,$$

следовательно,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{(n)}}{\partial t} - \Delta \mathcal{E}_{(n)} = \sum_{k=1}^{m} a_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k h\cdot\xi - |\xi|^2)} \cos\left[(x - b_k h)\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k h\cdot\xi \right] d\xi.$$

Таким образом, функция $\mathcal{E}_{(n)}$ формально удовлетворяет уравнению (1.7).

Проверим законность формального дифференцирования:

$$\left|\frac{\partial^{l+|m|}}{\partial t^l \partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos b_kh\cdot\xi-|\xi|^2)}\cos(x\cdot\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin b_kh\cdot\xi)\right]\right|\leqslant P(\xi)e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos b_kh\cdot\xi-|\xi|^2)},$$

где $P(\xi)$ — полином степени, не превосходящей $|m|+2l$ (здесь $|m|=m_1+\dots+m_n+2l$ — длина мультииндекса), значит,

$$\left|\frac{\partial^{l+|m|}}{\partial t^l \partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}\left[e^{t(\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos b_kh\cdot\xi-|\xi|^2)}\cos(x\cdot\xi-t\sum_{k=1}^m a_k\sin b_kh\cdot\xi)\right]\right|\leqslant A|\xi|^{|m|+2l}e^{(\sum\limits_{k=1}^m |a_k|-|\xi|^2)t}.$$

Далее

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^{|m|+2l}e^{(\sum\limits_{k=1}^m |a_k|-|\xi|^2)t}d\xi=Ce^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k|t}\int\limits_0^\infty r^{|m|+2l+n-1}e^{-tr^2}dr=\frac{C\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+l\right)}{2t^{\frac{m+n}{2}+l}}e^{\sum\limits_{k=1}^m |a_k|t},$$

следовательно, интеграл, полученный после формального дифференцирования функции $\mathcal{E}_{(n)}$, для любых $t_0,T\in(0,+\infty)$ сходится абсолютно и равномерно по $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[t_0,T]$. Поэтому функция $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$, определенная равенством (1.8), бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ и удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (1.7).

Теперь исследуем поведение функции $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ и ее производных при $|x|\to\infty$. Прежде всего, без ограничения общности можно считать, что $m=1, a_1=1$, а вектор b_1h переобозначить через h. Далее повернем систему координат $\xi_1,\dots,\xi_n$ (якобиан такой замены переменных равен единице) на такой угол, что $x\cdot\xi=|x|\xi_1$. Тогда

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{t(\cos\tilde{h}\cdot\xi-|\xi|^2)}\cos(|x|\xi_1-t\sin\tilde{h}\cdot\xi)d\xi,$$

где вектор $\tilde{h}$, вообще говоря, отличен от вектора h (и даже зависит от x, а точнее, от луча, на котором расположена точка x), но $|\tilde{h}|=|h|$. Предполагая, что $\tilde{h}=(|\tilde{h}|,0,\dots,0)$, получаем, что

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1-|\xi|^2)}\cos(|x|\xi_1-t\sin|\tilde{h}|\xi_1)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{-t|\xi'|^2}d\xi'\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1-\xi_1^2)}\cos(|x|\xi_1-t\sin|\tilde{h}|\xi_1)d\xi_1=$$

$$=C_{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)t^{\frac{1-n}{2}}\mathcal{E}_{1,|\tilde{h}|}(|x|,t)=C_{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)t^{\frac{1-n}{2}}\mathcal{E}_{1,|h|}(|x|,t),\qquad(1.9)$$

где функция $\mathcal{E}_{1,|h|}=\mathcal{E}$, как и выше, определена формулой (1.3).

Но предположение $\tilde{h}=(|\tilde{h}|,0,\dots,0)$ не ограничивает общности, поскольку оператор Лапласа инвариантен относительно поворота. То есть, хотя в формуле (1.9) $\tilde{h}$ — своя на каждом луче, но функция $\mathcal{E}_{1,|h|}$ — *одна и та же* для всех $x\in\mathbb{R}^n$. Поэтому в силу замечания 1.3

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^{n+1}\mathcal{E}_{(n)}(x,t)=0$$

для любых $t>0$, $|h|>0$.

Точно так же

$$\Delta\mathcal{E}_{1,n}=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1-|\xi|^2)}\cos|x|\xi_1\,\cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1)d\xi.$$

Последний интеграл равен

$$-\sum_{j=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_j^2e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1-\xi_1^2-\dots-\xi_n^2)}\cos|x|\xi_1\,\cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1)d\xi=$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_1^2 e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_n^2)} \cos|x|\xi_1 \, \cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1) d\xi -$$

$$-\sum_{j=2}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_j^2 e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1 - \xi_1^2 - \cdots - \xi_n^2)} \cos|x|\xi_1 \, \cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1) d\xi.$$

Последнее выражение равно

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t(\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_1^2 e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1 - \xi_1^2)} \cos|x|\xi_1 \, \cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1) d\xi_1 -$$

$$-\sum_{j=2}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \xi_j^2 e^{-t(\xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2)} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\cos|\tilde{h}|\xi_1 - \xi_1^2)} \cos|x|\xi_1 \, \cos(t\sin|\tilde{h}|\xi_1) d\xi_1 =$$

$$= 2\frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial x^2}(|x|, t) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2} d\xi' - 2\mathcal{E}_1(|x|, t) \sum_{j=2}^{n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \xi_j^2 e^{-t|\xi'|^2} d\xi'.$$

Вычислим интеграл во втором слагаемом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \xi_j^2 e^{-t|\xi'|^2} d\xi' = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-t|\eta|^2} d\eta \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi_j^2 e^{-t\xi_j^2} d\xi_j =$$

$$= C_{n-2}\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) t^{1-\frac{n}{2}} \int\limits_{0}^{\infty} \tau^2 e^{-t\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} C_{n-2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) t^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Отсюда

$$\Delta\mathcal{E}_{1,n} = C_{n-1}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) t^{\frac{1-n}{2}} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial x^2}(|x|, t) - nC_{n-2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) t^{-\frac{n+1}{2}} \mathcal{E}_1(|x|, t).$$

Вычисляя таким же образом $\Delta\mathcal{E}_{2,n}$, получаем в силу замечания 1.2.2 что

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{n+1} \Delta\mathcal{E}_{(n)}(x, t) = 0$$

для любых $t > 0$, $|h| > 0$. Поэтому (аналогично лемме 1.2.3)

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{n+1} \frac{\partial \mathcal{E}_{(n)}}{\partial t}(x, t) = 0$$

для любых $t > 0$, $|h| > 0$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. *Пусть функция* $u_0(x)$ *непрерывна и ограничена в* $\mathbb{R}^n$ (*принадлежит пространству* $L_\infty(\mathbb{R}^n)$). *Тогда функция* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_{(n)}(x - \xi, t) u_0(\xi) d\xi$ *удовлетворяет в классическом смысле* (*соответственно п. в.*) *уравнению* (1.7).

Для того чтобы доказать, что построенное решение удовлетворяет не только уравнению (1.7), но и соответствующему начальному условию, представим фундаментальное решение в следующем виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k\xi_1 - |\xi|^2)} \cos(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k\xi_1) d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k\xi_1 - \xi_1^2)} e^{-t|\xi'|^2} \cos(x_1\xi_1 - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k\xi_1) \cos x' \cdot \xi' d\xi -$$

$$-\int_{\mathbb{R}^n} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k\xi_1-\xi_1^2)} e^{-t|\xi'|^2} \sin(x_1\xi_1 - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k\xi_1) \sin x'\cdot\xi' d\xi.$$

Последнее выражение равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k\xi_1-\xi_1^2)} \cos(x_1\xi_1 - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k\xi_1)d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2}\cos x'\cdot\xi' d\xi' -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos b_k\xi_1-\xi_1^2)} \sin(x_1\xi_1 - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k\xi_1)d\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2}\sin x'\cdot\xi' d\xi' =$$

$$= 2\mathcal{E}_{a,b}(x_1,t)\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2}\cos x'\cdot\xi' d\xi'$$

(второе слагаемое обращается в нуль в силу нечетности подынтегральной функции в первом его сомножителе).

Вычислим последний интеграл.

Без ограничения общности (а именно, с точностью до поворота координатной системы $\xi_1,\ldots,\xi_n$) $x'\cdot\xi' = |x|\xi_2$, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2}\cos x'\cdot\xi' d\xi' = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t|\xi'|^2}\cos|x'|\xi_2 d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\xi_2^2}\cos|x'|\xi_2 d\xi_2 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-t|\xi''|^2}d\xi'' =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} e^{-t(\xi_3^2+\cdots+\xi_n^2)}d\xi'' = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{|x'|^2}{4t}}.$$

Итак, $\mathcal{E}_{(n)}(x,t) = 2\left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\mathcal{E}(x_1,t)e^{-\frac{|x'|^2}{4t}}$, где $x' = (x_2,\ldots,x_n)$ — вектор из $\mathbb{R}^{n-1}$.

Пусть $(y_0, x_1^0, \ldots x_{n-1}^0) \overset{\text{def}}{=} (y_0, x^0)$ — произвольный элемент $\mathbb{R}^n$. Введем следующее обозначение:

$$u(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_{(n)}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi, \tag{1.10}$$

и рассмотрим разность $u(y_0,x^0,t) - u_0(y_0,x^0)$.

После замены переменных

$$\frac{y_0-\xi_1}{2\sqrt{t}} = \eta,\ \frac{x_j^0-\xi_{j+1}}{2\sqrt{t}} = z_j,\ j = \overline{1,\, n-1},$$

получаем:

$$u(y_0,x^0,t) = \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{t}\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)e^{-|z|^2}u_0\left(y_0-2\sqrt{t}\eta, x_1^0-2\sqrt{t}z_1,\ldots,x_{n-1}^0-2\sqrt{t}z_{n-1}\right)d\eta dz =$$

$$= \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{t}\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)e^{-|\xi|^2}u_0\left(y_0-2\sqrt{t}\eta, x^0-2\sqrt{t}\xi\right)d\xi d\eta$$

(для удобства возвращаемся к традиционным обозначениям переменных интегрирования),

$$u_0(y_0,x^0) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\eta^2-|\xi|^2}u_0(y_0,x^0)d\xi d\eta.$$

Таким образом,

$$u(y_0,x^0,t) - u_0(y_0,x^0) =$$

$$
= \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} \left[\sqrt{t}\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta, t) u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_0(y_0, x^0) e^{-\eta^2} \right] d\xi d\eta.
$$

Последнюю разность можно представить в виде

$$
\frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} \Bigg[u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) \times
$$

$$
\times \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_0(y_0, x^0) e^{-\eta^2} \Bigg] d\xi d\eta
$$

(см. вывод представления (1.5) в предыдущем разделе).

Пусть теперь $A > 0$, $G_1 = \left\{(\eta, \xi) \middle| \eta \in (-A, A), |\xi| < A\right\}$, $G_2 = \mathbb{R}^n \setminus G_1$; тогда $u(y_0, x^0, t) - u_0(y_0, x^0) = J_1 + J_2$, где

$$
J_j = \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{G_j} \Bigg[\int\limits_0^\infty u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \times
$$

$$
\times \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_0(y_0, x^0) e^{-\eta^2} \Bigg] e^{-|\xi|^2} d\eta d\xi,
$$

$j = 1, 2$.

Сначала оценим интеграл J_2:

$$
\left| \int\limits_{G_2} u_0(y_0, x^0) e^{-|\xi|^2 - \eta^2} d\eta d\xi \right| \leqslant \sup|u_0| \int\limits_{|\xi|^2 + \eta^2 \geqslant A^2} e^{-|\xi|^2 - \eta^2} d\xi d\eta = C_n \sup|u_0| \int\limits_A^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \xrightarrow{A \to \infty} 0
$$

(в силу сходимости последнего интеграла и ограниченности u_0).

Для оценки оставшегося слагаемого интеграла J_2 разобьем область интегрирования следующим образом:

$$
G_2 = \left\{\eta > A,\, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \cup \left\{\eta < -A,\, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\right\} \cup \{\eta \in [-A, A], |\xi| \geqslant A\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} G_{2,1} \cup G_{2,2} \cup G_{2,3};
$$

соответственно для $j = 1, 2, 3$ обозначим

$$
\int\limits_{G_{2,j}} e^{-|\xi|^2} \int\limits_0^\infty u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\eta d\xi
$$

через $\dfrac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2} J_{2,j}$.

Тогда

$$
J_{2,1} = \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{G_{2,1}} u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) \times
$$

$$
\times \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \cos 2z\eta \cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\eta d\xi +
$$

$$
+ \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{G_{2,1}} u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right) \times
$$

$$
\times \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \sin 2z\eta \sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\eta d\xi \stackrel{\mathrm{def}}{=} J_{2,1,1} + J_{2,1,2}.
$$

Ранее, оценивая интеграл I_3 в выражении (1.6), мы получили, что при $\eta \geqslant A$, $t \in (0,1]$
$$\Big|\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}\cos 2z\eta\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)dzd\eta d\xi\Big| \leqslant \frac{M}{\eta^2},$$
следовательно,
$$|J_{2,1,1}| \leqslant \frac{2M\sup|u_0|}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2}d\xi\int\limits_A^\infty \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{2M\sup|u_0|}{\pi A}.$$
Аналогично оценивается $J_{2,1,2}$. Отсюда $|J_{2,1}| \leqslant \dfrac{4M\sup|u_0|}{\pi A}$.

Точно так же получаем, что $|J_{2,2}| \leqslant \dfrac{4M\sup|u_0|}{\pi A}$.

Теперь оценим
$$J_{2,3} = \frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\limits_{|\xi|\geqslant A} e^{-|\xi|^2}\int\limits_{-A}^{A} u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}\cos 2z\eta\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)dzd\eta d\xi.$$
При $t \in (0,1]$
$$\Big|\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}\cos 2z\eta\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)dz\Big| \leqslant e^t\int\limits_0^\infty e^{-z^2}dz \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}e.$$
Следовательно,
$$|J_{2,3}| \leqslant \frac{2\sup|u_0|e}{\pi^{\frac{n}{2}}}A\int\limits_{|\xi|\geqslant A} e^{-|\xi|^2}d\xi = \frac{2C_n\sup|u_0|e}{\pi^{\frac{n}{2}}}A\int\limits_A^\infty r^{n-2}e^{-r^2}dr.$$
Последнее выражение стремится к нулю при $A \to \infty$. Действительно,
$$x\int\limits_x^\infty r^{n-2}e^{-r^2}dr = x\left(\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}} - \int\limits_0^x r^{n-2}e^{-r^2}dr\right) = \frac{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}} - \int\limits_0^x r^{n-2}e^{-r^2}dr}{\frac{1}{x}}.$$
Вычисляя предел
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{2}} - \int\limits_0^x r^{n-2}e^{-r^2}dr}{\frac{1}{x}}$$
по правилу Лопиталя, получаем, что он равен $\lim\limits_{x\to\infty} x^n e^{-x^2} = 0$.

Таким образом, для произвольного положительного ε можно выбрать такое положительное A, что $|J_2| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; зафиксируем такое A и рассмотрим интеграл J_1.

В силу непрерывности u_0 в точке (y_0, x^0) и леммы 1.3.1 можно выбрать положительное t_0 настолько малым, что для любого t из $(0, t_0)$ и для любого (η, ξ) из G_1
$$\Bigg|u_0\left(y_0 - 2\sqrt{t}\eta, x^0 - 2\sqrt{t}\xi\right)\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)dz -$$
$$-u_0(y_0, x^0)\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\eta^2}\Bigg| < \frac{\varepsilon}{2}\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2}\frac{1}{(2A)^n}, \quad \text{т. е.} \quad |J_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, в силу произвольности выбора положительного ε,

$$\lim_{t\to+0} u(y_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, t) = u_0(y_0, x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0).$$

Тем самым, поскольку вещественные $x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0$, y_0 выбраны произвольно, доказано следующее утверждение:

Теорема 1.4.2. *Пусть $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$. Тогда функция, определенная равенством* (1.10)*, является классическим решением задачи* (1.7)*,* (1.4).

1.5. Единственность решения

Возьмем произвольное положительное T и рассмотрим функцию $u(x,t) = u(x', x_n, t)$, определяемую как

$$\frac{2}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u_0\left(x' - 2\sqrt{t}\xi, x_n - 2\sqrt{t}\eta\right) e^{-|\xi|^2} \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\xi d\eta, \tag{1.11}$$

удовлетворяющую, в силу теоремы 1.4.2, задаче (1.7), (1.4).

Докажем следующее утверждение:

Теорема 1.5.1. *Пусть $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$. Тогда функция* (1.11) *является единственным ограниченным решением задачи* (1.7)*,* (1.4) *в области* $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция (1.11) ограничена.

Представляя $\cos\left(2z\eta - t\sum\limits_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right)$ как косинус разности, разобьем $\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{2} u(x,t)$ на два слагаемых; достаточно оценить только одно из них, например,

$$I_1 \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} u_0\left(x' - 2\sqrt{t}\xi, x_n - 2\sqrt{t}\eta\right) e^{-|\xi|^2} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^m a_k \cos\frac{b_k z}{\sqrt{t}}} \cos 2z\eta \cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k \sin\frac{b_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\xi d\eta.$$

В I_1 представим область интегрирования по переменным (ξ, η) в виде $G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4$, где

$$G_1 = \left\{(\xi,\eta)\Big|\eta \in (-1,1), |\xi| < 1\right\}, \; G_2 = \left\{(\xi,\eta)\Big|\eta > 1, \; \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\right\},$$

$$G_3 = \left\{(\xi,\eta)\Big|\eta < -1, \; \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\right\}, \; G_4 = \left\{(\xi,\eta)\Big|\eta \in [-1,1], |\xi| \geqslant 1\right\}.$$

Соответствующие слагаемые интеграла I_1 обозначим через J_1, J_2, J_3, J_4. Оценим эти слагаемые.

$$|J_1| \leqslant |G_1| \sup |u_0| e^{t\sum\limits_{k=1}^m |a_k|} \int\limits_0^\infty e^{-z^2} dz \leqslant 2^{n-1}\sqrt{\pi} \sup|u_0| e^{T\sum\limits_{k=1}^m |a_k|}.$$

Внутренний интеграл в J_4 оценивается сверху (по модулю) через

$$e^{t\sum\limits_{k=1}^m |a_k|} \int\limits_0^\infty e^{-z^2} dz \leqslant e^{T\sum\limits_{k=1}^m |a_k|} \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

поэтому

$$|J_4| \leqslant \sqrt{\pi} \sup|u_0| e^{T\sum\limits_{k=1}^m |a_k|} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|\xi|^2} d\xi = \pi^{\frac{n}{2}} \sup|u_0| e^{T\sum\limits_{k=1}^m |a_k|}.$$

Для оценки слагаемого J_2 представим его внутренний интеграл в виде

$$-\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)\right]''_z\cos 2\eta z\,dz. \tag{1.12}$$

Теперь обозначим $t\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos\dfrac{b_kz}{\sqrt{t}}$, $t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin\dfrac{b_kz}{\sqrt{t}}$ через $f_1(z)$, $f_2(z)$ соответственно.

$$f_1'(z)=-\sqrt{t}\sum_{k=1}^m a_kb_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}},\ \ f_1''(z)=-\sum_{k=1}^m a_kb_k^2\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}};$$

$$f_2'(z)=\sqrt{t}\sum_{k=1}^m a_kb_k\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}},\ \ f_2''(z)=-\sum_{k=1}^m a_kb_k^2\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}.$$

Отсюда

$$|f_j|\leqslant t\sum_{k=1}^m|a_k|, |f_j'|\leqslant\sqrt{t}\sum_{k=1}^m|a_k||b_k|, |f_j''|\leqslant\sum_{k=1}^m|a_k|b_k^2\quad(j=1,2). \tag{1.13}$$

Далее

$$\begin{aligned}
&[e^{-z^2+f_1(z)}]'=(f_1'(z)-2z)e^{-z^2+f_1(z)},\\
&[e^{-z^2+f_1(z)}]''=[(f_1'(z)-2z)^2+(f_1''(z)-2)]e^{-z^2+f_1(z)},\\
&[\cos f_2(z)]'=-f_2'(z)\sin f_2(z),\\
&[\cos f_2(z)]''=-f_2''(z)\sin f_2(z)-[f_2'(z)]^2\cos f_2(z).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left[e^{-z^2+f_1(z)}\cos g(z)\right]''&=-e^{-z^2+f_1(z)}\left(f_2''(z)\sin f_2(z)+[f_2'(z)]^2\cos f_2(z)\right)-\\
&-2f_2'(z)\sin f_2(z)[f_1'(z)-2z]e^{-z^2+f_1(z)}+\cos f_2(z)e^{-z^2+f_1(z)}\left([f_1'(z)]^2-4zf_1'(z)+4z^2+f_1''(z)-2\right).
\end{aligned}$$

Модуль последнего выражения не превосходит

$$e^{t\sum\limits_{k=1}^m|a_k|}e^{-z^2}\left(|f_1'|^2+4z|f_1'|+|f_1''|+4z^2+2+4z|f_2'|+2|f_1'||f_2'|+|f_2''|+|f_2'|^2\right).$$

Отсюда с учетом оценок (1.13) следует, что модуль выражения (1.12) не превосходит

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{t\sum\limits_{k=1}^m|a_k|}}{2\eta^2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left[2t\left(\sum_{k=1}^m|a_k||b_k|\right)^2+4z\sqrt{t}\sum_{k=1}^m|a_k||b_k|+\sum_{k=1}^m|a_k|b_k^2+2z^2+1\right]dz\leqslant\\
&\leqslant\frac{M(1+T)e^{T\sum\limits_{k=1}^m|a_k|}}{\eta^2},
\end{aligned}$$

где постоянная M зависит только от (векторных) параметров a и b.

Таким образом,

$$|J_2|\leqslant M(1+T)e^{T\sum\limits_{k=1}^m|a_k|}\sup|u_0|\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}e^{-|\xi|^2}d\xi\int\limits_1^\infty\frac{d\eta}{\eta^2}=M(1+T)e^{T\sum\limits_{k=1}^m|a_k|}\sup|u_0|\pi^{\frac{n-1}{2}}.$$

$|J_3|$ оценивается аналогично.

Итак, ограниченность I_1 доказана. Следовательно, доказана и ограниченность $u(x,t)$.

Далее уравнение (1.7) можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{r=1}^{m+1}L_rP_ru,$$

где $P_{m+1} = \Delta$, $L_{m+1} = I$, а при $r = \overline{1,m}$ $P_r = a_r I$ и операторы L_r действуют следующим образом: $L_r g(x) = g(x - b_r h)$. А из [2] известно, что для таких уравнений при $u_0(x) \equiv 0$ не существует нетривиальных ограниченных решений задачи (1.7), (1.4).

Тем самым в силу линейности уравнения (1.7) теорема 1.5.1 доказана. □

Теперь рассмотрим задачу (1.7), (1.4) во всем полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$. Функция $u(x,t)$, определенная равенством (1.11), является классическим решением этой задачи, обладающим следующим свойством: для любого t_0 из $(0,+\infty)$ $u(x,t)$ ограничена в слое $\mathbb{R}^n \times [0,t_0]$. Покажем, что из теоремы 1.5.1 вытекает

Следствие 1.5.1. *Функция* (1.11) *есть единственное решение задачи* (1.7), (1.4) *в полупространстве* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, *которое ограничено в* $\mathbb{R}^n \times [0,t_0]$ *при каждом* $t_0 > 0$.

Доказательство. Предположим, напротив, что существуют два различных таких решения: $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда отличная от тождественного нуля $v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t)$ ограничена в $\mathbb{R}^n \times [0,t_0]$ при каждом $t_0 > 0$ и удовлетворяет уравнению (1.7) и условию (1.4) с тривиальной начальной функцией. Существует такая $(x^*,t^*) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, что $v(x^*,t^*) \neq 0$. Тогда, обозначая t^*+1 через T, получаем, что для конечного T существует ограниченное решение задачи (1.7), (1.4) с тривиальной начальной функцией, что противоречит теореме 1.5.1.

Следствие 1.5.1 доказано. □

Замечание 1.5.1. Мы использовали единственность ограниченного решения задачи (1.7), (1.4), однако утверждение теоремы 2 работы [2] является более сильным — оно определяет более широкий класс единственности. Поэтому решение (1.11) единственно и в более широком классе, а именно — в классе функций, при любом положительном T удовлетворяющих оценке

$$\sup_{t\in[0,T]} |u(x,t)| \leqslant C e^{q|x|\ln(|x|+1)},$$

если $q < \dfrac{1}{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m} |b_k|}$.

1.6. Асимптотические свойства решения

В этом разделе мы рассматриваем уравнение (1.7) в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} u(x + b_{jk}h_j, t), \tag{1.14}$$

где $h_j \stackrel{\text{def}}{=} (h_{j1},\dots,h_{jn})$ — взаимно ортогональные (при $j = \overline{1,n}$) в $\mathbb{R}^n$ векторы единичной длины, $a_{jk}, b_{jk} \in \mathbb{R}^1$ при $k = \overline{1,m_j}, j = \overline{1,n}$.

Тогда функция (1.11), являющаяся (согласно теореме 1.5.1) единственным решением задачи (1.14), (1.4) в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, которое ограничено в $\mathbb{R}^n \times [0,t_0]$ при каждом $t_0 > 0$, имеет вид

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x - 2\sqrt{t}\eta) \prod_{j=1}^{n} \int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2\eta_j z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right) dz d\eta. \tag{1.15}$$

Будем считать (не ограничивая общности), что (конечная) числовая последовательность $\{a_{jk}\}_{k=1}^{m_j}$, $j = \overline{1,n}$, упорядочена по неубыванию. Для каждого $j \in \overline{1,n}$ обозначим $\min\limits_{a_{jk}>0} k$ через m_j^0; для тех j, при которых $a_{jk} < 0$ для любых $k \in \overline{1,m_j}$, в качестве m_j^0 возьмем $m_j + 1$. Обозначим через L дифференциально-разностный оператор, стоящий в правой части уравнения (1.14). Наряду с этим оператором важную роль в дальнейшем исследовании будет играть оператор $\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{L}u \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k<m_j^0} a_{jk} u(x + b_{jk}h_j, t).$$

Обозначим оператор $\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k<m_j^0} a_{jk}I-\mathcal{L}$ через R и рассмотрим вещественную часть его символа (или, что то же самое, символ оператора $R+R^*$):

$$\mathrm{Re}R(\xi)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k<m_j^0} a_{jk}+|\xi|^2-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k<m_j^0} a_{jk}\cos b_{jk}\xi_j$$

(см. [124, § 8]). Назовем $R(\xi)$ положительно определенным, если существует такое положительное C, что $\mathrm{Re}R(\xi)\geqslant C|\xi|^2$ для любого ξ из $\mathbb{R}^n$. По аналогии с дифференциальными операторами (см., например, [90, с. 66 и с. 78]), оператор R, обладающий указанным свойством, можно назвать сильно эллиптическим во всем пространстве оператором второго порядка. Отметим, однако, что, как и в случае ограниченной области (см. [124, § 9]), сильная эллиптичность дифференциального и дифференциально-разностного операторов различаются существенным образом, поэтому влияние разностных членов имеет принципиальное значение.

Основным результатом данного раздела является

Теорема 1.6.1. *Пусть $R(\xi)$ положительно определен. Тогда для любого x из $\mathbb{R}^n$*

$$\lim_{t\to+\infty}\left[e^{-t\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_j}a_{jk}}u(x,t)-w\left(\frac{x_1+q_1t}{p_1},\ldots,\frac{x_n+q_nt}{p_n},t\right)\right]=0, \tag{1.16}$$

где $w(x,t)$ — ограниченное решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией $u_0(p_1x_1,\ldots,p_nx_n)$,

$$p_j=\sqrt{1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}b_{jk}^2},\qquad q_j=\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}b_{jk},\ j=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы $p_1,\ldots,p_n$ определены корректно и отличны от нуля. Возьмем произвольное $j\in\overline{1,n}$. Из условия теоремы следует, что

$$\sum_{k<m_j^0}a_{jk}+\xi_j^2-\sum_{k<m_j^0}a_{jk}\cos b_{jk}\xi_j\geqslant C\xi_j^2$$

для любого положительного ξ_j (условие положительной определенности, в котором $\xi_1,\ldots,\xi_{j-1}$, $\xi_{j+1},\ldots,\xi_n$ положены равными нулю). Отсюда

$$C\xi_j^2\leqslant\xi_j^2+\sum_{k<m_j^0}a_{jk}(1-\cos b_{jk}\xi_j)=\xi_j^2+2\sum_{k<m_j^0}a_{jk}\sin^2\frac{b_{jk}\xi_j}{2}=\xi_j^2+\frac{\xi_j^2}{2}\sum_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2\left(\frac{\sin\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}{\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}\right)^2,$$

значит, $1+\frac{1}{2}\sum\limits_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2\left(\frac{\sin\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}{\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}\right)^2\geqslant C$ для любого $\xi_j>0$. Поэтому $\frac{1}{2}\sum\limits_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2>-1$. Действительно, предположим, напротив, что $\frac{1}{2}\sum\limits_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2\leqslant-1$; тогда для любого $\xi_j>0$

$$C\leqslant1+\frac{1}{2}\sum_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2-\frac{1}{2}\sum_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2+\frac{1}{2}\sum_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2\left(\frac{\sin\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}{\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\sum_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2\left[\left(\frac{\sin\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}{\frac{b_{jk}\xi_j}{2}}\right)^2-1\right].$$

Однако в силу конечности суммы можно выбрать столь малое положительное ξ_j, что последнее выражение не превзойдет $\frac{C}{2}$. Полученное противоречие и доказывает положительность величины $\frac{1}{2}\sum\limits_{k<m_j^0}a_{jk}b_{jk}^2+1$, следовательно, p_j определено и положительно. □

Теперь докажем две предварительные леммы.

Лемма 1.6.1. *В условиях теоремы* 1.6.1 *для любого* $j \in \overline{1,n}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}-1\right)} \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-\frac{(2\eta-q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

равномерно по $\eta \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Пусть $j \in \overline{1,n}$. Переобозначим m_j через m, m_j^0 — через m_0, p_j — через p, q_j — через q, a_{jk} — через a_k, b_{jk} — через b_k; $k=\overline{1,m}$. Для любого вещественного η и любого положительного t

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2p}e^{-\frac{(2\eta-q\sqrt{t})^2}{4p^2}} = \int\limits_0^\infty e^{-p^2z^2}\cos(2\eta - q\sqrt{t})zdz,$$

следовательно,

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\left(\cos\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-1\right)} \cos\left(2z\eta - t\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2p}e^{-\frac{(2\eta-q\sqrt{t})^2}{4p^2}} = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left(\cos 2\eta z\left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right) - e^{(1-p^2)z^2}\cos(qz\sqrt{t})\right]\right)dz,$$

$$I_2 = \sin 2\eta z\left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right) - e^{(1-p^2)z^2}\sin(qz\sqrt{t})\right]dz.$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-z^2}\cos 2\eta z\left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right) - e^{(1-p^2)z^2}\cos(qz\sqrt{t})\right]dz =$$

$$= \int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\infty \stackrel{\text{def}}{=} I_{3,\delta} + I_{4,\delta}.$$

Возьмем произвольное положительное ε. Вначале оценим $I_{4,\delta}$.

Модуль второго слагаемого его подынтегральной функции не превосходит $e^{-p^2z^2}$; рассмотрим теперь ее первое слагаемое:

$$2t\sum_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}} = 2t\sum_{k=1}^m a_k\frac{\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_k^2z^2}{4t}}\frac{b_k^2z^2}{4t} = \frac{z^2}{2}\sum_{k=1}^m a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2,$$

следовательно, указанное слагаемое подынтегральной функции по абсолютной величине не превосходит $e^{-z^2-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k=1}^m a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2}$. По условию теоремы 1.6.1

$$-\frac{1}{2}\sum_{k<m_0} a_kb_k^2 < 1,$$

значит,

$$-\frac{1}{2}\sum_{k<m_0} a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2 < 1$$

в силу отрицательности каждого a_k в последней сумме. Поэтому показатель последней экспоненты можно представить в виде

$$-z^2-\frac{z^2}{2}\sum_{k<m_0}a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2-\frac{z^2}{2}\sum_{k\geqslant m_0}a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2<-\frac{z^2}{2}\left[1+\sum_{k\geqslant m_0}a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2\right].$$

Таким образом, исследуемая подынтегральная функция по абсолютной величине не превосходит $2e^{-\gamma z^2}$, где

$$\gamma=\min\left(p^2,1+\frac{1}{2}\inf_{\substack{z>0\\t>0}}\sum_{k\geqslant m_0}a_kb_k^2\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2\right)=\min(p^2,1)$$

в силу положительности каждого a_k в последней сумме. Значит, $\gamma>0$, поэтому можно выбрать такое положительное δ, что $\left|I_{4,\delta}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$. Зафиксируем это δ и оценим $I_{3,\delta}$. Разность в квадратных скобках его подынтегрального выражения равна

$$e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m}a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)-\cos(qz\sqrt{t})\right]+\cos(qz\sqrt{t})\left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}-e^{(1-p^2)z^2}\right]. \tag{1.17}$$

Оценим второе слагаемое суммы (1.17):

$$e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}-e^{(1-p^2)z^2}=e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}-e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_kb_k^2}=$$
$$=e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_kb_k^2}\left[e^{\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\left(\frac{b_k^2z^2}{2}-2t\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}\right)}-1\right];$$

$$\frac{b_k^2z^2}{2}-2t\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}=\frac{b_k^2z^2}{2}-\frac{b_k^2z^2}{2}\left(\frac{2\sqrt{t}}{b_kz}\right)^2\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}=$$
$$=\frac{b_k^2z^2}{2}\left[1-\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)^2\right]=\frac{b_k^2z^2}{2}\left(1+\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right)\left(1-\frac{\sin\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\right).$$

Для любого $\varepsilon_1>0$ и для любого $k=\overline{1,m}$ существует такое положительное $\delta_{1,k}$, что для любого $x\in(-\delta_{1,k},\delta_{1,k})$ справедливо неравенство $\left|\dfrac{\sin x}{x}-1\right|<\dfrac{\varepsilon_1}{m|a_k|b_k^2\delta^2}$; с другой стороны, $\left|\dfrac{\sin x}{x}+1\right|<3$ для всех x; следовательно,

$$|a_k|\left|\frac{b_k^2z^2}{2}-2t\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}\right|<\frac{3\varepsilon_1}{2m}$$

для любого $t>\left(\dfrac{b_k\delta}{2\delta_{1,k}}\right)^2$ и любого $z\in[0,\delta]$. Выберем ε_1 настолько малым, что

$$e^{\frac{3\varepsilon_1}{2}},e^{-\frac{3\varepsilon_1}{2}}\in\left(1-\frac{\varepsilon e^{-\delta^2}}{4\sqrt{\pi}},1+\frac{\varepsilon e^{-\delta^2}}{4\sqrt{\pi}}\right).$$

Тогда

$$e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_kb_k^2}=e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k<m_0}a_kb_k^2-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k\geqslant m_0}a_kb_k^2}\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k<m_0}a_kb_k^2}\leqslant e^{z^2}\leqslant e^{\delta^2}$$

для любого $z\in[0,\delta]$, а значит, для указанных z и для любого $t>\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\dfrac{b_k\delta}{2\delta_{1,k}}\right)^2$ имеем

$$\left|\cos(qz\sqrt{t})\left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}-e^{(1-p^2)z^2}\right]\right|<\frac{\varepsilon}{4\sqrt{\pi}}=\frac{\varepsilon}{8}\left(\int_0^\infty e^{-z^2}dz\right)^{-1}. \tag{1.18}$$

Теперь оценим первое слагаемое выражения (1.17).

$$\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)-\cos(qz\sqrt{t})=\cos\left(q\sqrt{t}z+t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z\right)-\cos(qz\sqrt{t})=$$
$$=\cos(q\sqrt{t}z)\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z\right)-1\right]-$$
$$-\sin(q\sqrt{t}z)\sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z\right). \tag{1.19}$$

$$t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z=\sum_{k=1}^m a_k\left(t\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-b_k\sqrt{t}z\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^m a_kb_k\sqrt{t}z\left(\frac{\sqrt{t}}{b_kz}\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-1\right)=\sum_{k=1}^m a_k(b_kz)^2\frac{\sqrt{t}}{b_kz}\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}-1\right).$$
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2}=0,$$

следовательно, для любого $\varepsilon_1>0$ и для любого $k=\overline{1,m}$ существует такое положительное T_k, что для любого $t>T_k$ и для любого $z\in[0,\delta]$

$$\left|\frac{\sqrt{t}}{b_kz}\left(\frac{\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}{\frac{b_kz}{\sqrt{t}}}-1\right)\right|<\frac{\varepsilon_1}{m|a_k|b_k^2\delta^2},$$

следовательно, для любого $t>\max\limits_{1\leqslant k\leqslant m}T_k$

$$\left|\sin(q\sqrt{t}z)\sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z\right)\right|<|\sin\varepsilon_1|.$$

Далее

$$\left|\cos(q\sqrt{t}z)\left[\cos\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z\right)-1\right]\right|=\left|-2\cos(q\sqrt{t}z)\sin^2\frac{t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z}{2}\right|\leqslant$$
$$\leqslant2\sin^2\frac{t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}-q\sqrt{t}z}{2};$$

выбрав достаточно большое t, последнее выражение можно, как и выше, сделать меньше, чем $2\sin^2\dfrac{\varepsilon_1}{2}$, независимо от $z\in[0,\delta]$. Таким образом, выбрав ε_1 настолько малым, что неравенство $|\sin\varepsilon_1|+2\sin^2\dfrac{\varepsilon_1}{2}<\dfrac{\varepsilon e^{-\delta^2}}{4\sqrt{\pi}}$ выполняется, получаем, учитывая неравенство

$$e^{-2t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\leqslant e^{-2t\sum\limits_{k<m_0} a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\leqslant e^{-\frac{z^2}{2}\sum\limits_{k<m_0} a_kb_k^2}\leqslant e^{z^2},$$

что начиная с некоторого t модуль выражения (1.17) не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{4}\left(\displaystyle\int_0^\infty e^{-z^2}dz\right)^{-1}$. Значит, существует такое положительное T, что для любого $t>T$ $\left|I_{3,\delta}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$, т. е. $\left|I_1\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

I_2 оценивается аналогично:

$$e^{-2t\sum\limits_{k=1}^m a_k\sin^2\frac{b_kz}{2\sqrt{t}}}\sin\left(t\sum_{k=1}^m a_k\sin\frac{b_kz}{\sqrt{t}}\right)-e^{(1-p^2)z^2}\sin(qz\sqrt{t})=$$

$$= \left[e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin^2 \frac{b_k z}{2\sqrt{t}}} - e^{(1-p^2)z^2} \right] \sin(qz\sqrt{t}) +$$

$$+ e^{-2t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin^2 \frac{b_k z}{2\sqrt{t}}} \left[\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) - \sin(qz\sqrt{t}) \right];$$

первое из этих слагаемых оценивается точно так же, как и (1.18). Осталось оценить второе:

$$\sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) - \sin(qz\sqrt{t}) = \sin\left(qz\sqrt{t} + t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t} \right) - \sin(qz\sqrt{t}) =$$

$$= \sin(qz\sqrt{t}) \left[\cos\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t} \right) - 1 \right] + \cos(qz\sqrt{t}) \sin\left(t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{hz}{\sqrt{t}} - qz\sqrt{t} \right);$$

а это выражение оценивается точно так же, как и (1.19). Итак, существует такое $T > 0$, что $\left|I_2\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $t > T$.

Лемма 1.6.1 доказана. □

Лемма 1.6.2. *В условиях теоремы* 1.6.1 *для любого* $j \in \overline{1,n}$ *существует такое* M_j, *зависящее только от коэффициентов* $a_{j1}, \ldots, a_{jm_j}, b_{j1}, \ldots, b_{jm_j}$, *что*

$$\left| \int_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos \frac{b_{jk} z}{\sqrt{t}} - 1\right)} \cos\left(yz - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk} \sin \frac{b_{jk} z}{\sqrt{t}} \right) dz \right| \leqslant \frac{M_j}{y^2}$$

для любых $y \in (0, +\infty), t \in [1, +\infty)$.

Доказательство. Возьмем произвольное $j \in \overline{1,n}$ и переобозначим m_j через m, m_j^0 — через m_0, p_j — через p, q_j — через q, a_{jk} — через a_k, b_{jk} — через b_k; $k = \overline{1,m}$. Достаточно оценить одно из двух слагаемых последнего интеграла (второе слагаемое оценивается аналогично), например,

$$\int_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\left(\cos \frac{b_k z}{\sqrt{t}} - 1\right)} \cos yz \cos\left(q\sqrt{t}z - t\sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{b_k z}{\sqrt{t}} \right) dz,$$

или, что равносильно,

$$\int_0^\infty e^{-z^2 + \frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\cos b_k zt - 1)} \cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt \right) \cos yz dz.$$

В результате двукратного интегрирования по частям получаем, что последний интеграл равен $-\dfrac{1}{y^2}\displaystyle\int_0^\infty g''(z)\cos yz dz$, где

$$g(z) = e^{-z^2 + \frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\cos b_k zt - 1)} \cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt \right)$$

(легко проверить, что внеинтегральные члены равны нулю). Поэтому достаточно показать, что при произвольных фиксированных значениях (векторных) параметров a и b, удовлетворяющих условиям теоремы 1.6.1, последний интеграл ограничен равномерно по $t > 0$.

$$g'(z) = \frac{1}{t} e^{-z^2 + \frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(\cos b_k zt - 1)} \left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \left[\sin\left(\frac{qz}{t} - b_k zt - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt \right) \right] - 2zt \cos\left(\frac{qz}{t} - \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m} a_k \sin b_k zt \right) \right).$$

$$g''(z)=\frac{1}{t}e^{-z^2+\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k(\cos b_kzt-1)}\left(-2z-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\sin\left(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)-\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\right]-\right.$$
$$\left.-\,2zt\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\right)+\frac{1}{t}e^{-z^2+\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k(\cos b_kzt-1)}\times$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\left(\frac{q}{t}-b_kt-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\right)\cos\left(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\left(\frac{q}{t}-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\times\cos b_kzt\right)\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\right]-$$
$$-\,2t\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)+$$
$$\left.+\,2tz\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\left(\frac{q}{t}-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\times\cos b_kzt\right)\right).$$

$$e^{\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k(\cos b_kzt-1)}=e^{\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k<m_0}a_k(\cos b_kzt-1)+\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k\geqslant m_0}a_k(\cos b_kzt-1)}\leqslant e^{\frac{1}{t^2}\sum\limits_{k<m_0}a_k(\cos b_kzt-1)}\leqslant e^{-2\sum\limits_{k<m_0}a_k}.$$

Далее слагаемые

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}z^2\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)dz,$$
$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)dz,$$
$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k^2\cos\left(\frac{qz}{t}-b_kzt-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)dz$$

ограничены равномерно по $t>0$, поэтому достаточно оценить интеграл $\int\limits_0^\infty e^{-z^2}|\Psi(z;t)|dz$, где функция $\Psi(z;t)$ представляет из себя сумму слагаемых вида

$$\left(\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\sin\left(\frac{qz}{t}-b_ktz-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)-\right.$$
$$\left.-\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\right],$$

$$\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\left(\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt-\frac{q}{t^2}\right)\cos\left(\frac{qz}{t}-b_ktz-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\right],$$

$$\left(\frac{q}{t^2}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\right)\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)-$$
$$-2z\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_k\sin b_kzt\right)\frac{1}{t}\left(q-\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt\right).$$

Имеем

$$q-\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\cos b_kzt=\sum_{k=1}^{m}a_kb_k(1-\cos b_kzt)=2\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin^2\frac{b_ktz}{2};$$

$$\frac{1}{t^2}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2}\,dz=\frac{b_k^2}{4}\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left(\frac{\sin^2\frac{b_ktz}{2}}{\frac{b_ktz}{2}}\right)^2z^2dz\leqslant\frac{b_k^2}{4}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz$$

— ограничен равномерно по $t>0$;

$$\int\limits_0^\infty\frac{z}{t}e^{-z^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2}\,dz\leqslant\int\limits_0^\infty ze^{-z^2}\frac{\left|\sin\frac{b_ktz}{2}\right|}{t}\,dz=\frac{|b_k|}{2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}\left|\frac{\sin\frac{b_ktz}{2}}{\frac{b_ktz}{2}}\right|dz\leqslant\frac{|b_k|}{2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz$$

— ограничен равномерно по $t>0$.

Таким образом, достаточно оценить интеграл

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2}\left|\left(\frac{2z}{t}+\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\left[\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt-b_ktz\right)\right]\right|dz.$$

В последнем интеграле выражение в квадратных скобках равно

$$2\sin^2\frac{b_ktz}{2}\sin\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right)+\sin b_ktz\cos\left(\frac{qz}{t}-\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{m}a_kb_k\sin b_kzt\right),$$

поэтому достаточно оценить интегралы от

$$e^{-z^2}\frac{z}{t}\sin^2\frac{b_ktz}{2},\ e^{-z^2}\frac{|\sin b_ktz|}{t^2}\sin^2\frac{b_ktz}{2},\ e^{-z^2}\frac{|\sin b_ktz|}{t^2}|\sin b_ktz|,\ e^{-z^2}\frac{z}{t}|\sin b_ktz|.$$

Первые три из этих интегралов сводятся к интегралам, оцененным выше, а последний равен $|b_k|\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}\left|\frac{\sin b_ktz}{b_ktz}\right|dz$, т. е., не превосходит $|b_k|\int\limits_0^\infty z^2e^{-z^2}dz$, а значит, ограничен равномерно по $t>0$.

Лемма 1.6.2 доказана. □

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы 1.6.1.

Пусть $x_0=(x_1^0,\dots,x_n^0)$ — произвольная точка $\mathbb{R}^n$. Тогда, используя интегральное представления решения задачи Коши для уравнения теплопроводности, имеем:

$$w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{p_1},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{p_n},t\right)=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{j=1}^{n}p_j}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(2\eta_j+q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}}u_0(x_1^0-2\eta_1\sqrt{t},\dots,x_n^0-2\eta_n\sqrt{t})d\eta.$$

Следовательно, разность

$$e^{-t\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_j}a_{jk}}u(x_0,t)-w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{p_1},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{p_n},t\right)$$

может быть представлена в виде

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}u_0(x_1^0-2\eta_1\sqrt{t},\dots,x_n^0-2\eta_n\sqrt{t})\times$$
$$\times\left[\prod_{j=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^{m_j}a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}-1\right)}\cos\left(2\eta_jz+t\sum_{k=1}^{m_j}a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right)dz-\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}p_j}e^{-\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(2\eta_j+q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}}\right]d\eta.$$

Заменой переменных $y_j = 2\eta_j + q_j\sqrt{t},\ j = \overline{1,n}$, последнее выражение приводится к виду

$$\frac{1}{\pi^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_1^0 + q_1 t - y_1\sqrt{t}, \ldots, x_n^0 + q_n t - y_n\sqrt{t}) \left[\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)} \times \right.$$
$$\left. \times \cos\left(y_j z - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right) dz - \prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-\frac{y_j^2}{4p_j^2}}\right] dy, \tag{1.20}$$

что можно представить в виде суммы

$$\frac{1}{\pi^n}\left(\int\limits_{Q(A)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q(A)}\right) \overset{\mathrm{def}}{=} J_1 + J_2,$$

где A — положительный параметр.

Пусть $\varepsilon > 0$. В (1.20) каждый внутренний (одномерный) интеграл является ограниченной функцией переменных y_j, t. Действительно, показатель экспоненты в подынтегральном выражении не превосходит

$$-z^2 + t\sum_{k<m_0} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right) =$$
$$= -z^2 + t\sum_{k<m_0} a_{jk}\left(\frac{\sin\frac{b_{jk}z}{2\sqrt{t}}}{\frac{b_{jk}z}{2\sqrt{t}}}\right)^2\left(\frac{b_{jk}z}{2\sqrt{t}}\right)^2 \overset{\mathrm{def}}{=} -z^2\left[1 + \frac{1}{2}\sum_{k<m_0} a_{jk}b_{jk}^2\left(\frac{\sin\alpha_{z,t}}{\alpha_{z,t}}\right)^2\right].$$

В последней сумме все a_{jk} отрицательны, поэтому

$$-z^2 + t\sum_{k<m_0} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right) \leqslant -z^2\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k<m_0} a_{jk}b_{jk}^2\right) \overset{\mathrm{def}}{=} -\gamma z^2,$$

где $\gamma > 0$ в силу условия теоремы. Тогда из леммы 1.6.2 следует, что каждый из указанных (одномерных) интегралов ограничен сверху по модулю функцией $g_j(\eta_j) \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{M_j}{1+\eta_j^2}$ с некоторой положительной постоянной M_j. Теперь, используя ограниченность функции u_0, выберем такое A, что $J_2 < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого t из $[1, +\infty)$. Зафиксируем выбранное A и рассмотрим J_1. В силу леммы 1.6.1 и ограниченности внутренних интегралов выражения (1.20), разность в квадратных скобках выражения (1.20) стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно относительно $y \in \mathbb{R}^n$. Действительно, в силу леммы 1.6.1 существует такое положительное T, что для любого $t \in (T, +\infty)$, для любого $j \in \overline{1,n}$ и для любого $\eta_j \in (-\infty, +\infty)$

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)} \cos\left(2\eta_j z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right) dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-\frac{(2\eta_j + q_j\sqrt{t})^2}{4p_j^2}}\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}A^n \sup|u_0|}$$

(заметим, что в лемме 1.6.1 не накладывается никаких условий на знаки коэффициентов b_{jk}). Значит, последнее неравенство верно и для η_j, равного $\dfrac{y_j - q_j\sqrt{t}}{2}$ при любом вещественном y_j. Следовательно, для любого t из $(T, +\infty)$

$$\left|\prod_{j=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2 + t\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}\left(\cos\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}} - 1\right)} \cos\left(y_j z - q_j\sqrt{t}z + t\sum_{k=1}^{m_j} a_{jk}\sin\frac{b_{jk}z}{\sqrt{t}}\right) dz - \prod_{j=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2p_j}e^{-\frac{y_j^2}{2p_j^2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}A^n \sup|u_0|},$$

что в силу произвольности выбора x_0 и доказывает теорему.

