Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 4 (2022). С. 671–685
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685
УДК 517.956.225

УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С ОДНОСТОРОННИМ ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ: КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

В настоящей работе изучается усреднение параболического уравнения, заданного в области, перфорированной «крошечными» шариками. На границе этих перфораций заданы односторонние динамические граничные ограничения. Мы обращаемся к так называемому «критическому» случаю, который характеризуется связью между коэффициентом в граничном условии, периодом структуры и размером отверстий. В этом случае усредненное уравнение содержит нелокальный «странный» член. Этот член получается как решение вариационной задачи, содержащей обыкновенный дифференциальный оператор.

Ключевые слова: усреднение параболического уравнения, перфорированная область, критический случай, странный нелокальный член

Для цитирования: *А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова.* Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонним динамическим граничным условием: критический случай// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **68**, № 4. С. 671–685. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685

1. Введение

Работа посвящена изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε параболического уравнения $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x,t)$ заданного в области $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, перфорированной шарами радиуса порядка ε^α, $\alpha = \dfrac{n}{n-2}$. На границе этих перфораций заданы динамические односторонние ограничения с большим коэффициентом роста $\varepsilon^{-\alpha}$. Мы строим усредненное уравнение и доказываем теорему о сходимости в так называемом критическом случае. Этот случай характеризуется появлением «странного» нелокального оператора, который получается как решение некоторого дифференциального неравенства.

Динамические граничные условия возникают при изучении различных физико-химических процессов (обзор этой темы см., например, в [8, 9]). Параболическое уравнение вместе с динамическим краевым условием изучалось во многих работах, в качестве примера укажем [7, 17]. Усреднение начально-краевых задач с динамическим граничным условием изучалось в [6, 20, 21] в случае $\alpha = 1$. Критическое соотношение между параметрами задачи широко изучалось в литературе: здесь мы упоминаем работы [4, 15, 16], в которых исследуются задачи с динамическими краевыми условиями, и [1, 10–12], которые посвящены усреднению параболических уравнений и изучению асимптотического поведения соответствующих им аттракторов. В [4, 15, 16] было показано, что усредненная задача содержит нелокальный «странный» член, являющийся решением некоторого ОДУ. Усреднение задач типа Синьорини и появление «странного» члена изучалось во многих работах, например, [2,13,14,19]. Напротив, в настоящей статье рассматривается усреднение задачи с динамическим краевым условием типа Синьорини.

2. Формулировка результатов

2.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $G_0 = \{x : |x| < 1\}$. Определим $\delta B = \{x : \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta > 0$. Мы рассматриваем множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j\in\Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

где $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\alpha$, $\alpha = \dfrac{n}{n-2}$, $C_0 = \mathrm{const} > 0$, $\Upsilon_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^n$, а $\mathbb{Z}^n$ — набор векторов $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ с целыми коэффициентами z_i, $i = 1, \ldots, n$. Возьмем $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \rho(\partial\Omega, \overline{G_\varepsilon^j}) \geqslant 2\varepsilon)\}$. Отметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| = d\varepsilon^{-n}$, $d = \mathrm{const} > 0$.

Также мы определим $S_\varepsilon^j = \partial G_\varepsilon^j$, T_r^j — шар радиуса r с центром в P_ε^j, где P_ε^j — центр куба $Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + j\varepsilon$, $j \in \Upsilon_\varepsilon$.

Введем множества: $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon$, $\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \bigcup \partial\Omega$, $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$, $S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0, T)$, $\Gamma^T = \partial\Omega \times (0, T)$, где $0 < T < \infty$. В Q_ε^T рассмотрим следующую задачу с односторонними ограничениями, заданными на границе S_ε^T:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x,t), & (x,\, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon \geqslant 0, \quad \varepsilon^{-\gamma}\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geqslant 0, & (x,\, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon(\varepsilon^{-\gamma}\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon) = 0, & (x,\, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon = 0, & (x,\, t) \in \Gamma^T, \\ u_\varepsilon(x,\, 0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x,\, 0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\Delta u \equiv \mathrm{div}(\nabla u)$, $f \in L^2(Q^T)$, $Q^T = \Omega \times (0,T)$, $\partial_\nu u \equiv (\nabla u, \nu)$, ν — единичный вектор внешней нормали к S_ε, $\gamma = \dfrac{n}{n-2}$, $n \geqslant 3$.

Через $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ обозначим пространство, которое получается замыканием в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых в Ω_ε функций, обращающихся в нуль вблизи границы $\partial\Omega$. Определим пространство $H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ как сопряженное к $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ и обозначим отношение двойственности через $\langle ., . \rangle_{\Omega_\varepsilon}$. Применяя теорему о следах к функциям из пространства $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$, получим, что их следы принадлежат пространству $H^{1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$. Через $H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное к $H^{1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$, а через $\langle ., . \rangle_{S_\varepsilon}$ выразим отношение двойственности.

Далее, мы определим $\mathbb{K}_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) | \varphi \geqslant 0$ п.в. на $S_\varepsilon\}$. Легко видеть, что $\mathbb{K}_\varepsilon$ является замкнутым выпуклым подмножеством $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$. Наряду с этим множеством рассмотрим $\mathcal{K}_\varepsilon = \{\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)) | \varphi(t) \in \mathbb{K}_\varepsilon$ п.в. $t \in [0, T]\}$, которое также является замкнутым выпуклым подмножеством в пространстве $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$.