Замечание 1.6.1. Экспоненциальный вес, который возникает в полученной теореме о близости решений, обусловлен не наличием в уравнении разностных членов, а диссипативностью задачи. Указанный вес сохраняется и в классическом случае: при обращении всех коэффициентов b_{jk} в нуль предельное соотношение (1.16) обращается в тождественное (при всех t) равенство. Дело в том, что добавление в параболическое уравнение младших членов (более точно — членов нулевого порядка) выводит решение за пределы класса ограниченных функций (даже в случае ограниченной начальной функции), а умножение его на соответствующий экспоненциальный (по t) вес возвращает решение в указанный класс.

Отметим, что теоремы о близости решений, вообще говоря, являются более сильными, чем теоремы о стабилизации. Поэтому и теорема 1.6.1 устанавливает более общий характер поведения решения при $t \to \infty$, нежели стабилизация. Стоит, однако, указать важный частный случай, в котором имеет место классическая поточечная стабилизация решения: это случай, когда оператор L симметричен. В этом случае мы можем применить результат Репникова—Эйдельмана (см. [81]) о том, что необходимым и достаточным условием стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности (обозначим это решение через $v(x,t)$) является выполнение следующего предельного соотношения для ограниченной начальной функции (обозначенной здесь через $v_0(x)$):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} t^n} \int\limits_{|x|<t} v_0(x)dx = l, \tag{1.21}$$

где l — некоторая вещественная постоянная.

Отсюда получаем

Следствие 1.6.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.6.1, L *симметричен*, $l \in \mathbb{R}^1$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}} u(x,t) = l \text{ *для любого* } x \in \mathbb{R}^n$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} t^n \prod\limits_{j=1}^{n} p_j} \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{x_j^2}{p_j^2}<t^2} u_0(x)dx = l.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в силу симметричности оператора L его можно представить (см. [124, лемма 8.2]) в следующем виде: $Lu = \Delta u + \sum\limits_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x-h,t)$, где $\mathcal{M}$ — такое конечное множество векторов $\mathbb{R}^n$, что для любого h, принадлежащего $\mathcal{M}$, вектор $-h$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$, и $a_h = a_{-h}$ для любого h из $\mathcal{M}$. Отсюда $q_1 = \dots = q_n = 0$. Теперь остается лишь применить к функции $w(x,t)$ указанную теорему о стабилизации из [81].

Замечание 1.6.2. Из следствия 1.6.1 видно, что в дифференциально-разностном случае поверхности, ограничивающие области усреднения начальной функции, вообще говоря, уже не являются сферами: они обращаются в эллипсоиды. Напомним, что в классическом случае дифференциальных уравнений такой эффект возникает, если заменить оператор Лапласа эллиптическим оператором с различными коэффициентами при различных вторых производных: $\sum\limits_{j=1}^{n} p_j^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$.

Замечание 1.6.3. В условии следствия 1.6.1 требование симметричности оператора L можно ослабить, заменив его следующим требованием: $a_j \perp b_j$ для любого $j \in \overline{1,n}$, где векторы a_j, b_j определяются следующим образом:

$$a_j = (a_{j1}, \dots, a_{jm_j}),\ b_j = (b_{j1}, \dots, b_{jm_j}).$$

Из [23] известно, что если на функцию $v_0(x)$ наложить более сильное, чем (1.21), условие, а именно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} t^n} \int\limits_{|x|<t} v_0(x+y)dx = l \text{ равномерно по } y \in \mathbb{R}^n,$$

то имеет место равномерная стабилизация функции $v(x,t)$. Отсюда вытекает

Следствие 1.6.2. *Пусть*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{\frac{n}{2}} t^n \prod\limits_{j=1}^{n} p_j} \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{p_j^2}<t^2} u_0(x+y)dx = l$$

равномерно по $y \in \mathbb{R}^n$ *и выполнены условия теоремы* 1.6.1. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{m_j} a_{jk}} u(x,t) = l$$

при любом $x \in \mathbb{R}^n$.

1.7. О смысле условия положительной определенности

Условие положительной определенности вспомогательного оператора, накладываемое в теореме 1.6.1 (равно как и само введение указанного вспомогательного оператора), на первый взгляд выглядит довольно искусственным. Покажем, что оно имеет вполне определенный смысл.

Возьмем в качестве модельной задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(x+b,t),\ x \in \mathbb{R}^1, t > 0; \tag{1.22}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ x \in \mathbb{R}^1 \tag{1.23}$$

(коэффициенты a и b предполагаются вещественными, а начальная функция u_0 — непрерывной и ограниченной), и рассмотрим условие положительной определенности вспомогательного оператора, обеспечивающее справедливость теоремы о (весовой) асимптотической близости (стабилизации) решений.

В этом случае оператор $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L}u = \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au(x+b,t), \text{ если } a < 0, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

а оператор R, на который накладывается условие положительной определенности, действует следующим образом:

$$Ru = \begin{cases} au - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - au(x+b,t), \text{ если } a < 0, \\[2mm] -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\operatorname{Re} R(\xi) = \begin{cases} \xi^2 \text{ при } a \geqslant 0, \\ a + \xi^2 - a\cos b\xi \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, условие положительной определенности оператора R выполнено при всех неотрицательных a, а при всех отрицательных a оно эквивалентно существованию такого положительного C, что неравенство $\xi^2 + a(1-\cos b\,\xi) \geqslant C\xi^2$ справедливо для всех вещественных ξ. Последнее неравенство приводится к виду $\xi^2 + 2a\sin^2\dfrac{b\xi}{2} \geqslant C\xi^2$. Далее будем считать, что $a < 0$. Пусть

$\dfrac{ab^2}{2} > -1$. Обозначим положительную константу $1 + \dfrac{ab^2}{2}$ через C. Учитывая, что $\sin^2 \dfrac{b\xi}{2} \leqslant \dfrac{b^2\xi^2}{4}$, имеем в силу отрицательности коэффициента a неравенство $2a\sin^2 \dfrac{b\xi}{2} \geqslant \dfrac{ab^2\xi^2}{2}$, следовательно,

$$\xi^2 + 2a\sin^2 \frac{b\xi}{2} \geqslant \xi^2 \left(1 + \frac{ab^2}{2}\right) = C\xi^2.$$

Значит, условие $\dfrac{ab^2}{2} > -1$ влечет за собой условие положительной определенности оператора R.

Предположим теперь, что константа $1 + \dfrac{ab^2}{2}$ неположительна, и покажем, что в этом случае условие положительной определенности оператора R не выполняется. Для этого представим $\xi^2 + 2a\sin^2 \dfrac{b\xi}{2}$ в виде

$$\xi^2 \left[1 + \frac{ab^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{b\xi}{2}}{\frac{b\xi}{2}}\right)^2\right]$$

(на $\mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$) и предположим, напротив, что оператор R положительно определен. Тогда существует такое положительное $C > 0$, что

$$\xi^2 \left[1 + \frac{ab^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{b\xi}{2}}{\frac{b\xi}{2}}\right)^2\right] \geqslant C\xi^2 \text{ для любого } \xi \neq 0,$$

т. е.

$$1 + \frac{ab^2}{2} \left(\frac{\sin \frac{b\xi}{2}}{\frac{b\xi}{2}}\right)^2 \geqslant C \text{ для любого } \xi \neq 0.$$

Поскольку функция $g(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \dfrac{ab^2}{2} \left(\dfrac{\sin \frac{b\xi}{2}}{\frac{b\xi}{2}}\right)^2$ стремится к $1 + \dfrac{ab^2}{2}$ при $\xi \to 0$, существует такое положительное ξ_0, что $g(\xi) < \dfrac{C}{2}$ для любого $\xi \in (0, \xi_0)$. Полученное противоречие и доказывает ошибочность нашего предположения о положительной определенности оператора R.

Итак, для уравнения (1.22) условие положительной определенности оператора R равносильно условию $1 + \dfrac{ab^2}{2} > 0$ (для любых знаков коэффициентов a и b).

Далее считаем это условие выполненным.

Тогда имеет место весовая асимптотическая близость решения задачи (1.22), (1.23) и функции $e^{at} w\left(\dfrac{x + abt}{\sqrt{C}}, t\right)$, где $w(x,t)$ есть решение задачи

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ x \in \mathbb{R}^1, t > 0; \tag{1.24}$$

$$w\big|_{t=0} = w_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} u_0(\sqrt{C}x), \ x \in \mathbb{R}^1; \tag{1.25}$$

$C = 1 + \dfrac{ab^2}{2}$, а вес равен e^{-at}.

Рассмотрим, наряду с *дифференциально-разностным* уравнением (1.22) и *дифференциальным* уравнением (1.24), дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(1 + \frac{ab^2}{2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + ab\frac{\partial v}{\partial x} + av, \ x \in \mathbb{R}^1, t > 0. \tag{1.26}$$

Определим функцию
$$v(x,t) \overset{\text{def}}{=} e^{at} w\left(\frac{x+abt}{\sqrt{C}}, t\right) \overset{\text{def}}{=} e^{at} w(\cdot, t) \tag{1.27}$$
и подставим ее в уравнение (1.26):
$$\frac{\partial v}{\partial t} = ae^{at} w(\cdot, t) + \frac{ab}{\sqrt{C}}\, e^{at} \frac{\partial w}{\partial x}\,(\cdot, t) + e^{at} \frac{\partial w}{\partial t}\,(\cdot, t),$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{C}}\, e^{at} \frac{\partial w}{\partial x}\,(\cdot, t), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{C}\, e^{at} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,(\cdot, t),$$
значит,
$$\left(1 + \frac{ab^2}{2}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + ab \frac{\partial v}{\partial x} + av = e^{at} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,(\cdot, t) + \frac{ab}{\sqrt{C}}\, e^{at} \frac{\partial w}{\partial x}\,(\cdot, t) + ae^{at} w(\cdot, t).$$
Поскольку
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,(\cdot, t) = \frac{\partial w}{\partial t}\,(\cdot, t)$$
(как, собственно, и в любой другой точке $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$), функция (1.27) есть решение уравнения (1.26).

Далее $v\big|_{t=0} = w\left(\frac{x}{\sqrt{C}}, 0\right) = u_0(x)$, следовательно, имеет место асимптотическая близость решения задачи (1.22), (1.23) и решения задачи (1.26), (1.23) (с тем же самым весом e^{-at}); отметим, что e^{-at} — это та самая весовая функция, которая возвращает решение (*дифференциального* уравнения) $v(x,t)$ в класс ограниченных функций.

Дифференциальное уравнение (1.26) — это не что иное, как дифференциально-разностное уравнение (1.22), в котором нелокальный член заменен его разложением Тейлора до порядка два (т. е., до порядка уравнения) включительно. Рассматриваемое условие положительной определенности вспомогательного оператора эквивалентно условию параболичности этого дифференциального уравнения (т. е., эллиптичности его правой части). Это справедливо и для всех более общих случаев нелокальных младших членов, рассмотренных ранее (доказательство производится точно так же).

Таким образом, условие положительной определенности вспомогательного оператора, обеспечивающее справедливость теоремы о (весовой) асимптотической близости (стабилизации) решений, заключается в следующем:

если в исходном *дифференциально-разностном* уравнении заменить все нелокальные члены их разложениями Тейлора до второго порядка включительно, то полученное *дифференциальное* уравнение должно быть *параболическим*.

Отметим, что здесь особенно четко видна двойственная природа младших нелокальных членов: при исследовании разрешимости они не имеют никакого значения (разрешимость задачи Коши определяется старшими членами — имеет значение только параболичность уравнения, получаемого из исходного отбрасыванием всех нелокальных членов), а при исследовании асимптотических свойств они уже не могут трактоваться как *младшие* — имеет значение параболичность уравнения, которое строится по коэффициентам этих нелокальных членов.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ СТАРШИМИ ЧЛЕНАМИ

2.1. Случай факторизуемого фундаментального решения

Пусть $a, h \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x + h_k, t). \tag{2.1}$$

Рассмотрим вещественную часть символа оператора L:

$$\mathrm{Re} L(\xi) = -\xi^2 - \xi^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi$$

(ср. раздел 1.6). Как и в разделе 1.6, назовем $-L(\xi)$ положительно определенным, если существует такое положительное C, что $-\mathrm{Re} L(\xi) \geqslant C\xi^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^1$, а оператор $-L$, обладающий указанным свойством, будем называть сильно эллиптическим во всем пространстве оператором второго порядка (см. также [90, с. 66 и с. 78]).

В дальнейшем мы будем полагать оператор $-L$ сильно эллиптическим.

Отметим, что условие сильной эллиптичности позволяет коэффициентам уравнения быть сколь угодно большими (см., например, [124, Ex. 8.1]).

Наряду с уравнением (2.1) рассмотрим начальное условие (1.4) с непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1$ функцией $u_0(x)$.

Определим на $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_{a,h}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2 (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi)} \cos(x\xi - t\xi^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \xi) d\xi. \tag{2.2}$$

Условие сильной эллиптичности оператора $-L$, очевидно, влечет за собой выполнение неравенства $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi \geqslant C$ при $\xi \neq 0$. Покажем, что оно выполняется (хотя, возможно, с другой положительной константой) и при $\xi = 0$, т. е., что $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k > 0$. Для этого предположим, напротив, что $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \leqslant 0$. Тогда для любого $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} C &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=1}^{m} a_k (\cos h_k \xi - 1) = 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k - 2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin^2 \frac{h_k \xi}{2} = \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m} a_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} a_k h_k^2 \xi^2 \left(\frac{\sin \frac{h_k \xi}{2}}{\frac{h_k \xi}{2}} \right)^2 \leqslant -\frac{\xi^2}{2} \sum_{k=1}^{m} a_k h_k^2 \left(\frac{\sin \frac{h_k \xi}{2}}{\frac{h_k \xi}{2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Выбирая теперь положительное ξ достаточно малым, приходим к противоречию с положительностью константы C.

Поэтому

$$|\mathcal{E}(x, t)| \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-Ct\xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{4Ct}},$$

т. е. для любых t_0, T из $(0, +\infty)$ интеграл (2.2) сходится абсолютно и равномерно по $(x, t) \in \mathbb{R}^1 \times [t_0, T]$, следовательно, $\mathcal{E}(x, t)$ определена корректно на $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$.

Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по переменной t:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\int\limits_0^\infty \xi^2(1+\sum_{k=1}^m a_k \cos h_k\xi) e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \cos(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \sin(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)\sum_{k=1}^m a_k\xi^2 \sin h_k\xi d\xi =$$

$$=\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \Bigg[\sin(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)\sin h_k\xi -$$

$$-\cos(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)\cos h_k\xi\Bigg] d\xi - \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \cos(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)d\xi =$$

$$=\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \left(\sum_{k=1}^m a_k \cos\left[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi\right] +\right.$$

$$\left.+\cos(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)\right) d\xi.$$

Далее формальное дифференцирование $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по переменной x дает:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \cos(x\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)d\xi.$$

Оба эти интеграла ограничены сверху по абсолютной величине линейной комбинацией интегралов вида

$$\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-Ct\xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4Ct^{\frac{3}{2}}},$$

т. е. сходятся абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^1 \times [t_0, T]$ для любых $t_0, T \in (0, +\infty)$. Значит, дифференцирование под знаком интеграла законно, и в $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ имеем

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} = -\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \sum_{k=1}^m a_k \cos\left[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi\right] d\xi =$$

$$= -\sum_{k=1}^m a_k \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \cos\left[(x+h_k)\xi - t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi\right] d\xi = \sum_{k=1}^m a_k \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}(x+h_k, t),$$

следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ в $\mathbb{R}^1 \times (0, +\infty)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2.1).

2.2. Существование и единственность решения задачи Коши

Оценим поведение $\mathcal{E}(x,t)$ и ее производных при $x \to \infty$ (при фиксированном положительном t). Для этого предварительно разобьем ее на четное и нечетное (по x) слагаемые $\mathcal{E}_1(x,t)$ и $\mathcal{E}_2(x,t)$:

$$\mathcal{E}_1(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \cos x\xi\, \cos(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)} \sin x\xi\, \sin(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k \sin h_k\xi)d\xi.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.2.1. *Пусть $t > 0$. Тогда функция $x^2\mathcal{E}(x,t)$ ограничена в $\mathbb{R}^1$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное положительное t и дважды проинтегрируем

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi\,d\xi$$

по частям. Получим

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left[e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\right]''\cos x\xi\,d\xi$$

(легко проверить, что все внеинтегральные члены обращаются в нуль).

Последний интеграл является ограниченной функцией переменной x, поэтому $x^2\mathcal{E}_1(x,t)$ ограничена. Аналогично доказывается ограниченность функции $x^2\mathcal{E}_2(x,t)$. Лемма 2.2.1 доказана. □

Таким образом, в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ определена функция

$$u(x,t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)u_0(\xi)d\xi. \tag{2.3}$$

Кроме того, справедлива

Лемма 2.2.2. *Пусть* $t>0$. *Тогда функция* $x^2\dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}(x,t)$ *ограничена в* $(-\infty,+\infty)$.

Для доказательства $\dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$, так же, как и $\mathcal{E}$, разбивается на четное и нечетное по x слагаемые, а затем к первому (для определенности) из этих слагаемых

$$-\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^m a_k\cos h_k\xi)}\cos(t\xi^2\sum_{k=1}^m a_k\sin h_k\xi)\cos x\xi\,d\xi$$

дважды применяется формула интегрирования по частям. Дальнейшее доказательство совершенно аналогично доказательству леммы 2.2.1.

Очевидно, лемма 2.2.2 останется справедливой и в том случае, если $\dfrac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x^2}$ взять не в точке (x,t), а в любой из точек $(x+h_k,t)$, где $k=\overline{1,m}$. Поскольку, как доказано в предыдущем пункте, $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, из лемм 2.2.1 и 2.2.2 следует

Лемма 2.2.3. *Пусть* $t>0$. *Тогда* $x^2\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)$ *ограничена в* $(-\infty,+\infty)$.

Из лемм 2.2.1–2.2.3 и того обстоятельства, что $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$, очевидным образом вытекает следующее утверждение:

Теорема 2.2.1. *Пусть оператор* $-L$ *является сильно эллиптическим в* $\mathbb{R}^1$. *Тогда функция* (2.3) *является классическим решением уравнения* (2.1) *в* $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Замечание 2.2.1. То, что функция (2.3) удовлетворяет задаче (2.1), (1.4) в смысле обобщенных функций, является известным фактом (см., например, [15]). Новым в теореме 2.2.1 является только то, что это решение является классическим в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$.

Чтобы установить единственность этого решения, исследуем согласно [15] вещественную часть символа эллиптического оператора L, содержащегося в уравнении (2.1). Указанный символ $\mathcal{P}(z)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathcal{P}(\sigma+i\tau)$ равен

$$-z^2\left(1+\sum_{k=1}^m a_k e^{-ih_kz}\right)=(\tau^2-\sigma^2-2i\sigma\tau)\left(1+\sum_{k=1}^m a_k e^{-ih_kz}\right)=$$

$$=(\tau^2-\sigma^2-2i\sigma\tau)\left(1+\sum_{k=1}^m a_k e^{h_k\tau-ih_k\sigma}\right)=$$

$$= (\tau^2 - \sigma^2 - 2i\sigma\tau)\left(1 + \sum_{k=1}^{m} a_k e^{h_k\tau}\cos h_k\sigma - i\sum_{k=1}^{m} a_k e^{h_k\tau}\sin h_k\sigma\right).$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}\mathcal{P}(z) = (\tau^2 - \sigma^2)\left(1 + \sum_{k=1}^{m} a_k e^{h_k\tau}\cos h_k\sigma\right) - 2\sigma\tau\sum_{k=1}^{m} a_k e^{h_k\tau}\sin h_k\sigma.$$

Теперь оценим функцию $\mathcal{Q}(z,t_0,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$.

$$|\mathcal{Q}(z,t_0,t)| \leqslant e^{(t-t_0)\left[C_1(1+\sigma^4)+C_2e^{C_3\tau}\right]}.$$

Из последней оценки вытекает (см. [15, гл. 2, Добавление 1]), что задача (2.1), (1.4) имеет не более одного решения в смысле обобщенных функций.

Замечание 2.2.2. Как и в случае младших нелокальных членов, единственность решения задачи (2.1), (1.4) (в соответствующих пространствах обобщенных функций) имеет место для гораздо более широких классов начальных функций, чем класс непрерывных ограниченных функций — в частности, для классов А. Н. Тихонова и их обобщений (ср. замечание 1.5.1 и см. [2], а также [46]). Здесь мы, однако, ограничиваемся рассмотрением случая непрерывных ограниченных начальных функций, поскольку исследуем близость решений указанной задачи и классических параболических задач.

Замечание 2.2.3. Единственность решения позволяет найти интеграл от фундаментального решения по всей вещественной оси:

Лемма 2.2.4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}(x,t)dx = \pi.$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_0(x) \equiv 1$; она непрерывна и ограничена, следовательно, функция

$$y(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi$$

в $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ удовлетворяет уравнению (2.1) с начальным условием

$$y(x,0) \equiv 1.$$

Однако $y(x,t)$ не зависит от x :

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,t)d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi = \pi y(t),$$

т. е. в действительности $y(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $y' = 0$ и начальному условию $y(0) = 1$. Значит, $y(t) \equiv 1$. □

2.3. Поведение решения при $t \to \infty$

В этом разделе мы изучим поведение $u(x,t)$ при $t \to \infty$. Для этого наряду с задачей (2.1), (1.4) рассмотрим уравнение теплопроводности с тем же самым начальным условием (1.4). Обозначим его классическое ограниченное решение через $v(x,t)$, а положительную постоянную $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k$ — через p.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.3.1. $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t) - v(x,pt)] = 0$ *для любого вещественного* x.

Доказательство. Возьмем произвольное вещественное x_0 и рассмотрим $u(x_0, t)$. Заменой переменной $\eta = \dfrac{x_0 - \xi}{2\sqrt{t}}$ получаем, что

$$u(x_0, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta, t) u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

Далее

$$\sqrt{t}\,\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta, t) = \sqrt{t} \int\limits_0^{\infty} e^{-t\xi^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos h_k \xi)} \cos(2\sqrt{t}\eta\xi - t\xi^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin h_k \xi) d\xi =$$
$$= \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz.$$

Отсюда следует, что функция $u(x_0, t)$ может быть представлена в виде

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) \int\limits_0^{\infty} e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) dz d\eta.$$

Тогда

$$u(x_0, t) - v(x_0, pt) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) \int\limits_0^{\infty} \left[e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \times \right.$$
$$\left. \times \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - e^{-pz^2} \cos 2z\eta \right] dz d\eta. \tag{2.4}$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуются две следующие леммы.

Лемма 2.3.1.

$$\int\limits_0^{\infty} \left[e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - e^{-pz^2} \cos 2z\eta \right] dz \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

равномерно относительно $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и разобьем оцениваемый интеграл на сумму двух слагаемых:

$$\int\limits_0^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} I_{1,\delta} + I_{2,\delta}.$$

Модуль всего оцениваемого интеграла оценивается сверху величиной $2\int\limits_0^{\infty} e^{-Cz^2} dz$, поэтому существует такое $\delta > 0$, что $|I_{2,\delta}| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любых $\eta \in (-\infty, +\infty)$, $t > 0$. Зафиксируем это δ и рассмотрим интеграл $I_{1,\delta}$. Его подынтегральная функция равна

$$e^{-pz^2} \left[e^{z^2 \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \left(1 - \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos 2z\eta \right] =$$
$$= e^{-pz^2} \left(e^{2z^2 \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin^2 \frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} \left[\cos 2z\eta \cos\left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) + \right.\right.$$

$$+ \ \sin 2z\eta \sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\Bigg] - \cos 2z\eta\Bigg) =$$

$$= e^{-pz^2}\left(\cos 2z\eta\left[e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1\right] + \right.$$

$$\left. + e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}}\sin 2z\eta\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) \stackrel{\text{def}}{=} A_1(\eta,t;z) + A_2(\eta,t;z).$$

$$\left|\int\limits_0^\delta A_2(\eta,t;z)dz\right| \leqslant e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}\int\limits_0^\delta\left|\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right|dz$$

для любых η, t. Обозначим величину

$$\frac{16\delta^8\left(\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k||h_k|\right)^2 e^{4\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}{\varepsilon^2}$$

через T_0. Тогда для любых $t > T_0, k = \overline{1,m}$

$$\left|\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\delta^3 e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}\frac{|h_k|}{\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k||h_k|},$$

следовательно,

$$\left|\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right| \leqslant \left|z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\delta e^{2\delta^2\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|}}$$

(поскольку $0 \leqslant z \leqslant \delta$).

Тем самым $\left|\int\limits_0^\delta A_2(\eta,t;z)dz\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ при $t > T_0$ для любого вещественного η. Осталось оценить интеграл $\int\limits_0^\delta A_1(\eta,t;z)dz$. Его модуль не превосходит

$$\int\limits_0^\delta e^{-pz^2}\left|e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1\right|dz.$$

Разность, стоящую под модулем в подынтегральной функции, представим в виде

$$e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - \cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) + \cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1 =$$

$$= \cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\left(e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} - 1\right) + \cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

Выберем T_1 настолько большим, что $\left|e^{2z^2\sum\limits_{k=1}^{m} a_k\sin^2\frac{h_k z}{2\sqrt{t}}} - 1\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{8\delta}$ для любых $t > T_1, z \in [0,\delta]$. Это возможно, поскольку существует такое положительное δ_1, что $e^x \in \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{8\delta}, 1 + \dfrac{\varepsilon}{8\delta}\right)$ для любого $x \in (-\delta_1, \delta_1)$. Поэтому в качестве T_1 можно, например, взять $\dfrac{\delta^4\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|h_k^2}{2\delta_1}$.

Далее, существует такое положительное δ_2, что неравенство $1 - \dfrac{\varepsilon}{8\delta} < \cos x < 1 + \dfrac{\varepsilon}{8\delta}$ выполняется для любого $x \in (-\delta_2, \delta_2)$. Положим

$$T_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{\delta^6 \left(\sum\limits_{k=1}^{m} |a_k||h_k| \right)^2}{\delta_2^2}.$$

Тогда для любого $t > T_2$ и любого $z \in [0, \delta]$

$$\left| z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right| \leqslant z^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k||h_k z|}{\sqrt{T_2}} \leqslant \frac{\delta^3}{\sqrt{T_2}} \sum_{k=1}^{m} |a_k||h_k| = \delta_2,$$

следовательно, неравенство

$$\left| \cos \left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{8\delta}$$

выполняется для любых $t > T_2, z \in [0, \delta]$. Значит, для любых $t > \max\{T_0, T_1, T_2\}$, $\eta \in (-\infty, +\infty)$

$$\left| \int\limits_0^\delta A_1(\eta, t; z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ т. е. } \left| I_{1,\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Лемма 2.3.1 доказана. □

Лемма 2.3.2. *Существует такое $M > 0$, зависящее только от a и h, что для любого $t > 1$ и для любого $\eta \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$*

$$\left| \int\limits_0^\infty e^{-z^2 (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos \left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz \right| \leqslant \frac{M}{\eta^2}.$$

Доказательство. Представим оцениваемый интеграл в виде суммы

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2 (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos 2z\eta \cos \left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz +$$

$$+ \int\limits_0^\infty e^{-z^2 (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \sin 2z\eta \sin \left(z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) dz \qquad (2.5)$$

и рассмотрим первое (для определенности) из этих слагаемых.

Обозначим функцию $e^{-z^2 (1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos \left(z^2 \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \sin \dfrac{h_k z}{\sqrt{t}} \right)$ через $g(z)$ (считая t положительным параметром) и проинтегрируем $\int\limits_0^\infty g(z) \cos 2\eta z dz$ по частям. Получим

$$g(z) \frac{\sin 2\eta z}{2\eta} \Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} - \frac{1}{2\eta} \int\limits_0^\infty g'(z) \sin 2\eta z dz = -\frac{1}{2\eta} \int\limits_0^\infty g'(z) \sin 2\eta z dz,$$

поскольку $g(+\infty) = 0$ т.к. $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \dfrac{h_k z}{\sqrt{t}} \geqslant C > 0$. Проинтегрировав по частям еще раз, получим

$$g'(z) \frac{\cos 2\eta z}{4\eta^2} \Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} - \frac{1}{4\eta^2} \int\limits_0^\infty g''(z) \cos 2\eta z dz.$$

Докажем, что внеинтегральный член обращается в нуль. Чтобы вычислить пределы $\lim\limits_{z\to+0} g'(z)\dfrac{\cos 2\eta z}{4\eta^2}$ и $\lim\limits_{z\to+\infty} g'(z)\dfrac{\cos 2\eta z}{4\eta^2}$, продифференцируем функцию $g(z)$:

$$g'(z) = e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}})}\left[-2z\left(1+\sum_{k=1}^{m} a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{m} a_k h_k \sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right]\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)-$$
$$-e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}})}\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\left(2z\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}+\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{m} a_k h_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right).$$

Последнее выражение можно преобразовать к виду

$$-e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}})}\left[\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\sum_{k=1}^{m} a_k h_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}-\right.$$
$$-\frac{z^2}{\sqrt{t}}\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\sum_{k=1}^{m} a_k h_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}+2z\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\sum_{k=1}^{m} a_k\cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}}+$$
$$\left.+2z\sin\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}+2z\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right],$$

поэтому $g'(z)$ равна

$$e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}})}\left[\frac{z^2}{\sqrt{t}}\sum_{k=1}^{m} a_k h_k\sin\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}-z^2\sum_{l=1}^{m} a_l\sin\frac{h_l z}{\sqrt{t}}\right)+\right.$$
$$\left.+2z\sum_{k=1}^{m} a_k\cos\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}-z^2\sum_{l=1}^{m} a_l\sin\frac{h_l z}{\sqrt{t}}\right)-2z\cos\left(z^2\sum_{k=1}^{m} a_k\sin\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Значит, $g'(0)=g'(+\infty)=0$, следовательно,

$$\int\limits_0^\infty g(z)\cos 2\eta z dz = -\frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty g''(z)\cos 2\eta z dz.$$

Очевидно, существует такой полином (конечной степени) $P(z)$, положительные коэффициенты которого зависят только от a и h, что неравенство $|g''(z)| \leqslant e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos\frac{h_k z}{\sqrt{t}})}P(z)$ выполняется для любого $t\geqslant 1$ на $[0,+\infty)$. Значит,

$$\left|\int\limits_0^\infty g(z)\cos 2\eta z dz\right| \leqslant \frac{1}{4\eta^2}\int\limits_0^\infty e^{-Cz^2}P(z)dz$$

для любого $t>1$ и любого $\eta\in\mathbb{R}^1\backslash\{0\}$. Тем самым для первого слагаемого суммы (2.5) требуемая оценка выполнена. Таким же образом оценивается и второе слагаемое. Лемма 2.3.2 доказана. $\square$

Перейдем теперь непосредственно к завершению доказательства теоремы 2.3.1. Разобьем (2.4) на сумму

$$\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{-R}+\int\limits_{-R}^{R}+\int\limits_{R}^{+\infty}\right) \overset{\text{def}}{=} \frac{2}{\pi}\left[I_{3,R}(t)+I_{4,R}(t)+I_{5,R}(t)\right],$$

где R — положительный параметр.

$$|I_{5,R}(t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)| \int\limits_R^{+\infty} \left(\frac{M}{\eta^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}} e^{-\frac{\eta^2}{p}} \right) d\eta$$

в силу леммы 2.3.2 (без ограничения общности можно считать, что $t > 1$) и ограниченности функции u_0. Последний интеграл сходится, поэтому для любого наперед заданного положительного ε найдется такое $R_0 \in (1, +\infty)$, что $|I_{5,R_0}(t)| \leqslant \dfrac{\pi\varepsilon}{6}$ для любого $t \in (1, +\infty)$. При этом, очевидно, I_{3,R_0} удовлетворяет той же оценке.

Зафиксируем это R_0 и рассмотрим $I_{4,R_0}(t)$. Его абсолютная величина не превосходит

$$\sup_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)| \int\limits_{-R_0}^{+R_0} \left| \int\limits_0^{\infty} \left[e^{-z^2(1+\sum\limits_{k=1}^{m} a_k \cos \frac{h_k z}{\sqrt{t}})} \cos \left(2z\eta - z^2 \sum_{k=1}^{m} a_k \sin \frac{h_k z}{\sqrt{t}} \right) - e^{-pz^2} \cos 2z\eta \right] dz \right| d\eta.$$

В силу леммы 2.3.1 найдется такое $T^* > 1$, что для любого вещественного η и любого $t > T^*$ модуль внутреннего интеграла в последнем выражении не превосходит $\pi\varepsilon \left(12R_0 \sup\limits_{\mathbb{R}^1} |u_0(x)| \right)^{-1}$. Отсюда вытекает, что для любого $t > T^*$ модуль выражения (2.4) не превосходит ε. Поскольку положительное ε выбиралось произвольно, это означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} [u(x_0, t) - v(x_0, pt)] = 0$. В силу произвольности выбора вещественного x_0 теорема 2.3.1 доказана. □

Следствие 2.3.1. *Пусть* $x, l \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = l \iff \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int\limits_{-R}^{R} u_0(x)dx = l.$$

Для доказательства отметим лишь, что утверждение следствия есть классическая теорема о поточечной стабилизации (см. [81]), т. е. для функции $v(x,t)$ оно выполнено; далее остается непосредственно применить теорему 2.3.1.

Замечание 2.3.1. Отметим, что хотя теорема 2.3.1 и следствие 2.3.1 справедливы при одних и тех же условиях, утверждение теоремы (как утверждение о близости решений) является более сильным в следующем смысле: в отличие от утверждения следствия (т. е. теоремы о стабилизации) оно дает информацию о поведении решения также и в том случае, когда (необходимое и достаточное) условие стабилизации не выполнено.

2.4. Случай нескольких пространственных переменных

Пусть $n, m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, где через a_i обозначен вектор $(a_{i1}, \ldots, a_{im_i})$, а через b_i — вектор $(b_{i1}, \ldots, b_{im_i})$; $i = \overline{1,n}$. В области $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \middle| t > 0 \right\}$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_{(n)} u \stackrel{\text{def}}{=} \Delta u + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + b_{ij}, x_{i+1}, \ldots, x_n, t) \tag{2.6}$$

и начальное условие (1.4) с некоторой функцией u_0, непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^n$.

Как и в разделе 2.1 (см. также [124, §8]), наложим условие положительной определенности на символ оператора $-L_{(n)}$:

$$-\mathrm{Re} L_{(n)}(\xi) = |\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \cos b_{ij} \xi_i \geqslant C|\xi|^2$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ с некоторым положительным C.

Оператор $-L_{(n)}$, обладающий указанным свойством, будем, как и в одномерном случае, называть сильно эллиптическим во всем пространстве.

Отметим, что, как и в одномерном случае (ср. также [124, Ex. 8.1]), условие сильной эллиптичности не накладывает ограничений на величины коэффициентов уравнения.

Отметим также, что, как и в случае ограниченной области (см. [124, § 9]), сильная эллиптичность дифференциального и дифференциально-разностного операторов различаются существенным образом, поэтому влияние разностных членов имеет принципиальное значение.

Определим в $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ функцию

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij} \cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \sin b_{ij}\xi_i\right) d\xi. \tag{2.7}$$

Представим показатель последней экспоненты в выражении (2.7) в виде

$$-t\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \cos b_{ij}\xi_i\right),$$

что при любом ξ из $\mathbb{R}^n$ и любом положительном t не превосходит $-t \sum\limits_{i=1}^{n} C_i\xi_i^2$ с некоторыми положительными постоянными $C_1,\dots,C_n$. Действительно, возьмем произвольное $i \in \overline{1,n}$ и применим условие сильной эллиптичности, взятое при $\xi_1 = \dots = \xi_{i-1} = \xi_{i+1} = \dots = \xi_n = 0$. Получим, что $\xi_i^2 + \xi_i^2 \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i \geqslant C\xi_i^2$ для любого вещественного ξ_i. Значит, $1 + \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i \geqslant C$ для любого $\xi_i \neq 0$. Покажем, что последнее неравенство выполняется (хотя, возможно, с другой положительной постоянной) и при $\xi = 0$, т. е., что $1 + \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij} > 0$. Для этого предположим, напротив, что $1 + \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij} \leqslant 0$. Тогда для любого $\xi_i \neq 0$

$$\begin{aligned}
C &\leqslant 1 + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} - \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i = \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}(\cos b_{ij}\xi_i - 1) = 1 + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} - 2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin^2\frac{b_{ij}\xi_i}{2} = \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}b_{ij}^2\xi_i^2 \left(\frac{\sin\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}{\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}\right)^2 \leqslant -\frac{\xi_i^2}{2}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}b_{ij}^2 \left(\frac{\sin\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}{\frac{b_{ij}\xi_i}{2}}\right)^2.
\end{aligned}$$

Выбирая теперь положительное ξ_i достаточно малым, приходим к противоречию с положительностью константы C.

Поэтому для любого $[t_0,T] \subset (0,+\infty)$ интеграл (2.7) сходится абсолютно и равномерно относительно $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0,T]$, т. е. функция $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ определена корректно.

Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}_{(n)}$ под знаком интеграла по переменной t:

$$\begin{aligned}
2^n\frac{\partial\mathcal{E}_{(n)}}{\partial t} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times \\
&\times \sin\left(x\cdot\xi - t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right) \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i d\xi - \\
&- \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(|\xi|^2 + \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right) e^{-t\left(|\xi|^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \times \\
&\times \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right) d\xi.
\end{aligned}$$

Это можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \xi_i^2 \left[\sin b_{ij}\xi_i \sin\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) - \right.$$

$$\left. - \cos b_{ij}\xi_i \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right)\right] d\xi -$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi,$$

что, в свою очередь, равно

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi + b_{ij}\xi_i - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi.$$

Далее формальное дифференцирование $\mathcal{E}_{(n)}$ под знаком интеграла по переменной x_i дает:

$$2^n \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi,$$

$$2^n \frac{\partial^2 \mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_{i-1},x_i+b_{ij},x_{i+1},\dots,x_n,t) =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_i^2 e^{-t\left(|\xi|^2+\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\left(x\cdot\xi + b_{ij}\xi_i - t\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\sum_{l=1}^{m_k}a_{kl}\sin b_{kl}\xi_k\right) d\xi.$$

Каждый из этих интегралов сходится абсолютно и равномерно по $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times[t_0,T]$ при любом $[t_0,T]\subset(0,+\infty)$, поэтому $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2.6) в $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$.

Теперь докажем следующее утверждение:

Лемма 2.4.1. *Пусть* $x\in\mathbb{R}^n$, $t>0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x-\xi)\mathcal{E}_{(n)}(\xi,t)d\xi \tag{2.8}$$

абсолютно сходится.

Доказательство. В силу абсолютной сходимости интеграла (2.7) к нему применима теорема Фубини, т. е. $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ можно представить в виде

$$\frac{1}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\text{ раз}} \prod_{i=1}^{n} e^{-t\xi_i^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} \cos\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\xi_i - t\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right) d\xi_1\dots d\xi_n.$$

Подынтегральную функцию последнего интеграла можно разбить на конечное число слагаемых вида

$$\prod_{i=1}^{n} e^{-t\xi_i^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\xi_i\right)} g_i\left(x_i\xi_i - t\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\xi_i\right),$$

где $g_i(\tau) = \cos\tau$ либо $g_i(\tau) = \sin\tau$. Значит, последний интеграл представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} g_i\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

При этом только одно из этих слагаемых, а именно

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau =$$

$$= 2^n\prod_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau,$$

не содержит под интегралом ни одного синуса, а значит, отлично от нуля; все остальные слагаемые обращаются в нуль, т. к. каждое из них содержит хотя бы один нулевой сомножитель — интеграл (от нечетной функции) вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \sin\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

Таким образом, функция $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ принимает следующий вид:

$$\prod_{i=1}^{n}\int_{0}^{\infty} e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)} \cos\left(x_i\tau - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right) d\tau.$$

Каждый сомножитель последнего произведения есть функция $\mathcal{E}_{a_ib_i}(x_i,t) = \mathcal{E}(x_i,t)$ вида (2.2). Зафиксируем произвольное положительное t. Тогда для любого $i = \overline{1,n}$ функция $\mathcal{E}(x_i,t)$ ограничена на $\mathbb{R}^1$. Кроме того, в силу леммы 2.2.1 функция $x_i^2\mathcal{E}(x_i,t)$ ограничена на $\mathbb{R}^1$. Поэтому функция $(1+x_i^2)\mathcal{E}(x_i,t)$ также ограничена на $\mathbb{R}^1$, т. е. существует такое положительное M, что $|\mathcal{E}(x_i,t)| \leqslant \dfrac{M}{1+x_i^2}$ на $\mathbb{R}^1$ при $i = \overline{1,n}$. Поэтому в $\mathbb{R}^n$ справедливо неравенство

$$|\mathcal{E}_{(n)}(x,t)| \leqslant \frac{(2M)^n}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^2)}.$$

Пусть теперь Ω — произвольная (сколь угодно большая) область в $\mathbb{R}^n$. Существует такое положительное A_0, что $\Omega \subset Q(A_0)$, где $Q(A_0) = \left\{|x_i| < A_0 \middle| i = \overline{1,n}\right\}$. Тогда

$$\int\limits_{Q(A_0)} \left|u_0(x-\xi)\mathcal{E}_{(n)}(\xi,t)\right| d\xi \leqslant (2M)^n \sup|u_0| \int\limits_{Q(A_0)} \frac{d\xi}{\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\xi_i^2)} =$$

$$= (2M)^n \sup|u_0| \left(\int_{-A_0}^{A_0} \frac{d\eta}{1+\eta^2}\right)^n = (4M \operatorname{arctg} A_0)^n \sup|u_0| \leqslant (2\pi M)^n \sup|u_0|.$$

Значит, интеграл (2.8) абсолютно сходится и удовлетворяет той же оценке.

Лемма 2.4.1 доказана. □

Таким образом, в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ определена функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\pi^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}_{(n)}(x-\xi, t) u_0(\xi) d\xi. \tag{2.9}$$

Представляя $\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_{(n)}}{\partial x_i^2}$, аналогично $\mathcal{E}_{(n)}$ в лемме 2.4.1, в виде произведения $\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}_{a_i,b_i}}{\partial x_i^2} \prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \mathcal{E}_{a_k,b_k}(x_k,t)$, из леммы 2.2.2 и того факта, что $\mathcal{E}_{(n)}$ удовлетворяет уравнению (2.6), получаем, что функцию (2.9) можно дифференцировать под знаком интеграла. Отсюда вытекает

Теорема 2.4.1. *Пусть оператор* $-L_{(n)}$ *является сильно эллиптическим в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда функция* (2.9) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (2.6) *в* $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Отметим, что согласно, например, [15] функция (2.9) является решением задачи (2.6), (1.4) в смысле обобщенных функций.

Чтобы установить единственность найденного решения, исследуем согласно [15] вещественную часть символа эллиптического оператора $L_{(n)}$, содержащегося в уравнении (2.6). Указанный символ $\mathcal{P}(z_1, \ldots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma + i\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma_1 + i\tau_1, \ldots, \sigma_n + i\tau_n)$ равен

$$-\sum_{k=1}^{n} z_k^2 \left(1 + \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{-ib_{kj}z_k}\right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k) \left(1 + \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \cos b_{kj}\sigma_k - i \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \sin b_{kj}\sigma_k\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{Re}\mathcal{P}(z) = \sum_{k=1}^{n} \left[(\tau_k^2 - \sigma_k^2)\left(1 + \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \cos b_{kj}\sigma_k\right) - 2\sigma_k\tau_k \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \sin b_{kj}\sigma_k\right] =$$
$$= |\tau|^2 - |\sigma|^2 + \sum_{k=1}^{n} \left[(\tau_k^2 - \sigma_k^2) \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \cos b_{kj}\sigma_k - 2\sigma_k\tau_k \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj} e^{b_{kj}\tau_k} \sin b_{kj}\sigma_k\right].$$

Теперь оценим функцию $\mathcal{Q}(z, t_0, t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$.

$$|\mathcal{Q}(z, t_0, t)| \leqslant e^{(t-t_0)\left[C_1(1+|\sigma|^4) + C_2 e^{C_3|\tau|}\right]}.$$

Из последней оценки вытекает (см. [15, гл. 2, Добавление 1]), что задача (2.6), (1.4) имеет не более одного решения в смысле обобщенных функций.

Отметим, что, как и в одномерном случае, единственность имеет место и для более широких классов начальных функций (см. замечание 2.2.2); однако по тем же, что и в одномерном случае, причинам, мы ограничиваемся рассмотрением непрерывных и ограниченных начальных функций. Аналогично лемме 2.2.4, мы можем вычислить интеграл от $\mathcal{E}_{(n)}$ по всему пространству $\mathbb{R}^n$; он равен π^n.

2.5. Стабилизация решения в случае нескольких пространственных переменных

В этом разделе мы изучим поведение $u(x,t)$ при $t \to \infty$ в случае нескольких пространственных переменных. Для этого наряду с дифференциально-разностным уравнением (2.6) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{2.10}$$

где $p_i = 1 + \sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$ (отметим, что, как показано выше, все определенные таким образом константы p_i положительны).

Классическое ограниченное решение задачи (2.10), (1.4) обозначим через $v(x,t)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.5.1. $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t) - v(x,t)] = 0$ *для любого* $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Возьмем произвольное $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^0, \dots, x_n^0)$ из $\mathbb{R}^n$.

Сделаем в (2.9) замену переменных: $\eta_i \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{x_i^0 - \xi_i}{2\sqrt{t}}$ $(i = \overline{1,n})$. Получим, что

$$u(x_0,t) = \left(\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta)\mathcal{E}_{(n)}(2\sqrt{t}\eta, t)d\eta. \tag{2.11}$$

Учитывая, что

$$t^{\frac{n}{2}}\mathcal{E}_{(n)}(2\sqrt{t}\eta,t) = t^{\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-t\tau^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos b_{ij}\tau\right)}\cos\left(2\eta_i\tau\sqrt{t} - t\tau^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin b_{ij}\tau\right)d\tau =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz,$$

получаем, что

$$u(x_0,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta)\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dzd\eta.$$

$$v(x_0,t) = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_1^0 - 2\sqrt{p_1t}\xi_1, \dots, x_n^0 - 2\sqrt{p_nt}\xi_n)e^{-|\xi|^2}d\xi.$$

Замена переменных $\sqrt{p_i}\xi_i = \eta_i$ $(i = \overline{1,n})$ приводит последнее выражение к виду

$$\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_1^0 - 2\sqrt{t}\eta_1, \dots, x_n^0 - 2\sqrt{t}\eta_n)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\eta_i^2}{p_i}}d\eta.$$

Таким образом,

$$u(x_0,t) - v(x_0,t) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta)\left[\prod_{i=1}^{n}\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)dz - \prod_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}}e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}\right]d\eta =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^n\left(\int\limits_{Q(A)} + \int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus Q(A)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n (J_1 + J_2), \tag{2.12}$$

где A — положительный параметр, $Q(A)$, как и выше, обозначает куб $\left\{|x_i| < A \middle| i = \overline{1,n}\right\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$. В силу леммы 2.3.2 для любого $i = \overline{1, n}$ существует такое положительное M_i, что для любого $\eta_i \geqslant 1$ и для любого $t > 1$

$$\left| \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right) dz \right| \leqslant \frac{M_i}{\eta_i^2} \leqslant \frac{2M_i}{1+\eta_i^2}.$$

Кроме того, при $\eta_i \in [0, 1]$ левая часть последнего неравенства не превосходит

$$\int\limits_0^\infty e^{-Cz^2} dz \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{C}} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{C}(1+\eta_i^2)},$$

следовательно, для любого вещественного η_i

$$\left| \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right) dz \right| \leqslant \frac{M_i^*}{1+\eta_i^2},$$

где $M_i^* = \max\left(2M_i, \sqrt{\dfrac{\pi}{C}}\right)$.

Таким образом, модуль подынтегрального выражения в (2.12) не превосходит

$$\sup|u_0| \left[\prod_{i=1}^n \frac{M_i^*}{1+\eta_i^2} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{p_i}}\, e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}\right].$$

Значит, интеграл (2.12) сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in (1, +\infty)$, следовательно, существует такое положительное A, что $|J_2| < \dfrac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}}$ для любого $t > 1$. Зафиксируем это A и рассмотрим J_1 при $t > 1$.

В силу леммы 2.3.1 для любого $i = \overline{1, n}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right) dz \xrightarrow{t\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\, e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}$$

равномерно относительно $\eta_i \in (-\infty, +\infty)$.

Поскольку, как только что доказано, каждый из внутренних (одномерных) интегралов выражения (2.12) ограничен (например, константой M_i^*), то отсюда вытекает, что

$$\lim_{t\to\infty} \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right) dz = \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\, e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}}$$

равномерно относительно $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Значит, существует такое положительное T, что для любого $t \in (T, +\infty)$

$$\left| \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2\left(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i} a_{ij}\cos\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left(2z\eta_i - z^2\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\sin\frac{b_{ij}z}{\sqrt{t}}\right) dz - \prod_{i=1}^n \sqrt{\frac{\pi}{4p_i}}\, e^{-\frac{\eta_i^2}{p_i}} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon\pi^n}{2^{2n+1}A^n \sup|u_0|},$$

т. е. $|J_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon\pi^n}{2^{n+1}}$, следовательно, $|u(x_0, t) - v(x_0, t)| < \varepsilon$.

В силу произвольности выбора положительного ε

$$\lim_{t\to\infty}[u(x_0, t) - v(x_0, t)] = 0.$$

Поскольку x_0 из $\mathbb{R}^n$ выбиралось произвольно, теорема 2.5.1 доказана. □

Отсюда, как и в разделе 2.3, вытекает

Следствие 2.5.1. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n, l \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = l \iff \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R^n} \int\limits_{B_R(p_1,\dots,p_n)} u_0(x)\,dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} \sqrt{p_i}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}\, l,$$

где $B_R(p_1,\dots,p_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \frac{x_1^2}{p_1} + \dots + \frac{x_n^2}{p_n} < R \right\}$.

Замечание 2.5.1. Теорема 2.5.1 верна и для случая $n = 1$, т. е. кроме теоремы 2.2.1 имеет место и асимптотическая близость решений уравнения (2.1) и уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

однако это не дает новой информации о стабилизации решения: необходимое и достаточное условие стабилизации решения задачи (2.1), (1.4), вытекающее из такой теоремы о близости, в точности совпадает с утверждением следствия 2.3.1.

2.6. Общий случай неоднородного эллиптического оператора

В данном разделе мы распространим исследование на случай, когда правая часть уравнения (2.6) содержит и младшие (нелокальные) члены. Мы будем подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые существенно отличаются от модельного случая однородного эллиптического оператора, подробно рассмотренного в разделах 2.4 и 2.5. Итак, вместо (2.6) рассматривается следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x + h_{ij}^{(2)}e_i, t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x+h_{ij}^{(1)}e_i, t) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}u(x+h_{ij}^{(0)}e_i, t). \quad (2.13)$$

Здесь e_i обозначает i-й координатный вектор в пространстве $\mathbb{R}^n$, $m_{k,i} \in \mathbb{N}$ при $i = \overline{1,n}, k = \overline{0,2}$, коэффициенты $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, h_{ij}^{(k)}$ предполагаются вещественными при $i = \overline{1,n}, k = \overline{0,2}, j = \overline{1,m_k}$.

Вместо (2.7) определим фундаментальное решение следующим образом:

$$\mathcal{E}_{(n)}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left[|\xi|^2 + G_1(\xi)\right]} \cos\left[x\cdot\xi - tG_2(\xi)\right] d\xi, \quad (2.14)$$

где

$$G_1(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos h_{ij}^{(2)}\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\sin h_{ij}^{(1)}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\cos h_{ij}^{(0)}\xi_i,$$

$$G_2(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\sin h_{ij}^{(2)}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\cos h_{ij}^{(1)}\xi_i - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\sin h_{ij}^{(0)}\xi_i.$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.6.1. *Пусть оператор* $-L_{(n)}$ *является сильно эллиптическим в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда функция* (2.9) *с* $\mathcal{E}_{(n)}$, *заданной формулой* (2.14), *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (2.13) *в* $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ *и является единственным решением* (*в смысле обобщенных функций*) *задачи* (2.13), (1.4).

Для доказательства этой теоремы мы прежде всего подставляем функцию (2.14) в уравнение (2.13):

$$2^n\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial t} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[|\xi|^2 + G_1(\xi)\right] e^{-t\left[|\xi|^2 + G_1(\xi)\right]}\cos\left[x\cdot\xi - tG_2(\xi)\right] d\xi +$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_2(\xi)e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi,$$

что можно преобразовать к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\big(G_2(\xi)\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]-$$
$$-G_1(\xi)\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]-|\xi|^2\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]\big)\,d\xi.$$

Далее

$$\sin h_{ij}^{(2)}\xi_i\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]-\cos h_{ij}^{(2)}\xi_i\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]=-\cos\left[x\cdot\xi+h_{ij}^{(2)}\xi-tG_2(\xi)\right],$$
$$-\cos h_{ij}^{(1)}\xi_i\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]-\sin h_{ij}^{(1)}\xi_i\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]=-\sin\left[x\cdot\xi+h_{ij}^{(1)}\xi-tG_2(\xi)\right],$$
$$-\sin h_{ij}^{(0)}\xi_i\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]+\cos h_{ij}^{(0)}\xi_i\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]=\cos\left[x\cdot\xi+h_{ij}^{(0)}\xi-tG_2(\xi)\right],$$

поэтому

$$2^n\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial t}=-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_i^2e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\cos\left[(x+h_{ij}^{(2)}e_i)\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi-$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_ie^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\sin\left[(x+h_{ij}^{(1)}e_i)\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\cos\left[(x+h_{ij}^{(0)}e_i)\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi-$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$2^n\frac{\partial\mathcal{E}_n}{\partial x_i}=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_ie^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\sin\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi,$$
$$2^n\frac{\partial^2\mathcal{E}_n}{\partial x_i^2}=-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\xi_i^2e^{-t\left[|\xi|^2+G_1(\xi)\right]}\cos\left[x\cdot\xi-tG_2(\xi)\right]d\xi.$$

Таким образом, в $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ функция $\mathcal{E}_{(n)}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.13).

Теперь представим $G_1(\xi)$ в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}\cos h_{ij}^{(2)}\xi_i+\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}\sin h_{ij}^{(1)}\xi_i-\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\cos h_{ij}^{(0)}\xi_i\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}G_{1,i}(\xi_i),$$

а $G_2(\xi)$ — в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}\sin h_{ij}^{(2)}\xi_i-\xi_i\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}\cos h_{ij}^{(1)}\xi_i-\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\sin h_{ij}^{(0)}\xi_i\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}G_{2,i}(\xi_i).$$

Тогда функция (2.14) принимает вид

$$\frac{1}{2^n}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\text{ раз}}\prod_{i=1}^{n}e^{-t\left[\xi_i^2+G_{1,i}(\xi_i)\right]}\cos\sum_{i=1}^{n}\left[x_i\xi_i-tG_{2,i}(\xi_i)\right]d\xi_1\dots d\xi_n.$$

Учитывая, что функция $G_{1,i}$ четна, а функция $G_{2,i}$ нечетна при любом $i = \overline{1,n}$, последнее выражение сводится (аналогично доказательству леммы 2.4.1) к следующему виду:

$$\prod_{i=1}^{n} \int_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_{1,i}(\tau)\right]} \cos\left[x_i\tau - tG_{2,i}(\tau)\right] d\tau. \tag{2.15}$$

Значит, для доказательства разрешимости остается (см. доказательство леммы 2.4.1) доказать аналоги лемм 2.2.1, 2.2.2 для случая, когда функция (одной пространственной переменной) $\mathcal{E}(x,t)$ имеет вид

$$\int_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[x\tau - tG_2(\tau)\right] d\tau,$$

где в качестве G_1, G_2 взяты соответственно $G_{1,i}$, $G_{2,i}$ с произвольным $i = \overline{1,n}$. Для этого так же, как и в лемме 2.2.1, при фиксированном положительном t рассмотрим

$$\int_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right] \cos x\tau d\tau.$$

Интегрируя по частям, приводим последнее выражение к виду

$$\frac{\sin x\tau}{x} e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right] \Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty} - \frac{1}{x}\int_0^\infty \sin x\tau \left(e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right]\right)' d\tau =$$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^\infty \sin x\tau \left(e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right]\right)' d\tau$$

(в нуле обращается в нуль первый сомножитель внеинтегрального члена, в бесконечности — второй).

$$\left(e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right]\right)' = -e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \left(\left[2\tau + G_1'(\tau)\right] \cos\left[tG_2(\tau)\right] + tG_2'(\tau) \sin\left[tG_2(\tau)\right]\right).$$

Очевидно, $G_1'(0) = G_2(0) = 0$, значит, при повторном интегрировании по частям внеинтегральный член снова обращается в нуль, т. е., имеем $-\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^\infty \cos x\tau \left(e^{-t\left[\tau^2 + G_1(\tau)\right]} \cos\left[tG_2(\tau)\right]\right)'' d\tau$. Последний интеграл есть ограниченная функция переменной x, поэтому лемма 2.2.1 для данного случая верна. Точно так же доказывается ограниченность функций $x^2\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}$, $x^2\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}$ при любом положительном t.

Далее, в точности повторяя рассуждения, доказывающие теорему 2.4.1, доказываем разрешимость.

Для доказательства единственности рассмотрим, как и выше, символ соответствующего эллиптического оператора:

$$\mathcal{P}(z) = -|z|^2 - \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{-ih_{kj}^{(2)} z_k} - i\sum_{k=1}^{n} z_k \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{-ih_{kj}^{(1)} z_k} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj} e^{-ih_{kj}^{(0)} z_k} = \sum_{k=1}^{n} (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k) \left(1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k - \right.$$

$$\left. - i\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k} \sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k \right) + \sum_{k=1}^{n} (\tau_k - i\sigma_k) \left(\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj} e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k} \cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k - \right.$$

$$-\,i\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k\Bigg)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k-i\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(0)}\sigma_k.$$

Значит,

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\mathcal{P}(z)=\sum_{k=1}^{n}\Bigg[(\tau_k^2-\sigma_k^2)\Bigg(1+\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k\Bigg)-\\ -2\sigma_k\tau_k\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k+\tau_k\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k-\\ -\sigma_k\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k+\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k\Bigg],\end{gathered}$$

что, в свою очередь, равно

$$\begin{gathered}|\tau|^2-|\sigma|^2+\sum_{k=1}^{n}\Bigg[(\tau_k^2-\sigma_k^2)\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(2)}\sigma_k-\\ -2\sigma_k\tau_k\sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}e^{h_{kj}^{(2)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(2)}\sigma_k+\tau_k\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(1)}\sigma_k-\\ -\sigma_k\sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}e^{h_{kj}^{(1)}\tau_k}\sin h_{kj}^{(1)}\sigma_k+\sum_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}e^{h_{kj}^{(0)}\tau_k}\cos h_{kj}^{(0)}\sigma_k\Bigg].\end{gathered}$$

Таким образом, для функции $\mathcal{Q}(z,t_0,t)$ справедлива такая же оценка, что и в разделе 2.4 (вообще говоря, с другими константами), что и доказывает единственность построенного решения.

Для исследования асимптотического поведения решения задачи (2.13), (1.4) рассмотрим, наряду с указанной задачей, задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\Delta w,\ \ x\in\mathbb{R}^n,t>0; \tag{2.16}$$

$$w\big|_{t=0}=w_0(x),\ \ x\in\mathbb{R}^n; \tag{2.17}$$

где $w_0(x)=u_0(\sqrt{p_1}\,x_1,\dots,\sqrt{p_n}\,x_n)$, т. е. зависит от положительных параметров $p_1,\dots,p_n$.

Классическое ограниченное решение последней задачи (которое существует и единственно в силу непрерывности и ограниченности функции $w_0(x)$) будем обозначать через $w(x,t)$.

Далее будем, не ограничивая общности, считать, что для любого $k=\overline{1,n}$ числовые множества $\{b_{kj}h_{kj}^{(1)}\}_{j=1}^{m_{1,k}}$ и $\{c_{kj}\}_{j=1}^{m_{0,k}}$ упорядочены по неубыванию. Для каждого $k=\overline{1,n}$ обозначим $\min\limits_{b_{kj}h_{kj}^{(1)}>0} j$ через $\widetilde{m}_{1,k}$, $\min\limits_{c_{kj}>0} j$ — через $\widetilde{m}_{0,k}$; для тех k, при которых $b_{kj}h_{kj}^{(1)}\leqslant 0$ ($c_{kj}\leqslant 0$) для всех $j=\overline{1,m_{1,k}}$ ($j=\overline{1,m_{0,k}}$), в качестве $\widetilde{m}_{i,k}$ возьмем $m_{i,k}+1, i=0,1$. Теперь обозначим положительную постоянную $1+\sum\limits_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj}+\sum\limits_{j\geqslant\widetilde{m}_{1,k}} b_{kj}h_{kj}^{(1)}$ через σ_k, $k=\overline{1,n}$, и наряду с оператором $L_{(n)}$, стоящим в правой части уравнения (2.13), рассмотрим оператор $\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{L}u\overset{\mathrm{def}}{=}\Delta u+\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}\frac{c_{kj}}{\sigma_k}u(x+h_{kj}^{(0)}e_k,t)-\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}\frac{2|b_{kj}|}{\sigma_k}u(x+\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,e_k,t)\right].$$

Отметим, что, хотя дифференциально-разностный оператор $\mathcal{L}$ содержит лишь младшие нелокальные члены, он зависит и от коэффициентов при старших нелокальных членах исходного оператора $L_{(n)}$.

Обозначим $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k}\left(\sum\limits_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}-2\sum\limits_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\right)I-\mathcal{L}$ через R. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.6.2. *Пусть $R(\xi)$ положительно определен. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty}\left[e^{-t\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}}c_{kj}}u(x_0,t)-w\left(\frac{x_1^0+q_1t}{\sqrt{p_1}},\dots,\frac{x_n^0+q_nt}{\sqrt{p_n}},t\right)\right]=0$$

для любого $x_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}(x_1^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, где

$$p_i=1+\sum_{j=1}^{m_{2,i}}a_{ij}+\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}h_{ij}^{(1)}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}\left[h_{ij}^{(0)}\right]^2,$$

$$q_i=\sum_{j=1}^{m_{1,i}}b_{ij}+\sum_{j=1}^{m_{0,i}}c_{ij}h_{ij}^{(0)};\ i=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы $p_1,\dots,p_n$ положительны. Для этого возьмем произвольное $k\in\overline{1,n}$ и в условии положительной определенности $R(\xi)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k}\left(\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}-2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\right)+|\xi|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sigma_k}\left(\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\cos h_{kj}^{(0)}\xi_k-2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\cos\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k\right)\geqslant C|\xi|^2$$

положим $\xi_1,\dots,\xi_{k-1},\xi_{k+1},\dots,\xi_n$ равными нулю. Получим, что

$$\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}-2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|+\sigma_k\xi_k^2+2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\cos\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k-\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\cos h_{kj}^{(0)}\xi_k\geqslant C\xi_k^2$$

для любого положительного ξ_k. Отсюда следует, что справедливо следующее неравенство:

$$C\xi_k^2\leqslant\sigma_k\xi_k^2-2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\left(1-\cos\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k\right)+\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\left(1-\cos h_{kj}^{(0)}\xi_k\right).$$

Но последнее выражение равно

$$\sigma_k\xi_k^2-4\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}|\sin^2\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}+2\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}^{(0)}\xi_k}{2}=$$

$$=\sigma_k\xi_k^2-\xi_k^2\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2+\frac{\xi_k^2}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\xi_k}{2}}\right)^2,$$

значит,

$$\sigma_k-\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\xi_k}{2}}\right)^2\geqslant C$$

для любого положительного ξ_k.

Отсюда

$$\sigma_k-\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2>0.$$

Действительно, предположим, что, напротив,

$$\sigma_k-\sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}}|b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}}c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\leqslant 0.$$

Тогда для любого положительного ξ_k константа C не превосходит

$$\sigma_k + \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}| - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}| + \frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2 - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}\right)^2 = \sigma_k - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}| +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2 - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|\left[\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2 - 1\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\left[\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}\right)^2 - 1\right],$$

что, в свою очередь, не превосходит

$$\frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2\left[\left(\frac{\sin\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}{\frac{h_{kj}^{(0)}\,\xi_k}{2}}\right)^2 - 1\right] - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}|\left[\left(\frac{\sin\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}{\frac{\sqrt{|h_{kj}^{(1)}|}\,\xi_k}{2}}\right)^2 - 1\right].$$

Однако в силу конечности сумм можно выбрать положительное ξ_k столь малым, что последнее выражение не превзойдет $\dfrac{C}{2}$. Полученное противоречие и доказывает положительность величины

$$\sigma_k - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}| + \frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2 =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} + \sum_{j\geqslant\widetilde{m}_{1,k}} b_{kj}h_{kj}^{(1)} - \sum_{j<\widetilde{m}_{1,k}} |b_{kj}||h_{kj}^{(1)}| + \frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2 =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{m_{2,k}} a_{kj} + \sum_{j=1}^{m_{1,k}} b_{kj}h_{kj}^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{j<\widetilde{m}_{0,k}} c_{kj}\left[h_{kj}^{(0)}\right]^2.$$

Значит, p_k тем более положительна.

Теперь зафиксируем произвольное x_0 из $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$w\left(\frac{x_1^0 + q_1 t}{\sqrt{p_1}}, \ldots, \frac{x_n^0 + q_n t}{\sqrt{p_n}}, t\right) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\sqrt{p_1}\,\xi_1, \ldots, \sqrt{p_n}\,\xi_n)e^{-\frac{1}{4t}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^0+q_it}{\sqrt{p_i}}-\xi_i\right)^2} d\xi.$$

Последнее выражение равно

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\eta)e^{-\frac{1}{t}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i^0+q_it-\eta_i)^2}{4p_i}} d\eta = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\xi)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(2\xi_i+q_i\sqrt{t})^2}{4p_i}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 + tq - \sqrt{t}y)e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_i^2}{4p_i}} dy,$$

где q обозначает вектор $(q_1, \dots, q_n)$. Далее в силу (2.11) и (2.15),

$$u(x_0,t) = \left(\frac{2\sqrt{t}}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 - 2\sqrt{t}\eta) \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_{1,i}(\tau)\right]} \cos\left[2\sqrt{t}\eta_i\tau - tG_{2,i}(\tau)\right] d\tau d\eta =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 + tq - \sqrt{t}y) \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_{1,i}(\tau)\right]} \cos\left[y_i\tau\sqrt{t} - q_i\tau t - tG_{2,i}(\tau)\right] d\tau dy,$$

следовательно,

$$e^{-t\sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}} u(x_0,t) = \left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 + tq - \sqrt{t}y) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-t\left[\tau^2 + G_{1,i}(\tau) + \sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\right]} \cos\left[y_i\tau\sqrt{t} - q_i\tau t - tG_{2,i}(\tau)\right] d\tau dy,$$

что, в свою очередь, равно

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 + tq - \sqrt{t}y) \prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \cos\left[y_i z - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz dy.$$

Таким образом,

$$e^{-t\sum\limits_{k=1}^n \sum\limits_{j=1}^{m_{0,k}} c_{kj}} u(x_0,t) - w\left(\frac{x_1^0 + q_1 t}{\sqrt{p_1}}, \dots, \frac{x_n^0 + q_n t}{\sqrt{p_n}}, t\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x_0 + tq - \sqrt{t}y) \left(\prod_{i=1}^n \int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \times\right.$$

$$\left.\times \cos\left[y_i z - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}} e^{-\frac{y_i^2}{4p_i}}\right) dy. \tag{2.18}$$

Справедливы следующие утверждения:

Лемма 2.6.1. *В условиях теоремы* 2.6.2 *для любого* $i = \overline{1,n}$

$$\int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \cos\left[yz - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p_i}} e^{-\frac{y^2}{4p_i}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно относительно $y \in (-\infty, +\infty)$.

Лемма 2.6.2. *В условиях теоремы* 2.6.2 *для любого* $i = \overline{1,n}$ *существует такое* M_i, *зависящее только от коэффициентов уравнения* (2.13), *что*

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-z^2 - tG_{1,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right) - t\sum\limits_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}} \cos\left[yz - q_i z\sqrt{t} - tG_{2,i}\left(\frac{z}{\sqrt{t}}\right)\right] dz\right| < \frac{M}{y^2}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}$ *и любого* $t \in [1, \infty)$.

Доказательство леммы 2.6.2 проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 2.3.2 (см. также лемму 5 работы [55]).

Для доказательства леммы 2.6.1 показатель подынтегральной экспоненты представляется в виде

$$-z^2 - z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)} z}{\sqrt{t}} - z\sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(1)} z}{\sqrt{t}} + t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\left(\cos\frac{h_{ij}^{(0)} z}{\sqrt{t}} - 1\right) =$$

$$= -z^2\left(1+\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}}\right) - z\sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}} - 2t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\sin^2\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}} =$$

$$= -z^2\left[1+\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}} + \sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}h_{ij}^{(1)}\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\left[h_{ij}^{(0)}\right]^2\left(\frac{\sin\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{2\sqrt{t}}}\right)^2\right],$$

а аргумент подынтегрального косинуса — в виде

$$z\left(y - q_i\sqrt{t} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}}\right) - z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}} + t\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}\frac{\frac{\sin h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}},$$

т. е. в виде

$$z\left(y - q_i\sqrt{t} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{1,i}} b_{ij}\cos\frac{h_{ij}^{(1)}z}{\sqrt{t}} + \sqrt{t}\sum_{j=1}^{m_{0,i}} c_{ij}h_{ij}^{(0)}\frac{\frac{\sin h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}{\frac{h_{ij}^{(0)}z}{\sqrt{t}}}\right) - z^2\sum_{j=1}^{m_{2,i}} a_{ij}\sin\frac{h_{ij}^{(2)}z}{\sqrt{t}}.$$

Дальнейшее доказательство леммы 2.6.1 аналогично доказательству леммы 2.3.1 (см. также [55, лемма 4]). Теперь мы можем разбить (2.18) в сумму (2.12) и оценить ее так же, как и при доказательстве теоремы 2.5.1 (используя леммы 2.6.1, 2.6.2 вместо лемм 2.3.1, 2.3.2 соответственно). Это и завершает доказательство теоремы 2.6.2. □

Отметим, что замечание 1.6.1 полностью справедливо и для теоремы 2.6.2, т. е. и для случая, когда старшие члены уравнения также являются нелокальными.

Замечание 2.6.1. Легко видеть, что функция

$$\omega(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w\left(\frac{x_1+q_1t}{\sqrt{p_1}},\dots,\frac{x_n+q_nt}{\sqrt{p_n}},t\right)$$

является классическим ограниченным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} p_i\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} q_i\frac{\partial u}{\partial x_i}, \tag{2.19}$$

удовлетворяющим начальному условию (1.4), поэтому в теореме о (весовой) близости решений вместо задачи (2.16), (2.17) можно использовать задачу (2.19), (1.4). Отметим в этой связи, что качественно иной сравнительно с модельным случаем однородного эллиптического оператора в правой части уравнения (ср. с теоремой 2.5.1) характер поведения решения, установленный в теореме 2.6.2, сохраняется и в случае отсутствия нелокальных старших членов (ср. с теоремой 2 работы [55]). Таким образом, добавление в параболическое дифференциально-разностное уравнение младших членов может, как и в классической параболической теории (см. [38]), приводить к качественно новым эффектам.

2.7. Общий случай нефакторизуемого фундаментального решения

Пусть $a_{kj}, h_{kj} \in \mathbb{R}^1$, $k,j=\overline{1,n}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x+h_{kj}e_j,t), \tag{2.20}$$

где e_j обозначает единичный вектор j-го координатного направления.

Так же, как и в разделе 2.1, рассмотрим вещественную часть символа оператора L (ср. также с разделом 1.6 и [124, §8])

$$\mathrm{Re}L(\xi) = -\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\xi_k^2\cos h_{kj}\xi_j$$

и назовем $-L(\xi)$ положительно определенным, если существует такое положительное C, что $-\mathrm{Re}L(\xi) \geqslant C|\xi|^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$. Оператор $-L$, обладающий указанным свойством, будем называть сильно эллиптическим во всем пространстве оператором второго порядка.

В дальнейшем мы будем полагать оператор $-L$ сильно эллиптическим.

Будем рассматривать задачу Коши (2.20), (1.4), считая, что $u_0(x)$ непрерывна и ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Определим на $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{E}_{a,h}(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi, \tag{2.21}$$

где $G_1(\xi) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}\xi_k^2 \cos h_{kj}\xi_j$, $G_2(\xi) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}\xi_k^2 \sin h_{kj}\xi_j$.

Из условия сильной эллиптичности оператора $-L$ вытекает неравенство $|\mathcal{E}(x,t)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-Ct|\xi|^2}d\xi$, т. е. для любых t_0, T из $(0,+\infty)$ интеграл (2.21) сходится абсолютно и равномерно относительно $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0,T]$, следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ определена корректно на $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$.

Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по переменной t:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)}G_1(\xi)\cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)}G_2(\xi)\sin[x\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi,$$

$$\sin h_{kj}\xi_j\ \sin[x\cdot\xi - tG_2(\xi)] - \cos h_{kj}\xi_j\ \cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)] = -\cos[(x+h_{kj}e_j)\cdot\xi - tG_2(\xi)],$$

поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\xi_k^2 \cos[(x+h_{kj}e_j)\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi =$$

$$= -\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)}\xi_k^2 \cos[(x+h_{kj}e_j)\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi. \tag{2.22}$$

Далее формальное дифференцирование $\mathcal{E}$ под знаком интеграла по пространственным переменным дает:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_k^2} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_k^2 e^{-tG_1(\xi)} \cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi,$$

значит,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_k^2}(x+h_{kj}e_j,t) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \xi_k^2 e^{-tG_1(\xi)} \cos[(x+h_{kj}e_j)\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi. \tag{2.23}$$

Каждый из этих несобственных интегралов ограничен по модулю сверху величиной

$$\mathrm{const} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 e^{-Ct|\xi|^2}d\xi,$$

т. е. сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0,T]$ для любых $t_0, T \in (0,+\infty)$. Значит, дифференцирование под знаком интеграла законно, и $\mathcal{E}(x,t)$ в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (2.20).

Оценим поведение функции $\mathcal{E}(x,t)$ и ее производных при $x \to \infty$ (при фиксированном положительном t). Для этого предварительно разобьем ее на слагаемые $\mathcal{E}_1(x,t)$ и $\mathcal{E}_2(x,t)$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_1(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \cos x\cdot\xi\, d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \sin tG_2(\xi) \sin x\cdot\xi\, d\xi.$$

Докажем следующее утверждение.

Лемма 2.7.1. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$, $t > 0$. *Тогда* $|x|^l \mathcal{E}(x,t)$ *ограничена в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $t > 0$, $i \in \overline{1,n}$; тогда

$$x_i \mathcal{E}_1(x,t) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<R} e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi_i} \sin x\cdot\xi \, d\xi =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{|\xi|=R} e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \sin x\cdot\xi \cos(\xi, e_i)\, dS_\xi - \int\limits_{|\xi|<R} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \sin x\cdot\xi \, d\xi \right).$$

Поверхностный интеграл в последнем выражении ограничен по модулю величиной

$$\int\limits_{|\xi|=R} e^{-tG_1(\xi)} dS_\xi \leqslant \int\limits_{|\xi|=R} e^{-Ct|\xi|^2} dS_\xi = \mathrm{const}\, R^{n-1} e^{-CtR^2} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

следовательно,

$$x_i \mathcal{E}_1(x,t) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \sin x\cdot\xi \, d\xi.$$

Выполняя дифференцирование в подынтегральном выражении, легко видеть, что модуль подынтегральной функции не превосходит $|P(\xi)| e^{-tG_1(\xi)}$, где P — полином с коэффициентами, зависящими только от (фиксированного) t и коэффициентов уравнения (2.20), поэтому функция $x_i \mathcal{E}_1(x,t)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Далее

$$x_i^2 \mathcal{E}_1(x,t) = -x_i \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \sin x\cdot\xi \, d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \frac{\partial}{\partial \xi_i} \cos x\cdot\xi \, d\xi.$$

Представим последнее выражение в виде

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\xi|<R} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \frac{\partial}{\partial \xi_i} \cos x\cdot\xi \, d\xi =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_{|\xi|=R} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \cos x\cdot\xi \, \cos(\xi, e_i)\, dS_\xi - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \cos x\cdot\xi \, d\xi \right).$$

Подынтегральная функция последнего поверхностного интеграла, как мы видели выше, по модулю не превосходит $|P(\xi)| e^{-tG_1(\xi)}$, значит, модуль указанного интеграла не превосходит

$$e^{-CtR^2} \int\limits_{|\xi|=R} |P(\xi)| dS_\xi \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Отсюда

$$x_i^2 \mathcal{E}_1(x,t) = -\int\limits_{|\xi|<R} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \cos x\cdot\xi \, d\xi.$$

Выполняя дифференцирование в подынтегральной функции, мы видим, что ее модуль не превосходит $|P(\xi)| e^{-tG_1(\xi)}$ (вообще говоря, с другим полиномом P), т. е. функция $x_i^2 \mathcal{E}_1(x,t)$ ограничена в $\mathbb{R}^n$.

Повторяя интегрирование по частям достаточное количество раз и учитывая, что

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \xi_i^l} \left[e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right] \right| \leqslant |P(\xi)| e^{-tG_1(\xi)} \tag{2.24}$$

для любого $l \in \mathbb{N}$, причем коэффициенты полинома P зависят только от l, t и коэффициентов уравнения (2.20), получаем ограниченность функции $x_i^l \mathcal{E}_1(x,t)$ для любого $i \in \overline{1,n}$, а значит, и ограниченность функции $|x|^l \mathcal{E}_1(x,t)$.

Ограниченность функции $|x|^l \mathcal{E}_2(x,t)$ доказывается точно так же.

Лемма 2.7.1 доказана. □

Таким образом, в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$ определена функция

$$u(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(x-\xi,t) u_0(\xi) d\xi. \tag{2.25}$$

Используя представления (2.22), (2.23) и применяя к ним ту же процедуру, которая в лемме 2.7.1 применена к интегралу (2.21), получаем с учетом того, что оценка (2.24) остается верной и для функций $\dfrac{\partial^l}{\partial \xi_i^l} \left[\xi_k^2 e^{-tG_1(\xi)} \cos tG_2(\xi) \right]$, $k = \overline{1,n}$, что утверждение леммы 2.7.1 справедливо и для функций $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x_k^2}$. Это означает, что функцию (2.25) можно дифференцировать под знаком интеграла. Тем самым, поскольку функция $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.20), доказана

Теорема 2.7.1. *Пусть оператор $-L$ является сильно эллиптическим в $\mathbb{R}^n$. Тогда функция* (2.25) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (2.20) *в* $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$.

Замечание 2.7.1. То, что функция (2.25) удовлетворяет задаче (2.20), (1.4) в смысле обобщенных функций, является известным фактом (см., например, [15]). Новым в теореме 2.7.1 является только то, что это решение является классическим в $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$.

Чтобы установить единственность этого решения, исследуем согласно [15] вещественную часть символа эллиптического оператора L, содержащегося в уравнении (2.20). Указанный символ $\mathcal{P}(z_1,\ldots,z_n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma+i\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{P}(\sigma_1+i\tau_1,\ldots,\sigma_n+i\tau_n)$ равен

$$\begin{aligned}
-\sum_{k=1}^n z_k^2 \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{-ih_{kj}z_j} &= \sum_{k=1}^n (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k) \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{-ih_{kj}z_j} = \\
&= \sum_{k=1}^n (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k) \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{h_{kj}\tau_j - ih_{kj}\sigma_j} = \\
&= \sum_{k=1}^n (\tau_k^2 - \sigma_k^2 - 2i\sigma_k\tau_k) \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} e^{h_{kj}\tau_j} \cos h_{kj}\sigma_j - i \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{h_{kj}\tau_j} \sin h_{kj}\sigma_j \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Re}\mathcal{P}(z) = \sum_{k=1}^n \left[(\tau_k^2 - \sigma_k^2) \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{h_{kj}\tau_j} \cos h_{kj}\sigma_j - 2\sigma_k\tau_k \sum_{j=1}^n a_{kj} e^{h_{kj}\tau_j} \sin h_{kj}\sigma_j \right].$$

Поэтому функция $\mathcal{Q}(z,t_0,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$ удовлетворяет следующей оценке:

$$|\mathcal{Q}(z,t_0,t)| \leqslant e^{(t-t_0)\left[C_1(1+|\sigma|^4) + C_2 e^{C_3|\tau|}\right]},$$

а отсюда следует (см. [15, гл. 2, Добавление 1]), что задача (2.20), (1.4) имеет не более одного решения в смысле обобщенных функций.

Замечание 2.7.2. Вообще говоря, теорема о единственности решения задачи (2.20), (1.4) (в соответствующих пространствах обобщенных функций) справедлива для гораздо более широких классов начальных функций, нежели класс непрерывных ограниченных функций — в частности, для классов А. Н. Тихонова и их обобщений (см. [2], а также [46]). Здесь мы, однако, ограничиваемся рассмотрением случая непрерывных ограниченных начальных функций, поскольку исследуем близость решений указанной задачи и классических параболических задач.

Изучим теперь поведение $u(x,t)$ при $t \to \infty$. Прежде всего докажем следующее утверждение:

Лемма 2.7.2. *Пусть условия теоремы* 2.7.1 *выполнены. Тогда постоянная* $p_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj}$ *положительна для любого* $k \in \overline{1,n}$.

Доказательство. Пусть $k \in \overline{1,n}$. Предположим, напротив, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} \leqslant 0$, и положим $\xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = \xi_{k+1} = \dots = \xi_n = 0$ в условии сильной эллиптичности оператора $-L$. Получим неравенство

$$\xi_k^2 \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj} + a_{kk} \cos h_{kk}\xi_k \right) \geqslant C\xi_k^2,$$

значит, для любого отличного от нуля ξ_k

$$C \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} a_{kj} + a_{kk} \cos h_{kk}\xi_k + a_{kk} - a_{kk} = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} + a_{kk}(\cos h_{kk}\xi_k - 1) \leqslant a_{kk}(\cos h_{kk}\xi_k - 1).$$

Выбирая теперь ξ_k достаточно малым по модулю (хотя и отличным от нуля), получаем противоречие с положительностью постоянной C.

Лемма 2.7.2 доказана. □

Теперь мы можем наряду с дифференциально-разностным параболическим уравнением (2.20) рассмотреть дифференциальное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \tag{2.26}$$

Классическое ограниченное решение задачи (2.26), (1.4) (которое существует и единственно в силу непрерывности и ограниченности функции u_0) будем обозначать через $v(x,t)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.7.2. *В условиях теоремы* 2.7.1

$$\lim_{t\to\infty} [u(x,t) - v(x,t)] = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Сделав в (2.25) замену переменных $\dfrac{x-\xi_k}{2\sqrt{t}} = \eta_k$, $k = \overline{1,n}$, получаем, что

$$u(x,t) = \left(\frac{\sqrt{t}}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta, t) u_0(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta.$$

Учитывая, что

$$t^{\frac{n}{2}} \mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta, t) = t^{\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \cos[2\sqrt{t}\xi\cdot\eta - tG_2(\xi)] d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz,$$

а

$$v(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\xi_k)^2}{4p_k t}} d\xi$$

(как решение задачи Коши для дифференциального параболического уравнения с постоянными коэффициентами), получаем следующее представление оцениваемой разности:

$$u(x,t) - v(x,t) =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x - 2\sqrt{t}\eta) \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz d\eta -$$

$$- \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n \prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi) e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(x_k-\xi_k)^2}{4p_k t}} d\xi =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(x - 2\sqrt{t}\eta) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\eta_k^2}{p_k}} \right) d\eta. \tag{2.27}$$

Теперь докажем две следующие леммы.

Лемма 2.7.3.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\ldots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n} \sqrt{p_k}} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\eta_k^2}{p_k}} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно относительно $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k z_k^2} \cos 2z\cdot\eta dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \prod_{k=1}^{n} e^{-p_k z_k^2} \cos\left(2\sum_{k=1}^{n} z_k\eta_k\right) dz.$$

Функция $\cos\left(2\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\eta_k\right)$ является конечной суммой слагаемых вида $\prod\limits_{k=1}^{n} f_k(2z_k\eta_k)$, где функция f_k есть либо синус, либо косинус, причем только одно из этих слагаемых, а именно $\prod\limits_{k=1}^{n} \cos 2z_k\eta_k$, не содержит ни одного синуса. Следовательно, последний интеграл представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n \text{ раз}} \prod_{k=1}^{n} e^{-p_k z_k^2} f_k(2z_k\eta_k) dz_1 \ldots dz_n = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_k\tau^2} f_k(2\eta_k\tau) d\tau,$$

из которых только одно, а именно

$$\prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_k\tau^2} \cos 2\eta_k\tau\, d\tau,$$

отлично от нуля; все остальные слагаемые обращаются в нуль, поскольку каждое из них содержит хотя бы один сомножитель вида

$$\prod_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-p_k\tau^2} \sin 2\eta_k\tau\, d\tau = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} p_k z_k^2} \cos 2z\cdot\eta dz = 2^n \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p_k\tau^2} \cos 2\eta_k\tau\, d\tau = \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{-\frac{\eta_k^2}{p_k}}}{\sqrt{p_k}},$$

следовательно, для второго сомножителя подынтегральной функции внешнего интеграла в (2.27) имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{p_k}} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\cos 2z\cdot\eta\right) dz. \quad (2.28)$$

Абсолютная величина интеграла (2.28) оценивается сверху суммой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} dz + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2} dz \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-C|z|^2} dz + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\min\limits_{k=\overline{1,n}} p_k|z|^2} dz < \infty,$$

поэтому интеграл (2.28) сходится абсолютно и равномерно относительно $t \in \mathbb{R}^1_+$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Зафиксируем произвольное положительное ε и разобьем (2.28) в сумму $\int\limits_{|z|<\delta} + \int\limits_{|z|\geqslant\delta} \stackrel{\text{def}}{=} I_{1,\delta} + I_{2,\delta}$.

В силу только что доказанной равномерной сходимости найдется такое значение параметра δ, что $|I_{2,\delta}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любых $t \in \mathbb{R}^1_+$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем это δ и рассмотрим интеграл $I_{1,\delta}$.

Его подынтегральная функция равна

$$e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\left(e^{-t\sum\limits_{k,j=1}^{n}a_{kj}\frac{z_k^2}{t}\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}} + \sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta\right) =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\left(e^{\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\left(p_k - \sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta\right) =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\left(e^{\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\left(1-\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta\right) =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\left(e^{2\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta\right) =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\left(e^{2\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}} \cos 2z\cdot\eta\,\cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta\right) +$$

$$+ e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2} e^{2\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}} \sin 2z\cdot\eta\,\sin\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] = A_1(\eta,t;z) + A_2(\eta,t;z),$$

где

$$A_1(\eta,t;z) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2}\cos 2z\cdot\eta\left(e^{2\sum\limits_{k=1}^{n}z_k^2\sum\limits_{j=1}^{n}a_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - 1\right),$$

$$A_2(\eta,t;z) = e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}p_kz_k^2} e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n}z_k^2a_{kj}\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}} \sin 2z\cdot\eta\,\sin\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right].$$

Вначале оценим второе из этих слагаемых.

$$\left|\int\limits_{|z|<\delta} A_2(\eta,t;z)dz\right| \leqslant \int\limits_{|z|<\delta} e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|z_k^2} \left|\sin\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right]\right| dz \leqslant$$

$$\leqslant e^{2\delta^2\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|}\int\limits_{|z|<\delta}\left|\sin\left(\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right)\right|dz\leqslant$$

$$\leqslant e^{2\delta^2\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|}\int\limits_{|z|<\delta}\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|z_k^2\left|\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right|dz\leqslant$$

$$\leqslant \delta^2\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|e^{2\delta^2\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|}\int\limits_{|z|<\delta}\left|\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right|dz\leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta^3}{\sqrt{t}}\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}||h_{kj}|e^{2\delta^2\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|}\int\limits_{|z|<\delta}dz\overset{\text{def}}{=}\frac{C_0\delta^{n+3}e^{C_1\delta^2}}{\sqrt{t}},$$

где постоянные C_0, C_1 зависят только от коэффициентов уравнения (2.20).

Обозначив $\dfrac{16C_0^2\delta^{2n+6}e^{2C_1\delta^2}}{\varepsilon^2}$ через T_0, получаем, что для любых $t > T_0$ и $\eta\in\mathbb{R}^n$

$$\left|\int\limits_{|z|<\delta}A_2(\eta,t;z)dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

Осталось оценить

$$\left|\int\limits_{|z|<\delta}A_1(\eta,t;z)dz\right|\leqslant\int\limits_{|z|<\delta}\left|e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}}\cos\left(\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right)-1\right|dz.\tag{2.29}$$

Не ограничивая общности, будем считать δ настолько большим, что $\gamma\overset{\text{def}}{=}\dfrac{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{24\pi^{\frac{n}{2}}\delta^n}\varepsilon<1$.

Поскольку в области интегрирования интеграла (2.29)

$$\left|2\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}\right|\leqslant 2\delta^2\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|\frac{h_{kj}^2z_j^2}{4t}\leqslant\frac{\delta^4\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|h_{kj}^2}{2t},$$

найдется такое $T_1>0$, что при $t>T_1$ значение экспоненты в (2.29) принадлежит $(1-\gamma,1+\gamma)$.

Поскольку в области интегрирования интеграла (2.29)

$$\left|\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right|\leqslant\delta^2\sum_{k,j=1}^{n}|a_{kj}|\frac{|h_{kj}z_j|}{\sqrt{t}}\leqslant\frac{\delta^3\sum\limits_{k,j=1}^{n}|a_{kj}h_{kj}|}{\sqrt{t}},$$

найдется такое $T_2>0$, что при $t>T_2$ значение косинуса в (2.29) принадлежит $(1-\gamma,1+\gamma)$. Таким образом, при $t>\max\{T_1,T_2\}$

$$1-3\gamma\leqslant(1-\gamma)^2<e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin^2\frac{h_{kj}z_j}{2\sqrt{t}}}\cos\left(\sum_{k,j=1}^{n}a_{kj}z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right)<(1+\gamma)^2\leqslant1+3\gamma,$$

значит, подынтегральная функция в (2.29) не превосходит 3γ, а сам интеграл (2.29) не превосходит $3\gamma\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}\delta^n}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}=\dfrac{\varepsilon}{4}$, следовательно, $|I_{1,\delta}|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ для любых $t>\max\{T_0,T_1,T_2\}$, $\eta\in\mathbb{R}^n$.

Это и завершает доказательство леммы 2.7.3, поскольку положительное ε выбиралось произвольно. □

Лемма 2.7.4. *Существует такое положительное* M, *что*

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz\right| < \frac{M}{|\eta|^{n+1}}$$

для любых $t>1, \eta\in\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Пусть $t>1, i\in\overline{1,n}$. Представим оцениваемый интеграл в виде суммы

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \cos 2z\cdot\eta\, dz +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \sin\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \sin 2z\cdot\eta\, dz \stackrel{\text{def}}{=} f_1(t,\eta)+f_2(t,\eta)$$

и оценим

$$\eta_i f_1(t,\eta) = \eta_i \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \cos 2z\cdot\eta\, dz.$$

Последнее выражение равно

$$\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|z|<R} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \frac{\partial}{\partial z_i}\sin 2z\cdot\eta\, dz =$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\left[\int\limits_{|z|=R} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \sin 2z\cdot\eta \cos(z,e_i)\, dS_z -\right.$$
$$\left.-\int\limits_{|z|<R} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right]\right) \sin 2z\cdot\eta\, dz\right]. \tag{2.30}$$

Поверхностный интеграл в (2.30) по модулю не превосходит

$$\int\limits_{|z|=R} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} dS_z \leqslant \int\limits_{|z|=R} e^{-C|z|^2} dS_z = \text{const}\ R^{n-1}e^{-CR^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

следовательно, (2.30) равно

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial z_i}\left(e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right]\right) \sin 2z\cdot\eta\, dz \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z;t)\sin 2z\cdot\eta\, dz. \tag{2.31}$$

Вычислим

$$g(z;t) = \frac{\partial}{\partial z_i}\left(e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}} \cos\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2 \sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}\right).$$

Получаем

$$\left(-2z_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cos\frac{h_{ij}z_j}{\sqrt{t}} + \sum_{k=1}^{n} z_k^2\frac{a_{ki}h_{ki}}{\sqrt{t}}\sin\frac{h_{ki}z_i}{\sqrt{t}}\right) e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}} \cos\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}} -$$
$$- e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2\cos\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}}} \left(2z_i\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sin\frac{h_{ij}z_j}{\sqrt{t}} + \sum_{k=1}^{n} z_k^2\frac{a_{ki}h_{ki}}{\sqrt{t}}\cos\frac{h_{ki}z_i}{\sqrt{t}}\right) \sin\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}z_k^2\sin\frac{h_{kj}z_j}{\sqrt{t}},$$

что по модулю не превосходит

$$\left(4|z_i|\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+2\sum_{k=1}^{n}|a_{ki}h_{ki}|z_k^2\right)e^{-C|z|^2}$$

(поскольку $t>1$), значит, интеграл (2.31) сходится абсолютно и равномерно относительно $t>1$, $\eta\in\mathbb{R}^n$, следовательно, $\eta_i f_1(t,\eta)$ есть ограниченная на множестве $\{\eta\in\mathbb{R}^n, t>1\}$ функция.

Далее

$$\eta_i^2 f_1(t,\eta)=-\frac{\eta_i}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n}g(z;t)\sin 2z\cdot\eta\,dz=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{|z|=R}g(z;t)\cos 2z\cdot\eta\,\cos(z,e_i)dS_z-\int\limits_{|z|<R}\frac{\partial}{\partial z_i}g(z;t)\cos 2z\cdot\eta\,dz\right). \qquad (2.32)$$

Модуль подынтегральной функции последнего поверхностного интеграла не превосходит $|g(z;t)|$; из полученной выше оценки этой функции следует, что модуль указанного интеграла не превосходит $\operatorname{const}(1+R)R^n e^{-CR^2}$. Поэтому выражение (2.32) равно $-\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial}{\partial z_i}g(z;t)\cos 2z\cdot\eta\,dz$.

Дифференцируя $g(z;t)$ и учитывая, что $t>1$, получаем, что абсолютная величина последней подынтегральной функции не превосходит $P(|z|)e^{-C|z|^2}$, где P — некоторый полином с положительными коэффициентами. Поэтому функция $\eta_i^2 f_1(t,\eta)$ ограничена на множестве $\{\eta\in\mathbb{R}^n, t>1\}$.

Повторяя интегрирование по частям достаточное количество раз, получаем, что функция $\eta_i^m f_1(t,\eta)$ ограничена на множестве $\{\eta\in\mathbb{R}^n, t>1\}$ для любых $i=\overline{1,n}$, $m\in\mathbb{N}$; при этом учитываем, что из вида функции g и того, что $t>1$, следует, что подынтегральная функция будет всегда оцениваться по модулю сверху функцией $P(|z|)e^{-C|z|^2}$, где P — некоторый полином (вообще говоря, свой для каждого m,i) с положительными коэффициентами.

Аналогично доказывается ограниченность функции $\eta_i^m f_2(t,\eta)$ на множестве $\{\eta\in\mathbb{R}^n, t>1\}$ для любых $i=\overline{1,n}$, $m\in\mathbb{N}$.

Поскольку $|\eta|^{n+1}\leqslant\operatorname{const}\sum\limits_{i=1}^{n}|\eta_i|^{n+1}$, лемма 2.7.4 доказана. □

Теперь мы можем вернуться к доказательству теоремы 2.7.2. Для этого зададимся произвольным положительным ε и разобьем (2.27) в сумму

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^n\left(\int\limits_{|\eta|<R}+\int\limits_{|\eta|\geqslant R}\right)\overset{\text{def}}{=}I_{3,R}(t)+I_{4,R}(t),$$

где R — положительный параметр. Подынтегральная функция в (2.27) не превосходит

$$\sup_{\mathbb{R}^n}|u_0|\left(\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left[2z\cdot\eta-tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right]dz\right|+\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}}e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{p_k}}\right),$$

значит, в силу леммы 2.7.4 (считаем, без ограничения общности, что $t>1$) подынтегральная функция в $I_{4,R}(t)$ ограничена по модулю сверху функцией $\operatorname{const}\left(\dfrac{1}{|\eta|^{n+1}}+e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{p_k}}\right)$. Поскольку все функции $\dfrac{1}{|\eta|^{n+1}}$ и $e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{p_k}}$ интегрируемы на множестве $\{|\eta|>1\}$, существует такое $R>1$, что $|I_{4,R}(t)|<\pi^n\dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $t>1$. Зафиксируем это R и рассмотрим $I_{3,R}(t)$. В силу леммы 2.7.3

существует такое $T^* > 1$, что для любых $t > T^*$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz - \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}}\, e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\eta_k^2}{p_k}} \right| < \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\varepsilon}{4R^n \sup\limits_{\mathbb{R}^n}|u_0|}.$$

Тогда

$$|I_{3,R}(t)| \leqslant \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\varepsilon}{4R^n \sup\limits_{\mathbb{R}^n}|u_0|} \int\limits_{|\eta|<R} u_0(x - 2\sqrt{t}\eta)\, d\eta \leqslant \pi^n \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого $t > T^*$.

Таким образом, найдено такое положительное T^*, что модуль выражения (2.27) не превосходит ε для любого $t > T^*$. Поскольку положительное ε выбиралось произвольно, это означает, что $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t) - v(x,t)] = 0$. Это и завершает в силу произвольности выбора x из $\mathbb{R}^n$ доказательство теоремы 2.7.2. □

Отсюда вытекает

Следствие 2.7.1. *Пусть* $x \in \mathbb{R}^n, l \in (-\infty, +\infty)$. *Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = l \iff \lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^n}\int\limits_{B_R(p_1,\dots,p_n)} u_0(x)\, dx = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{p_i}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}\, l,$$

где $B_R(p_1,\dots,p_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{x_1^2}{p_1} + \dots + \frac{x_n^2}{p_n} < R \right\}$.

Доказательство заключается в непосредственном применении теоремы 2.7.2 и классической теоремы о стабилизации классического ограниченного решения задачи (2.26), (1.4) (см., например, [30]).

В случае одной пространственной переменной (единственную положительную константу p_1 переобозначим через p) справедливо и следующее утверждение:

Следствие 2.7.2. $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,t) - w(x,pt)] = 0$ *для любого вещественного* x, *где* $w(x,t)$ *обозначает классическое ограниченное решение задачи Коши для уравнения* $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ *с начальным условием* (1.4).

Для доказательства достаточно рассмотреть интегральное представление функции $w(x,pt)$ и убедиться в том, что оно совпадает с интегральным представлением функции $v(x,t)$.

Замечание 2.7.3. Отметим, что, хотя теорема 2.7.2 и следствие 2.7.1 справедливы при одних и тех же условиях, утверждение теоремы (как утверждение о близости решений) является более сильным в следующем смысле: в отличие от утверждения следствия (т. е. теоремы о стабилизации) оно дает информацию о поведении решения также и в том случае, когда (необходимое и достаточное) условие стабилизации не выполнено. Аналогично, при $n = 1$ следствие 2.7.2 является более сильным (в том же смысле), чем следствие 2.7.1.

Распространим теперь исследование на более общий случай однородного эллиптического дифференциально-разностного оператора, содержащего и смешанные производные второго порядка. Мы будем подробно останавливаться лишь на тех моментах, которые существенно отличаются от уже рассмотренного модельного случая. Итак, вместо (2.20) рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_h u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x + h_{kjm}e_m, t), \tag{2.33}$$

Здесь, как и выше, коэффициенты a_{kjm}, h_{kjm} вещественны, а оператор $-L_h$ является сильно эллиптическим, т. е. существует такое $C_h > 0$, что $G_1(\xi) \geqslant C_h|\xi|^2$ для любого ξ из $\mathbb{R}^n$, где

$$G_{\left\{\substack{1\\2}\right\}}(\xi) = \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j \begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix} h_{kjm}\xi_m. \tag{2.34}$$

Тогда фундаментальное решение (2.21) корректно определено на $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.7.3. *Пусть оператор $-L_h$ сильно эллиптичен в пространстве $\mathbb{R}^n$, а функции G_1, G_2 заданы формулами* (2.34). *Тогда функция* (2.25) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (2.33) *в полупространстве $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ и является единственным решением* (*в смысле обобщенных функций*) *задачи* (2.33), (1.4).

Для доказательства мы прежде всего подставляем фундаментальное решение (2.21) с функциями $G_1(\xi), G_2(\xi)$, заданными формулами (2.34), в уравнение (2.33). Учитывая, что

$$\begin{aligned}&\sin h_{kjm}\xi_m \, \sin[x\cdot\xi - tG_2(\xi)] - \cos h_{kjm}\xi_m \, \cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)] = \\ &= -\cos[(x + h_{kjm}e_m)\cdot\xi - tG_2(\xi)],\end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} &= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)} \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j \cos[(x + h_{kjm}e_m)\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi = \\ &= -\sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)}\xi_k\xi_j \cos[(x + h_{kjm}e_m)\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi.\end{aligned}$$

Далее

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x_k x_j} = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1(\xi)}\xi_k\xi_j \cos[x\cdot\xi - tG_2(\xi)]d\xi.$$

Следовательно, функция $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.33) в $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ (формальное дифференцирование под знаком интеграла законно, так как в силу сильной эллиптичности оператора $-L_h$ все интегралы, полученные в результате, сходится абсолютно и равномерно относительно $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T]$ для любых $0 < t_0 < T < \infty$).

Лемма 2.7.1 для рассматриваемой функции $\mathcal{E}(x,t)$ доказывается точно так же, как и в модельном случае чистых вторых производных. Общий случай отличается лишь другими коэффициентами полиномов $P(\xi)$, однако эти коэффициенты по-прежнему зависят только от l, t и коэффициентов уравнения (2.33).

Доказательство единственности также совершенно аналогично модельному случаю.

Теперь для исследования поведения решения при $t \to +\infty$ введем дифференциальный оператор

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j}$$

и докажем следующий аналог леммы 2.7.2:

Лемма 2.7.5. *Если оператор $-L_h$ является сильно эллиптическим в $\mathbb{R}^n$, то оператор $-L_0$ является эллиптическим.*

Доказательство. Предположим, напротив, что для любого достаточно малого положительного C найдется такое ξ из $\mathbb{R}^n$, что $L_0(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}\xi_k\xi_j < C|\xi|^2$. Тогда в силу однородности полинома $L_0(\xi)$ справедливо и более сильное утверждение: *для любых достаточно малых положительных C, r найдется такое ξ из $\mathbb{R}^n$, что $|\xi| = r$ и $L_0(\xi) < C|\xi|^2$.*

Действительно, зафиксируем произвольные положительные C и r и возьмем такое η из $\mathbb{R}^n$, что $L_0(\eta) < C|\eta|^2$. Если $\eta = 0$, то непрерывная функция $L_0(\xi)$ строго отрицательна в начале координат, следовательно, она строго отрицательна и в некотором шаре с центром в начале координат, т. е.

последнее неравенство выполняется и с некоторым $\eta \neq 0$. Поэтому мы можем, не ограничивая общности, считать, что $\eta \neq 0$. Тогда мы можем определить $\xi_j \overset{\text{def}}{=} r\dfrac{\eta_j}{|\eta|}$, $j = \overline{1,n}$. Получим, что

$$L_0(\xi) = \frac{r^2}{|\eta|^2} \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}\eta_k\eta_j < C\frac{r^2}{|\eta|^2}|\eta|^2 = C\left[\left(r\frac{\eta_1}{|\eta|}\right)^2 + \dots + \left(r\frac{\eta_n}{|\eta|}\right)^2\right] = C|\xi|^2,$$

причем $|\xi| = r$. С другой стороны, $G_1(\xi)$ можно представить в виде

$$\sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j\left(1 - 2\sin^2\frac{h_{kjm}\xi_m}{2}\right) = \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j - 2\sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j\sin^2\frac{h_{kjm}\xi_m}{2} =$$
$$= \sum_{k,j=1}^{n}\xi_k\xi_j\sum_{m=1}^{n} a_{kjm} - 2\sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j\sin^2\frac{h_{kjm}\xi_m}{2} =$$
$$= \sum_{k,j=1}^{n} b_{kj}\xi_k\xi_j - 2\sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}\xi_k\xi_j\sin^2\frac{h_{kjm}\xi_m}{2} \overset{\text{def}}{=} L_0(\xi) + R_{0,h}(\xi),$$

причем $|R_{0,h}(\xi)| \leqslant \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k,j,m=1}^{n}|a_{kjm}||\xi_k||\xi_j|\xi_m^2 h_{kjm}^2$. Таким образом, для любых достаточно малых положительных C, r найдется такое ξ из $\mathbb{R}^n$, что $|\xi| = r$ и

$$G_1(\xi) < C|\xi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k,j,m=1}^{n}|a_{kjm}|h_{kjm}^2|\xi_k||\xi_j|\xi_m^2,$$

следовательно, для любых достаточно малых положительных C и r найдется такое ξ из $\mathbb{R}^n$, что $|\xi| = r$ и

$$G_1(\xi) < Cr^2 + C_{0,h}r^4,$$

где $C_{0,h}$ зависит только от коэффициентов a_{kjm} и h_{kjm} уравнения (2.33).

Однако для того же самого ξ (как и для любого ξ из $\mathbb{R}^n$) $G_1(\xi) \geqslant C_h|\xi|^2 = C_h r^2$ вследствие сильной эллиптичности оператора L_h.

Тем самым для любых достаточно малых положительных C и r найдется такое ξ из $\mathbb{R}^n$, что

$$C_h r^2 \leqslant G_1(\xi) < Cr^2 + C_{0,h}r^4, \quad \text{т. е.} \quad C_h < C + C_{0,h}r^2.$$

Отсюда, выбирая положительные C и r достаточно малыми, получаем противоречие.

Лемма 2.7.5 доказана. □

Итак,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_0 u \tag{2.35}$$

является параболическим дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, следовательно, задача (2.35), (1.4) имеет единственное классическое ограниченное решение; будем обозначать его через $v(x,t)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.7.4. *В условиях теоремы* 2.7.3

$$\lim_{t\to\infty}[u(x,t) - v(x,t)] = 0$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.7.2. Нужно лишь доказать для случая, когда функции $G_1(\xi), G_2(\xi)$ заданы формулами (2.34), следующие аналоги лемм 2.7.3 и 2.7.4 соответственно:

Лемма 2.7.6.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)}\cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}z_kz_j}\cos 2z\cdot\eta\right)dz \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

равномерно относительно $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.7.7. *Существует такое положительное* M, *что*

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] dz \right| \leqslant \frac{M}{|\eta|^{n+1}}$$

для любых $t > 1, \eta \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы 2.7.6. Абсолютная величина рассматриваемого интеграла оценивается сверху суммой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-tG_1\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)} dz + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}z_kz_j} dz = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-C_h|z|^2} dz + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-C_0|z|^2} dz < \infty,$$

где через C_0 обозначена константа эллиптичности оператора L_0; значит, сам интеграл сходится абсолютно и равномерно относительно $t > 0, \eta \in \mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольное положительное ε и разобьем этот интеграл в сумму $\int\limits_{|z|<\delta} + \int\limits_{|z|\geqslant\delta} \stackrel{\text{def}}{=} I_{1,\delta} + I_{2,\delta}$, где δ — положительный параметр. В силу равномерной сходимости интеграла найдется такое δ, что $|I_{2,\delta}| < \frac{\varepsilon}{2}$ для любого положительного t и любого η из $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем это δ и рассмотрим интеграл $I_{1,\delta}$. Его подынтегральная функция равна

$$e^{-\sum\limits_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}z_kz_j \cos\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}}} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}z_kz_j} \cos 2z\cdot\eta =$$

$$= e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} z_kz_j \sum\limits_{m=1}^{n} a_{kjm} \cos\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}}} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}z_kz_j} \cos 2z\cdot\eta =$$

$$= e^{-L_0(z)} \left(e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} z_kz_j \left(\sum\limits_{m=1}^{n} a_{kjm} \cos\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}} - b_{kj}\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta \right),$$

что можно преобразовать к виду

$$e^{-L_0(z)} \left(e^{-\sum\limits_{k,j=1}^{n} z_kz_j \sum\limits_{m=1}^{n} a_{kjm}\left(\cos\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}} - 1\right)} \cos\left[2z\cdot\eta - tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta \right) =$$

$$= e^{-L_0(z)} \left(e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n} z_kz_j \sum\limits_{m=1}^{n} a_{kjm} \sin^2\frac{h_{kjm}z_m}{2\sqrt{t}}} \cos 2z\cdot\eta \cos\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] - \cos 2z\cdot\eta \right) +$$

$$+ e^{-L_0(z)} e^{2\sum\limits_{k,j=1}^{n} z_kz_j \sum\limits_{m=1}^{n} a_{kjm} \sin^2\frac{h_{kjm}z_m}{2\sqrt{t}}} \sin 2z\cdot\eta \sin\left[tG_2\left(\frac{z_1}{\sqrt{t}},\dots,\frac{z_n}{\sqrt{t}}\right)\right] \stackrel{\text{def}}{=} A_1(\eta,t;z) + A_2(\eta,t;z).$$

Дальнейшее доказательство полностью аналогично дальнейшему доказательству леммы 2.7.3. □

Доказательство леммы 2.7.7. Пусть $t > 1, i \in \overline{1,n}$. Повторим рассуждения доказательства леммы (2.7.4) вплоть до формулы (2.31), в которой теперь в качестве функции $g(z;t)$ возьмем

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \left(e^{-\sum\limits_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}z_kz_j \cos\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}}} \cos \sum_{k,j,m=1}^{n} a_{kjm}z_kz_j \sin\frac{h_{kjm}z_m}{\sqrt{t}} \right).$$

Выполняя дифференцирование и учитывая, что $t > 1$, получаем (так же, как и при доказательстве леммы 2.7.4) неравенство

$$|g(z;t)| \leqslant |P(z)| e^{-C_h|z|^2},$$

где P — полином с коэффициентами, зависящими только от коэффициентов a_{kjm}, h_{kjm} уравнения (2.33). Дальнейшее доказательство полностью аналогично дальнейшему доказательству леммы 2.7.4. □

Замечание 2.7.4. Для общего случая уравнения (2.33) также справедлива теорема о стабилизации решения, аналогичная следствию 2.7.1 для уравнения (2.20). При этом области интегрирования начальной функции, фигурирующие в (необходимом и достаточном) условии стабилизации решения, определяются коэффициентами b_{kj} параболического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (2.35) (см. [30]).

Глава 3

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе нелокальными членами уравнения являются специальные операторы обобщенного сдвига, введенные в [47], которые играют роль операторов сдвига в теории уравнений, содержащих оператор Бесселя. Указанные операторы обобщенного сдвига являются интегральными, поэтому и исследуемые уравнения с необходимостью являются не дифференциально-разностными, а интегродифференциальными. Таким образом, интерес к указанной тематике обусловлен как стремлением обобщить модели [121, 125–129] на сингулярный случай, так и сугубо теоретическими аспектами перехода от дифференциально-разностного уравнения к интегродифференциальному.

3.1. Основные определения и обозначения

В этой главе будем использовать следующие обозначения:

$$B_y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{y^{2\nu+1}} \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{2\nu+1}\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2\nu+1}{y}\frac{\partial}{\partial y}$$

— оператор Бесселя по переменной y.

$$T_y^h f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{y^2+h^2-2yh\cos\theta}\right)\sin^{2\nu}\theta d\theta$$

— соответствующий оператор обобщенного сдвига.

$$j_\nu(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{y^\nu} J_\nu(y)$$

— нормированная (в равномерной норме) функция Бесселя первого рода.

Мы исследуем случай положительного параметра при особенности оператора Бесселя, поэтому считаем, что $\nu > -\dfrac{1}{2}$.

Рассматривается следующая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_x u + \sum_{k=1}^s a_k T_x^{h_k} u,\ x > 0, t > 0; \tag{3.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0,\ t > 0; \tag{3.2}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x),\ x > 0. \tag{3.3}$$

Здесь u_0 — непрерывная и ограниченная функция, $a, h \in \mathbb{R}^s$.

Отметим, что решение задачи (3.1)–(3.3) определено только в четверти плоскости $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, в то время как для применения оператора обобщенного сдвига требуется, вообще говоря, чтобы функция была определена и при отрицательных значениях переменной x; в этом случае используется четное по x продолжение решения — такое продолжение возможно в силу условия четности (3.2). Иными словами, задачу (3.1)–(3.3) можно рассматривать на всей полуплоскости $(-\infty,0)\times(0,+\infty)$, заменяя условие (3.2) требованием четности решения по переменной x. Для дифференциальных параболических уравнений с оператором Бесселя такие задачи корректны (см., например, [43–45, 48–51, 53] и имеющуюся там библиографию).

3.2. Фундаментальное решение сингулярного интегродифференциального уравнения

Определим на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ следующую функцию:

$$\mathcal{E}(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{E}_{a,h}(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} j_\nu(x\xi)d\xi. \tag{3.4}$$

Поскольку $|j_\nu(z)| \leqslant 1$,

$$|\mathcal{E}(x,t)| \leqslant e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} e^{-t\xi^2} d\xi = \frac{e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t}}{2t^{\nu+1}} \int\limits_0^\infty z^\nu e^{-z} dz = \frac{\Gamma(\nu+1)e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t}}{2t^{\nu+1}}.$$

Таким образом, для любых $t_0, T \in (0,+\infty)$ интеграл (3.4) сходится абсолютно и равномерно по $(x,t) \in [0,+\infty)\times[t_0,T]$, следовательно, $\mathcal{E}(x,t)$ определена корректно на $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Продифференцируем (формально) $\mathcal{E}$ под знаком интеграла:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} \left[\sum_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi) - \xi^2\right] j_\nu(x\xi) e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi.$$

Поскольку $T_x^y j_\nu(ax) = j_\nu(ax)j_\nu(ay)$ (см., например, [41, с. 19]),

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} \sum_{k=1}^s a_k T_x^{h_k} j_\nu(x\xi) e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi - \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+3} j_\nu(x\xi) e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi =$$

$$= \sum_{k=1}^s a_k T_x^{h_k}\mathcal{E} - \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+3} j_\nu(x\xi) e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi.$$

Далее $B_x j_\nu(x\xi) = -\xi^2 j_\nu(x\xi)$ (см., например, [41, с. 18]), значит,

$$B_x\mathcal{E} = -\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+3} j_\nu(x\xi) e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi.$$

Итак, формально $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1).

При этом

$$\left|B_x\mathcal{E}\right| \leqslant \frac{\Gamma(\nu+2)e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t}}{2t^{\nu+2}},$$

$$\left|T_x^{h_k}\mathcal{E}\right| \leqslant \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} \left|T_x^{h_k} j_\nu(x\xi)\right| e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k\xi)\right]} d\xi \leqslant \frac{\Gamma(\nu+1)e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t}}{2t^{\nu+1}},$$

следовательно,

$$\left|\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\right| \leqslant \frac{e^{\sum\limits_{k=1}^s |a_k|t}}{2} \left[\frac{\Gamma(\nu+1)}{t^{\nu+1}} + \frac{\Gamma(\nu+2)}{t^{\nu+2}}\right],$$

т. е. формальное дифференцирование и обобщенный сдвиг под знаком интеграла законны во всех членах уравнения (3.1), поэтому функция (3.4) удовлетворяет (в классическом смысле) уравнению (3.1) на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Назовем $\mathcal{E}(x,t)$ фундаментальным решением уравнения (3.1). Правомерность этого термина будет обоснована ниже — мы покажем, что обобщенная свертка (см., [41, §1.8]) $\mathcal{E}_{a,h}$ с ограниченной начальной функцией на начальной полуоси обращается в саму начальную функцию.

3.3. Обобщенная свертка фундаментального решения с ограниченными функциями

Оценим поведение $\mathcal{E}(x,t)$ при $x\to\infty$ (при фиксированном положительном t). Для этого введем функцию $g_\nu(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} z^\nu J_\nu(z)$. Тогда (см., например, [67, с. 333]), $\frac{1}{z}g'_\nu(z) = g_{\nu-1}(z)$, т. е. $g'_{\nu+1}(z) = zg_\nu(z)$, а значит, $g'_{\nu+1}(az) = a^2 zg_\nu(az)$. Поэтому

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\mathcal{E}(x,t) = \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\frac{J_\nu(xz)}{(xz)^\nu}dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu}}\int\limits_0^\infty (xz)^\nu ze^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}J_\nu(xz)dz = \frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}x^2zg_\nu(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}g'_{\nu+1}(xz)dz = \frac{1}{x^{2\nu+2}}\left[g_{\nu+1}(xz)e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} +\right.$$

$$\left.+\, t\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left[2z+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2zj_{\nu+1}(h_kz)\right]g_{\nu+1}(xz)dz\right] =$$

$$= \frac{t}{x^{2\nu+4}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]x^2zg_{\nu+1}(xz)dz =$$

$$= \frac{t}{x^{2\nu+4}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]g'_{\nu+2}(xz)dz.$$

Последнее выражение преобразуем к виду

$$\frac{t}{x^{2\nu+4}}\left[g_{\nu+2}(xz)\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} -\right.$$

$$\left.-\int\limits_0^\infty\left(e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]\right)'g_{\nu+2}(xz)dz\right] =$$

$$= \frac{t}{x^{2\nu+4}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left(t\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]^2z+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^s a_kh_k^4zj_{\nu+2}(h_kz)\right)g_{\nu+2}(xz)dz =$$

$$= \frac{t}{x^{2\nu+6}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left(t\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]^2+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^s a_kh_k^4j_{\nu+2}(h_kz)\right)x^2zg_{\nu+2}(xz)dz =$$

$$= \frac{t}{x^{2\nu+6}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_kz)\right]}\left(t\left[2+\sum_{k=1}^s a_kh_k^2j_{\nu+1}(h_kz)\right]^2+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{s} a_k h_k^4 j_{\nu+2}(h_k z)\Bigg) g'_{\nu+3}(xz)dz.$$

Повторяя интегрирование по частям достаточное число раз, получаем (при фиксированном положительном t), что для любого натурального m

$$x^{2\nu+2m}\mathcal{E}(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_m(z) z g_{\nu+m}(xz)dz$$

с некоторой ограниченной f_m.

Отсюда

$$x^{2\nu+2m}\mathcal{E}(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_m(z) z x^{\nu+m} z^{\nu+m} J_{\nu+m}(xz)dz,$$

т. е.

$$x^{\nu+m}\mathcal{E}(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_m(z) z^{\nu+m+1} J_{\nu+m}(xz)dz=$$

$$=\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_m(z)\sqrt{xz}J_{\nu+m}(xz) z^{m+\nu+\frac{1}{2}}dz\frac{1}{\sqrt{x}},$$

следовательно,

$$x^{\nu+m+\frac{1}{2}}\mathcal{E}(x,t)=\int\limits_0^\infty z^{m+\nu+\frac{1}{2}} e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_m(z) f(xz)dz,$$

где $f(\tau)=\sqrt{\tau}J_{\nu+m}(\tau)\in L_\infty(0,+\infty)$ для любого $m\geqslant 1$.

Таким образом, в силу ограниченности функций f, f_m и j_ν, а также произвольности натурального m доказана следующая

Лемма 3.3.1. *Пусть* $\alpha>0$, $t>0$, $a,h\in\mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \mathcal{E}(x,t)=0.$$

Отсюда в силу четности нормированной функции Бесселя и непрерывности оператора обобщенного сдвига (см., например, [41, с. 18-19]) следует, что функция

$$\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1}\mathcal{E}(\xi,t) T_\xi^x u_0(\xi)d\xi \tag{3.5}$$

корректно определена на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$.

Теперь оценим поведение $B_x\mathcal{E}, T_x^{h_k}\mathcal{E}$ и $\dfrac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}$ на бесконечности:

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}B_x\mathcal{E}(x,t)=-\int\limits_0^\infty z^{2\nu+3} e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]}\frac{J_\nu(xz)}{(xz)^\nu}dz=$$

$$=-\frac{1}{x^\nu}\int\limits_0^\infty z^{\nu+3} e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} J_\nu(xz)dz=-\frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} z^2 x^2 z g_\nu(xz)dz=$$

$$=-\frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty z^2 e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]} g'_{\nu+1}(xz)dz=\frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty \left(z^2 e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu(h_k z)\right]}\right)' g_{\nu+1}(xz)dz.$$

Повторяя, как и выше, интегрирование по частям достаточное число раз, получаем (при фиксированном положительном t), что для любого натурального m $x^{2\nu+2m}B_x\mathcal{E}(x,t)$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_\beta(z) z^\beta g_{\nu+m}(xz)dz,$$

где $\beta \geqslant 1$, f_β ограничена.

Тогда $x^{\nu+m}B_x\mathcal{E}(x,t)$ есть конечная сумма слагаемых вида

$$\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_\beta(z) z^{m+\nu+\beta} J_{\nu+m}(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_\beta(z) z^{m+\nu+\beta-\frac{1}{2}}\sqrt{xz}J_{\nu+m}(xz)dz,$$

поэтому $x^{\nu+m+\frac{1}{2}}B_x\mathcal{E}(x,t)$ есть конечная сумма слагаемых вида $\int\limits_0^\infty \psi(z)f(xz)dz$, где

$$\psi(\tau) = \tau^{m+\nu+\beta-\frac{1}{2}} f_\beta(\tau) e^{-t\left[\tau^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k \tau)\right]},$$

т. е. $\psi \in L_1(0,+\infty)$, а $f(\tau)$, как и выше, есть $\sqrt{\tau}J_{m+\nu}(\tau)$, и значит, $f \in L_\infty(0,+\infty)$.

Отсюда вытекает

Лемма 3.3.2. *Пусть* $\alpha > 0$, $t > 0$, $a, h \in \mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha B_x\mathcal{E}(x,t) = 0.$$

Далее

$$T_x^{h_k}\mathcal{E}(x,t) = \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} j_\nu(h_k z) j_\nu(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu}}\int\limits_0^\infty j_\nu(h_k z) e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} z g_\nu(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty j_\nu(h_k z) e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} g'_{\nu+1}(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu+2}}\left(g_{\nu+1}(xz) j_\nu(h_k z) e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]}\Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} + \right.$$

$$+ \int\limits_0^\infty g_{\nu+1}(xz) e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 z j_{\nu+1}(h_k z) + \right.$$

$$\left.\left. + \ tz j_\nu(h_k z)\sum_{k=1}^{s} h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2tz j_\nu(h_k z)\right] dz \right).$$

Последнее выражение равно

$$\frac{1}{x^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2-\sum\limits_{k=1}^{s}a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 j_{\nu+1}(h_k z) + \right.$$

$$\left. + \, t j_\nu(h_k z)\sum_{k=1}^{s} h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2t j_\nu(h_k z)\right] z g_{\nu+1}(xz)dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2 - \sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 j_{\nu+1}(h_k z) + \right.$$

$$\left. + \, t j_\nu(h_k z) \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2t j_\nu(h_k z)\right] g'_{\nu+2}(xz) dz =$$

$$= \frac{1}{x^{2\nu+4}} \left(g_{\nu+2}(xz) e^{-t\left[z^2 - \sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 j_{\nu+1}(h_k z) + \right.\right.$$

$$\left. + \, t j_\nu(h_k z) \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2t j_\nu(h_k z)\right] \Bigg|_{z=0}^{z=+\infty} -$$

$$- \int\limits_0^\infty g_{\nu+2}(xz) \left(e^{-t\left[z^2 - \sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 j_{\nu+1}(h_k z) + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \quad t j_\nu(h_k z) \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2t j_\nu(h_k z)\right]\right)' dz \right) =$$

$$= -\frac{1}{x^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+2}(xz) \left(e^{-t\left[z^2 - \sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k z)\right]} \left[h_k^2 j_{\nu+1}(h_k z) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \quad t j_\nu(h_k z) \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_\nu(h_k z) + 2t j_\nu(h_k z)\right]\right)' dz.$$

Повторяя интегрирование по частям достаточное число раз и учитывая ограниченность функции $j_\nu(x)$, получаем (при фиксированном положительном t), что для любых натуральных m и k

$$x^{2\nu+2m} T_x^{h_k} \mathcal{E}(x,t) = \int\limits_0^\infty e^{-t\left[z^2 - \sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu(h_k z)\right]} f_0(z) g_{\nu+m}(xz) dz,$$

где $|f_0(z)| \leqslant M(1 + z^\beta)$ с некоторыми неотрицательными M и β.

Тогда

$$x^{2\nu+2m+\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^s a_k T_x^{h_k} \mathcal{E}(x,t) = \int\limits_0^\infty \psi(z) f(xz) dz,$$

где $\psi \in L_1(0,+\infty)$, $f(\tau) \in L_\infty(0,+\infty)$, а поскольку $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) в $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, то справедлива

Лемма 3.3.3. *Пусть* $\alpha > 0$, $t > 0$, $a, h \in \mathbb{R}^m$. *Тогда*

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0.$$

Далее замечаем, что оператор Бесселя и оператор обобщенного сдвига коммутируют друг с другом (см., например, [41, с. 35]), из чего следует

Теорема 3.3.1. *Функция* (3.5) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (3.1).

3.4. Решение неклассической задачи Коши

Введем следующее обозначение:

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4^\nu \Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} \mathcal{E}(\xi,t) T_\xi^x u_0(\xi) d\xi. \tag{3.6}$$

В силу самосопряженности оператора обобщенного сдвига (см., например, [41, с. 19])

$$u(x,t)=\frac{1}{4^\nu\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1}u_0(\xi)T_\xi^x\mathcal{E}(\xi,t)d\xi,$$

а в силу четности $T_\xi^x\mathcal{E}(\xi,t)$ по переменной x (см., например, [41, с. 35]) функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию четности (3.2).

Покажем, что она удовлетворяет и начальному условию (3.3).

Функция $u(x,t)$ определена на $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Возьмем произвольное неотрицательное x_0 и исследуем поведение $u(x_0,t)$ при $t\longrightarrow+0$.

Заменой переменной $\eta=\dfrac{\xi}{2\sqrt{t}}$ получаем:

$$u(x_0,t)=\frac{2^{2\nu+2}t^{\nu+1}}{4^\nu\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1}\mathcal{E}(2\eta\sqrt{t},t)T_{2\eta\sqrt{t}}^{x_0}u_0(2\eta\sqrt{t})d\eta.$$

Далее

$$\mathcal{E}(2\sqrt{t}\eta,t)=\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1}e^{-t\left[\xi^2-\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu(h_k\xi)\right]}j_\nu(2\xi\eta\sqrt{t})d\xi=$$

$$=t^{-\nu-1}\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz. \tag{3.7}$$

Таким образом,

$$u(x_0,t)=\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1}T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dzd\eta. \tag{3.8}$$

Теперь докажем следующие утверждения.

Лемма 3.4.1. *Существуют такие $C>0$ и $\alpha>1$, что для любых $t\in(0,1)$ и $\eta>0$*

$$\left|\eta^{2\nu+1}\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz\right|\leqslant\frac{C}{\eta^\alpha}.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz=$$

$$=\frac{1}{(2\eta)^\nu}\int\limits_0^\infty z^{\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}J_\nu(2\eta z)dz=$$

$$=\frac{1}{(2\eta)^{2\nu}}\int\limits_0^\infty (2\eta z)^{\nu+1}J_\nu(2\eta z)ze^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}dz=$$

$$=\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}(2\eta)^2zg_\nu(2\eta z)dz=$$

$$=\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+2}}\int\limits_0^\infty e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}g'_{\nu+1}(2\eta z)dz=$$

$$=\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+2}}\left[g_{\nu+1}(2\eta z)e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\Bigg|_{z=0}^{z=\infty}-\int\limits_0^\infty\left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\right]'g_{\nu+1}(2\eta z)dz\right]=$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+2}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+1}(2\eta z) \left[2z + z\sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} dz =$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty (2\eta)^2 z g_{\nu+1}(2\eta z) \left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} dz.$$

Последнее выражение равно

$$\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty g'_{\nu+2}(2\eta z) \left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} dz.$$

Снова проинтегрируем по частям; получим

$$-\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+2}(2\eta z) \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right] e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}\right)' dz =$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+4}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+2}(2\eta z) e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \times$$

$$\times \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 z + \frac{z}{t}\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) dz =$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+6}} \int\limits_0^\infty (2\eta)^2 z g_{\nu+2}(2\eta z) e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \times$$

$$\times \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) dz =$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+6}} \int\limits_0^\infty g'_{\nu+3}(2\eta z) e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \times$$

$$\times \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) dz.$$

Следовательно, оцениваемый интеграл можно представить в виде

$$-\frac{1}{(2\eta)^{2\nu+6}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+3}(2\eta z) \left[e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \times\right.$$

$$\left.\times \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right)\right]' dz =$$

$$= \frac{1}{(2\eta)^{2\nu+6}} \int\limits_0^\infty g_{\nu+3}(2\eta z) e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} \left(\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^3 z +\right.$$

$$+ \left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]^2 \frac{z}{t}\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) +$$

$$\left.+ \frac{2z}{t}\left[2 + \sum_{k=1}^s h_k^2 a_k j_{\nu+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right]\sum_{k=1}^s h_k^4 a_k j_{\nu+2}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) + \frac{z}{t^2}\sum_{k=1}^s h_k^6 a_k j_{\nu+3}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)\right) dz.$$

Повторяя таким образом интегрирование по частям достаточное число раз, получаем, что для любого натурального m

$$\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} j_\nu(2\eta z)dz$$

представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\frac{1}{\eta^{2\nu+2m}t^l}\int\limits_0^\infty z g_{\nu+m}(2\eta z) e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} j_{\nu+l+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right) f_l(z,t)dz, \tag{3.9}$$

где натуральное l не превосходит $m-1$, а f_l ограничена.

Оценим (3.9), считая (без ограничения общности), что $t \leqslant 1$:

$$\frac{j_{\nu+l+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}{t^l} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)J_{\nu+l+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}{\frac{h_k^{\nu+l+1}z^{\nu+l+1}}{t^{\frac{\nu+l+1}{2}}}t^l} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)\sqrt{\frac{h_k z}{\sqrt{t}}}J_{\nu+l+1}\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}{h_k^{\nu+l+1}z^{\nu+l+1}t^{\frac{l-\nu-1}{2}}\sqrt{\frac{h_k z}{\sqrt{t}}}}.$$

В силу ограниченности функции $\sqrt{\tau}J_{\nu+l+1}(\tau)$ абсолютная величина последнего выражения не превосходит $z^{-\nu-l-\frac{3}{2}}t^{\frac{1}{4}+\frac{\nu-l+1}{2}}$.

Далее $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\nu-l+1}{2} \geqslant 0$ при $l \leqslant \nu+\dfrac{3}{2}$, т. е. для выполнения последнего неравенства достаточно потребовать, чтобы $m \leqslant \nu+\dfrac{5}{2}$. В этом случае абсолютная величина выражения (3.9) не превосходит

$$\frac{\text{const}}{\eta^{2\nu+2m}}\int\limits_0^\infty \frac{|g_{\nu+m}(2\eta z)|}{z^{\nu+l+\frac{1}{2}}}\, e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}dz =$$

$$= \frac{\text{const}}{\eta^{2\nu+2m}}\int\limits_0^\infty (2\eta z)^{m+\nu}\frac{|J_{\nu+m}(2\eta z)|}{z^{\nu+l+\frac{1}{2}}}\, e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}dz =$$

$$= \frac{\text{const}}{\eta^{\nu+m}}\int\limits_0^\infty z^{m-l-\frac{1}{2}}|J_{\nu+m}(2\eta z)|e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}dz =$$

$$= \frac{\text{const}}{\eta^{\nu+m+\frac{1}{2}}}\int\limits_0^\infty z^{m-l-1}\sqrt{2\eta z}|J_{\nu+m}(2\eta z)|e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)}dz \leqslant \frac{\text{const}}{\eta^{\nu+m+\frac{1}{2}}}.$$

$2\nu+1-m-\nu-\dfrac{1}{2} = \nu+\dfrac{1}{2}-m < -1$ при $m > \nu+\dfrac{3}{2}$.

Таким образом, для выполнения утверждения леммы достаточно выбрать натуральное m из $\left(\nu+\dfrac{3}{2}, \nu+\dfrac{5}{2}\right]$. Такое m существует для любого $\nu > -\dfrac{1}{2}$. Лемма 3.4.1 доказана. □

Лемма 3.4.2.

$$\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} j_\nu(2\eta z)dz \xrightarrow{t\to+0} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\, e^{-\eta^2}$$

равномерно по $\eta \geqslant 0$.

Доказательство.

$$\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2}j_\nu(2\eta z)dz = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\eta^\nu}\int\limits_0^\infty z^{\nu+1}e^{-z^2}J_\nu(2\eta z)dz = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\, e^{-\eta^2}$$

(см., например, [75, с. 186]).

Поэтому

$$\left|\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz-\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\,e^{-\eta^2}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2}j_\nu(2\eta z)\left[e^{t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}-1\right]dz\right|\leqslant\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2}\left|e^{t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}-1\right|dz.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Выберем t_0 настолько малым, что

$$e^{-t_0\sum\limits_{k=1}^s|a_k|},\quad e^{t_0\sum\limits_{k=1}^s|a_k|}\in\left(1-\frac{2\varepsilon}{\Gamma(\nu+1)},1+\frac{2\varepsilon}{\Gamma(\nu+1)}\right).$$

Тогда

$$t\sum_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)\in\left(-t\sum_{k=1}^s|a_k|,t\sum_{k=1}^s|a_k|\right)$$

для любого t из $(0,t_0)$, следовательно, в силу монотонности экспоненты

$$\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2}\left|e^{t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}-1\right|dz\leqslant\frac{2\varepsilon}{\Gamma(\nu+1)}\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2}dz=\varepsilon.$$

В силу произвольности выбора положительного ε лемма 3.4.2 доказана. □

Теперь возьмем произвольное неотрицательное x_0 и рассмотрим разность

$$u(x_0,t)-u_0(x_0)=\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty\eta^{2\nu+1}T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dzd\eta-$$

$$-\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty\eta^{2\nu+1}u_0(x_0)\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\,e^{-\eta^2}d\eta=$$

$$=\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^\infty\eta^{2\nu+1}\left[T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\, j_\nu(2\eta z)dz-u_0(x_0)\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\,e^{-\eta^2}\right]d\eta=\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\left(\int\limits_0^A+\int\limits_A^\infty\right)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\,(I_1+I_2).$$

Зададимся произвольным положительным ε.

$$|I_2|\leqslant\sup|u_0|\int\limits_A^\infty\left|\eta^{2\nu+1}\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz\right|d\eta+\sup|u_0|\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\int\limits_A^\infty\eta^{2\nu+1}e^{-\eta^2}d\eta.$$

В силу леммы 3.4.1 (считая, не ограничивая общности, что $t\leqslant 1$) получаем, что первый интеграл в последнем неравенстве не превосходит величины $C\int\limits_A^\infty\frac{d\eta}{\eta^\alpha}=\frac{C}{A^{1-\alpha}}$, где $\alpha>1$. Отсюда и из сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty\eta^{2\nu+1}e^{-\eta^2}d\eta$ следует, что существует такое положительное A, что $|I_2|\leqslant\dfrac{\Gamma^2(\nu+1)}{8}\,\varepsilon$ для любого t из $(0,1)$. Выберем такое A и зафиксируем его. Осталось оценить I_1.

$$
\begin{aligned}
&T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)-u_0(x_0)=\\
&=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac12)}\int\limits_0^\pi u_0\Big(\sqrt{x_0^2+4\eta^2t-4x_0\eta\sqrt{t}\cos\theta}\Big)\sin^{2\nu}\theta d\theta-\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac12)}\int\limits_0^\pi u_0(x_0)\sin^{2\nu}\theta d\theta=\\
&=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac12)}\int\limits_0^\pi\left[u_0\left(\sqrt{x_0^2+4\eta^2t-4x_0\eta\sqrt{t}\cos\theta}\right)-u_0(x_0)\right]\sin^{2\nu}\theta d\theta.
\end{aligned}
$$

Пусть $\delta>0$. В силу непрерывности функции u_0 в точке x_0, можно выбрать t_0 настолько малым, что для любых t из $(0,t_0)$, η из $[0,A]$, θ из $[0,\pi]$

$$
\left|u_0\left(\sqrt{x_0^2+4\eta^2t-4x_0\eta\sqrt{t}\cos\theta}\right)-u_0(x_0)\right|<\delta.
$$

Это означает в силу произвольности выбора положительного δ, что $T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)\overset{t\to+0}{\longrightarrow}u_0(x_0)$ равномерно относительно $\eta\in[0,A]$. Отсюда и из леммы 3.4.2 следует, что существует такое положительное t_0, что для любого t из $(0,t_0)$ и для любого η из $[0,A]$

$$
\left|T_{x_0}^{2\eta\sqrt{t}}u_0(x_0)\int\limits_0^\infty z^{2\nu+1}e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_kj_\nu\left(\frac{h_kz}{\sqrt{t}}\right)}j_\nu(2\eta z)dz-u_0(x_0)\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\,e^{-\eta^2}\right|<\frac{(\nu+1)\Gamma^2(\nu+1)}{4A^{2\nu+2}}\,\varepsilon,
$$

т. е.

$$
|I_1|\leqslant\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\frac{(\nu+1)\Gamma^2(\nu+1)}{4A^{2\nu+2}}\,\varepsilon\int\limits_0^A\eta^{2\nu+1}d\eta=\varepsilon\frac{\nu+1}{A^{2\nu+2}}\frac{A^{2\nu+2}}{2\nu+2}=\frac{\varepsilon}{2}.
$$

Поскольку положительное ε выбиралось произвольно, то

$$
u(x_0,t)-u_0(x_0)\overset{t\to+0}{\longrightarrow}0.
$$

Тем самым в силу произвольности выбора неотрицательного x_0 функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (3.3).

Таким образом, доказана

Теорема 3.4.1. *Пусть функция $u_0(x)$ непрерывна и ограничена при неотрицательных x. Тогда функция $u(x,t)$, определенная равенством* (3.6)*, является классическим решением задачи* (3.1)–(3.3).

С помощью доказанной теоремы можно, в частности, вычислить весовой интеграл от фундаментального решения по всей положительной полуоси:

Лемма 3.4.3.

$$
\int\limits_0^\infty x^{2\nu+1}\mathcal{E}(x,t)dx=4^\nu\Gamma^2(\nu+1)e^{t\sum\limits_{k=1}^s a_k}.
$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u_0(x)\equiv1$; она непрерывна и ограничена, следовательно, в силу теоремы 3.4.1, функция

$$
y(x,t)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{4^\nu\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^{+\infty}\xi^{2\nu+1}\mathcal{E}(\xi,t)d\xi
$$

удовлетворяет задаче (3.1)–(3.3) с начальным условием $y\big|_{t=0}\equiv1$; однако $y(x,t)$ не зависит от x, следовательно, в действительности $y(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $y'-y\sum\limits_{k=1}^s a_k=0$ и начальному условию $y(0)=1$. Значит, $y(t)=e^{t\sum\limits_{k=1}^s a_k}$. Лемма 3.4.3 доказана. □

3.5. Случай неоднородного уравнения

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - B_x u + \sum_{k=1}^{s} a_k T_x^{h_k} u = f(x,t), \ x > 0, t > 0, \tag{3.10}$$

где f непрерывна и ограничена.

Покажем, что при помощи фундаментального решения (3.4) можно получить и интегральное представление (классического) решения задачи (3.10), (3.2), (3.3).

Для этого зададимся произвольным положительным x_0 и введем функцию

$$G(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4^{\nu+1}} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} f(\xi, t-\tau) T_{x_0}^{\xi} \mathcal{E}(x_0,\tau) d\xi,$$

определенную при $t > \tau > 0$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 3.5.1. *Существует такое* $t_0 > 0$, *что* $G(t,\tau)$ *ограничена в области* $(0,t_0) \times (0,t)$.

Доказательство. Используя самосопряженность оператора обобщенного сдвига и замену переменных $\eta = \dfrac{\xi}{2\sqrt{t}}$, получаем, что

$$G(t,\tau) = \tau^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} \mathcal{E}(2\eta\sqrt{\tau},\tau) T_{x_0}^{2\eta\sqrt{\tau}} f(x_0, t-\tau) d\eta =$$

$$= \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2 + \tau \sum\limits_{k=1}^{s} a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{\tau}}\right)} j_\nu(2\eta z) dz T_{x_0}^{2\eta\sqrt{\tau}} f(x_0, t-\tau) d\eta = \int\limits_0^1 + \int\limits_1^\infty \stackrel{\text{def}}{=} I_3 + I_4.$$

Для оценки $|I_4|$ применим лемму 3.4.1 (считая без ограничения общности, что $t \leqslant 1$):

$$|I_4| \leqslant C \sup|f| \int\limits_1^\infty \frac{d\eta}{\eta^\alpha} = \frac{C \sup|f|}{\alpha - 1}$$

с некоторым $\alpha > 1$.

В этих же предположениях

$$|I_3| \leqslant \sup|f| \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} e^{\tau \sum\limits_{k=1}^{s} |a_k|} \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2} dz d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \sup|f| e^{\sum\limits_{k=1}^{s} |a_k|} \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} d\eta \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2} dz = \frac{\sup|f| \Gamma(\nu+1)}{4(\nu+1)} e^{\sum\limits_{k=1}^{s} |a_k|}.$$

Лемма 3.5.1 доказана. □

Поэтому на $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$ определена функция

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4^\nu \Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} \mathcal{E}(\xi,t) T_x^{\xi} f(x, t-\tau) d\xi d\tau. \tag{3.11}$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (3.10) и однородному начальному условию.

Для доказательства первого из этих утверждений заметим, что, как доказано в пунктах 3.2 и 3.3, функция $\mathcal{E}(x,t)$ удовлетворяет уравнению (3.1) в $[0,+\infty) \times (0,+\infty)$ и стремится к нулю (вместе с $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ и $B_x\mathcal{E}$) при $x \to +\infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|$.

Поэтому остается доказать следующую лемму:

Лемма 3.5.2. *Пусть* $x_0 \geqslant 0, t_0 > 0$. *Тогда*

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{1}{4^\nu \Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} f(\xi, t_0-\tau) T^\xi_{x_0} \mathcal{E}(x_0,\tau)d\xi = f(x_0,t_0).$$

Доказательство.

$$\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} f(\xi,t_0-\tau) T^\xi_{x_0}\mathcal{E}(x_0,\tau)d\xi = 4^{\nu+1} G(t_0,\tau) =$$

$$= 4^{\nu+1} \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} T^{2\eta\sqrt{\tau}}_{x_0} f(x_0, t-\tau) \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2+\tau\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{\tau}}\right)} j_\nu(2\eta z)dzd\eta$$

(см. доказательство леммы 3.5.1).

Следовательно,

$$\frac{1}{4^\nu\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1} f(\xi,t_0-\tau)T^\xi_{x_0}\mathcal{E}(x_0,\tau)d\xi - f(x_0,t_0) =$$

$$= \frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1} \left[T^{2\eta\sqrt{\tau}}_{x_0} f(x_0,t_0-\tau) \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} \times \right.$$

$$\left. \times\, e^{-z^2+\tau\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{\tau}}\right)} j_\nu(2\eta z)dz - \frac{\Gamma(\nu+1)}{2}\, e^{-\eta^2} f(x_0,t_0)\right] d\eta =$$

$$= \frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)} \left(\int\limits_0^A + \int\limits_0^\infty \right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\,(I_5+I_6),$$

где A — положительный параметр.

Пусть $\varepsilon > 0$.

$$|I_6| \leqslant \sup|f| \int\limits_A^\infty \eta^{2\nu+1} \left| \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2+\tau\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{\tau}}\right)} j_\nu(2\eta z)dz \right| d\eta + \sup|f| \frac{\Gamma(\nu+1)}{2} \int\limits_A^\infty e^{-\eta^2}d\eta.$$

Первое слагаемое правой части последнего неравенства в силу леммы 3.4.1 (без ограничения общности считаем, что $\tau < 1$) меньше либо равно, чем $C\sup|f| \int\limits_1^\infty \dfrac{d\eta}{\eta^\alpha} = \dfrac{C\sup|f|}{\alpha-1}$ с некоторым $\alpha > 1$. Отсюда и из сходимости $\int\limits_0^\infty e^{-\eta^2}d\eta$ следует, что существует такое положительное A, что $|I_6| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $\tau \in (0,1)$. Зафиксируем такое A и оценим I_5.

$$T^{2\eta\sqrt{\tau}}_{x_0} f(x_0,t_0-\tau) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{x_0^2+4\eta^2(t_0-\tau)-4x_0\eta\sqrt{t_0-\tau}\cos\theta}\right)\sin^{2\nu}\theta d\theta.$$

В силу непрерывности и ограниченности f последнее выражение стремится к $f(x_0,t_0)$ при $\tau\to+0$ равномерно относительно $\eta\in[0,A]$. Отсюда и из леммы 3.4.2 следует, что существует такое положительное τ_0, что для любого $\tau<\tau_0$, для любого $\eta\in[0,A]$

$$\left| T^{2\eta\sqrt{t}}_{x_0} f(x_0,t_0-\tau) \int\limits_0^\infty z^{2\nu+1} e^{-z^2+t\sum\limits_{k=1}^s a_k j_\nu\left(\frac{h_k z}{\sqrt{t}}\right)} j_\nu(2\eta z)dz - \frac{\Gamma(\nu+1)}{2} f(x_0,t_0)e^{-\eta^2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}\frac{\nu+1}{A^{2\nu+2}\Gamma^2(\nu+1)},$$

т. е. $|I_5| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Лемма 3.5.2 доказана. □

Осталось доказать, что $v(x_0,t) \overset{t\to+0}{\longrightarrow} 0$ для любого неотрицательного x_0.

Для этого представим $v(x_0,t)$ как $\frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)}\int\limits_0^t G(t,\tau)d\tau$ и воспользуемся леммой 3.5.1: существует такое положительное t_0, что для любого $t \in (0,t_0)$

$$|v(x_0,t)| \leqslant \frac{4}{\Gamma^2(\nu+1)} \sup_{t\in[0,t_0]} |G|t.$$

Тем самым в силу произвольности выбора неотрицательного x_0 и четности функции $T_\xi^x \mathcal{E}(\xi,t)$ по переменной x доказано следующее утверждение:

Теорема 3.5.1. *Пусть* u_0 *непрерывна и ограничена в* $[0,+\infty)$, f *непрерывна и ограничена в* $[0,+\infty)\times(0,+\infty)$. *Тогда функция*

$$\frac{1}{4^\nu\Gamma^2(\nu+1)}\left[\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1}\mathcal{E}(\xi,t)T_x^\xi u_0(x)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^\infty \xi^{2\nu+1}\mathcal{E}(\xi,t)T_x^\xi f(x,t-\tau)d\xi d\tau\right]$$

является классическим решением задачи (3.10), (3.2), (3.3).

Глава 4

СИНГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В данной главе исследуется неклассическая задача Коши для сингулярного параболического уравнения наиболее общего вида: оно является не только интегродифференциальным, но и дифференциально-разностным. Кроме указанного теоретического аспекта, эта задача представляет и прикладной интерес, заключающийся в обобщении моделей [121,125–129] на случай среды с характеристиками, вырождающимися вдоль выделенных направлений.

Будет найдено фундаментальное решение указанного уравнения, исследованы его свойства и получено (в предположении о непрерывности и ограниченности начальной функции и правой части) интегральное представление решения рассматриваемой задачи. Тем самым доказывается теорема существования.

Для доказательства единственности решения используется метод преобразований Фурье. Необходимый для применения этого метода функционально-теоретический аппарат (преобразование Фурье—Бесселя и шкала обобщенных функций, соответствующая вырождающейся мере $\prod\limits_l y_l^{k_l}dxdy$) глубоко и полно разработан в [41] (см. также имеющуюся там библиографию), поэтому в соответствии с общей схемой [15] указанный метод мог бы быть применен и для исследования разрешимости. Однако решение, существование которого доказывается таким методом, является обобщенной функцией, причем, вообще говоря, не принадлежащей даже классам С. Л. Соболева и Л. Шварца. Мы же получаем классическое решение, т. е. функцию, дифференцируемую достаточное количество раз и удовлетворяющую уравнению и граничным условиям в каждой точке.

4.1. Постановка задачи

Будем использовать следующие обозначения:

$k_l = 2\nu_l + 1$ — положительный параметр ($l \in \overline{1,n}$).

$$B_{k_l,y_l} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{y_l^{k_l}}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(y_l^{k_l}\frac{\partial}{\partial y_l}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y_l^2} + \frac{k_l}{y_l}\frac{\partial}{\partial y_l}$$

— оператор Бесселя по переменной y_l.

$$T_y^h f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int\limits_0^\pi f\left(\sqrt{y^2+h^2-2yh\cos\theta}\right)\sin^{2\nu}\theta d\theta$$

— соответствующий оператор обобщенного сдвига (со скалярной переменной y).

В случае векторных y, h оператор обобщенного сдвига определяется как суперпозиция одномерных операторов: $T_y^h = T_{y_1}^{h_1}\cdots T_{y_n}^{h_n}$.

Через $\mathbb{R}_+^{m+n}$ обозначим множество

$$\left\{(x,y)\middle| x\in\mathbb{R}^m, y_1>0,\dots,y_n>0\right\}.$$

В $\mathbb{R}_+^{m+n}\times(0,\infty)$ рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{s=1}^{m_i} a_{is} u(x+h_{is},y,t)\right] - \sum_{l=1}^n \left(B_{k_l,y_l}u + \sum_{r=1}^{n_l} b_{lr} T_{y_l}^{g_{lr}} u\right) = f(x,y,t) \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial y_l}\Big|_{y_l=0} = 0\,(l=\overline{1,n}),\ t>0, \tag{4.2}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y),\ (x,y)\in\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}. \tag{4.3}$$

Здесь $u_0, f, \dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_m},\dfrac{\partial f}{\partial y_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial y_n}$ — непрерывные и ограниченные функции, f также удовлетворяет условию (4.2), векторы h_{is} при каждом s параллельны i-й координатной оси пространства $\mathbb{R}^m$ ($i\in\overline{1,m}$), а коэффициенты a_{is}, b_{lr}, g_{lr} предполагаются вещественными при всех значениях своих индексов.

Так же, как и в главе 3, задачу (4.1)–(4.3) можно рассматривать во всем $\mathbb{R}^{m+n}\times(0,+\infty)$, заменяя условие (4.2) требованием четности функции u по каждой переменной y_l (корректность таких задач для дифференциальных параболических уравнений с оператором Бесселя известна, например, из [44, 45, 48–51, 53]).

4.2. Фундаментальное решение сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Пусть $f(x,y,t)\equiv 0$.

Полагая

$$\mathcal{E}_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} e^{-t\left(|\xi|^2 - \sum\limits_{i=1}^m\sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{is}\cos h_{is}\cdot\xi\right)} \cos\left(x\cdot\xi + t\sum_{i=1}^m\sum_{s=1}^{m_i} a_{is}\sin h_{is}\cdot\xi\right)d\xi, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{E}_2(y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{l=1}^n \int\limits_0^\infty \eta_l^{k_l} e^{-t\left[\eta_l^2 - \sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr} j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)\right]} j_{\nu_l}(y_l\eta_l)\,d\eta_l, \tag{4.5}$$

определим на $\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}\times(0,\infty)$ функцию

$$\mathcal{E}(x,y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}_1(x,y,t)\mathcal{E}_2(x,y,t).$$

Для любых $t_0, T\in(0,+\infty)$ интегралы (4.4) и (4.5) сходятся абсолютно и равномерно относительно $(x,y,t)\in\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}\times[t_0,T]$ (отметим, что $|j_\nu(z)|\leqslant 1$), поэтому $\mathcal{E}(x,y,t)$ определена корректно. Подставим (формально) $\mathcal{E}$ в уравнение (4.1):

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial t}\,\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial t},\ \ \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\mathcal{E}_1}{\partial x_i^2}\,\mathcal{E}_2\,(i=\overline{1,m}),$$

$$B_{k_l,y_l}\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\frac{\partial^2\mathcal{E}_2}{\partial y_l^2} + \frac{k_l}{y_l}\mathcal{E}_1\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial y_l} = \mathcal{E}_1 B_{k_l,y_l}\mathcal{E}_2\,(l=\overline{1,n}),$$

$$\mathcal{E}(x+h,y,t) = \mathcal{E}_1(x+h,y,t)\mathcal{E}_2 \text{ для любого } h\in\mathbb{R}^m,$$

$$T_y^g\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 T_y^g \mathcal{E}_2(x,y,t) \text{ для любого } g\in\mathbb{R}^n.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial x_i^2} + \sum_{s=1}^{m_i} a_{is}\mathcal{E}(x+h_{is},y,t)\right] - \sum_{l=1}^{n}\left(B_{k_l,y_l}\mathcal{E} + \sum_{r=1}^{n_l} b_{lr}T_{y_l}^{g_{lr}}\mathcal{E}\right) = \\
&= \mathcal{E}_2\left[\frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial t} - \Delta_x\mathcal{E}_1 - \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_i} a_{is}\mathcal{E}_1(x+h_{is},y,t)\right] + \\
&+ \mathcal{E}_1\left[\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial t} - \sum_{l=1}^{n}\left(B_{k_l,y_l}\mathcal{E}_2 + \sum_{r=1}^{n_l} b_{lr}T_{y_l}^{g_{lr}}\mathcal{E}_2\right)\right]. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Из [59] известно, что первое слагаемое суммы (4.6) обращается в нуль; рассмотрим второе слагаемое:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial t} &= \underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n\text{ раз}}\left[\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_l} b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l) - |\eta|^2\right] e^{\left[\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)-|\eta|^2\right]t}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}j_{\nu_l}(y_l\eta_l)\,d\eta_l = \\
&= \underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n\text{ раз}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_l} b_{lr}T_{y_l}^{g_{lr}}j_{\nu_l}(y_l\eta_l)\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq l}}^{n} j_{\nu_\kappa}(y_\kappa\eta_\kappa)\, e^{\left[\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)-|\eta|^2\right]t}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}d\eta_l - \\
&- \underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n\text{ раз}}\sum_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l+2}\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq l}}^{n}\eta_\kappa^{k_\kappa} e^{\left[\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)-|\eta|^2\right]t}\prod_{l=1}^{n} j_{\nu_l}(y_l\eta_l)\,d\eta_l,
\end{aligned}$$

поскольку $T_x^y j_\nu(ax) = j_\nu(ax)j_\nu(ay)$ (см., например, [41, с. 19]).

Далее $B_{k_l,y_l}j_{\nu_l}(y_l\eta_l) = -\eta_l^2 j_{\nu_l}(y_l\eta_l)$ для любого l (см., например, [41, с. 18]), значит,

$$B_{k_l,y_l}\mathcal{E}_2 = -\underbrace{\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty}_{n\text{ раз}} e^{\left[\sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)-|\eta|^2\right]t}\eta_l^2\prod_{\kappa=1}^{n}\eta_\kappa^{k_\kappa}j_{\nu_\kappa}(y_\kappa\eta_\kappa)\,d\eta_\kappa.$$

Таким образом, второе слагаемое суммы (4.6) также обращается в нуль в $\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}\times(0,+\infty)$, тем самым $\mathcal{E}(x,t)$ формально удовлетворяет уравнению (4.1).

При этом

$$\left|B_{k_l,y_l}\mathcal{E}_2\right| \leqslant \text{const}\prod_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq l}}^{n}\int_0^\infty \eta_\kappa^{k_\kappa}e^{-\eta_\kappa^2 t}d\eta_\kappa\int_0^\infty \eta_l^{k_l+2}e^{-\eta_l^2 t}d\eta_l,$$

$$\left|T_{y_l}^{g_{lr}}\mathcal{E}_2\right| \leqslant \text{const}\prod_{l=1}^{n}\int_0^\infty \eta_l^{k_l}e^{-\eta_l^2 t}d\eta_l$$

для любых l и r, а значит,

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}_2}{\partial t}\right| \leqslant \text{const }t^{-1-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum\limits_{l=1}^{n}k_l}.$$

Аналогично,

$$\left|\frac{\partial\mathcal{E}_1}{\partial t}\right| \leqslant \text{const }t^{-1-\frac{m}{2}},$$

следовательно, формальное дифференцирование и обобщенный сдвиг под знаком интеграла законны (во всех членах уравнения (4.1)), поэтому функция $\mathcal{E}$ удовлетворяет уравнению (4.1) в $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$.

Назовем $\mathcal{E}(x,t)$ фундаментальным решением уравнения (4.1). Правомерность этого термина будет обоснована ниже — мы покажем, что обобщенная свертка (см. [41, §1.8]) $\mathcal{E}$ с ограниченной начальной функцией на начальной гиперплоскости обращается в саму начальную функцию.

4.3. Обобщенная свертка фундаментального решения с ограниченными начальными функциями

На $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$ рассмотрим функцию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}\mathcal{E}(\xi,\eta,t)T_y^{\eta}u_0(x-\xi,y)d\xi d\eta \tag{4.7}$$

и докажем следующее утверждение:

Теорема 4.3.1. *Функция* (4.7) *удовлетворяет* (*в классическом смысле*) *уравнению* (4.1).

Доказательство. Прежде всего докажем, что функция (4.7) определена корректно. Для этого используем следующие оценки, установленные для функций (4.4) и (4.5) в разделах 1.4 и 3.3 соответственно:

$$|x|^{m+2}|\mathcal{E}_1(x,t)|\leqslant C, \tag{4.8}$$

$$y_l^{\alpha}\left|\int\limits_0^{\infty}\eta_l^{k_l}e^{-t\left[\eta_l^2-\sum\limits_{r=1}^{n_l}b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)\right]}j_{\nu_l}\left(y_l\eta_l\right)d\eta_l\right|\leqslant C \tag{4.9}$$

(эти оценки верны при любых $t>0$, $\alpha>0$ и $l\in\overline{1,n}$).

При этом для любых положительных t_0 и T константы неравенств (4.8) и (4.9) зависят только от t_0 и T, но не от $t\in[t_0,T]$. Отсюда и из ограниченности функции u_0 вытекает, что интеграл (4.7) сходится абсолютно и равномерно по $t\in[t_0,T]$ при любом фиксированном T. Действительно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}|\mathcal{E}(\xi,\eta,t)T_y^{\eta}u_0(x-\xi,y)|d\xi d\eta\leqslant\frac{1}{2}\sup|u_0|\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}}\prod_{l=1}^{n}|\eta_l|^{k_l}|\mathcal{E}(\xi,\eta,t)|d\xi d\eta. \tag{4.10}$$

В правой части последнего неравенства подынтегральная функция продолжена на все $\mathbb{R}^{m+n}$ четным по каждой y_l образом, а само неравенство понимается в следующем смысле: если сходится его правая часть, то сходится и левая, и при этом условии само неравенство справедливо; отметим, что нормированная функции Бесселя четна, а оператор обобщенного сдвига непрерывен (см., например, [41, с. 18-19]).

В силу гладкости сомножителей функции $\mathcal{E}(\xi,\eta,t)$ и оценок (4.8), (4.9) подынтегральная функция последнего интеграла может быть представлена в виде $\left|f_{0,t}(\xi)\prod\limits_{l=1}^{n}f_{l,t}(\eta_l)\right|$ с сомножителями, удовлетворяющими при $t\in[t_0,T]$ неравенствам

$$|f_{0,t}(\xi)|\leqslant\frac{M_0}{1+|\xi|^{m+1}},\,|f_{l,t}(\xi)|\leqslant\frac{M_l}{1+\eta_l^2}$$

с некоторыми положительными постоянными $M_0,\,\ldots,M_n$.

Пусть Ω — произвольная (сколь угодно большая) ограниченная область в $\mathbb{R}^{m+n}$. Без ограничения общности можно считать, что она содержит область $Q(1)\overset{\mathrm{def}}{=}\{|\xi|<1,|\eta_l|\leqslant1;\,l=\overline{1,n}\}$. Существует такое A_0 из $(1,+\infty)$, что

$$\Omega\subset Q(A_0)\overset{\mathrm{def}}{=}\{|\xi|<A_0,|\eta_l|\leqslant A_0,\,l=\overline{1,n}\}.$$

Функция $\left|f_{0,t}(\xi)\prod\limits_{l=1}^{n}f_{l,t}(\eta_l)\right|$ интегрируема на $Q(A_0)$ в силу ограниченности этой области, следовательно, теорема Фубини применима:

$$\int\limits_{Q(A_0)}\left|f_{0,t}(\xi)\prod_{l=1}^{n}f_{l,t}(\eta_l)\right|d\xi d\eta=\int\limits_{|\xi|<A_0}|f_0(\xi)|d\xi\prod_{l=1}^{n}\int\limits_{-A_0}^{A_0}|f_{l,t}(\eta_l)|d\eta_l\leqslant$$

$$\leqslant M_0\left(\max_{l=\overline{1,n}}M_l\right)^n\left[\frac{2\pi^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}+\int\limits_{|\xi|>1}\frac{d\xi}{|\xi|^{m+1}}\right]\left(2+2\int\limits_{1}^{A_0}\frac{dz}{z^2}\right)^n\leqslant$$

$$\leqslant M_0\left(4\max_{l=\overline{1,n}}M_l\right)^n\left[\frac{2\pi^m}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}+\frac{2\pi^m}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\right]=\frac{2\pi^m M_0}{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(4\max_{l=\overline{1,n}}M_l\right)^n(1+m).$$

Значит, интеграл в правой части неравенства (4.10) сходится и удовлетворяет той же оценке. Отсюда следует, что функция (4.7) корректно определена на $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$. Далее в силу самосопряженности оператора обобщенного сдвига в соответствующем весовом пространстве (см., например, [41, с. 19]) функция (4.7) равна $\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod\limits_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}u_0(\xi,\eta)T_y^{\eta}\mathcal{E}(x-\xi,y,t)d\xi d\eta$. Для завершения доказательства остается лишь обосновать законность дифференцирования и обобщенного сдвига под знаком интеграла в (4.7). Для этого нужно оценить поведение $\Delta_x\mathcal{E}, B_{k_l,y_l}\mathcal{E}$ и $T_{y_l}^{g_{lr}}\mathcal{E}$ на бесконечности. $\left|T_{y_l}^{g_{lr}}\mathcal{E}\right|=\left|j_{\nu_l}(g_{lr}y_l)\mathcal{E}\right|\leqslant\left|\mathcal{E}\right|$. Далее в разделе 1.4 доказано, что $|x|^{m+1}\Delta_x\mathcal{E}_1(x,t)\overset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}0$ при любом положительном t, а в разделе 3.3 доказано, что

$$y_l^{\alpha}B_{k_l,y_l}\int\limits_{0}^{\infty}\eta_l^{k_l}e^{-t\left[\eta_l^2-\sum\limits_{r=1}^{n_l}b_{lr}j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)\right]}j_{\nu_l}(y_l\eta_l)\,d\eta_l\overset{y\to\infty}{\longrightarrow}0$$

при любых $t>0$, $\alpha>0$ и $l\in\overline{1,n}$. Отсюда и из (4.8), (4.9) выводим (как и выше), что дифференцирование и обобщенный сдвиг под знаком интеграла в (4.7) законны, что и завершает доказательство. □

4.4. Решение неклассической задачи Коши для сингулярного функционально-дифференциального уравнения

Введем следующее обозначение:

$$u(x,y,t)\overset{\text{def}}{=}\frac{2^{n-m}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^{n}2^{k_l}\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}u_0(x-\xi,\eta)T_y^{\eta}\mathcal{E}(\xi,y,t)d\xi d\eta.\qquad(4.11)$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.4.1. *Функция, определенная формулой* (4.11)*, есть решение задачи* (4.1)–(4.3).

Доказательство. Из теоремы 4.3.1 следует, что функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (4.1), а в силу четности функции $T_y^{\eta}\mathcal{E}(\xi,y,t)$ по переменным $y_1,\dots,y_n$ (см., например, [41, с. 35]) $u(x,y,t)$ удовлетворяет условию четности (4.2). Осталось показать, что она удовлетворяет и начальному условию (4.3).

Возьмем произвольное $(x_0,y_0)\overset{\text{def}}{=}(x_1^0,\dots,x_m^0,y_1^0,\dots,y_n^0)\in\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$ и исследуем поведение функции $u(x_0,y_0,t)$ при $t\to+0$.

Замечая, что $T_y^\eta f(y)=T_\eta^y f(\eta)$ (см., например, [41, с. 19]) и обозначая $\dfrac{2^{n-m}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^{n}2^{k_l}\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}$ через C, получаем, что

$$u(x_0,y_0,t)=C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}}\prod_{l=1}^{n}\eta_l^{k_l}u_0(x_0-\xi,\eta)T_\eta^{y_0}\mathcal{E}(\xi,\eta,t)d\xi d\eta.$$

Заменой переменных $\zeta_i=\dfrac{\xi_i}{2\sqrt{t}}\,(i=\overline{1,m})$, $\rho_l=\dfrac{\eta_l}{2\sqrt{t}}\,(l=\overline{1,n})$ последнее равенство приводится к следующему виду:

$$u(x_0,y_0,t)=2^{m+n+|k|}Ct^{\frac{m+n+|k|}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}}\prod_{l=1}^{n}\rho_l^{k_l}u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},2\rho\sqrt{t})T_{2\rho\sqrt{t}}^{y_0}\mathcal{E}(2\zeta\sqrt{t},2\rho\sqrt{t},t)d\zeta d\rho$$

(здесь $|k|\overset{\mathrm{def}}{=}k_1+\dots+k_n$ — длина мультииндекса).

Считая (без ограничения общности), что

$$m_1=\dots=m_m=n_1=\dots=n_n=1,$$

переобозначим b_{l1} через b_l, g_{l1} — через g_l $(l=\overline{1,n})$, a_{i1} — через a_i, а через h_i обозначим величину $|h_{i1}|$, взятую с плюсом или минусом в зависимости от того, с положительным или отрицательным направлением i-й координатной оси пространства $\mathbb{R}^m$ совпадает вектор h_{i1} $(i=\overline{1,m})$. Тогда $\mathcal{E}_1(x,t)$ можно представить в виде

$$2^m\prod_{i=1}^{m}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t(\tau^2-a_i\cos h_i\tau)}\cos(x_i\tau+a_it\sin h_i\tau)d\tau$$

(см. раздел 1.4 и [59]), следовательно,

$$\mathcal{E}(2\zeta\sqrt{t},2\rho\sqrt{t},t)=2^m\prod_{i=1}^{m}\int\limits_0^{+\infty}e^{-t(\tau^2-a_i\cos h_i\tau)}\cos(2\sqrt{t}\zeta_i\tau+a_it\sin h_i\tau)d\tau\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\int\limits_0^{\infty}\eta_l^{k_l}e^{-t\left[\eta_l^2-b_lj_{\nu_l}(g_l\eta_l)\right]}j_{\nu_l}\left(2\sqrt{t}\rho_l\eta_l\right)d\eta_l.$$

Заменой переменных $\tau\sqrt{t}=z$, $\eta_l\sqrt{t}=\xi$ $(l=\overline{1,n})$ последнее выражение приводится к виду

$$\frac{2^m}{t^{\frac{m+n+|k|}{2}}}\prod_{i=1}^{m}\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2+a_it\cos\frac{h_iz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_it\sin\frac{h_iz}{\sqrt{t}}\right)dz\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\int\limits_0^{\infty}\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_ltj_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi. \tag{4.12}$$

Таким образом, используя самосопряженность оператора обобщенного сдвига, получаем:

$$u(x_0,y_0,t)=2^{2m+n+|k|}C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}}T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{m}\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2+a_it\cos\frac{h_iz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_it\sin\frac{h_iz}{\sqrt{t}}\right)dz\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\rho_l^{k_l}\int\limits_0^{\infty}\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_ltj_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi d\zeta d\rho. \tag{4.13}$$

Далее мы будем использовать следующие утверждения:

Лемма 4.4.1.

$$\prod_{i=1}^{m}\int_0^\infty e^{-z^2+a_it\cos\frac{h_iz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_it\sin\frac{h_iz}{\sqrt{t}}\right)dz \xrightarrow{t\to+0} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^m e^{-|\zeta|^2}$$

равномерно относительно $\zeta\in\mathbb{R}^m$.

Лемма 4.4.2. *Для любого* $i\in\overline{1,m}$ *и для любого положительного* A *существует такое* M_i, *зависящее только от* a_i *и* h_i, *что для любого* t *из* $(0,1)$ *и для любого* ζ_i *из* $(A,+\infty)$

$$\left|\int_0^\infty e^{-z^2+a_it\cos\frac{h_iz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_it\sin\frac{h_iz}{\sqrt{t}}\right)dz\right|\leqslant\frac{M_i}{\zeta_i^2}.$$

Лемма 4.4.3. *Для любого* $l\in\overline{1,n}$

$$\int_0^\infty \xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_ltj_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi \xrightarrow{t\to+0} \frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2}\,e^{-\rho_l^2}$$

равномерно относительно $\rho_l\geqslant 0$.

Лемма 4.4.4. *Для любого* $l\in\overline{1,n}$ *существуют такие* $C_l>0$, $\alpha>1$, *что для любого* $t\in(0,1)$ *и для любого* $\rho_l>0$

$$\left|\rho_l^{k_l}\int_0^\infty \xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_ltj_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi\right|\leqslant\frac{C_l}{\rho_l^\alpha}.$$

Леммы 4.4.1 и 4.4.2 доказаны в разделе 1.3 и [59] соответственно, леммы 4.4.3 и 4.4.4 доказаны в разделе 3.4.

Имеем

$$\int_0^\infty \xi^{k_l}e^{-\xi^2}j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)d\xi=\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2}\,e^{-\rho_l^2}$$

(см., например, [75, с. 186]), следовательно,

$$u_0(x_0,y_0)=\frac{2^{m+2n}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^{n}\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}}u_0(x_0,y_0)\prod_{i=1}^{m}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos 2z\zeta_i\,dz\prod_{l=1}^{n}\rho_l^{k_l}\int_0^\infty\xi^{k_l}e^{-\xi^2}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi d\zeta d\rho.$$

Теперь рассмотрим разность $u(x_0,y_0,t)-u_0(x_0,y_0)$; она равна

$$2^{2m+n+|k|}C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}}\prod_{l=1}^{n}\rho_l^{k_l}\Bigg[T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{m}\int_0^{+\infty}e^{-z^2+a_it\cos\frac{h_iz}{\sqrt{t}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_it\sin\frac{h_iz}{\sqrt{t}}\right)dz\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\int_0^\infty\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_ltj_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi d\zeta d\rho-$$

$$-u_0(x_0,y_0)\prod_{i=1}^{m}\int_0^{+\infty}e^{-z^2}\cos 2z\zeta_i\,dz\prod_{l=1}^{n}\int_0^\infty\xi^{k_l}e^{-\xi^2}j_{\nu_l}\left(2\xi\rho_l\right)d\xi\Bigg]d\zeta d\rho=$$

$$= 2^{2m+n+|k|}C\left(\int\limits_{Q(A)} + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}\setminus Q(A)}\right) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{2m+n+|k|}C(I_1+I_2), \tag{4.14}$$

где A — положительный параметр, а $Q(A)$ здесь и далее будет обозначать следующую область:

$$\left\{(\zeta,\rho)\in\mathbb{R}_+^{m+n}\Big| |\zeta|<1, \rho_l<A;\, l=\overline{1,n}\right\}.$$

Зададимся произвольным положительным ε.

Интеграл (4.14) сходится абсолютно и равномерно по $t\in(0,1)$. Действительно, в силу лемм 4.4.2, 4.4.4 и ограниченности функции u_0 его подынтегральная функция при любом A из $(0,+\infty)$ и любом t из $(0,1)$ оценивается сверху по абсолютной величине через

$$\sup|u_0|\left[\prod_{i=1}^m f_{1,i}(\zeta_i)\prod_{l=1}^n f_{2,l}(\rho_l)+\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m+n}}\prod_{l=1}^n\Gamma(\nu_l+1)e^{-|\zeta|^2-|\rho|^2}\right],$$

где $0\leqslant f_{1,i}(\zeta_i)\leqslant \dfrac{M_i}{1+\zeta_i^2}$, $0\leqslant f_{2,l}(\rho_l)\leqslant\dfrac{C_l}{1+\rho_l^\alpha}$, $i=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,n}$. Значит, можно выбрать такое положительное A, что неравенство $|I_2|<\dfrac{\varepsilon}{2^{m+n+|k|+1}C}$ выполняется для любого t из $(0,1)$. Зафиксируем выбранное A и рассмотрим I_1:

$$T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0)-u_0(x_0,y_0)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{l=1}^n\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+\frac12)}\times$$

$$\times\underbrace{\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi}_{n\text{ раз}} u_0\Big[x_1^0-2\zeta_1\sqrt{t},\ldots,x_m^0-2\zeta_m\sqrt{t},$$

$$\sqrt{(y_1^0)^2+4\rho_1^2t-4y_1^0\rho_1\sqrt{t}\cos\theta_1},\ldots,$$

$$\sqrt{(y_n^0)^2+4\rho_n^2t-4y_n^0\rho_n\sqrt{t}\cos\theta_n}\Big]\prod_{l=1}^n\sin^{2\nu_l}\theta_l d\theta_l-$$

$$-\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{l=1}^n\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+\frac12)}\underbrace{\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi}_{n\text{ раз}}u_0(x_0,y_0)\prod_{l=1}^n\sin^{2\nu_l}\theta_l d\theta_l=$$

$$=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{l=1}^n\frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+\frac12)}\underbrace{\int\limits_0^\pi\cdots\int\limits_0^\pi}_{n\text{ раз}}\Big(u_0\Big[x_1^0-2\zeta_1\sqrt{t},\ldots,x_m^0-2\zeta_m\sqrt{t},$$

$$\sqrt{(y_1^0)^2+4\rho_1^2t-4y_1^0\rho_1\sqrt{t}\cos\theta_1},\ldots,$$

$$\sqrt{(y_n^0)^2+4\rho_n^2t-4y_n^0\rho_n\sqrt{t}\cos\theta_n}\Big]-u_0(x_0,y_0)\Big)\prod_{l=1}^n\sin^{2\nu_l}\theta_l d\theta_l.$$

Пусть $\delta>0$. В силу непрерывности функции u_0 в точке (x_0,y_0) можно выбрать t_0 настолько малым, что для любых t из $(0,t_0)$, (ζ,ρ) из $Q(A)$ и θ_l из $[0,\pi]$ $(l=\overline{1,n})$

$$\Big|u_0\Big[x_1^0-2\zeta_1\sqrt{t},\ldots,x_m^0-2\zeta_m\sqrt{t},\sqrt{(y_1^0)^2+4\rho_1^2t-4y_1^0\rho_1\sqrt{t}\cos\theta_1},\ldots,$$

$$\sqrt{(y_n^0)^2+4\rho_n^2t-4y_n^0\rho_n\sqrt{t}\cos\theta_n}\Big]-u_0(x_0,y_0)\Big|<\delta.$$

Это означает (поскольку положительное δ выбрано произвольно), что

$$T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}\, u_0(x_0 - 2\zeta\sqrt{t}, y_0) \overset{t\to+0}{\longrightarrow} u_0(x_0, y_0)$$

равномерно относительно $(\zeta,\rho)\in Q(A)$. Отсюда и из лемм 4.4.1, 4.4.3 следует, что существует такое положительное t_0, что для любого t из $(0,t_0)$ и для любого (ζ,ρ) из $Q(A)$

$$\Bigg| T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}\, u_0(x_0 - 2\zeta\sqrt{t}, y_0) \prod_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 + a_i t \cos\frac{h_i z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\zeta_i + a_i t \sin\frac{h_i z}{\sqrt{t}}\right) dz \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \int_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2 + b_l t j_{\nu_l}\left(\frac{g_l \xi}{\sqrt{t}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi d\zeta d\rho - u_0(x_0,y_0) \prod_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \cos 2z\zeta_i\, dz \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \int_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi \Bigg] d\zeta d\rho \Bigg| < \frac{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\prod\limits_{l=1}^{n}(k_l+1)}{\pi^{\frac{m}{2}} A^{m+n+|k|} 2^{2m+n+|k|+1} C}\, \varepsilon,$$

т. е.

$$|I_1| \leqslant \frac{\pi^{\frac{m}{2}} A^{m+n+|k|}\varepsilon}{2^{2m+n+|k|+1} C m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \prod\limits_{l=1}^{n}(k_l+1)} \int\limits_{Q(A)} \prod_{l=1}^{n} \rho_l^{k_l} d\zeta d\rho = \frac{\varepsilon}{2^{2m+n+|k|+1} C}.$$

Поскольку положительное ε выбиралось произвольно, то

$$u(x_0, y_0, t) - u_0(x_0, y_0) \overset{t\to+0}{\longrightarrow} 0.$$

Тем самым в силу произвольности выбора точки (x_0, y_0) функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет условию (4.3). Теорема 4.4.1 доказана. □

С помощью доказанной теоремы можно, в частности, вычислить весовой интеграл от фундаментального решения по всему $\mathbb{R}_+^{m+n}$:

Лемма 4.4.5.

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}} \prod_{l=1}^{n} y^{k_l} \mathcal{E}(x,y,t)\, dx dy = \frac{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{k_l+1}{2}\right)}{2^{n-m-|k|}}\, e^{t\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{is} + \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}\right)}.$$

Доказательство. Рассмотрим $u_0(x,y)\equiv 1$; она непрерывна и ограничена, следовательно в силу теоремы 4.4.1 функция

$$y(x,y,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{2^{n-m}}{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} 2^{k_l} \Gamma^2\left(\frac{k_l+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}} \prod_{l=1}^{n} \eta_l^{k_l} \mathcal{E}(\xi,\eta,t)\, d\xi d\eta$$

удовлетворяет задаче (4.1)–(4.3) с начальным условием

$$y(x,y,0)\equiv 1;$$

однако $y(x,y,t)$ не зависит от x, y, следовательно, в действительности $y(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y' - y\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m_i} a_{is} + \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{n_l} b_{lr}\right) = 0$$

и начальному условию

$$y(0) = 1.$$

Значит, $y(t) = e^{t\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{is} + \sum\limits_{l=1}^{n}\sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}\right)}$. Лемма 4.4.5 доказана. □

4.5. Случай неоднородного сингулярного уравнения

В этом разделе будем считать, что правая часть уравнения (4.1) отлична от тождественного нуля. Покажем, что и в этом случае при помощи фундаментального решения $\mathcal{E}(x,y,t)$ можно получить интегральное представление решения задачи (4.1)–(4.3).

Для этого зададимся произвольным (x_0,y_0) из $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$ и определим (при $t>\tau>0$) функцию

$$G(t,\tau) \overset{\text{def}}{=} 2^{-2m-n-|k|} \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \prod_{l=1}^{n} \eta_l^{k_l} f(\xi,\eta,t-\tau) T^{\eta}_{y_0}\mathcal{E}(x_0-\xi,y_0,\tau)d\xi d\eta.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4.5.1. *Существует такое* $t_0>0$, *что функция* $G(t,\tau)$ *ограничена в области* $(0,t_0)\times(0,t)$.

Доказательство. Используя замену переменных $\zeta_i=\dfrac{\xi_i}{2\sqrt{\tau}}$, $\rho_l=\dfrac{\eta_l}{2\sqrt{\tau}}$ $(i=\overline{1,m},\ l=\overline{1,n})$, а также самосопряженность оператора обобщенного сдвига, получаем, что

$$G(t,\tau)=2^{-m}\tau^{\frac{m+n+|k|}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \prod_{l=1}^{n} \rho_l^{k_l} T^{2\rho\sqrt{\tau}}_{y_0} f(x_0-2\zeta\sqrt{\tau},y_0,t-\tau)\mathcal{E}(2\zeta\sqrt{\tau},2\rho\sqrt{\tau},\tau)d\zeta d\rho.$$

Теперь так же, как и при доказательстве теоремы 4.4.1, будем без ограничения общности считать, что

$$m_1=\dots=m_m=n_1=\dots=n_n=1,$$

и переобозначим b_{l1} через b_l, g_{l1} — через g_l $(l=\overline{1,n})$, a_{i1} — через a_i, а через h_i обозначим величину $|h_{i1}|$, взятую с плюсом или минусом в зависимости от того, с положительным или отрицательным направлением i-й координатной оси пространства $\mathbb{R}^m$ совпадает вектор h_{i1} $(i=\overline{1,m})$. Тогда $\mathcal{E}(2\zeta\sqrt{t},2\rho\sqrt{t},t)$ равно выражению (4.12), поэтому

$$G(t,\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \prod_{i=1}^{m} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+a_i\tau\cos\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}} \cos\left(2z\zeta_i+a_i\tau\sin\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}\right)dz\,\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\rho_l^{k_l}\int\limits_0^{\infty}\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_l\tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{\tau}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\,d\xi\,T^{2\rho\sqrt{\tau}}_{y_0} f(x_0-2\zeta\sqrt{\tau},y_0,t-\tau)d\zeta d\rho.$$

В силу ограниченности f последний интеграл сходится абсолютно и равномерно в треугольнике $\{0<\tau<t<1\}$ (доказательство идентично доказательству абсолютной и равномерной сходимости первого слагаемого интеграла (4.14)).

Таким образом, имеем следующую оценку функции G:

$$|G(t,\tau)|\leqslant 2^{-n}\sup|f|\prod_{i=1}^{m}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2+a_i\tau\cos\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_i\tau\sin\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}\right)dzd\zeta_i\,\times$$

$$\times\prod_{l=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\rho_l|^{k_l}\int\limits_0^{\infty}\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_l\tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{\tau}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\,d\xi\,d\rho_l.$$

В последнем выражении каждый внешний (одномерный) интеграл (т. е. интеграл, взятый по всей вещественной оси) можно представить в виде $\int\limits_{-\infty}^{-1}+\int\limits_{-1}^{1}+\int\limits_{1}^{+\infty}$. Далее, учитывая ограниченность внутренних интегралов и применяя леммы 4.4.2 и 4.4.4 (при этом A полагаем равным единице и без ограничения общности считаем, что $t < 1$), получаем, что существует такое $\alpha > 1$, что

$$|G(t,\tau)| \leqslant \mathrm{const}\left(2+2\int\limits_1^{+\infty}\frac{dr}{r^2}\right)^m\left(2+2\int\limits_1^{+\infty}\frac{dr}{r^\alpha}\right)^n.$$

Лемма 4.5.1 доказана. □

Поэтому на $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$ определена функция

$$v(x,y,t)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{2^{n-m-|k|}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^n\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^n\eta_l^{k_l}\mathcal{E}(\xi,\eta,\tau)T_y^\eta f(x-\xi,y,t-\tau)d\xi d\eta d\tau. \quad (4.15)$$

В силу четности функции $T_y^\eta\mathcal{E}(\xi,y,t)$ по переменным $y_1,\dots,y_n$ функция (4.15) удовлетворяет условию (4.2). Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (4.1) и однородному начальному условию.

Для доказательства первого из этих утверждений заметим, что, как доказано в пункте 4.2, функция $\mathcal{E}(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению (4.1) в $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$. Учитывая установленные в пункте 4.3 оценки скорости убывания ее сомножителей и их производных соответствующего порядка при $|x|\to\infty, |y|\to\infty$, получаем, что остается доказать следующую лемму:

Лемма 4.5.2. *Пусть* $(x_0,y_0)\in\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$, $t_0>0$. *Тогда*

$$\lim_{\tau\to+0}\frac{2^{n-m-|k|}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^n\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^n\eta_l^{k_l}f(\xi,\eta,t_0-\tau)T_{y_0}^\eta\mathcal{E}(x_0-\xi,y_0,\tau)d\xi d\eta=f(x_0,y_0,t_0).$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^n\eta_l^{k_l}f(\xi,\eta,t_0-\tau)T_{y_0}^\eta\mathcal{E}(x_0-\xi,y_0,\tau)d\xi d\eta=2^{2m+n+|k|}G(t_0,\tau)=$$

$$=2^{2m+n+|k|}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{i=1}^m\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2+a_i\tau\cos\frac{h_iz}{\sqrt{\tau}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_i\tau\sin\frac{h_iz}{\sqrt{\tau}}\right)dz\times$$

$$\times\prod_{l=1}^n\rho_l^{k_l}\int\limits_0^\infty\xi^{k_l}e^{-\xi^2+b_l\tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{\tau}}\right)}j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\,d\xi T_{y_0}^{2\rho\sqrt{\tau}}f(x_0-2\zeta\sqrt{\tau},y_0,t_0-\tau)d\zeta d\rho$$

(см. доказательство леммы 4.5.1).

Поэтому разность

$$\frac{2^{n-m-|k|}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^n\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^n\eta_l^{k_l}f(\xi,\eta,t_0-\tau)T_{y_0}^\eta\mathcal{E}(x_0-\xi,y_0,\tau)d\xi d\eta-f(x_0,y_0,t_0)$$

можно записать в виде

$$\frac{2^{m+2n}}{\pi^m\prod\limits_{l=1}^n\Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+}\prod_{l=1}^n\rho_l^{k_l}\left[T_{y_0}^{2\rho\sqrt{\tau}}f(x_0-2\zeta\sqrt{\tau},y_0,t_0-\tau)\times\right.$$

$$\times\prod_{i=1}^m\int\limits_0^{+\infty}e^{-z^2+a_i\tau\cos\frac{h_iz}{\sqrt{\tau}}}\cos\left(2z\zeta_i+a_i\tau\sin\frac{h_iz}{\sqrt{\tau}}\right)dz\times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2 + b_l \tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l \xi}{\sqrt{\tau}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi - \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k_l+1}{2}\right)}{2^{m+n}} e^{-|\zeta|^2 - |\rho|^2} f(x_0, y_0, t_0) \Bigg] d\zeta d\rho =$$

$$= \frac{2^{m+2n}}{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{k_l+1}{2}\right)} \left(\int\limits_{Q(A)} + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n} \setminus Q(A)} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{C}(I_3 + I_4), \tag{4.16}$$

где A — положительный параметр.

Пусть $\varepsilon > 0$.

В силу ограниченности функции f интеграл (4.16) сходится абсолютно и равномерно относительно $\tau \in (0,1)$; доказательство идентично доказательству абсолютной и равномерной сходимости интеграла (4.14). Следовательно, можно выбрать такое положительное A, что $|I_4| < \dfrac{\varepsilon}{2\widetilde{C}}$ для любого τ из $(0,1)$. Зафиксируем выбранное A и рассмотрим I_3.

Обобщенный сдвиг

$$T_{y_0}^{2\rho\sqrt{\tau}} f(x_0 - 2\zeta\sqrt{\tau}, y_0, t_0 - \tau)$$

можно представить в виде

$$\pi^{-\frac{n}{2}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\Gamma(\nu_l+1)}{\Gamma(\nu_l+\frac{1}{2})} \underbrace{\int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{n \text{ раз}} f\left[x_1^0 - 2\zeta_1\sqrt{\tau}, \ldots, x_m^0 - 2\zeta_m\sqrt{\tau},\right.$$

$$\sqrt{(y_1^0)^2 + 4\rho_1^2\tau - 4y_1^0\rho_1\sqrt{\tau}\cos\theta_1}, \ldots$$

$$\left. \ldots, \sqrt{(y_n^0)^2 + 4\rho_n^2\tau - 4y_n^0\rho_n\sqrt{\tau}\cos\theta_n}, t_0 - \tau \right] \prod_{l=1}^{n} \sin^{2\nu_l}\theta_l d\theta_l.$$

В силу непрерывности и ограниченности f последнее выражение стремится к $f(x_0, y_0, t_0)$ при $\tau \to +0$ равномерно относительно $(\zeta, \rho) \in Q(A)$. Отсюда и из лемм 4.4.1, 4.4.3 следует, что существует такое положительное τ_0, что для любого $\tau < \tau_0$ и для любого $\eta \in Q(A)$

$$\Bigg| T_{y_0}^{2\rho\sqrt{\tau}} f(x_0 - 2\zeta\sqrt{\tau}, y_0, t_0 - \tau) \prod_{i=1}^{m} \int_0^{+\infty} e^{-z^2 + a_i \tau \cos\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}} \cos\left(2z\zeta_i + a_i\tau \sin\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \times$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \int_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2 + b_l\tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{\tau}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi - \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma\left(\frac{k_l+1}{2}\right)}{2^{m+n}} e^{-|\zeta|^2 - |\rho|^2} f(x_0, y_0, t_0) \Bigg| <$$

$$< \frac{m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \prod\limits_{l=1}^{n} (k_l+1)}{4\widetilde{C}\pi^{\frac{m}{2}} A^{m+n+|k|}} \varepsilon, \text{ т. е. } |I_3| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Лемма 4.5.2 доказана. □

Осталось доказать, что $v(x_0, y_0, t) \stackrel{t \to +0}{\longrightarrow} 0$ для любого (x_0, y_0) из $\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}$.

Для этого представим $v(x_0, y_0, t)$ как

$$\frac{2^{m+2n}}{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma^2\left(\frac{k_l+1}{2}\right)} \int_0^t G(t, \tau) d\tau$$

и воспользуемся леммой 4.5.1: существует такое положительное t_0, что

$$|v(x_0,t)| \leqslant \frac{2^{m+2n} \sup\limits_{t\in[0,t_0]} |G|}{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)} t$$

для любого t из $(0,t_0)$. Тем самым в силу произвольности выбора точки (x_0,y_0) доказано следующее утверждение:

Теорема 4.5.1. *Пусть функция* u_0 *непрерывна и ограничена в* $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$, *функции* f, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_m}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial y_n}$ *непрерывны и ограничены в* $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times(0,+\infty)$, *а функция* f *удовлетворяет условию* (4.2). *Тогда функция*

$$u(x,y,t) = \frac{2^{n-m-|k|}}{\pi^m \prod\limits_{l=1}^{n} \Gamma^2\left(\dfrac{k_l+1}{2}\right)} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \prod_{l=1}^{n} \eta_l^{k_l} \mathcal{E}(\xi,\eta,t) T_y^{\eta} u_0(x-\xi,y) d\xi d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} \prod_{l=1}^{n} \eta_l^{k_l} \mathcal{E}(\xi,\eta,\tau) T_y^{\eta} f(x-\xi,y,t-\tau) d\xi d\eta d\tau \right] \tag{4.17}$$

является решением задачи (4.1)–(4.3).

4.6. Единственность решения сингулярной задачи

Прежде всего докажем следующее утверждение:

Лемма 4.6.1. *Для любого положительного* T *функция* (4.17) *ограничена в* $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}\times[0,T]$.

Доказательство. С помощью (4.13) представим решение задачи (4.1)–(4.3) в следующем виде:

$$u(x,y,t) = C_1 \left[\int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} T_y^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x-2\zeta\sqrt{t},y) \prod_{i=1}^{m} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+a_i t \cos\frac{h_i z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\zeta_i + a_i t \sin\frac{h_i z}{\sqrt{t}}\right) dz \times \right.$$

$$\times \prod_{l=1}^{n} \rho_l^{k_l} \int\limits_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2+b_l t j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi d\zeta d\rho + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^{m+n}_+} T_y^{2\rho\sqrt{\tau}} f(x-2\zeta\sqrt{\tau},y,t-\tau) \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{m} \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+a_i\tau\cos\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}} \cos\left(2z\zeta_i + a_i\tau\sin\frac{h_i z}{\sqrt{\tau}}\right) dz \times$$

$$\left. \times \prod_{l=1}^{n} \rho_l^{k_l} \int\limits_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2+b_l\tau j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{\tau}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi d\zeta d\rho d\tau \right] \stackrel{\text{def}}{=} C_1\left[I_5(x,y,t) + I_6(x,y,t)\right]$$

(при этом относительно коэффициентов уравнения сделаны те же не ограничивающие общности предположения, что и при доказательстве теоремы 4.4.1, но учтено, что правая часть уравнения, вообще говоря, отлична от тождественного нуля).

Дважды применяя к интегралу

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+a_i t\cos\frac{h_i z}{\sqrt{t}}} \cos\left(2z\zeta_i + a_i t\sin\frac{h_i z}{\sqrt{t}}\right) dz \, (i=\overline{1,m})$$

формулу интегрирования по частям, получаем (см. [59]), что при $0 \leqslant t \leqslant T, \zeta_i \neq 0$ модуль последнего интеграла не превосходит $\dfrac{M_i(1+T)e^{|a_i|T}}{\zeta_i^2}$, где постоянная M_i зависит только от коэффициентов уравнения (4.1).

Применяя к интегралу

$$\int\limits_0^{\infty} \xi^{k_l} e^{-\xi^2 + b_l t j_{\nu_l}\left(\frac{g_l \xi}{\sqrt{t}}\right)} j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\, d\xi \; (l = \overline{1,n})$$

формулу интегрирования по частям n_0 раз (здесь n_0 — единственное натуральное число, лежащее в $\left(\nu_l + \dfrac{3}{2}, \nu_l + \dfrac{5}{2}\right]$), получаем (см. [112]), что при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\rho_l > 0$ модуль последнего интеграла не превосходит $\dfrac{\widetilde{M_l}(T)e^{|b_l|T}}{\rho_l^{k+\alpha}}$, где функция $\widetilde{M_l}$ есть линейная комбинация степенных функций с неотрицательными показателями, коэффициенты которой зависят только от коэффициентов уравнения (4.1).

Полученные оценки используем при $|\zeta_i| > 1$, $\rho_l > 1$ $(i = \overline{1,m},\ l = \overline{1,n})$. При $|\zeta_i| \leqslant 1$ и $\rho_l \leqslant 1$ абсолютные величины указанных интегралов очевидным образом оцениваются сверху через $\dfrac{\sqrt{\pi}e^{|a_i|T}}{2}$ и $\dfrac{\Gamma(\nu_l+1)e^{|b_l|T}}{2}$ соответственно.

Использование этих оценок и ограниченности функций u_0, f и завершает доказательство. □

Теперь исследование единственности найденного решения задачи (4.1)–(4.3) можно провести методом преобразований Фурье (см. [15, гл. 2, § 4 и Добавление 1]) с использованием преобразования Фурье—Бесселя (см., например, [41, гл. 1]). Для этого, следуя [15, гл. 1], введем специальные пространства основных функций следующим образом (ср. [41, § 1.1]). При этом мы будем считать, что условие (4.2) заменено эквивалентным ему условием четности функции u по каждой переменной y_l $(l = \overline{1,n})$, а сама задача, соответственно, рассматривается во всем $\mathbb{R}^{m+n} \times (0, +\infty)$ (см. раздел 4.1).

Пусть μ_i, ω_i — такие непрерывные возрастающие на $[0, +\infty)$ функции, что

$$\mu_i(0) = \omega_i(0) = 0, \lim_{r\to\infty} \mu_i(r) = \lim_{r\to\infty} \omega_i(r) = \infty; i = \overline{1, m+n}.$$

На $[0, +\infty)$ определим возрастающие выпуклые вниз функции

$$M_i(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^r \mu_i(\rho)d\rho,\ \Omega_i(r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_0^r \omega_i(\rho)d\rho.$$

В качестве пространства основных функций $W_M^{\Omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_{M_1,\ldots,M_{m+n}}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_{m+n}}$ возьмем множество четных по каждой y_l $(l = \overline{1,n})$ целых функций $m+n$ комплексных переменных, удовлетворяющих оценке

$$\begin{aligned} &|\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant \\ &\leqslant Ce^{-\sum\limits_{i=1}^{m} M_i(\alpha_i \mathrm{Re} x_i) - \sum\limits_{l=1}^{n} M_{m+l}(\alpha_l \mathrm{Re} y_l) + \sum\limits_{i=1}^{m} \Omega_i(\beta_i \mathrm{Im} x_i) + \sum\limits_{l=1}^{n} \Omega_{m+l}(\beta_l \mathrm{Im} y_l)}, \end{aligned} \tag{4.18}$$

где постоянные $C, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \beta_1, \ldots, \beta_{m+n}$ могут зависеть от основной функции φ.

Топология в W_M^{Ω} вводится классическим образом: последовательность $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ называется сходящейся к нулю в W_M^{Ω}, если она равномерно сходится к нулю в любой ограниченной области $\mathbb{C}^{m+n}$ и постоянные $C, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \beta_1, \ldots, \beta_{m+n}$ можно взять не зависящими от $\nu \in \mathbb{N}$.

Соответственно, множество $Q \subset W_M^{\Omega}$ называется ограниченным, если для всех элементов Q оценка (4.18) выполнена с одними и теми же постоянными $C, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m+n}, \beta_1, \ldots, \beta_{m+n}$.

Преобразование Фурье—Бесселя определяется на W_M^{Ω} следующим образом:

$$\hat{f}(\xi, \eta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{F}_b f \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}} \prod_{l=1}^{n} y_l^{k_l} j_{\nu_l}(\eta_l y_l) e^{-ix\cdot\xi} f(x, y) dx dy.$$

Через $W^{\Omega,\beta}_{M,\alpha}$ обозначим такое подмножество W^{Ω}_{M}, для каждого элемента которого неравенство (4.18), в котором α,β заменены на $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ соответственно, справедливо при любых

$$\tilde{\alpha}_1<\alpha_1,\dots,\tilde{\alpha}_{m+n}<\alpha_{m+n},\tilde{\beta}_1>\beta_1,\dots,\tilde{\beta}_{m+n}>\beta_{m+n}.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 4.6.2. *Пусть при $i\in\overline{1,m+n}$ функции $\widetilde{M_i}$ и $\widetilde{\Omega}_i$ двойственны по Юнгу к функциям Ω_i и M_i соответственно. Тогда преобразование Фурье—Бесселя является ограниченным оператором, отображающим $W^{\Omega,\beta}_{M,\alpha}$ в $W^{\widetilde{\Omega},\frac{1}{\alpha}}_{\widetilde{M},\frac{1}{\beta}}$, где*

$$\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{1}{\alpha_1},\dots,\frac{1}{\alpha_{m+n}}\right),\frac{1}{\beta}=\left(\frac{1}{\beta_1},\dots,\frac{1}{\beta_{m+n}}\right).$$

Доказательство.

$$j_\nu(x+iy)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int\limits_{-1}^{1}e^{(ix-y)t}(1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}}dt$$

для любого $\nu>-\dfrac{1}{2}$ (см., например, [41, (1.5.8)]), поэтому

$$|j_\nu(x+iy)|\leqslant\text{const }e^{|y|}.$$

Дальнейшее доказательство полностью идентично доказательству теоремы 4 из [15, гл. 1, §3]. Лемма 4.6.2 доказана. □

Теперь рассмотрим эллиптический оператор $\mathcal{A}$, содержащийся в уравнении 4.4.1:

$$\mathcal{A}u\stackrel{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+\sum_{s=1}^{m_i}a_{is}u(x+h_{is},y,t)\right]+\sum_{l=1}^{n}\left(B_{k_l,y_l}u+\sum_{r=1}^{n_l}b_{lr}T_{y_l}^{g_{lr}}u\right).\tag{4.19}$$

Найдем его символ

$$\mathcal{P}(z)\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{P}(z_1,\dots,z_{m+n})\stackrel{\text{def}}{=}\mathcal{P}(\sigma_1+i\tau_1,\dots,\sigma_{m+n}+i\tau_{m+n}).$$

Достаточно рассмотреть случай $m_1=n_1=1$ (т. е., когда есть одна особая и одна неособая пространственные переменные). Тогда

$$\mathcal{P}(z_1,z_2)=-z_1^2+\sum_{s=1}^{m_1}a_{1s}e^{-ih_{1s}z_1}-z_2^2+\sum_{r=1}^{n_1}b_{1r}j_{\nu_1}(g_{1r}z_2)$$

(см. [41, (1.3.5) и (1.3.8)]),

$$\mathrm{Re}\mathcal{P}(z)=|\sigma|^2-|\tau|^2+\sum_{s=1}^{m_1}a_{1s}e^{h_{1s}\tau_1}\cos h_{1s}\sigma_1+\sum_{r=1}^{n_1}b_{1r}\mathrm{Re}j_{\nu_1}(g_{1r}z_2).$$

Снова используя [41, (1.5.8)], получаем, что

$$\mathrm{Re}j_{\nu_1}(z_2)=\text{const}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu_1-\frac{1}{2}}e^{-\tau_2t}\cos\sigma_2tdt,$$

следовательно,

$$\mathrm{Re}j_{\nu_1}(g_{1r}z_2)=\text{const}\int\limits_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu_1-\frac{1}{2}}e^{-g_{1r}\tau_2t}\cos(g_{1r}\sigma_2t)dt.$$

Теперь оценим функцию $\mathcal{Q}(z,t_0,t)\stackrel{\text{def}}{=}e^{(t-t_0)\mathcal{P}(z)}$.

$$|\mathcal{Q}(z,t_0,t)|\leqslant e^{(t-t_0)\left(|\sigma|^2+\sum\limits_{s=1}^{m_1}|a_{1s}|e^{h_{1s}\tau_1}+\text{const}\sum\limits_{r=1}^{n_1}|b_{1r}|e^{|g_{1r}|\tau_2}\right)}e^{(t-t_0)\left[(1+|\sigma|)^2+C_2e^{C_3\tau}\right]}.$$

Из последней оценки и леммы 4.6.2 вытекает (см. [15, гл. 2, Добавление 1]), что задача (4.1)–(4.3) из раздела 4.1 имеет не более одного ограниченного в каждом слое $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+} \times [0, T]$ решения. Тогда из леммы 4.6.1 и линейности уравнения (4.1) следует

Теорема 4.6.1. *Функция* (4.17) *есть единственное решение задачи* (4.1)–(4.3)*, которое при каждом положительном T ограничено в* $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+} \times [0, T]$.

Замечание 4.6.1. Требование ограниченности функции f и ее производных можно ослабить, заменив его требованием их ограниченности в каждом слое $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+} \times [0, T]$.

4.7. Асимптотика решения сингулярной задачи

В данном разделе исследуется поведение решения задачи (4.1)–(4.3) при $t \to \infty$. Для этого наряду с оператором $\mathcal{A}$, введенным формулой (4.19), введем оператор $\mathcal{L}$, действующий следующим образом:

$$\mathcal{L}u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{l=1}^{n} B_{k_l, y_l} u + \sum_{a_{is}<0} a_{is} u(x + h_{is}, y, t) + \sum_{b_{lr}<0} b_{lr} T_{y_l}^{g_{lr}} u.$$

Далее, не ограничивая общности, переобозначим вектор h_{is} через $(\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1 \text{ раз}}, h_{is}, 0, \dots, 0)$ (здесь h_{is} — уже скалярная величина).

Теперь обозначим оператор $\left(\sum\limits_{a_{is}<0} a_{is} + \sum\limits_{b_{lr}<0} b_{lr} \right) I - \mathcal{L}$ через R и рассмотрим вещественную часть его символа:

$$\operatorname{Re} R(\xi, \eta) = \sum_{a_{is}<0} a_{is} + \sum_{b_{lr}<0} b_{lr} + |\xi|^2 + |\eta|^2 - \sum_{a_{is}<0} a_{is} \cos h_{is} \xi_i - \sum_{b_{lr}<0} b_{lr} j_{\nu_l} (g_{lr} \eta_l)$$

(ср. [124, § 8]). Назовем $R(\xi, \eta)$ *положительно определенным*, если существует такое $C > 0$, что $\operatorname{Re} R(\xi, \eta) \geqslant C \left(|\xi|^2 + |\eta|^2 \right)$ для любого (ξ, η) из $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$.

Наряду с уравнением (4.1) рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2} + \sum_{l=1}^{n} B_{k_l, y_l} w, \ (x, y) \in \overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}, \ t > 0, \tag{4.20}$$

и начальное условие

$$w \big|_{t=0} = w_0(x, y), \ (x, y) \in \overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}, \tag{4.21}$$

где w_0 непрерывна и ограничена.

Как известно из [43] (см. также [44] и [53]), задача (4.20), (4.2), (4.21) имеет единственное классическое ограниченное решение $w(x, y, t)$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4.7.1. *Пусть $f(x, y) \equiv 0$ и $R(\xi, \eta)$ является положительно определенным. Тогда для любого (x, y) из* $\overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$

$$e^{-t\left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{is} + \sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr} \right)} u(x, y, t) - w\left(\frac{x_1 + q_1 t}{p_1}, \dots, \frac{x_m + q_m t}{p_m}, \frac{y_1}{p_{m+1}}, \dots, \frac{y_n}{p_{m+n}}, t \right) \xrightarrow{t \to \infty} 0, \tag{4.22}$$

где

$$p_i = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m_i} a_{is} h_{is}^2}, \ q_i = \sum_{s=1}^{m_i} a_{is} h_{is} \ \textit{при} \ i = \overline{1, m},$$

$$p_{m+l} = \sqrt{1 + \frac{1}{2(k_l + 1)} \sum_{r=1}^{n_l} b_{lr} g_{lr}^2} \ \textit{при} \ l = \overline{1, n},$$

$$w_0(x, y) = u_0(p_1 x_1, \dots, p_m x_m, p_{m+1} y_1, \dots p_{m+n} y_n).$$

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы $p_1, \dots, p_{m+n}$ определены корректно и отличны от нуля. Считая (без ограничения общности), что при любых $i \in \overline{1,m}$, $l \in \overline{1,n}$ (конечные) последовательности $\{a_{is}\}_{s=1}^{m_i}, \{b_{lr}\}_{r=1}^{n_l}$ упорядочены по неубыванию, обозначим $\min\limits_{a_{is}>0} s$ через m_i^0, $\min\limits_{b_{lr}>0} r$ — через n_l^0; для тех i, l, при которых все коэффициенты отрицательны, в качестве m_i^0 (соответственно n_l^0) возьмем m_i+1 (соответственно n_l+1).

Пусть $i \in \overline{1,m}$. Из условия теоремы следует, что

$$\sum_{s<m_i^0} a_{is} + \xi_i^2 - \sum_{s<m_i^0} a_{is} \cos h_{is}\xi_i \geqslant C\xi_i^2$$

для любого положительного ξ_i (в силу условия положительной определенности, в котором $\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ положены равными нулю). Отсюда $\dfrac{1}{2} \sum\limits_{s<m_i^0} a_{is}h_{is}^2 > -1$ (см. доказательство теоремы 1 в [62]), т. е. $p_1, \dots, p_m$ определены и положительны.

Пусть теперь $l \in \overline{1,n}$. Тогда

$$\sum_{r<n_l^0} b_{lr} + \eta_l^2 - \sum_{r<n_l^0} b_{lr} j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l) \geqslant C\eta_l^2$$

для любого положительного η_l, следовательно,

$$C\eta_l^2 \leqslant \eta_l^2 + \sum_{r<n_l^0} b_{lr}\left[1 - j_{\nu_l}(g_{lr}\eta_l)\right].$$

$$j_\nu(z) = 1 - \frac{z^2}{4(\nu+1)} + \mathcal{O}(z^4) \Longrightarrow 1 - j_\nu(z) = \frac{z^2}{4(\nu+1)} + \mathcal{O}(z^4),$$

значит, в некоторой окрестности начала координат

$$C\eta_l^2 \leqslant \eta_l^2 + \frac{\eta_l^2}{4(\nu_l+1)} \sum_{r<n_l^0} b_{lr}g_{lr}^2 + \mathcal{O}(\eta_l^4).$$

Отсюда

$$C \leqslant 1 + \frac{1}{4(\nu_l+1)} \sum_{r<n_l^0} b_{lr}g_{lr}^2 + \mathcal{O}(\eta_l^2),$$

поэтому

$$\frac{C}{2} \leqslant 1 + \frac{1}{4(\nu_l+1)} \sum_{r<n_l^0} b_{lr}g_{lr}^2 + \mathcal{O}(\eta_l^2) - \frac{C}{2},$$

т. е. в достаточно малой окрестности начала координат

$$0 < \frac{C}{2} \leqslant 1 + \frac{1}{4(\nu_l+1)} \sum_{r<n_l^0} b_{lr}g_{lr}^2 \Longrightarrow \frac{1}{4(\nu_l+1)} \sum_{r<n_l^0} b_{lr}g_{lr}^2 > -1.$$

Таким образом, $p_{m+1}, \dots, p_{m+n}$ определены и положительны.

Теперь докажем следующую предварительную лемму.

Лемма 4.7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.7.1. *Тогда для любого* $l \in \overline{m+1, m+n}$

$$\int\limits_0^\infty \eta_l^{2\nu_l+1} e^{-\eta_l^2 + t\sum\limits_{r=1}^{n_l}\left[j_{\nu_l}\left(\frac{g_{lr}\eta_l}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} j_{\nu_l}(2\rho\eta_l)d\eta_l \xrightarrow{t\to\infty} \frac{\Gamma(\nu_l+1)}{2p_l^{k_l+1}} e^{-\frac{\rho^2}{p_l^2}}$$

равномерно по $\rho \geqslant 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что знак суммы и индекс r можно опускать, так как, очевидно, достаточно доказать лемму для случая одного слагаемого. Индекс l также опустим в силу произвольности его выбора, а p^2 переобозначим через p. Далее

$$\int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1}e^{-p\eta^2}j_\nu(2\rho\eta)d\eta = \frac{1}{p^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{2}e^{-\frac{\rho^2}{p}},$$

поэтому достаточно доказать, что

$$\int\limits_0^\infty \eta^{2\nu+1}j_\nu(2\rho\eta)\left(e^{-\eta^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\eta}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} - e^{-p\eta^2}\right)d\eta \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно по $\rho \geqslant 0$.

Прежде всего докажем абсолютную и равномерную по t, ρ сходимость последнего интеграла. Для этого в силу положительности p и ограниченности функции j_ν достаточно оценить показатель первой из подынтегральных экспонент. При этом считаем, что $b < 0$, так как в противном случае доказываемая сходимость очевидна.

Пусть параметр $a < 0$. Оценим функцию $f(z) \overset{\text{def}}{=} z^2 - a[j_\nu(z) - 1]$:

$$f'(z) = 2z + a\frac{z}{2\nu+2}j_{\nu+1}(z) = 2z\left[1 + a\frac{1}{4\nu+4}j_{\nu+1}(z)\right] \geqslant 0$$

при $\left|\dfrac{a}{4\nu+4}\right| \leqslant 1 \Longleftrightarrow a \geqslant -4\nu-4$.

Таким образом, при $a \geqslant -4\nu - 4$ функция f не убывает на $[0, +\infty)$. Поскольку $f(0) = 0$, то при $a \geqslant -4\nu - 4$ функция f неотрицательна на всей вещественной оси (в силу своей четности).

Пусть теперь $a > -4\nu - 4$. Тогда существует такое α из $(0, 1)$, что $\dfrac{a}{1-\alpha} \geqslant -4\nu - 4$. Следовательно,

$$f(z) - \alpha z^2 = (1-\alpha)z^2 - a[j_\nu(z) - 1] = (1-\alpha)\left(z^2 - \frac{a}{1-\alpha}[j_\nu(z) - 1]\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, при $a > -4\nu - 4$ существует такое положительное α, что $f(z) \geqslant \alpha z^2$ на $\mathbb{R}^1$.

Теперь, переобозначив $\dfrac{g\eta}{\sqrt{t}}$ через z, представим оцениваемый показатель в виде

$$-\frac{z^2t}{g^2} + bt[j_\nu(z) - 1] = -\frac{t}{g^2}\left(z^2 - bg^2[j_\nu(z) - 1]\right).$$

Поскольку $bg^2 > -4\nu - 4$, то существует такое положительное α, что последнее выражение не превосходит $-\dfrac{t\alpha}{g^2}z^2 = -\alpha\eta^2$, следовательно, последний интеграл сходится абсолютно и равномерно.

Тогда разобьем его на сумму $\displaystyle\int\limits_0^\delta + \int\limits_\delta^\infty \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2$ и, пользуясь доказанной его абсолютной и равномерной сходимостью, выберем такое положительное δ, что $|I_2| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $t \geqslant 1$, где произвольное положительное ε задано наперед. Зафиксируем выбранное δ и оценим I_1. Его модуль не превосходит

$$\int\limits_0^\delta \eta^{2\nu+1}e^{-p\eta^2}\left|e^{(p-1)\eta^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\eta}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} - 1\right|d\eta.$$

Для оценки последнего выражения представим функцию $j_\nu(z)$ в виде

$$j_\nu(0) + j'_\nu(0)z + \frac{j''_\nu(0)}{2}z^2 + \frac{j'''_\nu(\theta)}{6}z^3,$$

где $\theta \in [0, z]$.

$$\begin{aligned} &j_\nu(0) = 1,\\ &j'_\nu(0) = 0, \end{aligned}$$

$$j''_\nu(0) = -\frac{1}{2\nu+2},$$
$$j'''_\nu(\theta) = \frac{3\theta j_{\nu+2}(\theta)}{4(\nu+1)(\nu+2)} - \frac{\theta^3 j_{\nu+3}(\theta)}{8(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}.$$

Таким образом,

$$j_\nu\left(\frac{g\eta}{\sqrt{t}}\right) - 1 = -\frac{1}{4(\nu+1)}\frac{g^2\eta^2}{t} + \frac{\psi(\eta,t)g^3\eta^3}{t^{\frac{3}{2}}},$$

где

$$|\psi(\eta,t)| \leqslant \frac{3g\delta}{8(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{(g\delta)^3}{48(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}$$

для любых $t \geqslant 1, \eta \leqslant \delta$.

Следовательно, показатель второй экспоненты в последнем интеграле равен

$$\left[p - 1 - \frac{bg^2}{4(\nu+1)}\right]\eta^2 + \frac{b\psi(\eta,t)g^3\eta^3}{\sqrt{t}} = \frac{b\psi(\eta,t)g^3\eta^3}{\sqrt{t}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\widetilde{\psi}(\eta,t)}{\sqrt{t}},$$

где существует такое положительное M, что $|\widetilde{\psi}(\eta,t)| \leqslant M$ для любых $\eta \in [0,\delta]$ и $t \geqslant 1$.

Таким образом,

$$|I_1| \leqslant \int\limits_0^\delta \eta^{2\nu+1}e^{-p\eta^2}\left|e^{\frac{\widetilde{\psi}(\eta,t)}{\sqrt{t}}} - 1\right|d\eta.$$

Выберем такое t_0 из $[1,+\infty)$, что $e^{\frac{M}{\sqrt{t_0}}}, e^{-\frac{M}{\sqrt{t_0}}} \in [1-\delta_0, 1+\delta_0]$, где

$$\delta_0 = \frac{\varepsilon}{2}\left(\int\limits_0^\delta \eta^{2\nu+1}e^{-p\eta^2}d\eta\right)^{-1}.$$

Тогда в силу монотонности экспоненты $|I_1| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого $t \geqslant t_0$. Лемма 4.7.1 доказана. □

Перейдем теперь непосредственно к выводу предельного соотношения (4.22). Очевидно, достаточно сделать это для случая

$$m_1 = \cdots = m_m = n_1 = \cdots = n_n = 1,$$

поэтому опустим вторые индексы коэффициентов a, b, h, g.

Пусть $(x_0, y_0) = (x_1^0, \ldots, x_m^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ — произвольный элемент $\overline{\mathbb{R}_+^{m+n}}$. Применяя формулу (4.13), представим

$$e^{-t\left(\sum\limits_{i=1}^m a_i + \sum\limits_{l=1}^n b_l\right)}u(x_0, y_0, t)$$

в виде

$$\frac{2^{m+2n}}{\pi^m\prod\limits_{i=1}^m\Gamma^2(\nu_l+1)}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{m+n}} T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}u_0(x_0 - 2\zeta\sqrt{t}, y_0)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^m\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2 + a_i t\left(\cos\frac{h_i z}{\sqrt{t}} - 1\right)}\cos\left(2z\zeta_i + a_i t\sin\frac{h_i z}{\sqrt{t}}\right)dz\times$$
$$\times\prod_{l=1}^n \rho_l^{k_l}\int\limits_0^\infty \xi^{k_l}e^{-\xi^2 + b_l t\left[j_{\nu_l}\left(\frac{g_l\xi}{\sqrt{t}}\right) - 1\right]}j_{\nu_l}(2\xi\rho_l)\,d\xi d\zeta d\rho.$$

В дальнейшем будем, не ограничивая общности, считать, что $m = n = 1$. Тогда последнее выражение примет следующий вид:

$$\frac{8}{\pi\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^\infty \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}u_0(x_0 - 2\zeta\sqrt{t}, y_0)\times$$

$$\times \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)} \cos\left(2z\zeta + at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right) dz \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} \xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} j_\nu\left(2\xi\rho\right) d\xi d\zeta d\rho.$$

Наряду с этим выражением рассмотрим

$$\frac{8}{\pi\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) \int\limits_0^{+\infty} e^{-(1+\frac{ah^2}{2})z^2}\cos(2\zeta+ah\sqrt{t})z\,dz \times$$
$$\times \int\limits_0^{\infty} \xi^k e^{-\left[1+\frac{bg^2}{2(k+1)}\right]\xi^2} j_\nu\left(2\xi\rho\right) d\xi d\zeta d\rho = \frac{8}{\pi\Gamma^2\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) \times$$
$$\times \int\limits_0^{+\infty} e^{-p_1^2z^2}\cos(2\zeta+ah\sqrt{t})z\,dz \int\limits_0^{\infty} \xi^k e^{-p_2^2\xi^2} j_\nu\left(2\xi\rho\right) d\xi d\zeta d\rho =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)p_1p_2^{k+1}} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}-\frac{\rho^2}{p_2^2}} d\zeta d\rho. \qquad (4.23)$$

С другой стороны, из [44, 45, 48–51, 53] известно, что

$$w(x_0,y_0,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k e^{-\zeta^2-\rho^2} T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} w_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) d\zeta d\rho,$$

следовательно,

$$w\left(\frac{x_0+q_1t}{p_1},\frac{y_0}{p_2},t\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)p_1} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}-\rho^2} T_{y_0}^{2p_2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) d\zeta d\rho =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)p_1p_2^{k+1}} \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}-\frac{\rho^2}{p_2^2}} d\zeta d\rho.$$

Таким образом, выражение (4.23) равно $w\left(\frac{x_0+q_1t}{p_1},\frac{y_0}{p_2},t\right)$, т. е. для вывода соотношения (4.22) нужно исследовать поведение при $t\to\infty$ следующего интеграла:

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}} u_0(x_0-2\zeta\sqrt{t},y_0) \left[\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)} \cos\left(2z\zeta+at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right) dz \times\right.$$
$$\left.\times \int\limits_0^{\infty} \xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} j_\nu\left(2\xi\rho\right) d\xi - \frac{\sqrt{\pi}}{2p_1} e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2p_2^{k+1}} e^{-\frac{\rho^2}{p_2^2}}\right] d\zeta d\rho. \qquad (4.24)$$

Прежде всего докажем абсолютную и равномерную относительно $t\in[1,+\infty)$ сходимость последнего интеграла. В силу ограниченности функции u_0 модуль его второго слагаемого оценивается сверху через $\mathrm{const}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{p_1^2}} d\zeta \int\limits_0^{\infty} \rho^k e^{-\frac{\rho^2}{p_2^2}} d\rho$, следовательно, достаточно доказать абсолютную и равномерную сходимость его первого слагаемого. Заменой переменных $y=2\zeta+q\sqrt{t}$ оно сводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho^k T_{y_0}^{2\rho\sqrt{t}}\,u_0(x_0-y\sqrt{t}-qt,y_0)\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)}\cos\left(yz-q\sqrt{t}z+at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right)dz\times$$
$$\times\int\limits_{0}^{\infty}\xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]}j_\nu\left(2\xi\rho\right)d\xi dy d\rho.$$

В разделе 2.3 доказано, что в условиях теоремы 4.7.1 при $t\geqslant 1$ и $y>0$

$$\left|\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)}\cos\left(yz-q\sqrt{t}z+at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right)dz\right|\leqslant\frac{M}{1+y^2}$$

с некоторым положительным M.

Далее из раздела 3.3 известно, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]}j_\nu\left(2\xi\rho\right)d\xi$$

представляет собой конечную сумму слагаемых вида

$$\frac{1}{\rho^{2\nu+2m}t^l}\int\limits_{0}^{\infty}\xi\mathrm{j}_{\nu+m}(2\rho\xi)e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]}j_{\nu+l+1}\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)f_l(\xi,t)d\xi, \tag{4.25}$$

где $\mathrm{j}_\nu(z)=z^\nu J_\nu(z)$, f_l ограничена и натуральное l не превосходит $m-1$.

При $t\geqslant 1$ модуль выражения (4.25) не превосходит

$$\frac{\mathrm{const}}{\rho^{2\nu+2m}}\int\limits_{0}^{\infty}\xi\mathrm{j}_{\nu+m}(2\rho\xi)e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]}d\xi. \tag{4.26}$$

Далее имеем

$$\xi\mathrm{j}_{\nu+m}(2\rho\xi)=\frac{1}{2\rho}(2\rho\xi)^{\nu+m+1}J_{\nu+m}(2\rho\xi)=\frac{(2\rho\xi)^{\nu+m+\frac{1}{2}}}{2\rho}\sqrt{2\rho\xi}J_{\nu+m}(2\rho\xi),$$

однако в условиях теоремы 4.7.1, т. е. при $1+\dfrac{bg^2}{4\nu+4}>0$, показатель экспоненты в (4.26) не превосходит $-\alpha\xi^2$ с некоторым положительным α (см. доказательство леммы 4.7.1). Отсюда, учитывая ограниченность функции $\sqrt{\tau}J_\nu(\tau)$, получаем, что модуль выражения (4.26) не превосходит

$$\frac{\mathrm{const}}{\rho^{2\nu+2m+1-\nu-m-\frac{1}{2}}}\int\limits_{0}^{\infty}\xi^{m+\nu+\frac{3}{2}}e^{-\alpha\xi^2}d\xi=\frac{\mathrm{const}}{\rho^{m+\nu+\frac{1}{2}}}.$$

Таким образом, выбирая натуральное m из $\left(\nu+\dfrac{3}{2},\infty\right)$, получаем, что существует такое $\beta>1$, что

$$\int\limits_{0}^{\infty}\xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]}j_\nu\left(2\xi\rho\right)d\xi\leqslant\frac{\mathrm{const}}{\rho^\beta}.$$

Используем эту оценку при $\rho\geqslant 1$, а при $\rho\in(0,1)$ используем ограниченность последнего интеграла (как функции от $t\in[1,\infty)$ и $\rho\in(0,1)$), вытекающую из ограниченности $j_\nu(\cdot)$ и вышеуказанной оценки леммы 4.4.1 на показатель подынтегральной экспоненты. В силу ограниченности функции u_0 это завершает доказательство абсолютной и равномерной сходимости первого слагаемого интеграла (4.24).

Теперь разобьем (4.24) в следующую сумму:

$$\int\limits_{\{|\zeta|<\delta,\, 0<\rho<\delta\}} + \int\limits_{\mathbb{R}^2_+ \setminus \{|\zeta|<\delta,\, 0<\rho<\delta\}} \stackrel{\text{def}}{=} I_3 + I_4.$$

В силу доказанной его абсолютной и равномерной сходимости можно выбрать такое положительное δ, что $|I_4| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для любого t из $[1,\infty)$, где положительное ε задано наперед. Зафиксируем выбранное δ и рассмотрим I_3.

В силу ограниченности функции u_0

$$|I_3| \leqslant \text{const} \int\limits_0^\delta \int\limits_{-\delta}^\delta \rho^k \Bigg| \int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)} \times$$
$$\times \cos\left(2z\zeta + at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right) dz \int\limits_0^\infty \xi^k e^{-\xi^2+bt\left[j_\nu\left(\frac{g\xi}{\sqrt{t}}\right)-1\right]} j_\nu(2\xi\rho)\, d\xi -$$
$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2p_1} e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}} \frac{\Gamma(\nu+1)}{2p_2^{k+1}} e^{-\frac{\rho^2}{p_2^2}} \Bigg| d\zeta d\rho. \tag{4.27}$$

В силу [62, лемма 1]

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-z^2+at\left(\cos\frac{hz}{\sqrt{t}}-1\right)} \cos\left(2z\zeta + at\sin\frac{hz}{\sqrt{t}}\right) dz - \frac{\sqrt{\pi}}{2p_1} e^{-\frac{(2\zeta+q_1\sqrt{t})^2}{4p_1^2}} \xrightarrow{t\to\infty} 0$$

равномерно относительно $\zeta \in \mathbb{R}^1$.

Отсюда и из леммы 4.7.1 следует, что существует такое $t_0 > 0$, что для любого $t \geqslant t_0$ выражение под знаком модуля в (4.27) не превосходит $\dfrac{\varepsilon}{2}\left(\int\limits_0^\delta \int\limits_{-\delta}^\delta \rho^k d\zeta d\rho\right)^{-1}$.

Теорема 4.7.1 доказана полностью. □

Аналогично регулярному случаю [62], дополнительное условие симметричности эллиптического оператора, содержащегося в рассматриваемом уравнении, приводит к тому, что кроме весовой близости решений (утверждение теоремы 4.7.1) имеет место и весовая стабилизация решения $u(x,y,t)$. А именно, справедливо следующее утверждение:

Следствие 4.7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.7.1, *а оператор $\mathcal{A}$ симметричен. Тогда при любом вещественном l необходимым и достаточным условием справедливости утверждения*

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t\left(\sum\limits_{i=1}^m \sum\limits_{s=1}^{m_i} a_{is} + \sum\limits_{l=1}^n \sum\limits_{r=1}^{n_l} b_{lr}\right)} u(x,y,t) = l \text{ для любого } (x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{m+n}_+}$$

является выполнение соотношения

$$\lim_{t\to\infty} \frac{C_{m,n,k}}{t^{m+n+|k|}} \int\limits_{B^+(p,t)} \prod_{l=1}^n y_l^{k_l} u_0(x,y) dx dy = l,$$

где

$$C_{m,n,k} = \frac{\Gamma\left(\frac{k_n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k_n+k_{n-1}+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{|k|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k_n+k_{n-1}}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{k_n+k_{n-1}+k_{n-2}}{2}+1\right)\cdots\Gamma\left(\frac{|k|}{2}+1\right)} \frac{\pi^{\frac{m}{2}} \prod\limits_{l=1}^n \Gamma\left(\frac{k_l+1}{2}\right)}{2^{n-1}(m+n+|k|) \prod\limits_{i=1}^m p_i \prod\limits_{l=1}^n p_{m+l}^{k_l+1}},$$

а

$$B^+(p,t) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+n}_+ \,\middle|\, \sum_{i=1}^m \frac{x_i^2}{p_i^2} + \sum_{l=1}^n \frac{y_l^2}{p_{m+l}^2} < t^2\right\}.$$

Для доказательства достаточно заметить, что в условиях следствия 4.7.1 $q_1 = \dots = q_m = 0$, и применить теоремы о стабилизации сингулярных дифференциальных параболических уравнений. Подробнее см. Дополнение.

Замечание 4.7.1. Поскольку $T_y^h f(y) = T_y^{-h} f(y)$, то сингулярная часть оператора $\mathcal{A}$ всегда является симметричной. Поэтому условие симметричности оператора $\mathcal{A}$ можно заменить условием симметричности следующего дифференциально-разностного оператора:

$$\mathcal{A}_{reg} u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{s=1}^{m_i} a_{is} u(x + h_{is}, y, t) \right].$$

Замечание 4.7.2. Если условия следствия 4.7.1 выполнены, то требование симметричности оператора $\mathcal{A}_{reg}$ можно ослабить, заменив его следующим требованием: $a_i \perp h_i$ для любого $i \in \overline{1, m}$, где $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im_i})$, $h_i = (h_{i1}, \dots, h_{im_i})$.

Замечание 4.7.3. Из следствия 4.7.1 видно, что в функционально-дифференциальном случае поверхности, ограничивающие области усреднения начальной функции, фигурирующие в условии стабилизации решения, вообще говоря, уже не являются сегментами сфер: они обращаются в сегменты эллипсоидов. Напомним, что в классическом случае дифференциальных уравнений такой эффект возникает, если заменить оператор

$$\Delta_{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_x + \sum_{l=1}^{n} B_{k_l, y_l}$$

оператором с различными коэффициентами при различных вторых производных:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{l=1}^{n} p_{m+l}^2 B_{k_l, y_l}.$$

Замечание 4.7.4. Замечание 1.6.1 полностью справедливо и в сингулярном случае.

ДОПОЛНЕНИЕ. СИНГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Стабилизация решения задачи Коши. Модельный случай

В этом разделе изучается асимптотика решения задачи Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a(t) \left[\Delta u + \frac{1}{y^k} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений таких задач, изучались в [43, 52, 53] и ряде других работ. В регулярном случае (т. е. при $k = 0$) асимптотика решения изучалась в [81, 82].

5.1.1. Задача Коши для сингулярного уравнения теплопроводности. Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово n-мерное пространство;

$\mathbb{R}^{n+1}_+$ — полупространство $\{(x, y) | x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$;

$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$; $B_{k,y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{k}{y} \dfrac{\partial u}{\partial y}$ (k — положительный параметр).

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\Delta + B_{k,y})\, u, \; x \in \mathbb{R}^n, \; y > 0, \; t > 0, \tag{5.1}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y), \; \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0} = 0. \tag{5.2}$$

Здесь функция $\varphi(x, y)$ непрерывна и ограничена в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

В [43] установлено, что задача (5.1)-(5.2) имеет единственное ограниченное решение и это решение является классическим, т. е. имеет соответствующее число непрерывных производных (при $y = 0$ производная по y является правой производной), а соотношения (5.1) и (5.2) выполняются поточечно (а на гиперплоскостях $\{t = 0\}$ и $\{y = 0\}$ — в смысле предельных значений при $t \to 0+$ и $y \to 0+$). Отметим, что в данной главе всюду при изучении задачи Коши речь идет о классических решениях.

Теорема 5.1.1. *Пусть функция $u(x, y, t)$ есть ограниченное решение задачи* (5.1)-(5.2). *Тогда для любого вещественного l, любого $x \in \mathbb{R}^n$ и любого $y \geqslant 0$ соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} u(x, y, t) = l \tag{5.3}$$

справедливо тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n+k+1}{\pi^{\frac{n}{2}} t^{n+k+1}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x, y) dx dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)} l, \tag{5.4}$$

где $B_+(A)$ обозначает полушар $\{|x|^2 + y^2 < A^2 | \, y > 0\}$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $n = 1$.

Разобьем доказательство на три этапа. На первом докажем утверждение теоремы при $x = y = l = 0$. На втором докажем, что утверждения «$\lim\limits_{t\to\infty} u(0, 0, t) = 0$» и «$\lim\limits_{t\to\infty} u(x, y, t) = 0$» эквивалентны при любых $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. На третьем докажем утверждение теоремы при любом вещественном l.

1 этап. Достаточность.

Пусть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x, y) dx dy = 0.$$

Как известно (см., например, [52]),

$$u(0, 0, t) = \frac{2^{-k-1} t^{-\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^k \varphi(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} dx dy.$$

Введем функцию $v_0(x, y)$ по формуле $v_0(x, y) = \dfrac{1}{2}[\varphi(x, y) + \varphi(-x, y)]$. Тогда

$$\frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x, y) dx dy = \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^{k+1} v_0(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \sin^k\alpha \, d\alpha dr,$$

$$\frac{1}{t^{\frac{k}{2}+1}} \int\limits_0^\infty \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^k \varphi(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}} dx dy = \frac{2^{k+3}}{\tau^{k+2}} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty y^k v_0(x, y) e^{-\frac{x^2+y^2}{\tau}} dx dy,$$

где $\tau = 2\sqrt{t}$.

Обозначим $\int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty y^k v_0(tx, ty) e^{-x^2-y^2} dx dy$ через $v(t)$ и покажем, что $v(t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Полярной заменой переменных получаем:

$$v(t) = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^{k+1} v_0(tr\cos\alpha, tr\sin\alpha) \sin^k\alpha \, e^{-r^2} d\alpha dr =$$

$$= 2\int\limits_0^\infty r^{k+3} \frac{e^{-r^2}}{(rt)^{k+2}} \int\limits_0^{rt} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \eta^{k+1} v_0(\eta\cos\alpha, \eta\sin\alpha) \sin^k\alpha \, d\alpha d\eta dr =$$

$$= 2\int_0^\delta r^{k+3}\frac{e^{-r^2}}{(rt)^{k+2}}\int_0^{rt}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta^{k+1}v_0(\eta\cos\alpha,\eta\sin\alpha)\sin^k\alpha\, d\alpha d\eta dr+$$

$$+\,2\int_\delta^\infty r^{k+3}\frac{e^{-r^2}}{(rt)^{k+2}}\int_0^{rt}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta^{k+1}v_0(\eta\cos\alpha,\eta\sin\alpha)\sin^k\alpha\, d\alpha d\eta dr \overset{\mathrm{def}}{=} J_1(t;\delta)+J_2(t;\delta)$$

(здесь δ — положительный параметр).

Поскольку $v_0(x,y)$ ограничена, то и $\dfrac{1}{t^{k+2}}\displaystyle\int_0^t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta^{k+1}v_0(\eta\cos\alpha,\eta\sin\alpha)\sin^k\alpha\, d\alpha d\eta$ ограничена. Поэтому существует такое M, что для любых положительных r и t справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{t^{k+2}}\int_0^t\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta^{k+1}v_0(\eta\cos\alpha,\eta\sin\alpha)\sin^k\alpha\, d\alpha d\eta\right| \leqslant M.$$

Значит, $|J_1(t;\delta)| \leqslant 2M\displaystyle\int_0^\delta r^{k+3}e^{-r^2}dr$ для любых положительных δ и t. Выберем δ так, чтобы выполнялось неравенство $|J_1(t;\delta)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и зафиксируем это δ.

По условию для любого положительного ε существует такое положительное R, что для любого $t \geqslant R$

$$\left|\frac{1}{t^{k+2}}\int_0^t\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^{k+1}v_0(y\cos\alpha,y\sin\alpha)\sin^k\alpha\, d\alpha dy\right| < \frac{\varepsilon}{2}\left(2\int_\delta^\infty r^{k+3}e^{-r^2}dr\right)^{-1}.$$

Значит,

$$|J_1(t;\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}\left(2\int_\delta^\infty r^{k+3}e^{-r^2}dr\right)^{-1} 2\int_\delta^\infty r^{k+3}e^{-r^2}dr = \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $t \geqslant R$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R > 0$, что $|v(t)| < \varepsilon$ для любого $t \in [R,+\infty)$. В силу того, что τ и t стремятся или не стремятся к бесконечности одновременно, достаточность доказана.

Необходимость.

Введем функцию $f_0(r) = \displaystyle\int_{S_+(r)} y^k\varphi(x,y)dS$, где $S_+(A)$ обозначает полуокружность $\{x^2+y^2 = A^2 | y>0\}$, dS — элемент длины. Очевидно, $f_0(r)$ непрерывна и удовлетворяет оценке $|f_0(r)| \leqslant Cr^{k+1}$, где $C = \pi\sup\limits_{\mathbb{R}^2_+}|\varphi(x,y)|$. Тогда

$$\frac{1}{t^{\frac{k}{2}+1}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}y^k\varphi(x,y)e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}dxdy = \frac{2^{k+2}}{\tau^{k+1}}\int_0^\infty e^{-r^2}f_0(r\tau)dr.$$

Поскольку τ и t стремятся или не стремятся к бесконечности одновременно, достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 5.1.1. *Пусть для непрерывной функции $f(t)$, удовлетворяющей оценке $|f(t)| \leqslant Ct^{k+1}$ при $t \geqslant 0$, справедливо следующее соотношение*:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^{k+1}}\int_0^\infty e^{-r^2}f(rt)dr = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_0^t f(r)dr = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся следствием из тауберовой теоремы Винера (см. [25, с. 163]):

если $\varphi \in L_1(0,\infty)$, $g \in L_\infty(0,\infty)$, $\int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{ix}dt \neq 0$ для любого вещественного x и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_0^\infty \varphi\left(\frac{t}{r}\right) g(t)dt = 0,$$

то для любой функции $\psi \in L_1(0,\infty)$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int\limits_0^\infty \psi\left(\frac{t}{r}\right) g(t)dt = 0.$$

Обозначим $\frac{f(r)}{r^{k+1}}$ через $g(r)$; эта функция принадлежит $L_\infty(0,\infty)$. Заменой переменных $rt = \rho$ получим:

$$\frac{1}{t^{k+1}} \int\limits_0^\infty e^{-r^2} f(rt)dr = \frac{1}{t} \int\limits_0^\infty \varphi\left(\frac{r}{t}\right) g(r)dr, \text{ где } \varphi(x) = x^{k+1}e^{-x^2} \in L_1(0,\infty).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_0^t f(r)dr = \frac{1}{t} \int\limits_0^\infty \psi\left(\frac{r}{t}\right) f(r)dr, \text{ где } \psi(x) = \begin{cases} x^{1+k}, \text{ если } x \leqslant 1, \\ 0, \text{ если } x > 1, \end{cases} \qquad \psi \in L_1(0,\infty).$$

Наконец,

$$\int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{ix}dt = \int\limits_0^\infty e^{-t^2} t^{k+1+ix}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-\tau}\tau^{\frac{k+ix}{2}}d\tau = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{k+2+ix}{2}\right)e^{-2\pi mx},$$

где $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Последнее выражение определено и не обращается в нуль при вещественных x, следовательно, указанное следствие из тауберовой теоремы Винера применимо. Поэтому $\frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_0^t f(r)dr \xrightarrow{t\to\infty} 0.$

Лемма 5.1.1 доказана. □

Поскольку функция $f_0(t)$ удовлетворяет условию леммы 5.1.1, необходимость доказана.

Перейдем ко второму этапу доказательства теоремы 5.1.1.

Следуя [47], введем оператор обобщенного сдвига по переменной y:

$$T_y^\eta f(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_0^\pi f\Big(\sqrt{y^2+\eta^2-2y\eta\cos\theta}\Big)\sin^{k-1}\theta d\theta.$$

Этот оператор коммутирует с оператором Бесселя $B_{k,y}$ (см., например, [41, с. 35]).

Введем функцию $\widetilde{u}$ следующим образом: $\widetilde{u}(x,\xi,y,\eta,t) = T_y^\eta u(x+\xi,y,t)$. Тогда

$$\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial^2\widetilde{u}}{\partial\xi^2} - B_{k,\eta}\widetilde{u} = T_y^\eta\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x+\xi,y,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x+\xi,y,t) - B_{k,y}u(x+\xi,y,t)\right] = 0,$$

так как $u(x,y,t)$ удовлетворяет задаче (5.1)-(5.2).

Обозначим $T_y^\eta \varphi(x+\xi, y)$ через $\widetilde{\varphi}(x,\xi,y,\eta)$. Очевидно, $\widetilde{\varphi}$ непрерывна и ограничена и $\widetilde{u}\big|_{t=0}= \widetilde{\varphi}(x,\xi,y,\eta)$. Кроме того, из [47] известно, что $\dfrac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0}= 0$.

Таким образом, $\widetilde{u}(x,\xi,y,\eta,t)$ является классическим ограниченным решением задачи

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial \xi^2} + B_{k,\eta}\widetilde{u},\ \xi \in \mathbb{R}^1,\ \eta > 0,\ t > 0, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{u}\big|_{t=0}= \widetilde{\varphi}(x,\xi,y,\eta),\ \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial \eta}\Big|_{\eta=0}= 0, \tag{5.6}$$

где x — вещественный параметр, а y — положительный параметр.

Как доказано на первом этапе, $\lim\limits_{t\to\infty} \widetilde{u}(x,0,y,0,t) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_0^t \int\limits_0^\pi \rho^{k+1} \sin^k\!\alpha\, \widetilde{\varphi}(x, \rho\cos\alpha, y, \rho\sin\alpha)\, d\alpha d\rho = 0.$$

Докажем теперь эквивалентность условия стабилизации решения в произвольной точке условию стабилизации решения в начале координат. Для этого рассмотрим при $a \in \mathbb{R}^1$ и $b \geqslant 0$ интеграл

$$\int\limits_{D_{a,0,0}} \xi^{k-1} \varphi\left[x, \sqrt{\xi^2 + (\eta - b)^2}\right] dx d\eta d\xi,$$

где $D_{a,b,c}$ обозначает полушар $\{(x-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\xi-c)^2 < t^2 | \, y > 0\}$.

Сделаем замену переменных: $\xi = y\sin\alpha$, $\eta = y\cos\alpha$. Получим, что последний интеграл равен

$$\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_{B_+(t)} y^k T_y^b \varphi(x+a, y) dx dy.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{B_+(t)} y^k T_y^b \varphi(x+a,y) dx dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int\limits_{D_{a,-b,0}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi.$$

Докажем, что для любого $a \in \mathbb{R}^1$, любого $b \geqslant 0$ и любой непрерывной и ограниченной в $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ функции $\varphi(x,y)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{D_{a,-b,0}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{D_{0,0,0}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi, \tag{5.7}$$

понимаемое в следующем смысле: если существует хотя бы один из пределов, то существует и второй, и они равны друг другу.

Определим множества

$$\Omega'_{t;a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x,\eta,\xi) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x-a)^2 + \xi^2 + (\eta+b)^2 \leqslant t^2; x^2+\xi^2+\eta^2 \geqslant t^2\right\},$$

$$\Omega''_{t;a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{(x,\eta,\xi) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2+\xi^2+\eta^2 \leqslant t^2; (x-a)^2 + \xi^2 + (\eta+b)^2 \geqslant t^2\right\}.$$

Тогда

$$\left| \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{D_{a,-b,0}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi - \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{D_{0,0,0}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi \right| =$$

$$= \frac{1}{t^{k+2}} \left| \int\limits_{\Omega'_{t;a,b}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi - \int\limits_{\Omega''_{t;a,b}} \xi^{k-1} \varphi\left(x, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right) dx d\eta d\xi \right| \leqslant \frac{2M}{t^3} S,$$

где $M = \sup\limits_{\overline{\mathbb{R}^2_+}} |\varphi(x,y)|$, а S есть объем тела $\Omega'_{t;a,b}$.

Оценивая S как функцию переменной t, получаем:

$$S \leqslant \frac{4\pi}{3}\left[\left(t+\frac{a}{2}\right)^3 - \left(t-\frac{a}{2}\right)^3\right] = \frac{12\pi a t^2 + \pi a^3}{3}.$$

Отсюда следует (5.7), что и доказывает теорему 5.1.1 при $l = 0$.

Перейдем к третьему этапу доказательства теоремы 5.1.1. Для этого наряду с задачей (5.1)-(5.2) рассмотрим задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{k,y} w,\ x \in \mathbb{R}^1,\ y > 0,\ t > 0, \tag{5.8}$$

$$w\big|_{t=0} = w_0(x,y),\ \frac{\partial w}{\partial y}\big|_{y=0} = 0. \tag{5.9}$$

Здесь $w_0(x,y) = \varphi(x,y) + l$.

Если $u(x,y,t)$ и $w(x,y,t)$ — решения задач (5.1)-(5.2) и (5.8)-(5.9) соответственно, то, очевидно, $w(x,y,t) = u(x,y,t) + l$.

Заметим, что

$$\int\limits_{B_+(t)} y^k l dx dy = \frac{l t^{k+2}}{k+2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}.$$

Значит, если справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{B_+(t)} y^k w_0(x,y) dx dy = \frac{l\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{(k+2)\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)},$$

то справедливо и равенство

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{k+2}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x,y) dx dy = 0,$$

следовательно (как доказано на втором этапе), $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,y,t) = 0$, а значит, $\lim\limits_{t\to\infty} w(x,y,t) = l$.

Таким образом, для того чтобы $w(x,y,t)$ удовлетворяла (5.3), достаточно, чтобы $w_0(x,y)$ удовлетворяла (5.4). Необходимость этого условия доказывается аналогично.

Теорема 5.1.1 доказана полностью. □

Из теоремы 5.1.1 вытекает следующий факт: если классическое ограниченное решение задачи (5.1)-(5.2) стабилизируется хотя бы в одной точке (x^0, y^0) полупространства $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, то оно стабилизируется и в любой другой точке $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, причем к тому же самому пределу. Это означает, что невозможна стабилизация классического ограниченного решения задачи (5.1)-(5.2) к какой-либо функции $V(x,y)$, отличной от константы. Таким образом, для классического ограниченного решения задачи (5.1)-(5.2) имеет место следующая альтернатива: либо решение стабилизируется к константе во всем $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, либо оно вообще не стабилизируется ни в одной точке указанного полупространства, т. е. ни в одной точке $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ не существует конечного предела функции $u(x,y,t)$ при $t \to \infty$. Асимптотика решения изучалась в [81, 82].

5.1.2. Задача Коши для сингулярного параболического уравнения с коэффициентами, зависящими от времени. Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(t)\left(\Delta + B_{k,y}\right) u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0,\ t > 0. \tag{5.10}$$

Здесь $a(t)$ непрерывна и положительна при $t \geqslant 0$.

Пусть $\varphi(x,y)$ непрерывна и ограничена при $x \in \mathbb{R}^n$, $y \geqslant 0$. Рассмотрим задачу (5.10), (5.2). Существование и единственность классического ограниченного решения этой задачи установлены в [43]. Изучим поведение решения при $t \to \infty$.

Теорема 5.1.2. *Пусть* $\int\limits_0^\infty a(t)dt$ *расходится, а функция* $u(x,y,t)$ *есть классическое ограниченное решение задачи* (5.10), (5.2). *Тогда для любого* $x\in\mathbb{R}^n$, *любого неотрицательного* y *и любого вещественного* l *соотношение* (5.3) *равносильно соотношению* (5.4).

Доказательство. Как известно, например, из [4],

$$u(x,y,t)=\frac{C_{n,k}}{[A(t)]^{\frac{n+k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta^k\varphi(\xi,\eta)T_\eta^y e^{-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4A(t)}}d\xi d\eta,$$

где $A(t)=\int\limits_0^t a(\tau)d\tau$, а постоянная $C_{n,k}$ зависит только от n и k.

$A(t)$ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда t стремится к бесконечности. Поэтому при любом вещественном l

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{[A(t)]^{\frac{n+k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta^k\varphi(\xi,\eta)T_\eta^y e^{-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4A(t)}}d\xi d\eta=l$$

тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^{\frac{n+k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta^k\varphi(\xi,\eta)T_\eta^y e^{-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4r}}d\xi d\eta=l.$$

Отсюда, учитывая теорему 5.1.1, получаем утверждение теоремы 5.1.2. □

Теорема 5.1.3. *Пусть* $\int\limits_0^\infty a(t)dt=a_0<\infty$. *Тогда* $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,y,t)=v(x,y,a_0)$, *где функции* $u(x,y,t)$ *и* $v(x,y,t)$ *являются классическими ограниченными решениями задач* (5.10), (5.2) *и* (5.1)-(5.2) *соответственно.*

Доказательство. Для любого положительного t_0 интеграл

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\eta^k\varphi(\xi,\eta)}{[A(t)]^{\frac{n+k+1}{2}}}T_\eta^y e^{-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4r}}d\xi d\eta$$

сходится равномерно относительно $x\in\mathbb{R}^n$, $y\geqslant 0$ и $t\geqslant t_0$. Следовательно, в этом интеграле можно перейти к пределу при $t\to\infty$. Получим, что

$$\lim_{t\to\infty}u(x,y,t)=\frac{C_{n,k}}{a_0^{\frac{n+k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta^k\varphi(\xi,\eta)T_\eta^y e^{-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4a_0}}d\xi d\eta.$$

Последнее выражение, очевидно, равно $v(x,y,a_0)$.

Теорема 5.1.3 доказана. □

Отметим, что в случае сходимости интеграла $\int\limits_0^\infty a(t)dt$ стабилизация решения имеет место независимо от поведения начальной функции, однако пределом решения является, вообще говоря, не константа, а некоторая ограниченная функция от x,y.

5.1.3. Некоторые свойства весовых интегральных средних. Пусть функция $\varphi(x,y)$ непрерывна и ограничена в $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$, а константа α — положительна. Определим функцию $S^\alpha_n\varphi(r)$ следующим образом:

$$S^\alpha_n\varphi(r) = \frac{1}{r^{n+\alpha+1}} \int\limits_{B_+(r)} y^\alpha \varphi(x,y)dxdy.$$

Теорема 5.1.4. *Пусть $n \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha \neq \beta$. Тогда существует такая ограниченная функция φ из $C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, что $S^\alpha_n\varphi(r)$ имеет предел при $r\to\infty$, а $S^\beta_n\varphi(r)$ не имеет предела при $r\to\infty$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что речь может идти только о конечном пределе (в силу ограниченности функции φ). Предпошлем доказательству две леммы.

Лемма 5.1.2. *Пусть $G = \{\theta = (\theta_1,\ldots,\theta_n) | 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \pi, \ldots, 0 \leqslant \theta_n \leqslant \pi\}$. Тогда существует такая функция $g(\theta) \in C^\infty(G)$, что $J_\alpha = 0$, а $J_\beta \neq 0$, где через J_γ обозначается $\int\limits_G g(\theta)\prod\limits_{j=1}^n \sin^{n+\gamma-j}\theta_j\,d\theta$ (γ — неотрицательный параметр).*

Доказательство. Функции $\prod\limits_{j=1}^n \sin^{n+\alpha-j}\theta_j$ и $\prod\limits_{j=1}^n \sin^{n+\beta-j}\theta_j$ являются линейно независимыми элементами гильбертова пространства $L_2(G)$. Следовательно, в $L_2(G)$ существует $g(\theta)$, ортогональный первому из этих элементов и неортогональный второму, т. е. $J_\alpha = 0$, а $J_\beta = A > 0$ (для определенности).

Поскольку $C^\infty(G)$ плотно в $L_2(G)$, мы можем выбрать такую последовательность $\{g_m(\theta)\}_{m=1}^\infty \subset C^\infty(G)$, что $g_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} g(\theta)$ в $L_2(G)$. Обозначим (для неотрицательных γ) $\int\limits_G g_m(\theta)\prod\limits_{j=1}^n \sin^{n+\gamma-j}\theta_j\,d\theta$ через $J_{\gamma,m}$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} J_{\alpha,m} = 0$, $\lim\limits_{m\to\infty} J_{\beta,m} = A$ в силу непрерывности скалярного произведения.

Обозначим через C_γ величину

$$\int\limits_G \prod_{j=1}^n \sin^{n+\gamma-j}\theta_j\,d\theta = \pi^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+\gamma+1-j}{2}\right)$$

(см. [74, с. 386]). Если $\gamma \geqslant 0$, то, очевидно, $C_\gamma > 0$. Введем новую функцию: $\widetilde{g}_m(\theta) \overset{\text{def}}{=} g_m(\theta) - \dfrac{J_{\alpha,m}}{C_\alpha}$; эта функция бесконечно дифференцируема в G. Вычислим теперь скалярные произведения

$$\left(\widetilde{g}_m(\theta), \prod_{j=1}^n \sin^{n+\alpha-j}\theta_j\right) \text{ и } \left(\widetilde{g}_m(\theta), \prod_{j=1}^n \sin^{n+\beta-j}\theta_j\right):$$

$$\int\limits_G \widetilde{g}_m(\theta)\prod_{j=1}^n \sin^{n+\alpha-j}\theta_j\,d\theta = J_{\alpha,m} - J_{\alpha,m} = 0,$$

$$\int\limits_G \widetilde{g}_m(\theta)\prod_{j=1}^n \sin^{n+\beta-j}\theta_j\,d\theta = J_{\beta,m} - J_{\alpha,m}\frac{C_\beta}{C_\alpha}.$$

Выберем теперь $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{A}{2}\right)$. Существует такое $m' \in \mathbb{N}$, что $|J_{\alpha,m'}| < \dfrac{\varepsilon}{2}\cdot\dfrac{C_\alpha}{C_\beta}$, а $|J_{\beta,m'}| > \dfrac{A}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\int\limits_G \widetilde{g}_{m'}(\theta)\prod_{j=1}^n \sin^{n+\beta-j}\theta_j\,d\theta = J_{\beta,m'} - J_{\alpha,m'}\frac{C_\beta}{C_\alpha} > \frac{A}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

Таким образом, $g_{m'}$ и есть та функция из $C^\infty(G)$, которая ортогональна $\prod\limits_{j=1}^{n}\sin^{n+\alpha-j}\theta_j$ и неортогональна $\prod\limits_{j=1}^{n}\sin^{n+\beta-j}\theta_j$.

Лемма 5.1.2 доказана. □

Следующее утверждение приведено для случая натуральных α и β в [82] (без доказательства).

Лемма 5.1.3. *Пусть $f(r)$ непрерывна и ограничена при $r \geqslant 0$. Пусть $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. Тогда $S_0^\alpha f(r)$ имеет предел при $r\to\infty$ тогда и только тогда, когда $S_0^\beta f(r)$ имеет предел при $r\to\infty$.*

Доказательство.

$$S_0^\alpha f(r) = \frac{1}{r^{1+\alpha}}\int\limits_0^r \tau^\alpha f(\tau)d\tau = \frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \psi_\alpha\left(\frac{\tau}{r}\right) f(\tau)d\tau,$$

где

$$\psi_k(\tau) = \begin{cases} \tau^k, \text{ если } \tau \leqslant 1,\\ 0, \text{ если } \tau > 1\end{cases}$$

при $k \geqslant 0$.

Очевидно, $\psi_\alpha \in L_1(0,+\infty)$, а $f \in L_\infty(0,+\infty)$. Далее

$$\int\limits_0^\infty \psi_k(\tau)\tau^{ix}d\tau = \int\limits_0^1 \tau^k e^{ix(\ln\tau+2\pi i m)}d\tau = e^{-2\pi m x}\left[\int\limits_0^1 \tau^k\cos(x\ln\tau)d\tau + i\int\limits_0^1 \tau^k \sin(x\ln\tau)d\tau\right] =$$

$$= e^{-2\pi m x}\left[\int\limits_{-\infty}^0 e^{(k+1)t}\cos xt dt + i\int\limits_{-\infty}^0 e^{(k+1)t}\sin xt dt\right] = \frac{e^{-2\pi m x}}{x^2+(k+1)^2}(k+1-ix).$$

Вещественная часть полученного выражения положительна для любого целого m, любого вещественного x и любого неотрицательного k. Следовательно, $\int\limits_0^\infty \psi_k(\tau)\tau^{ix}d\tau$ не имеет вещественных нулей при любом неотрицательном k.

Пусть существует $\lim\limits_{r\to\infty} S_0^\alpha f(r)$; обозначим его через C_α. $\psi_\beta \in L_1(0,+\infty)$, поэтому, в силу следствия из тауберовой теоремы Винера (см. [25, с. 163]), существует $\lim\limits_{r\to\infty}\frac{1}{r}\int\limits_0^\infty \psi_\beta\left(\frac{\rho}{r}\right) f(\rho)d\tau$, т. е. $\lim\limits_{r\to\infty} S_0^\beta f(r)$, причем этот предел равен

$$\frac{C_\alpha}{\beta+1}\left(\int\limits_0^1 \tau^\alpha d\tau\right)^{-1} = \frac{\alpha+1}{\beta+1}\lim_{r\to\infty} S_0^\alpha f(r).$$

В силу произвольности выбора α и β лемма 5.1.3 доказана. □

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 5.1.4.

В интеграле $\int\limits_{B_+(r)} y^k\varphi(x,y)dxdy$ сделаем замену переменных:

$x_1 = \rho\cos\theta_1,$
$x_2 = \rho\sin\theta_1\cos\theta_2,$
$\ldots$
$x_n = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n,$
$y = \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n.$

Получим, что

$$S_n^k\varphi(r) = \frac{1}{r^{n+k+1}}\int\limits_0^r\int\limits_G v(\rho,\theta)\rho^{n+k}\prod_{j=1}^n \sin^{n+k-j}\theta_j\,d\theta d\rho,$$

где

$$v(\rho,\theta) = \varphi(\rho\cos\theta_1, \rho\sin\theta_1\cos\theta_2, \ldots, \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n, \rho\sin\theta_1\sin\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1}\sin\theta_n).$$

Выберем теперь ограниченную и бесконечно дифференцируемую на положительной полуоси функцию $f(r)$ так, чтобы $f(r) = 0$ при $r \leqslant \dfrac{1}{2}$ и чтобы $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{1}{r}\int\limits_0^r f(\rho)d\rho$ не существовал; для этого можно, например, «сгладить» функцию М. Кжижанского (см. [93, с. 337]). Тогда, в силу леммы 5.1.3, при любом неотрицательном k не существует предела $\dfrac{1}{r^{k+1}}\int\limits_0^r r^k f(\rho)d\rho$ при $r\to\infty$. Положим $v(\rho,\theta) = f(\rho)g(\theta)$, где $g(\theta)$ – та функция, существование которой доказывается в лемме 5.1.2.

С одной стороны, построенная функция $v(\rho,\theta)$ однозначно определяет функцию $\varphi(x,y)$, ограниченную и бесконечно дифференцируемую при $x\in\mathbb{R}^n$ и $y\geqslant 0$. С другой стороны,

$$S_n^k\varphi(r) = \frac{1}{r^{n+k+1}}\int\limits_0^r \rho^{n+k}f(\rho)d\rho\int\limits_G g(\theta)\prod_{j=1}^n \sin^{n+k-j}\theta_j\,d\theta.$$

Отсюда видно, что $S_n^\alpha\varphi(r)$ имеет предел при $r\to\infty$ (и даже тождественно равна нулю), а $S_n^\beta\varphi(r)$ не имеет предела при $r\to\infty$.

Теорема 5.1.4 доказана. □

Замечание. При $n = 0$ справедливо утверждение, противоположное утверждению теоремы 5.1.4: *если α и β неотрицательны, а функция $\varphi(y)$ непрерывна и ограничена при $y\geqslant 0$, то существование $\lim\limits_{r\to\infty}S_0^\alpha\varphi(r)$ равносильно существованию $\lim\limits_{r\to\infty}S_0^\beta\varphi(r)$, причем $\lim\limits_{r\to\infty}S_0^k\varphi(r) = \dfrac{1}{k+1}\lim\limits_{r\to\infty}S_0^0\varphi(r)$ (если этот предел существует).*

Это следует непосредственно из леммы 5.1.3.

Вернемся к стабилизации решений сингулярных параболических уравнений. Обозначим через $u_k(x,y,t)$ классическое решение задачи (5.10), (5.2), полагая интеграл $\int\limits_0^\infty a(t)dt$ расходящимся. Из теорем 5.1.2–5.1.4 и из замечания к последней теореме вытекают два следующих утверждения.

Теорема 5.1.5. *Пусть $n\geqslant 1$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha\neq\beta$. Тогда существует такая ограниченная функция φ из $C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, что для любого $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ существует $\lim\limits_{t\to\infty}u_\alpha(x,y,t)$, но не существует $\lim\limits_{t\to\infty}u_\beta(x,y,t)$.*

Теорема 5.1.6. *Пусть $n = 0$. Тогда для любой ограниченной функции $\varphi(y)$ и любых неотрицательных α и β существование $\lim\limits_{t\to\infty}u_\alpha(y,t)$ равносильно существованию $\lim\limits_{t\to\infty}u_\beta(y,t)$. Если эти пределы существуют, то*

$$\lim_{t\to\infty}u_\alpha(y,t) = \frac{\beta+1}{\alpha+1}\lim_{t\to\infty}u_\beta(y,t).$$

5.1.4. О задаче Коши с неограниченной начальной функцией. Покажем, что в случае неограниченной начальной функции условие стабилизации уже не является необходимым (как и в регулярном случае). Достаточно рассмотреть задачу (5.10), (5.2) при $n = 0$.

Определим начальную функцию $\varphi(y)$ следующим образом:

$$\varphi(y) = 2(k+1)\cos y^2 - 4y^2\sin y^2.$$

Очевидно, $\varphi(y) = B_{k,y}\Phi(y)$, где $\Phi(y) = \sin y^2$.

Рассмотрим теперь

$$\frac{1}{r^{k+1}}\int\limits_0^r y^k\varphi(y)dy = \frac{2(k+1)}{r^{k+1}}\int\limits_0^r y^k\cos y^2 dy - \frac{2}{r^{k+1}}\int\limits_0^r y^{k+1}\cdot 2y\sin y^2 dy =$$

$$= \frac{2(k+1)}{r^{k+1}}\int\limits_0^r y^k\cos y^2 dy - \frac{2}{r^{k+1}}\left[-y^{k+1}\cos y^2\Big|_0^r + (k+1)\int\limits_0^r y^k\cos y^2 dy\right] = 2\cos r^2.$$

Последнее выражение не имеет предела при $r\to\infty$.

Таким образом, $\frac{1}{r^{k+1}}\int\limits_0^r y^kT_x^y\varphi(x)dy$ не стабилизируется при $r\to\infty$ даже поточечно.

С другой стороны,

$$\frac{1}{t^{\frac{k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty \eta^kT_\eta^y e^{-\frac{\eta^2}{4t}}\varphi(\eta)d\eta = \int\limits_0^\infty \alpha^kT_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\varphi(\alpha\sqrt{t})d\alpha.$$

Далее $\varphi(y) = B_{k,y}\Phi(y)$, следовательно, $\varphi(\alpha\sqrt{t}) = B_{k,\alpha\sqrt{t}}\Phi(\alpha\sqrt{t})$.

$$B_{k,\alpha\sqrt{t}}\Phi(\alpha\sqrt{t}) = \frac{1}{\alpha^k}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha^k\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}(\alpha\sqrt{t})\right] = \frac{\sqrt{t}}{\alpha^k}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha^k\Phi'(\alpha\sqrt{t})\right] =$$

$$= t\Phi''(\alpha\sqrt{t}) + \sqrt{t}\frac{k}{\alpha}\Phi'(\alpha\sqrt{t}) = tB_{k,\alpha\sqrt{t}}\Phi(\alpha\sqrt{t}) = t\varphi(\alpha\sqrt{t}),$$

следовательно, $\varphi(\alpha\sqrt{t}) = \frac{1}{t}B_{k,\alpha}\Phi(\alpha\sqrt{t})$.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{t^{\frac{k+1}{2}}}\int\limits_0^\infty \eta^kT_\eta^y e^{-\frac{\eta^2}{4t}}\varphi(\eta)d\eta = \frac{1}{t}\int\limits_0^\infty \alpha^kT_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}B_{k,\alpha}\Phi(\alpha\sqrt{t})d\alpha = \frac{1}{t}\int\limits_0^\infty \alpha^ke^{-\frac{\alpha^2}{4}}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}B_{k,\alpha}\Phi(\alpha\sqrt{t})d\alpha$$

в силу самосопряженности оператора обобщенного сдвига в $L_{2,k}(0,+\infty)$ (см. [40, 41, 47]). Поскольку оператор обобщенного сдвига коммутирует с оператором Бесселя, последнее выражение равно

$$\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty \alpha^ke^{-\frac{\alpha^2}{4}}B_{k,\alpha}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}\Phi(\alpha\sqrt{t})d\alpha = \frac{1}{t}\int\limits_0^\infty \alpha^kB_{k,\alpha}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}\Phi(\alpha\sqrt{t})d\alpha +$$

$$+ \frac{\alpha^k}{t}\left[e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\frac{\partial}{\partial\alpha}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}\Phi(\alpha\sqrt{t}) + \frac{\alpha}{2}e^{-\frac{\alpha^2}{4}}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}\Phi(\alpha\sqrt{t})\right]\Bigg|_0^\infty$$

(после двукратного интегрирования по частям).

Покажем, что при неотрицательных y и положительных t внеинтегральный член равен нулю. Очевидно, второе его слагаемое равно нулю (так как функция $\Phi(y)$ ограничена);

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}}\Phi(\alpha\sqrt{t})\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^\infty \Phi\left(\sqrt{y^2+\alpha^2t-2\alpha y\sqrt{t}\cos\theta}\right)\sin^{k-1}\theta d\theta\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^\infty (2t\alpha - 2y\sqrt{t}\cos\theta)\cos(y^2+\alpha^2t-2\alpha y\sqrt{t}\cos\theta)\sin^{k-1}\theta d\theta\right| \leqslant 2(t\alpha + y\sqrt{t})\pi,$$

следовательно, и первое слагаемое равно нулю.

Значит, для любого неотрицательного y и любого положительного t
$$\frac{1}{t}\int\limits_0^\infty \alpha^k B_{k,\alpha} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}} \Phi(\alpha\sqrt{t})d\alpha = \int\limits_0^\infty \alpha^k e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k+1}{2}\right) \frac{T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}} \Phi(\alpha\sqrt{t})}{t} d\alpha.$$
Для любого положительного t_0 последний интеграл сходится равномерно по $y \geqslant 0$ и $t \geqslant t_0$. Поскольку для любого $y \geqslant 0$ и для любого $\alpha \geqslant 0$, для любого $t > 0$ справедливо неравенство $\left|T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}} \Phi(\alpha\sqrt{t})\right| \leqslant 1$, получаем, что
$$\int\limits_0^\infty \alpha^k e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \left(\frac{\alpha^2}{4} - \frac{k+1}{2}\right) \frac{T_\alpha^{\frac{y}{\sqrt{t}}} \Phi(\alpha\sqrt{t})}{t} d\alpha \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
равномерно по $y \geqslant 0$.

Таким образом, решение стабилизируется к нулю равномерно на всей полуоси, а весовое среднее от начальной функции не стабилизируется даже поточечно.

5.1.5. О стабилизации решений уравнений с диссипацией. Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = (\Delta + B_{k,y})\, u - a(t)u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0,\ t > 0, \tag{5.11}$$
где $a(t)$ непрерывна и положительна при $t \geqslant 0$.

Классическое ограниченное решение задачи (5.11), (5.2) имеет вид
$$u(x,y,t) = e^{-A(t)} v(x,y,t),$$
где $v(x,y,t)$ есть классическое ограниченное решение задачи (5.1)-(5.2), $A(t) = \int\limits_0^t a(\tau)d\tau$.

Отсюда в силу ограниченности функции $v(x,y,t)$ вытекает следующее утверждение:

Теорема 5.1.7. *Если* $\int\limits_0^\infty a(\tau)d\tau$ *расходится, то классическое ограниченное решение задачи* (5.11), (5.2) *равномерно стабилизируется к нулю при* $t\to\infty$ *независимо от выбора* (*непрерывной и ограниченной*) *начальной функции* $\varphi(x,y)$. *В противном случае для любого* $x\in\mathbb{R}^n$, *любого* $y \geqslant 0$ *и любого вещественного* l *предельное соотношение* $u(x,y,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} l$ *выполняется тогда и только тогда, когда выполняется предельное соотношение*
$$\lim_{t\to\infty} \frac{n+k+1}{\pi^{\frac{n}{2}} t^{n+k+1}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x,y)dxdy = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)} e^{a_0} l,$$
где $u(x,y,t)$ — *классическое ограниченное решение задачи* (5.11), (5.2), *а через* a_0 *обозначен* $\int\limits_0^\infty a(\tau)d\tau$.

5.2. Стабилизация решения задачи Коши. Случай коэффициентов, зависящих от пространственных переменных

В этом разделе изучается асимптотика решений задач Коши для уравнений вида
$$p(x,y)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$
Вопросы, связанные с существованием и единственностью решений таких задач, изучались в [43, 52,53] и ряде других работ. В регулярном случае (т. е. при $k = 0$) асимптотика решения изучалась в [31] (см. также [30] и имеющуюся там библиографию).

Основная теорема данного раздела (теорема 5.2.1) доказывается при помощи метода, предложенного в [23]. Главная идея этого метода заключается в том, чтобы свести вопрос о стабилизации решения исходной задачи к вопросу о стабилизации решения задачи Коши для уравнения (5.1), изученному в предыдущем разделе.

Отметим, что в настоящем разделе (так же, как и в предыдущем) речь идет только о поточечной стабилизации решения задачи Коши с ограниченной начальной функцией, поэтому применение указанного метода вполне допустимо.

5.2.1. Формулировка основной теоремы. Определение. Пусть Ω — замкнутая область евклидова пространства, m — натуральное число, $\alpha \in (0,1)$. Пространством $H_m^\alpha(\Omega)$ назовем множество функций, определенных на Ω, которые вместе со своими производными до порядка m включительно непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гельдера порядка α на Ω.

В дальнейшем мы будем опускать индексы у оператора $B_{k,y}$ (в тех случаях, когда это не помешает изложению).

Будем использовать следующие обозначения:

$$\Delta_B = \Delta + B;\ D_{x_j}^m = \frac{\partial^m}{\partial x_j^m},\ j=\overline{1,n};\ \widetilde{D}_y^m = \begin{cases} B^{\frac{m}{2}}, \text{ если } m \text{ — четное}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y} B^{\frac{m-1}{2}}, \text{ если } m \text{ — нечетное}; \end{cases}$$

$\widetilde{D}^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n} D_y^{\beta_{n+1}}$, где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})$ — мультииндекс, $|\beta|$ — его длина: $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1}$.

Наряду с пространством $H_m^\alpha(\Omega)$ введем пространство $\widetilde{H}_m^\alpha(\Omega)$ — множество таких функций f, определенных на Ω, что при $|\beta| \leqslant m$ функция $\widetilde{D}^\beta f$ непрерывна, ограничена и удовлетворяет условию Гельдера порядка α на Ω. Если $\alpha = 0$, то требование гельдеровости в определении пространств H_m^α и $\widetilde{H}_m^\alpha$, естественно, снимается. Через $H_0^\alpha(\Omega) = H^\alpha(\Omega) = \widetilde{H}_0^\alpha(\Omega) = \widetilde{H}^\alpha(\Omega)$ обозначается множество непрерывных, ограниченных и гельдеровых на Ω функций, через $H^0(\Omega) = H(\Omega) = \widetilde{H}^0(\Omega) = \widetilde{H}(\Omega)$ — множество непрерывных и ограниченных на Ω функций.

Замечание. При определении пространств $H_m^\alpha(\Omega)$ подразумевается, что Ω содержится в полупространстве $\{y \geqslant 0\}$.

Рассмотрим следующее уравнение:

$$p(x,y)\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u,\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > 0,\ t > 0, \tag{5.12}$$

где $p(x,y) \geqslant p_0 > 0$, $p(x,y) \in H(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$.

Существование и единственность классического ограниченного решения задачи (5.12), (5.2) (при положительном k, непрерывной и ограниченной φ) установлено в [43]. Изучим асимптотику этого решения.

Теорема 5.2.1. *Пусть $u(x,y,t)$ — классическое ограниченное решение задачи* (5.12), (5.2), *$k > 0$, $p(x,y) \geqslant p_0 > 0$, $\varphi \in H(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Пусть $p(x,y)$ удовлетворяет также следующим условиям*:

$$p(x,y) \in H^\alpha_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}),\ \text{где } \alpha \in (0,1); \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial^m p}{\partial y^m}\Big|_{y=0} = 0 \text{ для } m = 1, \dots, \left[\frac{n+k+1}{2}\right],\ \text{если } n+k \geqslant 1; \tag{5.14}$$

существует такая константа b, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t^{n+k+1}} \int\limits_{B_+(t)} y^k T_y^\eta |p(x+\xi, y) - b| dxdy = 0 \tag{5.15}$$

равномерно относительно $(\xi,\eta) \in \overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$, любого $y \geqslant 0$ и любого вещественного l предельное соотношение $u(x,y,t) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} l$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n+k+1}{t^{n+k+1}} \int\limits_{B_+(t)} y^k \varphi(x,y) dxdy = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)}\, l.$$

Отметим, что в регулярном случае (т. е. при $k = 0$) условию (5.15) соответствует условие Гущина—Михайлова (см. [23, 31]), поэтому условие (5.15) естественно назвать *весовым условием Гущина—Михайлова*.

Далее без ограничения общности можно считать, что $b = 1$.

Введем новую функцию $q(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} p(x,y) - 1$. Тогда весовое условие Гущина—Михайлова примет следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{t^{n+k+1}} \int\limits_{B_+(t)} y^k T_y^\eta |q(x+\xi, y)| dxdy = 0 \tag{5.16}$$

равномерно относительно $(\xi,\eta) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

Пусть $v(x,y,t)$ — классическое ограниченное решение уравнения (5.1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$v\big|_{t=0} = p(x,y)\varphi(x,y), \ \frac{\partial v}{\partial y}\big|_{y=0} = 0. \tag{5.17}$$

Наша цель — доказать, что $\lim\limits_{t\to\infty}[u(x,y,t) - v(x,y,t)] = 0$ для любых $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

Введем функцию $f(t)$, зависящую от параметров x и y:

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^t [u(x,y,\tau) - v(x,y,\tau)] d\tau.$$

Докажем два вспомогательных утверждения (предполагая, что условия теоремы 5.2.1 выполнены):

Теорема 5.2.2. *Для любых* $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$

$$f(t) = o(t) \text{ при } t\to\infty.$$

Теорема 5.2.3. *Для любых* $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$

$$f''(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \text{ при } t\to\infty.$$

5.2.2. Доказательство теоремы 5.2.2. В этом пункте (а также и в следующем) предполагается, что все условия теоремы 5.2.1 выполнены.

Применим к $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ преобразование Лапласа по t. Полученные функции (обозначим их через $\tilde{u}(x,y,\lambda)$ и $\tilde{u}(x,y,\lambda)$ соответственно) являются решениями следующих задач:

$$-\Delta_B \tilde{u} + \lambda p(x,y)\tilde{u} = p(x,y)\varphi(x,y), \ x \in \mathbb{R}^n, \ y > 0, \tag{5.18}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}\big|_{y=0} = 0; \tag{5.19}$$

$$-\Delta_B \tilde{v} + \lambda \tilde{v} = p(x,y)\varphi(x,y), \ x \in \mathbb{R}^n, \ y > 0, \tag{5.20}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial y}\big|_{y=0} = 0. \tag{5.21}$$

Действительно, для любой $g(x,y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ функция $u(x,y,t)$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^k \frac{\partial u}{\partial t} p(x,y) g(x,y) dxdy - \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^k u(x,y,t) \Delta_B g(x,y) dxdy = 0.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$, $N > \varepsilon$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ так, чтобы $\mathrm{Re}\lambda > 0$; умножим последнее тождество на $e^{-\lambda t}$ и проинтегрируем по t от ε до N. Получим (после перемены порядка интегрирования и интегрирования по частям), что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^k p(x,y) g(x,y) \left[u(x,y,N)e^{-\lambda N} - u(\varepsilon,y,N)e^{-\varepsilon N}\right] dxdy +$$

$$+\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\left[\lambda p(x,y)g(x,y)-\Delta_B g(x,y)\right]\int\limits_{\varepsilon}^{N} e^{-\lambda t}u(x,y,t)dtdxdy=0.$$

Равномерно по x, y на любом компакте

$$e^{-\lambda N}u(x,y,N)\overset{N\to\infty}{\longrightarrow}0,\ u(x,y,\varepsilon)\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\varphi(x,y),\ \int\limits_{\varepsilon}^{N}e^{-\lambda t}u(x,y,t)dt\overset{\varepsilon\to0,N\to\infty}{\longrightarrow}\tilde{u}(x,y,\lambda).$$

Следовательно, $\tilde{u}(x,y,\lambda)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\left[\lambda p(x,y)g(x,y)-\Delta_B g(x,y)\right]\tilde{u}(x,y,\lambda)dxdy=\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k p(x,y)g(x,y)\varphi(x,y)dxdy$$

при любой $g(x,y)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$.

Поэтому для любого компакта $K\subset\overline{\mathbb{R}^{n+1}}$ функция $\tilde{u}(x,y,\lambda)$ при любом фиксированном λ принадлежит пространству Киприянова $W_{2,k}^2(K)$ (см. [40]) и почти всюду удовлетворяет уравнению (5.18).

Это доказательство справедливо и для $\tilde{v}(x,y,\lambda)$, следует лишь положить $p(x,y)\equiv 1$.

Поскольку $u(x,y,t)$ и $v(x,y,t)$ ограничены, $\tilde{u}(x,y,\lambda)$ и $\tilde{v}(x,y,\lambda)$ ограничены по $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ и аналитичны по λ при $\mathrm{Re}\lambda>0$. Решение задачи (5.20)-(5.21) (так же, как и решение задачи (5.18)-(5.19)), ограниченное по $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ и аналитическое по λ при $\mathrm{Re}\lambda>0$, единственно. С другой стороны, это решение можно получить непосредственным применением преобразования Лапласа к функции

$$v(x,y,t)=\frac{C_{n,k}}{t^{\frac{n+k+1}{2}}}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}\eta^k e^{-\frac{|\xi-x|^2}{4t}}T_\eta^y\left(e^{-\frac{\eta^2}{4t}}\right)p(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\xi d\eta$$

(константа $C_{n,k}$ зависит только от n и k).

$$\tilde{v}(x,y,\lambda)=C_{n,k}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}\eta^k\frac{p(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)}{t^{\frac{n+k+1}{2}}}e^{-\lambda t-\frac{|\xi-x|^2}{4t}}T_\eta^y e^{-\frac{\eta^2}{4t}}d\xi d\eta dt=$$

$$=C_{n,k}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}\int\limits_0^\infty\eta^k\frac{p(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)}{t^{\frac{n+k+1}{2}}}T_\eta^y\left(e^{-\lambda t-\frac{|\xi-x|^2+\eta^2}{4t}}\right)dtd\xi d\eta.$$

Перемена порядка интегрирования законна, так как при $\mathrm{Re}\lambda>0$ интеграл сходится абсолютно (и даже равномерно относительно $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$). По аналогичной причине интеграл по t можно внести под знак оператора обобщенного сдвига. В итоге получим:

$$\tilde{v}(x,y,\lambda)=2^{\frac{n+k+1}{2}}C_{n,k}\lambda^{\frac{n+k-1}{4}}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}\eta^k p(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)T_\eta^y\frac{K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi-x|^2+\eta^2)}\right)}{(|\xi-x|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}}d\xi d\eta. \qquad (5.22)$$

Определим при $\mathrm{Re}\lambda>0$ на функциях из $H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ оператор M_λ:

$$M_\lambda f(x,y)=2^{\frac{n+k+1}{2}}C_{n,k}\lambda^{\frac{n+k-1}{4}}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}\eta^k f(\xi,\eta)T_\eta^y\frac{K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi-x|^2+\eta^2)}\right)}{(|\xi-x|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}}d\xi d\eta.$$

M_λ является разрешающим оператором задачи (5.20)-(5.21) с правой частью $f(x,y)$, поэтому, если $\mathrm{Re}\lambda>0$, $g\in W_{2,k,loc}^2(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ и $(-\Delta_B+\lambda)g\in H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, то $M_\lambda(-\Delta_B+\lambda)g=g$. Определим при

$\mathrm{Re}\lambda > 0$ на функциях из $H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ оператор L_λ:

$$L_\lambda f(x,y) = \lambda M_\lambda[q(x,y)f(x,y)] =$$

$$= 2^{\frac{n+k+1}{2}} C_{n,k} \lambda^{\frac{n+k+3}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \eta^k q(\xi,\eta) f(\xi,\eta) T^y_\eta \frac{K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi-x|^2+\eta^2)}\right)}{(|\xi-x|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}}\, d\xi d\eta.$$

Функция $\widetilde{u}(x,y,\lambda)$ является ограниченным по $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ и аналитическим по λ при $\mathrm{Re}\lambda > 0$ решением уравнения

$$(-\Delta_B + \lambda)\widetilde{u} = p(x,y)\varphi(x,y) - \lambda q(x,y)\widetilde{u}.$$

Здесь правая часть аналитична по λ при $\mathrm{Re}\lambda > 0$, а для каждого фиксированного λ (при $\mathrm{Re}\lambda > 0$) — ограничена по $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Поэтому к правой и левой частям последнего равенства можно применить оператор M_λ.

$M_\lambda(-\Delta_B + \lambda)\widetilde{u} = \widetilde{u}$, так как $\widetilde{u} \in W^2_{2,k,loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

$M_\lambda[p(x,y)\varphi(x,y)] = \widetilde{v}$, так как M_λ — разрешающий оператор задачи (5.20)-(5.21), а $p(x,y)\varphi(x,y) \in H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$.

$M_\lambda[\lambda q(x,y)\widetilde{u}] = \lambda M_\lambda[q(x,y)\widetilde{u}] = L_\lambda \widetilde{u}$, так как $\widetilde{u} \in H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ при каждом фиксированном λ (если $\mathrm{Re}\lambda > 0$). Таким образом, $\widetilde{u}(x,y,\lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\widetilde{u}(x,y,\lambda) + L_\lambda \widetilde{u}(x,y,\lambda) = v(x,y,\lambda). \tag{5.23}$$

В дальнейшем в этом пункте подразумевается, что все константы зависят только от n и k, если не оговорено противное.

Лемма 5.2.1. *Пусть $D_\sigma = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \Big| |\arg\lambda| < \pi - \sigma\right\}$, где $0 < \sigma < \pi$. Тогда, если $\lambda \in D_\sigma$, то L_λ является ограниченным оператором, действующим в $H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, и $\lim\limits_{\substack{|\lambda|\to 0\\ \lambda\in D_\sigma}} \|L_\lambda\| = 0$.*

Доказательство. Как известно (см., например, [23]), при $\nu > 0$ в области $\left\{|\arg z| \leqslant \dfrac{\pi-\sigma}{2}\right\}$ для функции $K_\nu(z)$ справедлива оценка $K_\nu(z) \leqslant C\alpha_\nu(|z|)$, где

$$\alpha_\nu(r) = \begin{cases} r^{-\nu} \text{ при } 0 < r \leqslant 1, \\ \dfrac{e^{-\gamma_0(r-1)}}{\sqrt{r}} \text{ при } r > 1, \end{cases}$$

а C, γ_0 — положительные константы, зависящие только от σ.

При $\lambda \in D_\sigma$ рассмотрим выражение

$$J_{n,k}(x,y;\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} \eta^k T^y_\eta |q(\xi+x,\eta)| \frac{\left|K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi|^2+\eta^2)}\right)\right|}{(|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}} d\xi d\eta \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^\infty \frac{\alpha_{\frac{n+k-1}{2}}(\sqrt{|\lambda|}\rho)}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\int\limits_{B_+(\rho)} \eta^k T^y_\eta |q(\xi+x,\eta)| d\xi d\eta\right] d\rho.$$

Функция $\alpha_\nu(r)$ является кусочно-гладкой, следовательно. можно интегрировать по частям; получим

$$J_{n,k}(x,y;\lambda) \leqslant -C \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\alpha_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{|\lambda|}\rho\right)}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\right] \int\limits_{B_+(\rho)} \eta^k T^y_\eta |q(\xi+x,\eta)| d\xi d\eta d\rho +$$

$$+ C \lim_{\rho\to\infty} \frac{\alpha_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{|\lambda|}\rho\right)}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}} \int\limits_{B_+(\rho)} \eta^k T^y_\eta |q(\xi+x,\eta)| d\xi d\eta -$$

$$-C\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{|\lambda|}\rho\right)}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta.$$

Первый предел, очевидно, равен нулю. Учитывая, что

$$\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta\leqslant \mathrm{const}\,\rho^{n+k+1},$$

а $\alpha_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{|\lambda|}\rho\right)=\dfrac{1}{|\lambda|^{\frac{n+k-1}{4}}\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}$ при достаточно малых ρ, получаем, что и второй предел равен нулю.

Итак, $J_{n,k}(x,y;\lambda)\leqslant J_{n,k,1}(x,y;\lambda)+J_{n,k,1}(x,y;\lambda)$, где

$$J_{n,k,1}(x,y;\lambda)=\frac{C(n+k-1)}{\lambda^{\frac{n+k-1}{4}}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}}\frac{1}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta\rho d\rho,$$

$$J_{n,k,2}(x,y;\lambda)\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|^{\frac14}}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}}^{\infty}\frac{e^{-\gamma_0\sqrt{|\lambda|}\rho}}{\rho^{\frac{n+k}{2}}}\left(\sqrt{|\lambda|}+\frac{1}{\rho}\right)\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta\rho d\rho;$$

константы (как и далее в этой лемме) зависят еще и от σ.

Таким образом,

$$J_{n,k}(x,y;\lambda)\leqslant\mathrm{const}\left[\frac{1}{\lambda^{\frac{n+k-1}{4}}}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}}\frac{1}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta\rho d\rho+\right.$$

$$\left.+|\lambda|^{\frac14}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}}^{\infty}\frac{1}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta\rho^{\frac{n+k}{2}+1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}\rho}\right)e^{-\gamma_0\sqrt{|\lambda|}\rho}d\rho\right]\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}}$$

в силу ограниченности функции

$$\frac{1}{\rho^{\frac{n+k-1}{2}}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta.$$

Из этого и следует ограниченность оператора L_λ.

Действительно,

$$|L_\lambda f(x,y)|=\mathrm{const}\,|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\eta^k T^y_\eta[q(\xi+x,\eta)f(\xi+x,\eta)]\frac{K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi|^2+\eta^2)}\right)}{(|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}}d\xi d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\,|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}\|f\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})}J_{n,k}(x,y;\lambda)\leqslant\mathrm{const}\,\|f\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})},$$

т. е. L_λ ограничен даже равномерно по $\lambda\in D_\sigma$ при каждом фиксированном σ.

Перейдем к доказательству второго утверждения леммы 5.2.1. Из только что полученной оценки на $|L_\lambda f(x,y)|$ следует, что

$$\|L_\lambda\|\leqslant\mathrm{const}\,|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}\sup_{(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}}J_{n,k}(x,y;\lambda).$$

Из (5.16) следует, что для любого положительного ε существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$\frac{1}{\rho^{n+k+1}}\int\limits_{B_+(\rho)}\eta^k T^y_\eta|q(\xi+x,\eta)|d\xi d\eta<\varepsilon$$

для любого $\rho\geqslant N(\varepsilon)$ и любого $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Поэтому неравенство

$$|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}J_{n,k}(x,y;\lambda)\leqslant\mathrm{const}\left[|\lambda|\frac{N^2(\varepsilon)}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\int\limits_1^\infty r^{\frac{n+k}{2}+1}\left(1+\frac{1}{r}\right)e^{-\gamma_0 r}dr\right]$$

справедливо при $|\lambda|<\dfrac{1}{N^2(\varepsilon)}$.

Возьмем произвольное $\delta>0$ и выберем $\varepsilon>0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathrm{const}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\varepsilon\int\limits_1^\infty r^{\frac{n+k}{2}+1}\left(1+\frac{1}{r}\right)e^{-\gamma_0 r}dr\right]<\frac{\delta}{2}$$

(где константа — та же, что и в предыдущем неравенстве). Очевидно, можно указать такое $\beta>0$, что для любого $\lambda\in D_\sigma$ из неравенства $|\lambda|<\beta$ следует неравенство $\mathrm{const}\,|\lambda|\dfrac{N^2(\varepsilon)}{2}<\dfrac{\delta}{2}$, т. е. для любого $\delta>0$ существуют такие N и β, что $|\lambda|^{\frac{n+k+3}{2}}J_{n,k}(x,y;\lambda)<\delta$. Это и доказывает лемму 5.2.1 для случая, когда $n>0$.

Доказательство для случая, когда $n=0$, осуществляется аналогично; надо только по отдельности рассмотреть три варианта: $k=1$, $k<1$, $k>1$. При $k=1$ следует использовать оценку $|K_0(z)|$ через $\alpha_0(|z|)$ (см., например, [23]), а при $k<1$ — четность $|K_\nu(z)|$ по ν.

Лемма 5.2.1 доказана. □

Функции $\widetilde{u}(x,y;\lambda)$ и $\widetilde{v}(x,y;\lambda)$ как преобразования Лапласа аналитических функций определены только при $\mathrm{Re}\lambda>0$. Однако правая часть формулы (5.22) аналитична в области $\{|\arg\lambda|<\pi\}$. Поэтому с помощью формулы (5.22) функция $\widetilde{v}(x,y;\lambda)$ аналитически продолжается в область $\{|\arg\lambda|<\pi\}$ как функция из $H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ по x, y. По лемме 5.2.1 для любого $\sigma>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\|L_\lambda\|<1$ для любого $\lambda\in\{|\lambda|<\delta\}\cap D_\sigma$. Тогда и $\widetilde{u}(x,y;\lambda)$ аналитически продолжается в область $\lambda\in\{|\lambda|<\delta\}\cap D_\sigma$ как функция из $H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ по x, y (поскольку она является решением интегрального уравнения (5.23)).

Итак, для любого $\sigma>0$ найдется такое $\delta>0$, что функции $\widetilde{u}(x,y;\lambda)$ и $\widetilde{v}(x,y;\lambda)$ аналитичны по $\lambda\in\{|\lambda|<\delta\}\cap\{|\arg\lambda|<\pi-\sigma\}$ и непрерывны и ограничены по $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Из ограниченности функций $p(x,y)$, $\varphi(x,y)$ и оценки $K_\nu(z)$ через $\alpha_\nu(|z|)$ (см. лемму 5.2.1) следует, что при $n+k>1$ справедливо неравенство

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\eta^k p(\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\frac{K_{\frac{n+k-1}{2}}\left(\sqrt{\lambda(|\xi-x|^2+\eta^2)}\right)}{(|\xi-x|^2+\eta^2)^{\frac{n+k-1}{4}}}d\xi d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\mathrm{const}\int\limits_0^\infty\rho^{\frac{n+k+1}{2}}\alpha_{\frac{n+k+1}{2}}(\sqrt{|\lambda|}\rho)d\rho=\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|^{\frac{n+k+3}{4}}}.$$

Отсюда и из формулы (5.22) следует, что $\|\widetilde{v}(x,y;\lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})}\leqslant\dfrac{\mathrm{const}}{|\lambda|}$ для любого $\lambda\in D_\sigma$, если $\sigma>0$.

Последняя оценка справедлива и при $n+k\leqslant1$. Действительно, если $n=0$, $k=1$, то

$$|\widetilde{v}(x,y;\lambda)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|}\int\limits_0^\infty r\alpha_0(r)dr=\frac{\mathrm{const}}{|\lambda|},$$

а если $n = 0$, $k < 1$, то

$$|\widetilde{v}(x, y; \lambda)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\lambda|} \int\limits_0^\infty \alpha_{\frac{1-k}{2}}(r) r^{\frac{k+1}{2}} dr = \frac{\text{const}}{|\lambda|}$$

(константы зависят только от n, k и σ).

Тогда из (5.23) следует неравенство

$$\|\widetilde{u}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} \leqslant \|L_\lambda\| \|\widetilde{u}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} + \frac{\text{const}}{|\lambda|}.$$

Отсюда в силу леммы 5.2.1 следует, что неравенство $\|\widetilde{u}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} \leqslant \dfrac{\text{const}}{|\lambda|}$ выполняется при любом $\lambda \in D_\sigma \cap \{|\lambda| < \delta\}$. Далее из (5.23) получаем, что

$$\|\widetilde{u}(x, y; \lambda) - \widetilde{v}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} = \|L_\lambda \widetilde{u}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} \leqslant$$
$$\leqslant \|L_\lambda\| \|\widetilde{u}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} \leqslant \frac{\|L_\lambda\| \,\text{const}}{|\lambda|} = o\left(\frac{1}{|\lambda|}\right) \text{ при } |\lambda| \to 0$$

для $\lambda \in D_\sigma \cap \{|\lambda| < \delta\}$, так как $\lim\limits_{\substack{|\lambda| \to 0 \\ \lambda \in D_\sigma}} \|L_\lambda\| = 0$ в силу леммы 5.2.1.

Таким образом, получим следующее.

1. $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ — непрерывные ограниченные функции.
2. $\widetilde{u}(x, y; \lambda)$, $\widetilde{v}(x, y; \lambda)$ — их преобразования Лапласа, аналитически продолженные (при $\sigma > 0$) в область $\{|\lambda| < \delta(\sigma)\} \cap \{|\arg\lambda| < \pi - \sigma\}$ как непрерывные и ограниченные по $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ функции.
3. Для любого положительного σ существует такое положительное $\delta = \delta(\sigma)$, что в области $\{|\lambda| < \delta(\sigma)\} \cap \{|\arg\lambda| < \pi - \sigma\}$ выполняется предельное соотношение $\|\widetilde{u}(x, y; \lambda) - \widetilde{v}(x, y; \lambda)\|_{H(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})} = o\left(\dfrac{1}{|\lambda|}\right)$ при $|\lambda| \to 0$.

Из [23] известно, что в этом случае

$$\frac{1}{t} \int\limits_0^t [u(x, y, \tau) - v(x, y, \tau)] d\tau \overset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

при любом $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$.

Теорема 5.2.2 доказана.

5.2.3. Доказательство теоремы 5.2.3. Прежде всего заметим, что, поскольку (5.14) выполняется, в условии (5.13) пространство $H^\alpha_{[\frac{n+k+1}{2}]}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ можно заменить на пространство $\widetilde{H}^\alpha_{[\frac{n+k+1}{2}]}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$; это доказано в работе [37]. Затем, следуя [41] (см. также [40]), введем некоторые функциональные пространства.

Через $C^\infty_E(\Omega)$ обозначим пространство функций, четных по y и бесконечно дифференцируемых на Ω (здесь, как и ранее, $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$). Пространство $L_{p,k}(\Omega)$ при $p \geqslant 1$ определим как множество функций, для которых конечна следующая норма:

$$\|f\|_{L_{p,k}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega y^k |f(x, y)| dx dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $W^m_{2,k}(\Omega)$ определим как замыкание пространства $C^\infty_E(\Omega)$ в следующей норме:

$$\|f\|_{W^m_{2,k}(\Omega)} = \left(\sum_{|\beta| \leqslant m} \|\widetilde{D}^\beta f\|^2_{L_{p,k}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В дальнейшем в тех случаях, когда из контекста ясно, о какой области идет речь, норму в $W_{2,k}^m$ будем обозначать через $\|\cdot\|_m$, норму в $L_{2,k}$ — через $\|\cdot\|_0$, норму в H — через $\|\cdot\|$. Кроме того, в тех случаях, когда это удобно, последнюю переменную y будем обозначать через x_{n+1}.

Перейдем к доказательству теоремы 5.2.3.

Возьмем произвольное δ_0 и зафиксируем его. Обозначим $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ через $w(x,y,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=\delta_0}$ — через $\psi(x,y)$. Из [53] следует, что $\psi\in\widetilde{H}_{[\frac{n+k+1}{2}]+2}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$, а $w(x,y,t)$ является классическим ограниченным решением следующей задачи:

$$p(x,y)\frac{\partial w}{\partial t}=\Delta_B w,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y>0,\ t>\delta_0, \tag{5.24}$$

$$w\big|_{t=\delta_0}=\psi(x,y),\ \frac{\partial w}{\partial y}\big|_{y=0}=0. \tag{5.25}$$

Наряду с задачей (5.24)-(5.25) рассмотрим задачу

$$p(x,y)\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}=\Delta_B Z,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y>0,\ t>\delta_0, \tag{5.26}$$

$$Z\big|_{t=\delta_0}=0,\ \frac{\partial Z}{\partial t}\big|_{t=\delta_0}=\psi(x,y),\ \frac{\partial Z}{\partial y}\big|_{y=0}=0. \tag{5.27}$$

Лемма 5.2.2. *Существует такое $C>0$, что для любого $t\geqslant\delta_0$, любого $x\in\mathbb{R}^n$ и любого $y\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$|Z(x,y,t)|\leqslant Ct^{\frac{n+1}{2}}(t+y)^{\frac{k}{2}+1-\{\frac{n+k+1}{2}\}},$$

где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x.

Доказательство. По условию функция ψ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{[\frac{n+k+1}{2}]+2}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Значит, она принадлежит и пространству $W_{2,k,loc}^{[\frac{n+k+1}{2}]+2}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$. Из [92] при помощи интеграла Дюамеля получаем, что $Z\in W_{2,k,loc}^{[\frac{n+k+1}{2}]+2}(\overline{\mathbb{R}_{++}^{n+2}})$, где $\mathbb{R}_{++}^{n+2}=\big\{(x,y,t)\big|t>\delta_0,x\in\mathbb{R}^n,y>0\big\}$.

Возьмем произвольную точку $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$ и произвольное $t_0>\delta_0$. Без ограничения общности можно считать, что $p_0=1$, т. е. $p(x,y)\geqslant 1$. Тогда (см., например, [90, с. 93]) значение функции $Z(x,y,t)$ в точке (x_0,y_0,t_0) зависит только от значений функции $\psi(x,y)$ при $|x-x_0|^2+(y-y_0)^2\leqslant(t_0-\delta_0)^2$, $y\geqslant 0$. Выберем функцию $\psi_0(x,y)$ со следующими свойствами:

а) $\operatorname{supp}\psi_0\subset\{|x-x_0|^2+(y-y_0)^2\leqslant t_0^2,\ y\geqslant 0\}$;

б) $\psi_0(x,y)=\psi(x,y)$, если $|x-x_0|^2+(y-y_0)^2\leqslant(t_0-\delta_0)^2$, $y\geqslant 0$;

в) $\dfrac{\partial\psi_0}{\partial y}\big|_{y=0}=0$;

г) ψ_0 имеет такую же гладкость, что и ψ.

Чтобы найти функцию $\psi_0(x,y)$, обладающую свойствами а)–г), достаточно умножить $\psi(x,y)$ на соответствующую «срезающую» функцию.

Пусть $u_0(x,y,t)$ — решение следующей задачи:

$$p(x,y)\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=\Delta_B u_0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ y>0,\ t>\delta_0, \tag{5.28}$$

$$u_0\big|_{t=\delta_0}=0,\ \frac{\partial u_0}{\partial t}\big|_{t=\delta_0}=\psi_0(x,y),\ \frac{\partial u_0}{\partial y}\big|_{y=0}=0. \tag{5.29}$$

Поскольку $u_0\in W_{2,k,loc}^2(\overline{\mathbb{R}_{++}^{n+2}})$ (по крайней мере) и $u_0(x,y,t)$ финитна при каждом фиксированном t, имеет место равенство интегралов энергии:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} y^k\left[p(x,y)\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2+\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\right)^2+\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2\right]\Bigg|_{t=t_0}dxdy=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] \Bigg|_{t=\delta_0} dxdy.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{supp} \psi \subset \{|x-x_0|^2 + (y-y_0)^2 \leqslant t_0^2,\ y \geqslant 0\},$$

$$\operatorname{supp} u_0(x,y,t_0) \subset \{|x-x_0|^2 + (y-y_0)^2 \leqslant 4t_0^2,\ y \geqslant 0\},$$

заменим в этом равенстве области интегрирования:

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] \Bigg|_{t=t_0} dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1^0} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] \Bigg|_{t=\delta_0} dxdy,$$

где $\Omega_j^0 = \{|x-x_0|^2 + (y-y_0)^2 \leqslant (jt)^2,\ y \geqslant 0\}$, $j = 1, 2$.

Считая, что $n + k \geqslant 1$, введем для $m = 1, \ldots, \left[\dfrac{n+k+1}{2} \right]$ функции

$$u_m(x,y,t) = \frac{\partial^m u_0}{\partial t^m}(x,y,t).$$

Тогда при $m = 1, \ldots, \left[\dfrac{n+k+1}{2} \right]$ функция u_m удовлетворяет уравнению (5.26) и следующим начальным условиям:

$$u_m\big|_{t=\delta_0} = 0,\ \ \frac{\partial u_m}{\partial t}\Big|_{t=\delta_0} = \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m}{2}} \psi_0(x,y) \text{ при четном } m,$$

$$u_m\big|_{t=\delta_0} = \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m-1}{2}} \psi_0(x,y),\ \ \frac{\partial u_m}{\partial t}\Big|_{t=\delta_0} = 0 \text{ при нечетном } m.$$

Очевидно, $\dfrac{\partial u_m}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0$ при $m = 1, \ldots, \left[\dfrac{n+k+1}{2} \right]$.

Таким образом, для функций $u_m(x,y,t)$ справедливо тождество интегралов энергии:

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n (\nabla u_m)^2 \right] \Bigg|_{t=t_0} dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1^0} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)^2 + \sum_{j=1}^n (\nabla u_m)^2 \right] \Bigg|_{t=\delta_0} dxdy =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\Omega_1^0} y^k p(x,y) \left[\left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m}{2}} \psi_0(x,y) \right]^2 dxdy \\ \text{при четном } m \text{ (начиная с нуля)}, \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega_1^0} y^k p(x,y) \left(\nabla \left[\left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m-1}{2}} \psi_0(x,y) \right] \right)^2 dxdy \\ \text{при нечетном } m \text{ (начиная с единицы)}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Здесь $\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}, \dfrac{\partial}{\partial y} \right)$, $\nabla^2(\cdot) = (\nabla \cdot, \nabla \cdot)$.

Пусть $R(x,y) = \dfrac{1}{p(x,y)}$. Тогда $\dfrac{\partial^m R}{\partial y^m}\Big|_{y=0} = 0$ при $m = 1, \ldots, \left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$. В этом случае справедлива формула Лейбница (см. [92]):

$$B^m(Ru) = RB^m u + \sum_{\substack{i_1+i_2+2j_1+2j_2+s=2m \\ i_1+i_2+j_1\geqslant 1 \\ i_1=0,1;\ i_2=0,1}} C^{i_2,j_2}_{i_1,j_1} \frac{1}{y^s} \frac{\partial^{i_1} R}{\partial y^{i_1}} B^{j_1} R \frac{\partial^{i_2} u}{\partial y^{i_2}} B^{j_2} u,$$

где $C^{i_2,j_2}_{i_1,j_1}$ зависит только от m, i_1, j_1, i_2, j_2.

Пользуясь этой формулой и учитывая, что в правой части равенства (5.30) порядок оператора $\widetilde{D}$, действующего на $\psi_0(x,y)$, не превосходит m, а порядок оператора $\widetilde{D}$, действующего на $R(x,y)$ (а значит, и на $p(x,y)$), не превосходит $m-2$, получаем, что при $m \leqslant \left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$ справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[p(x,y) \left(\frac{\partial u_m}{\partial t} \right)^2 + (\nabla u_m)^2 \right] \Bigg|_{t=t_0} dxdy \leqslant C_m t_0^{n+1} (t_0 + y_0)^k, \tag{5.31}$$

где C_m не зависит от x_0, y_0, t_0.

Далее, если m нечетно, то

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}\Big|_{t=t_0} = \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m+1}{2}} u_0\big|_{t=t_0},$$

а если четно, то

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m}{2}} u_0\big|_{t=t_0} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_m}{\partial y}\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m}{2}} u_0\big|_{t=t_0}.$$

Теперь, оценивая снизу нулем $\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial t} \right)^2$ при четном m и $(\nabla u_m)^2$ — при нечетном m, из неравенства (5.31) получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\nabla \left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m}{2}} u_0(x,y,t_0) \right]^2 dxdy \\ \text{при четном } m \text{ (начиная с нуля)}, \\ \displaystyle\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\left(\frac{1}{p(x,y)} \Delta_B \right)^{\frac{m+1}{2}} u_0(x,y,t_0) \right]^2 dxdy \\ \text{при нечетном } m \text{ (начиная с единицы)} \end{array} \right. \leqslant C_m^* t_0^{n+1} (t_0 + y_0)^k, \tag{5.32}$$

где C_m^* не зависит от x_0, y_0, t_0.

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{|\beta|=l} [\widetilde{D}^\beta f(x,y)]^2 \stackrel{\text{def}}{=} [\widetilde{D}^l f(x,y)]^2, \qquad \sum_{|\beta|=l} [D_x^\beta f(x,y)]^2 \stackrel{\text{def}}{=} [D_x^l f(x,y)]^2.$$

Пусть $m = 0$. Тогда из (5.32) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\nabla u_0(x,y,t_0) \right]^2 dxdy \leqslant C_0^* t_0^{n+1} (t_0 + y_0)^k.$$

Следовательно, $\displaystyle\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\widetilde{D}^1 u_0(x,y,t_0) \right]^2 dxdy \leqslant C_0^* t_0^{n+1} (t_0 + y_0)^k$. Это означает, что $\|u_0(x,y,t_0)\|_1^2 \leqslant \widetilde{C}_0 t_0^{n+1} (t_0 + y_0)^k$, где $\widetilde{C}_0 = C_0^*$.

Пусть $m = 1$. Тогда из (5.32) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy \leqslant C_1^* \|p\|^2 t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k.$$

Поскольку $u_0(x,y,t_0)$ финитна, то с некоторой абсолютной постоянной C справедливо неравенство $\|u_0(x,y,t_0)\|_2^2 \leqslant C \int\limits_{\Omega_1^0} y^k \left[\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy$. Отсюда имеем, что $\|u_0(x,y,t_0)\|_2^2 \leqslant \widetilde{C}_1 t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k$.

Пусть $m = 2$. Тогда из (5.32) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\nabla\left(\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy \leqslant C_2^* t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k.$$

Нужно оценить $\|u_0(x,y,t_0)\|_3^2$, т. е.

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left(\left[\frac{\partial}{\partial y} B u_0(x,y,t_0)\right]^2 + \left[D_x^3 u_0(x,y,t_0)\right]^2\right) dxdy.$$

Рассмотрим при $j = 1, \ldots, n$ следующий интеграл:

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B\left(\frac{\partial u_0}{\partial x_j}(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy = \int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(p(x,y)\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy \leqslant 2\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy +$$

$$+ 2\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[p(x,y)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy \leqslant \widetilde{C}_2^* t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k,$$

где $\widetilde{C}_2^* = 2\left(\left\|\dfrac{\partial p}{\partial x_j}\right\|^2 C_1^* + \|p\|^2 C_2^*\right)$.

Пусть $m = 3$. Тогда из (5.32) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B\left(\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy \leqslant C_3^* \|p\|^2 t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k.$$

Нужно оценить $\|u_0(x,y,t_0)\|_4^2$. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B^2 u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy = \int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B\left(p(x,y)\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right]^2 dxdy.$$

Применяя к подынтегральному выражению формулу Лейбница, получаем, что последний интеграл равен

$$\int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[p(x,y)\Delta_B\left(\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right) + 2\left(2\nabla p(x,y), \nabla\left(\frac{1}{p(x,y)}\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right)\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{p(x,y)}\Delta_B p(x,y)\Delta_B u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy \leqslant \widetilde{C}_3^* t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k,$$

где $\widetilde{C}_3^* = 4(C_3^*\|p\|^4 + 2\|\widetilde{D}^1 p\| C_2^* + C_1^* \|p\|^2 \|\Delta_B p\|^2)$.

Поскольку

$$\|u_0(x,y,t_0)\|_4^2 \leqslant \mathrm{const} \int\limits_{\Omega_2^0} y^k \left[\Delta_B^2 u_0(x,y,t_0)\right]^2 dxdy$$

(в силу финитности $u_0(x,y,t_0)$), имеем оценку $\|u_0(x,y,t_0)\|_4^2 \leqslant \widetilde{C}_3 t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k$ и т. д.

Отметим, что на шаге номер m используется конечность норм $\|\widetilde{D}^j p\|$ при $j \leqslant m-1$, а по условию эти нормы конечны при $j \leqslant \left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$. Следовательно, описанную выше процедуру можно продолжить до шага номер $\left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$ включительно. Применяя формулу Лейбница и учитывая, что $\dfrac{\partial^j p}{\partial y^j}\Big|_{y=0} = 0$ при $j = 1, \dots, \left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$, получаем (на шаге номер $\left[\dfrac{n+k+1}{2}\right]$):

$$\|u_0(x,y,t_0)\|^2_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1} \leqslant \widetilde{C}_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]} t_0^{n+1}(t_0+y_0)^k, \tag{5.33}$$

где константа $C_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]}$ не зависит от x_0, y_0, t_0.

$u_0(x,y,t_0) \in W_{2,k,loc}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ поскольку $u_0(x,y,t) \in W_{2,k,loc}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+2}(\overline{\mathbb{R}_{++}^{n+2}})$, а как доказано в [40], в этом случае $u_0(x,y,T) \in W_{2,k,loc}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+\frac{3}{2}}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ для любого фиксированного $T > \delta_0$.

Применим теперь следующую теорему вложения (см. [39]): если $f(x,y) \in W_{2,k}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ и $\operatorname{supp} f \subset \left\{|x|^2 + y^2 \leqslant 1, y \geqslant 0\right\}$, то $f(x,y) \in C(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ и

$$|f(0)| \leqslant \mathrm{const}\,\|f\|_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1} = \mathrm{const}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta^k \left[\widetilde{D}_{\xi,\eta}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1} f(\xi,\eta)\right]^2 d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть теперь $g \in W_{2,k}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}(\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}})$ и $\operatorname{supp} g \subset \left\{|x|^2 + y^2 \leqslant 4(t_0+y_0)^2,\ y \geqslant 0\right\}$.

Введем функцию $f(x,y) \overset{\mathrm{def}}{=} g[2(t_0+y_0)x, 2(t_0+y_0)y]$. К этой функции можно применить вышеуказанную теорему вложения. Получим, что

$$|g(0)| = |f(0)| \leqslant \mathrm{const}\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta^k \left[(2(t_0+y_0))^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times\, \widetilde{D}^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}_{2(t_0+y_0)\xi, 2(t_0+y_0)\eta}\, g\Big(2(t_0+y_0)\xi, 2(t_0+y_0)\eta\Big)\right]^2 d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену переменных: $x_j = 2(t_0+y_0)\xi_j\,(j = \overline{1,n})$, $y = 2(t_0+y_0)\eta$. Получим, что $|g(0)| \leqslant \widetilde{C}(t_0+y_0)^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1-\frac{n+k+1}{2}}\|g\|_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}$, где $\widetilde{C}$ зависит только от n и k.

Поскольку $\operatorname{supp} u_0(x,y,t_0) \subset \left\{|x-x_0|^2 + y^2 \leqslant (2t_0+2y_0)^2,\ y \geqslant 0\right\}$, а за новое начало координат в $\mathbb{R}^{n+1}$ можно принять точку $(x_0, 0) = (x_1^0, \dots, x_n^0, 0)$, получаем, полагая $g(x,y) = u_0(x,y,t_0)$, что

$$|Z(x_0,y_0,t_0)| = |u_0(x_0,y_0,t_0)| \leqslant \widetilde{C}(t_0+y_0)^{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1-\frac{n+k+1}{2}}\|u_0(x,y,t_0)\|_{\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+1}.$$

Из (5.13) следует, что

$$|Z(x_0,y_0,t_0)| \leqslant \mathrm{const}\, t_0^{\frac{n+1}{2}} C(t_0+y_0)^{\frac{k}{2}+1-\left\{\frac{n+k+1}{2}\right\}},$$

что и доказывает лемму 5.2.2, так как x_0, y_0, t_0 выбраны произвольно, а константа не зависит от x_0, y_0, t_0.

Замечание. При $n + k < 1$ достаточно применить неравенство (5.32) при $m = 0$ (кстати, в этом случае оно и справедливо лишь при $m = 0$), а потом — теорему вложения.

Лемма 5.2.2 доказана. □

Покажем, что

$$\widetilde{Z}(x,y,\lambda)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_{\delta_0}^{\infty} e^{-(t-\delta_0)\lambda}Z(x,y,t)dt$$

имеет по y не более чем степенной рост на бесконечности, т. е. существует такое $\varkappa_0$, что $\widetilde{Z}(x,y,\lambda)=O(y^{\varkappa_0})$ при $y\to\infty$.

Для этого заметим, что

$$|\widetilde{Z}(x,y,\lambda)|\leqslant C|e^{\delta_0\lambda}|\int\limits_0^{\infty}|e^{-t\lambda}|t^{\frac{n+1}{2}}C(t+y)^{\frac{k}{2}+1-\{\frac{n+k+1}{2}\}}dt=$$

$$=C\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)e^{\lambda\mathrm{Re}\delta_0}y^{[\frac{n+k+1}{2}]+2}G\left(\frac{n+3}{2},\left[\frac{n+k+1}{2}\right]+3,y\mathrm{Re}\lambda\right),$$

где $G(\alpha_1,\alpha_2,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция второго рода (см. [66, с. 246]). Из асимптотического представления этой функции при $z\to\infty$ (см. [66, с. 283]) следует, что $\widetilde{Z}(x,y,\lambda)$ действительно имеет на бесконечности не более чем степенной рост по y.

Далее $\widetilde{Z}(x,y,\lambda)$ удовлетворяет при $\mathrm{Re}\lambda>0$ уравнению

$$-\Delta_B\widetilde{Z}+\lambda^2p(x,y)\widetilde{Z}=p(x,y)\psi(x,y).$$

В самом деле, пусть $g(x,y)\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1})$. Тогда

$$\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\Delta_BZ(x,y,t)g(x,y)dxdy=\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^kZ(x,y,t)\Delta_Bg(x,y)dxdy,$$

$$0=\int\limits_{\delta_0}^{T}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^kg(x,y)(T-t)\left[p(x,y)\frac{\partial^2Z}{\partial t^2}-\Delta_BZ\right]dxdydt=$$

$$=\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\left(g(x,y)p(x,y)\Big[-(T-\delta_0)\psi(x,y)+Z(x,y,T)\Big]-\Delta_Bg(x,y)\int\limits_{\delta_0}^{T}(T-t)Z(x,y,t)dt\right)dxdy.$$

Умножим последнее тождество на $e^{-(T-\delta_0)\lambda}$, где $\mathrm{Re}\lambda>0$, и проинтегрируем по T от δ_0 до ∞. Получим:

$$0=\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\Big[g(x,y)p(x,y)\int\limits_0^{\infty}e^{-\tau\lambda}Z(x,y,\tau+\delta_0)d\tau-g(x,y)p(x,y)\psi(x,y)\int\limits_0^{\infty}\tau e^{-\tau\lambda}d\tau-$$

$$-\Delta_Bg(x,y)\int\limits_0^{\infty}e^{-\tau\lambda}\int\limits_0^{\tau}(\tau-\theta)Z(x,y,\theta+\delta_0)d\theta d\tau\Big]dxdy=$$

$$=\int\limits_{\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}} y^k\left[g(x,y)p(x,y)\widetilde{Z}(x,y,\lambda)-\frac{g(x,y)p(x,y)\psi(x,y)}{\lambda^2}-\Delta_Bg(x,y)\frac{\widetilde{Z}(x,y,\lambda)}{\lambda^2}\right]dxdy.$$

В силу произвольности выбора $g(x,y)$ функция $\widetilde{Z}(x,y,\lambda)$ принадлежит классу $W^2_{2,k,loc}(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$ и действительно удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_B\widetilde{Z}+\lambda^2p(x,y)\widetilde{Z}=p(x,y)\psi(x,y).$$

Пусть λ вещественно и положительно. Рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta_B\widetilde{Z}+\lambda^2p(x,y)\widetilde{Z}=p(x,y)\psi(x,y),\ x\in\mathbb{R}^n,y>0; \tag{5.34}$$

$$\frac{\partial \widetilde{Z}}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{5.35}$$

Функция $\widetilde{Z}(x, y, \lambda)$ является решением задачи (5.34), (5.35), аналитическим по $\lambda > 0$, ограниченным по $x \in \mathbb{R}^n$ и имеющим на бесконечности рост по y не выше степенного. Такое решение задачи (5.34), (5.35) единственно. С другой стороны, как доказано в предыдущем пункте, функция $\widetilde{w}(x, y, \lambda)$ является аналитическим по $\lambda > 0$ и ограниченным по $x \in \overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$ решением задачи

$$-\Delta_B \widetilde{w} + \lambda p(x, y)\widetilde{w} = p(x, y)\psi(x, y), \; x \in \mathbb{R}^n, y > 0; \tag{5.36}$$

$$\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \tag{5.37}$$

Такое решение задачи (5.36), (5.37) тоже единственно. Значит, при $\lambda > 0$

$$\widetilde{w}(x, y, \lambda) = \widetilde{Z}(x, y, \sqrt{\lambda}). \tag{5.38}$$

$\widetilde{Z}(x, y, \lambda)$ аналитична при $|\arg \lambda| < \dfrac{\pi}{2}$, следовательно, $\widetilde{Z}(x, y, \sqrt{\lambda})$ аналитична по λ при $|\arg \lambda| < \pi$, поэтому при помощи (5.38) функцию $\widetilde{w}(x, y, \lambda)$ можно аналитически продолжить в область $|\arg \lambda| < \pi$ как функцию, ограниченную по $x \in \mathbb{R}^n$ и имеющую на бесконечности рост по y не выше степенного.

Лемма 5.2.3. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$, любого $y \geqslant 0$ и любого $\sigma > 0$*

$$|\widetilde{Z}(x, y, \lambda)| \overset{|\lambda| \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

равномерно относительно $|\arg \lambda| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Доказательство.

$$|\widetilde{Z}(x, y, \lambda)| = \left| \int\limits_{\delta_0}^{\infty} e^{-(t-\delta_0)\lambda} Z(x, y, t)dt \right| \leqslant C \int\limits_0^{\infty} e^{-\tau \mathrm{Re}\lambda} (\tau + \delta_0)^{[\frac{n+k+1}{2}]+1} (\tau + \delta_0 + y)^k d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{|\lambda| \sin \frac{\sigma}{2}} \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho} \left(\frac{\rho}{|\lambda| \sin \frac{\sigma}{2}} + \delta_0 \right)^{[\frac{n+k+1}{2}]+1} \left(\frac{\rho}{|\lambda| \sin \frac{\sigma}{2}} + \delta_0 + y \right)^k d\rho.$$

Если $|\lambda|$ достаточно велико, то $|\lambda| \sin \dfrac{\sigma}{2} > 1$, поэтому $|\widetilde{Z}(x, y, \lambda)| \leqslant \dfrac{\mathrm{const}}{|\lambda|}$, где константа не зависит от λ.

Лемма 5.2.3 доказана. □

Лемма 5.2.4. *Для любого $\sigma > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\|\widetilde{w}(x, y, \lambda)\|$ ограничена при $\lambda \in \left\{ |\lambda| < \delta \Big| |\arg \lambda| \leqslant \pi - \sigma \right\}$.*

Доказательство.

$$\widetilde{w}(x, y, \lambda) = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} e^{-(t-\delta_0)\lambda} w(x, y, t)dt = \int\limits_{\delta_0}^{\infty} e^{-(t-\delta_0)\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t)dt =$$

$$= \lambda \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(x, y, t + \delta_0)dt + e^{-\lambda t} u(x, y, t + \delta_0)\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \lambda e^{\lambda \delta_0} \widetilde{u}(x, y, \lambda) - u(x, y, \delta_0) - \lambda \int\limits_0^{\delta_0} e^{-(t-\delta_0)\lambda} u(x, y, t)dt.$$

В предыдущем пункте доказано, что для любого $\sigma > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\widetilde{u}(x, y, \lambda)$ аналитична при $|\arg \lambda| \leqslant \pi - \sigma$, $|\lambda| < \delta$. Следовательно, последнее равенство справедливо (по крайней мере) при $|\arg \lambda| \leqslant \pi - \sigma$, $|\lambda| < \delta$. Теперь зафиксируем $\sigma \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$. В предыдущем пункте доказано, что $\|\widetilde{u}(x,y,\lambda)\| \leqslant \dfrac{\text{const}}{|\lambda|}$ при $|\arg\lambda| \leqslant \pi-\sigma$, $|\lambda| < \delta(\sigma)$. Поэтому $\|\lambda e^{\lambda\delta_0}\widetilde{u}(x,y,\lambda)\| \leqslant$ $\text{const}\, e^{\delta_0 \text{Re}\lambda} \leqslant e^{\delta\delta_0}$ при $|\arg\lambda| \leqslant \pi-\sigma$, $|\lambda| < \delta$. $u(x,y,\delta_0)$ вообще не зависит от λ и ограничено по $x\in\mathbb{R}^n$, $y \geqslant 0$. Осталось оценить третье слагаемое:

$$\left|e^{-(t-\delta_0)\lambda}\right| = e^{(\delta_0-t)\text{Re}\lambda} \leqslant e^{|\lambda|\delta_0} < e^{\delta\delta_0} \text{ при } |\lambda|<\delta.$$

Отсюда

$$\left|\lambda\int\limits_0^{\delta_0} e^{-(t-\delta_0)\lambda}u(x,y,t)dt\right| \leqslant |\lambda|\delta_0 e^{\delta\delta_0}\|u(x,y,t)\| < \delta\delta_0 e^{\delta\delta_0}\|\varphi(x,y)\| \text{ при } |\lambda|<\delta.$$

Лемма 5.2.4 доказана. □

Из леммы 5.2.3 следует, что для любого $x\in\mathbb{R}^n$ и любого $y\geqslant 0$ функция $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ ограничена на $\Gamma = \left\{|\arg\lambda| \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right\}$ и в формуле обращения преобразования Лапласа

$$w(x,y,t+\delta_0) = \int\limits_{\text{Re}\lambda=\sigma_0>0} e^{\lambda t}\widetilde{w}(x,y,\lambda)d\lambda$$

контур интегрирования можно заменить контуром Γ.

В силу леммы 5.2.4 существует такое $\delta>0$, что $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ ограничена в области $\{0<|\lambda|<\delta\}\cap G$, где $G=\{|\arg\lambda|<\pi-\sigma\}$. Кроме того, $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ аналитична в области G. Таким образом, начало координат является правильной (или в крайнем случае устранимой особой) точкой функции $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$, поэтому $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ может быть доопределена при $\lambda=0$ по непрерывности; теперь $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ аналитична в области G и непрерывна в ее замыкании.

По лемме 5.2.3, $\lim\limits_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \lambda\in\Gamma}} \widetilde{w}(x,y,\lambda)=0$, поэтому функция $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ действительно ограничена на Γ.

Рассмотрим теперь на комплексной плоскости $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ контур, ограниченный следующими пятью отрезками:

отрезок прямой $\lambda_2=R$ при $-R\leqslant\lambda_1\leqslant\sigma_0$;
отрезок прямой $\lambda_2=-R$ при $-R\leqslant\lambda_1\leqslant\sigma_0$;
отрезок прямой $\lambda_2=\lambda_1$ при $-R\leqslant\lambda_1\leqslant 0$;
отрезок прямой $\lambda_2=-\lambda_1$ при $-R\leqslant\lambda_1\leqslant 0$;
отрезок прямой $\lambda_1=\sigma_0$ при $-R\leqslant\lambda_2\leqslant R$;

обозначим его через Γ_R.

К интегралу $\displaystyle\int\limits_{\Gamma_R} e^{\lambda t}\widetilde{w}(x,y,\lambda)d\lambda$ можно применить теорему Коши. Устремляя R к бесконечности, получаем:

$$\int\limits_{\text{Re}\lambda=\sigma_0>0} e^{\lambda t}\widetilde{w}(x,y,\lambda)d\lambda = \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\widetilde{w}(x,y,\lambda)d\lambda.$$

Зафиксируем x из $\mathbb{R}^n$ и неотрицательное y. Учитывая ограниченность функции $\widetilde{w}(x,y,\lambda)$ на Γ, получаем:

$$\left|\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t}\widetilde{w}(x,y,\lambda)d\lambda\right| \leqslant C\int\limits_{\Gamma} e^{t\text{Re}\lambda}d\lambda = 2C\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\rho t}{\sqrt{2}}}d\rho = \frac{\text{const}}{t}.$$

Таким образом, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant \dfrac{\text{const}}{t}$ при $t\geqslant\delta_0$. Поскольку $v(x,y,t)$ является решением задачи (5.12), (5.2) при $p(x,y)\equiv 1$, неравенство $\left|\dfrac{\partial v}{\partial t}\right| \leqslant \dfrac{\text{const}}{t}$ справедливо при $t\geqslant\delta_0$. Поэтому для любого $x\in\mathbb{R}^n$ и любого $y\geqslant 0$

$$f''(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \text{ при } t\to\infty.$$

Теорема 5.2.3 доказана.

5.2.4. Доказательство основной теоремы. Теперь можно перейти непосредственно к доказательству теоремы 5.2.1. Зафиксируем (x,y) из $\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}$. Обозначим $u(x,y,t)-v(x,y,t)$ через $g(t)$; очевидно, $g(t)$ ограничена. Обозначим $g(t)+tg'(t)$ через $h(t)$. Из теоремы 5.2.3 следует, что $h(t)$ ограничена по крайней мере при $t\geqslant 1$. Поскольку нас интересует поведение $g(t)$ лишь при $t\to\infty$, не ограничивая общности, можно считать, что $g(t)=0$ при $0\leqslant t\leqslant 1$. Поэтому $h(t)$ ограничена на положительной полуоси.

Далее легко проверить, что $g(t)=\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t h(\tau)d\tau$. В силу теоремы 5.2.2 справедливо предельное соотношение $\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t g(\tau)d\tau \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. $\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t \dfrac{1}{\tau}\int\limits_0^\tau h(\rho)d\rho d\tau \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$; поскольку $h(t)$ ограничена, предельное соотношение $\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t h(\tau)d\tau \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ тоже справедливо (в силу [82, лемма 1]), следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$. Это и означает, что для любого $x\in\mathbb{R}^n$, любого $y\geqslant 0$ и любого вещественного l предельное соотношение $u(x,y,t)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} l$ справедливо тогда и только тогда, когда справедливо предельное соотношение $v(x,y,t)\overset{t\to\infty}{\longrightarrow} l$.

Последнее соотношение в силу теоремы 5.1.1 эквивалентно равенству

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n+k+1}{r^{n+k+1}}\int\limits_{B_+(r)} y^k p(x,y)\varphi(x,y)dxdy=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+k+1}{2}\right)}\,l.$$

Далее

$$\frac{1}{r^{n+k+1}}\left|\int\limits_{B_+(r)} y^k q(x,y)\varphi(x,y)dxdy\right|\leqslant\frac{\|\varphi\|}{r^{n+k+1}}\int\limits_{B_+(r)} y^k|q(x,y)|dxdy.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $r\to\infty$ (в силу того, что $q(x,y)$ удовлетворяет условию (5.16)), а $\varphi(x,y)$ ограничена. Это и доказывает теорему 5.2.1, так как $p(x,y)=q(x,y)+1$.

Теорема 5.2.1 доказана полностью.

Из теоремы 5.2.1 и теорем 5.1.5 и 5.1.6 вытекают следующие утверждения.

Теорема 5.2.4. *Пусть* $n>0$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha\neq\beta$. *Пусть* $u_k(x,y,t)$ *— классическое ограниченное решение задачи* (5.12), (5.2). *Пусть условия теоремы* 5.2.1 *выполнены при* $k=\alpha$ *и* $k=\beta$. *Тогда существует такая ограниченная функция* $\varphi\in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+})$, *что для любого* $x\in\mathbb{R}^n$ *и любого неотрицательного* y $\lim\limits_{t\to\infty}u_\alpha(x,y,t)$ *существует, а* $\lim\limits_{t\to\infty}u_\beta(x,y,t)$ *не существует.*

Теорема 5.2.5. *Пусть* $n=0$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\alpha\neq\beta$. *Пусть* $u_k(x,y,t)$ *— классическое ограниченное решение задачи* (5.12), (5.2). *Пусть условия теоремы* 5.2.1 *выполнены при* $k=\alpha$ *и* $k=\beta$. *Тогда для любой непрерывной и ограниченной функции* φ *и любого неотрицательного* y *существование* $\lim\limits_{t\to\infty}u_\alpha(y,t)$ *эквивалентно существованию* $\lim\limits_{t\to\infty}u_\beta(x,y,t)$. *Если эти пределы существуют, то* $\lim\limits_{t\to\infty}u_\alpha(y,t)=\dfrac{\beta+1}{\alpha+1}\lim\limits_{t\to\infty}u_\beta(x,y,t)$.

Замечание. Рассмотрим $(n+2)$-мерный интеграл

$$\int\limits_{D_{a,0,0}}\xi^{k-1}\left|q\left(x,\sqrt{\xi^2+(\eta-d)^2}\right)\right|dxd\eta d\xi,$$

зависящий от параметров $a\in\mathbb{R}^n$, $d\geqslant 0$; здесь $D_{a,b,c}$ обозначает $(n+2)$-мерный полушар $\{x\in\mathbb{R}^n$, $\eta\geqslant 0$, $\xi\in\mathbb{R}^1\big||x-a|^2+(\eta-b)^2+(\xi-c)^2\leqslant r^2\}$.

Сделав замену переменных $\eta = y\cos\theta$, $\xi = y\sin\theta$, получим, что этот интеграл равен

$$\int\limits_{D_{a,0}} \int\limits_0^{\pi} y^k \sin^{k-1}\theta \left| q\left(x, \sqrt{y^2\sin^2\theta + y^2\cos^2\theta + 2dy\cos\theta + d^2}\right)\right| d\theta dx dy,$$

где $D_{a,b}$ обозначает $(n+1)$-мерный полушар $\{x \in \mathbb{R}^n, y \geqslant 0 \,\big|\, |x-a|^2 + (y-b)^2 \leqslant r^2\}$. Последний интеграл, в свою очередь, равен

$$\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_{D_{a,0}} y^k T_y^d |q(x,y)| dx dy = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} \int\limits_{B_+(r)} \eta^k T_\eta^y |q(\xi + a, \eta)| d\xi d\eta.$$

Таким образом, условие (5.15) эквивалентно следующему условию: существует такая константа b, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^{n+k+1}} \int\limits_{D_{x,-y,0}} \rho^{k-1} \left| p\left(\xi, \sqrt{\eta^2 + \rho^2}\right) - b\right| d\xi d\eta d\rho = 0$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}^n$, $y \geqslant 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
2. *Борок В. М., Житомирский Я. И.* О задаче Коши для линейных уравнений в частных производных с линейно преобразованным аргументом// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 3. — С. 515–518.
3. *Варфоломеев Е. М.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных операторов, возникающих в нелинейной оптике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 5–36.
4. *Веренич И. И., Матийчук М. И.* О свойствах решений параболических систем с оператором Бесселя// Матем. сборник. — Киев: Наук. думка, 1976. — С. 151–154.
5. *Власов В. В.* Об одном классе дифференциально-разностных уравнений в гильбертовых пространствах и некоторых спектральных вопросах// Докл. РАН. — 1992. — *327*, № 4–6. — С. 428–432.
6. *Власов В. В.* О поведении решений некоторых дифференциально-разностных уравнений с операторными коэффициентами// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1992. — *8*. — С. 80–83.
7. *Власов В. В.* О свойствах решений одного класса дифференциально-разностных уравнений и некоторых спектральных вопросах// Усп. мат. наук. — 1992. — *47*. — *5*. — С. 173–174.
8. *Власов В. В.* Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1996. — *1*. — С. 22–44.
9. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Об асимптотических свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *15*. — С. 112–125.
10. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
11. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 43–61.
13. *Власов В. В., Сакбаев В. Ж.* Корректная разрешимость некоторых дифференциально-разностных уравнений в шкале пространств Соболева// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 9. — С. 1194–1202.
14. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 6. — С. 3–54.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
16. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
17. *Гущин А. К.* О скорости стабилизации решения краевой задачи для параболического уравнения// Сиб. мат. ж. — 1969. — *10*, № 1. — С. 43–57.
18. *Гущин А. К.* Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка// Тр. МИАН. — 1973. — *126*. — С. 5–45.

19. *Гущин А. К.* Некоторые свойства обобщенного решения второй смешанной задачи для параболического уравнения// Мат. сб. — 1975. — *97*, № 2. — С. 242–261.
20. *Гущин А. К.* О поведении при $t \to \infty$ решений второй краевой задачи для параболического уравнения второго порядка// Докл. АН СССР. — 1976. — *277*, № 2. — С. 273–276.
21. *Гущин А. К.* Стабилизация решения второй смешанной задачи для параболического уравнения второго порядка// Мат. сб. — 1976. — *101*, № 3. — С. 459–499.
22. *Гущин А. К.* О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения// Мат. сб. — 1982. — *119*, № 4. — С. 451–508.
23. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения// Дифф. уравн. — 1971. — *112*, № 2. — С. 297–311.
24. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О стабилизации решения задачи Коши для параболического уравнения с одной пространственной переменной// Тр. МИАН. — 1971. — *112*. — С. 181–202.
25. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
26. *Денисов В. Н.* К вопросу о необходимых условиях стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве E^N и на любом его компакте// Докл. АН СССР. — 1981. — *260*, № 4. — С. 780–783.
27. *Денисов В. Н., Жиков В. В.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений// Мат. заметки. — 1985. — *37*, № 6. — С. 834–850.
28. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* О стабилизации решения задачи Коши для квазилинейных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 3. — С. 351–355.
29. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве// Сб. «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения». — Физматлит, 2003. — С. 397–417.
30. *Денисов В. Н., Репников В. Д.* О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений// Дифф. уравн. — 1984. — *20*, № 1. — С. 20–41.
31. *Жиков В. В.* О стабилизации решений параболических уравнений// Мат. сб. — 1977. — *104*, № 4. — С. 597–616.
32. *Жиков В. В.* Критерий поточечной стабилизации для параболических уравнений второго порядка с почти-периодическими коэффициентами// Мат. сб. — 1979. — *110*, № 2. — С. 304–318.
33. *Жиков В. В.* Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1983. — *46*. — С. 69–98.
34. *Жиков В. В., Калашников А. С., Олейник О. А.* О G-сходимости параболических операторов// Усп. мат. наук. — 1981. — *36*, № 1. — С. 11–58.
35. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М: Физматлит, 1993.
36. *Жиков В. В., Сиражудинов М. М.* Усреднение недивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка и стабилизация решения задачи Коши// Мат. сб. — 1981. — *116* (*158*), № 2. — С. 166–186.
37. *Иванов Л. А.* Задача Коши для некоторых операторов с особенностями// Дифф. уравн. — 1982. — *18*, № 6. — С. 1020–1028.
38. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 3. — С. 3–145.
39. *Катрахов В. В.* О задаче на собственные значения для сингулярных эллиптических операторов// Докл. АН СССР. — 1972. — *207*, № 2. — С. 284–287.
40. *Киприянов И. А.* Преобразования Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. МИАН. — 1967. — *89* (*2*). — С. 130–213.
41. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М: Наука, 1997.
42. *Киприянов И. А., Богачев Б. М.* О свойствах функций из весового пространства на дифференцируемых многообразиях// Тр. МИАН. — 1980. — *156*. — С. 110–120.
43. *Киприянов И. А., Катрахов В. В., Ляпин В. М.* О краевых задачах в области общего вида для сингулярных параболических систем уравнений// Докл. АН СССР. — 1976. — *230*, № 6. — С. 1271–1274.
44. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* Фундаментальные решения и задача Коши для линейных параболических систем с оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1968. — *181*, № 6. — С. 1320–1323.
45. *Крехивский В. В., Матийчук М. И.* О краевых задачах для параболических систем с оператором Бесселя// Докл. АН СССР. — 1971. — *139*, № 4. — С. 773–775.
46. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения// Мат. сб. — 1950. — *27* (*69*), № 2. — С. 175–184.

47. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
48. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. I// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 8. — С. 1463–1477.
49. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II// Дифф. уравн. — 1975. — *11*, № 7. — С. 1293–1303.
50. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. III// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 2. — С. 291–303.
51. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. IV// Дифф. уравн. — 1978. — *14*, № 5. — С. 885–899.
52. *Матийчук М. И.* Диссертация на соискание степени доктора физ.-мат. наук. — Черновцы: Черновицкий гос. ун-т, 1978.
53. *Матийчук М. И.* Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем// Укр. мат. ж. — 1984. — *36*б № 3. — С. 321–327.
54. *Муравник А. Б.* О стабилизации решения одной сингулярной задачи// Сб. «Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики». — Ин-т математики СО АН СССР, 1987. — С. 99–104.
55. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений параболического типа// Докл. РАН. — 2002. — *385*, № 5. — С. 604–607.
56. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых неоднородных дифференциально-разностных параболических уравнений// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 4. — С. 538–548.
57. *Муравник А. Б.* О стабилизации решений некоторых сингулярных квазилинейных параболических задач// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 6. — С. 858–865.
58. *Муравник А. Б.* О единственности решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 10. — С. 1385–1389.
59. *Муравник А. Б.* Об однозначной разрешимости задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 5. — С. 692–701.
60. *Муравник А. Б.* On properties of the stabilization functional of the Cauchy problem for quasilinear parabolic equations// Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. — 2004. — *12*, № 2. — С. 133–137.
61. *Муравник А. Б.* О задаче Коши для некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Докл. РАН. — 2005. — *402*, № 3. — С. 308–310.
62. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных параболических уравнений// Дифф. уравн. — 2005. — *41*, № 4. — С. 538–548.
63. *Муравник А. Б.* О стабилизации решений сингулярных эллиптических уравнений// Фундам. и прикл. мат. — 2006. — *12*, № 4. — С. 169—186.
64. *Муравник А. Б.* Об асимптотике решений некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2006. — *25*. — С. 143–183.
65. *Мышкис А. Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2003. — *4*. — С. 5–120.
66. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Основы теории специальных функций. — М: Наука, 1974.
67. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М: Наука, 1984.
68. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
69. *Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л.* Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — *35*, № 6. — С. 793–800.
70. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
71. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
72. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Теоремы о близости решений параболических уравнений и стабилизация решений задачи Коши// Докл. АН СССР. — 1975. — *221*, № 1. — С. 32–35.
73. *Порпер Ф. О., Эйдельман С. Д.* Асимптотическое поведение классических и обобщенных решений одномерных параболических уравнений второго порядка// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1978. — *36*. — С. 85–130.
74. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М: Наука, 1981.
75. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М: Наука, 1983.

76. *Рабинович В. С.* О дифференциально-разностных уравнениях в полупространстве// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 11. — С. 2030–2038.
77. *Рабинович В. С.* О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1983. — *19*, № 6. — С. 1032–1038.
78. *Репников В. Д.* О стабилизации решений параболических уравнений с осциллирующими коэффициентами// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 8. — С. 1353–1359.
79. *Репников В. Д.* Об асимптотической близости и стабилизации решения параболического уравнения// Дифф. уравн. — 1988. — *24*, — № 1. — С. 146–155.
80. *Репников В. Д.* Некоторые уточнения теоремы о стабилизации решений уравнения теплопроводности// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 6. — С. 812–815.
81. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Необходимые и достаточные условия установления решения задачи Коши// Докл. АН СССР. — 1966. — *167*, № 2. — С. 298–301.
82. *Репников В. Д., Эйдельман С. Д.* Новое доказательство теоремы о стабилизации решения задачи Коши для уравнения теплопроводности// Мат. сб. — 1967. — *73*, № 1. — С. 155–159.
83. *Селицкий А. М.* Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *21*. — С. 114–132.
84. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
85. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1996. — *51*, № 1. — С. 169–170.
86. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — *34*, № 10. — С. 1394–1401.
87. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
88. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
89. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 1. — С. 145–153.
90. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
91. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
92. *Чернышов Г. Л.* Диссертация на соискание степени кандидата физ.-мат. наук. — Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1972.
93. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М: Наука, 1964.
94. *Denisov V. N.* On stabilization of solutions of the Cauchy problem for parabolic equations// Nonlinear Anal. — 1997. — *30*, № 1. — С. 123–127.
95. *Denisov V. N., Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 2003. — *9*. — С. 88–93.
96. *Desch W., Schappacher W.* Spectral properties of finite-dimensional perturbed linear semigroups// J. Differential Equations — 1985. — *59*, № 1. — С. 80–102.
97. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestrari E.* L_2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delay in highest-order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102*, № 1. — С. 38–57.
98. *Gurevich P. L.* Solvability of the boundary value problem for some differential-difference equations// Funct. Differ. Equ. — 1998. — *5*, № 1–2. — С. 139–157.
99. *Gushchin A. K.* On the behaviour as $t \to \infty$ of solutions of the second mixed problem for a second-order parabolic equation// Appl. Math. Optim. — 1980. — *6*, № 2. — С. 169–180.
100. *Inone A., Miyakawa T., Yoshida K.* Some properties of solutions for semilinear heat equations with time lag// J. Differential Equations — 1977. — *24*, № 3. — С. 383–396.
101. *Kunisch K., Schappacher W.* Necessary conditions for partial differential equations with delay to generate C_0-semigroups// J. Differential Equations — 1983. — *50*, № 1. — С. 49–79.
102. *Muravnik A. B.* On properties of stabilization operator arised in mixed parabolic problems// Abstr. of International Conference on Mathematical Analysis and its Applications. Kaohsiung. — 2000. — С. 54-55.
103. *Muravnik A. B.* On properties of stabilization operator arising in diffusion models// Abstr. of International Functional Analysis Meeting on the Occasion of the 70th Birthday of Professor Manuel Valdivia. Valencia. — 2000. — С. 94-95.
104. *Muravnik A. B.* On stabilization of Cauchy problem solutions for non-linear parabolic equations with Bessel operator// Abstr. of Colloquium on Differential and Difference Equations. Brno. — 2000. — С. 51.

105. *Muravnik A. B.* On stabilization of positive solutions of singular quasi-linear parabolic equations// Abstr. of the Second International Conference on Stability and Control for Transforming Nonlinear Systems. Moscow. — 2000. — C. 33.
106. *Muravnik A. B.* Properties of stabilization functional for parabolic Cauchy problem// Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. — 2000. — *42*. — C. 217–221.
107. *Muravnik A. B.* Fundamental solutions and Cauchy problem solvability for parabolic differential-difference equations// Abstr. of International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the 100th Anniversary of I. G. Petrovskii. Moscow. — 2001. — C. 284.
108. *Muravnik A. B.* On Cauchy problem for quasi-linear singular parabolic equations with singular potentials// Abstr. of IUTAM Symposium on Tubes, Sheets and Singularities in Fluid Dynamics. Zakopane. — 2001. — C. 51.
109. *Muravnik A. B.* On fundamental solutions of parabolic differential-difference equations// Abstr. of the Second International Conference «Analytic Methods of Analysis and Differential Equations». Minsk. — 2001. — C. 117-118.
110. *Muravnik A. B.* On Cauchy problem for parabolic differential-difference equations// Nonlinear Anal. — 2002. — *51*, № 2. — C. 215–238.
111. *Muravnik A. B.* On large-time behaviour of Cauchy problem solutions for parabolic differential-difference equations// Abstr. of the Third International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Moscow. — 2002. — C. 77-78.
112. *Muravnik A. B.* On non-classical Cauchy problem for singular parabolic integrodifferential equations// Russ. J. Math. Phys. — 2002. — *9*, № 3. — C. 300–314.
113. *Muravnik A. B.* On stabilization of solutions of elliptic equations containing Bessel operators// Сб. «Integral methods in science and engineering. Analytic and numerical techniques». — Boston—Basel—Berlin: Birkhäuser, 2002. — C. 157–162.
114. *Muravnik A. B.* On stabilisation of solutions of singular quasi-linear parabolic equations with singular potentials// Fluid Mech. Appl. — 2002. — *71*. — C. 335–340.
115. *Muravnik A. B.* On function-theory aspects of quasi-linear stabilization problems// Abstr. of International Conference «Kolmogorov and Contemporary Mathematics». Moscow. — 2003. — C. 72-73.
116. *Muravnik A. B.* On non-classical Cauchy problem for singular parabolic functional-differential equations// Abstr. of the Third International Conference «Analytic Methods of Analysis and Differential Equations». Minsk. — 2003. — C. 129-130.
117. *Muravnik A. B.* Long-time behavior of the Cauchy problem solutions for differential-difference parabolic equations with nonlocal high-order terms// Abstr. of the 21st International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to I. G. Petrovskii. Moscow. — 2004. — C. 144-145.
118. *Muravnik A. B.* On non-classical Cauchy problem for parabolic functional-differential equations with Bessel operators// Funct. Differ. Equ. — 2006. — *13*, № 2. — C. 225–256.
119. *Muravnik A. B.* On the Cauchy problem for differential-difference parabolic equations with high-order nonlocal terms of general kind// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2006. — *16*, № 3. — C. 541–561.
120. *Muravnik A. B.* On asymptotic closeness of solutions of differential and differential-difference parabolic equations// Abstr. of the 22st International Conference «Differential Equations and Related Topics» dedicated to the memory of I. G. Petrovskii. Moscow. — 2007. — C. 204.
121. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback// Chaos in Optics. Proceedings SPIE. — 1993. — *2039*. — C. 342–352.
122. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differential Equations — 1986. — *63*, № 3. — C. 332–361.
123. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems and mulidimensional diffusion processes// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 3. — C. 327–360.
124. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
125. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — C. 261–278.
126. *Vorontsov M. A., Firth W. J.* Pattern formation and competition in nonlinear optical systems with two-dimensional feedback// Phys. Rev. A. — 1994. — *49*, № 4. — C. 2891–2906.
127. *Vorontsov M. A., Iroshnikov N. G., Abernathy R. L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical two-dimensional feedback system with field rotation// Chaos Solitons Fractals. — 1994. — *4*. — C. 1701–1716.
128. *Vorontsov M. A., Ivanov V. Yu., Shmalhausen V. I.* Rotary instability of the spatial structure of light fields in nonlinear media with two-dimensional feedback// Сб. «Laser optics in condensed matter». — New York: Plenum Press, 1988. — C. 507–517.

129. *Yoshida K.* The Hopf bifurcation and its stability for semilinear diffusion equations with time delay arising in ecology// Hiroshima Math. J. — 1982. — *12*. — С. 321–348.

Андрей Борисович Муравник
ОАО «Концерн «Созвездие», г. Воронеж, ул. Плехановская, 14
E-mail: amuravnik@yandex.ru