Мы говорим, что функция $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$ такая, что $u_\varepsilon(x, 0) = 0$ п.в. в Ω_ε, $u_\varepsilon(x, 0) = 0$ п.в. на S_ε и

$$\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \quad \partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)),$$

является *слабым решением* задачи (2.1), если она удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt \geqslant \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_\varepsilon) dx dt \tag{2.2}$$

для произвольной функции $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

Замечание 2.1. Из интегрального неравенства (2.2) получаем, что u_ε также удовлетворяет следующему интегральному неравенству:

$$\int_0^T \langle \partial_t \zeta, \zeta - u_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t \zeta, \zeta - u_\varepsilon \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla \zeta \nabla (\zeta - u_\varepsilon) dx dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{Q_\varepsilon^T} f(\zeta - u_\varepsilon) dx dt - \frac{1}{2} \|\zeta(x,0)\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} - \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|\zeta(x,0)\|^2_{L_2(S_\varepsilon)}, \quad (2.3)$$

где ζ — произвольная функция из множества $\mathcal{K}_\varepsilon$ такая, что $\partial_t \zeta \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$ и $\partial_t \zeta \in L^2(0,T;H^{-1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega))$.

2.2. Существование, единственность, продолжение. С помощью метода штрафа (см. [5]) доказывается теорема существования и единственности решения задачи (2.1).

Теорема 2.1. *Существует единственное слабое решение u_ε задачи* (2.1), *и справедлива следующая оценка*:

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))} + \varepsilon^{-\gamma/2} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(S_\varepsilon))} + \\ + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} + \varepsilon^{-\gamma/2} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon))} \leqslant K; \quad (2.4)$$

здесь и ниже константа K не зависит от ε.

Доказательство. Штрафная задача, связанная с задачей (2.1), принимает вид

$$\begin{cases} \partial_t u_{\varepsilon,\delta} - \Delta u_{\varepsilon,\delta} = f(x,t), & (x,\,t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \varepsilon^{-\gamma} \partial_t u_{\varepsilon,\delta} + \partial_\nu u_{\varepsilon,\delta} + \delta^{-1} u^-_{\varepsilon,\delta} = 0, & (x,\,t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_{\varepsilon,\delta} = 0, & (x,\,t) \in \Gamma^T, \\ u_{\varepsilon,\delta}(x,\,0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_{\varepsilon,\delta}(x,\,0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases}$$

где u^- — отрицательная часть функции u, т. е. $u^- = \inf(u,0)$. По решению этой задачи рассмотрим функцию $u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$ такую, что $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0,T;H^{-1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega))$, $u_{\varepsilon,\delta}(x,0) = 0$ п.в. в Ω_ε, $u_{\varepsilon,\delta}(x,0) = 0$ п.в. на S_ε, и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla v dx dt + \delta^{-1} \int_{S_\varepsilon^T} u^-_{\varepsilon,\delta} v ds dt = \int_{Q_\varepsilon^T} f v dx dt,$$

где v — произвольная функция из $L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$. Существование и единственность решения штрафной задачи можно доказать, используя метод монотонности и приближения Галеркина (см. общий обзор в [5] и аналогичную задачу в [4, 16]). В статье [16] показано, что решение таково, что $u_{\varepsilon,\delta} \in C([0,T];L^2(\Omega_\varepsilon))$, $u_{\varepsilon,\delta} \in C([0,T];L^2(S_\varepsilon))$, $u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$, $\partial_t u_{\varepsilon,\delta} \in L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon))$. Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\int_0^T \|\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \|\partial_t u_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} dt + \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|\nabla u_{\varepsilon,\delta}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leqslant K,$$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|u_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma} \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \|u_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} + \int_0^T \|\nabla u_{\varepsilon,\delta}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} dt \leqslant K,$$

где константа K не зависит от ε и δ. Значит, существует подпоследовательность (мы сохраняем нумерацию исходной последовательности) такая, что

$$u_{\varepsilon,\delta} \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)),$$
$$u_{\varepsilon,\delta} \to u_\varepsilon \text{ сильно в } L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon)),$$
$$\partial_t u_{\varepsilon,\delta} \rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon)),$$
$$\partial_t u_{\varepsilon,\delta} \rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon)).$$

Далее покажем, что $u_\varepsilon^- \equiv 0$ на S_ε^T. Действительно, возьмем $u_{\varepsilon,\delta}$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве для штрафной задачи и получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon^T} (u_{\varepsilon,\delta}^-)^2 dxdt \leqslant \delta \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f u_{\varepsilon,\delta} dxdt \leqslant \delta \|f\|_{L^2(Q^T)} \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)} \leqslant K\delta.$$

Следовательно, $u_{\varepsilon,\delta}^- \to 0$ сильно в $L^2(S_\varepsilon^T)$. В силу монотонности функции $u \to u^-$ имеем

$$\int\limits_{S_\varepsilon^T} (u_{\varepsilon,\delta}^- - \psi^-)(u_{\varepsilon,\delta} - \psi) dsdt \geqslant 0,$$

где ψ — произвольная функция из $L^2(S_\varepsilon^T)$. Перейдем к пределу при $\delta \to 0$ в этом неравенстве и получим

$$-\int\limits_{S_\varepsilon^T} \psi^-(u_\varepsilon - \psi) dxdt \geqslant 0.$$

Возьмем $\psi = u_\varepsilon - \lambda w$, где w — произвольная функция из $L^2(S_\varepsilon^T)$, $\lambda > 0$, и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. Таким образом, мы получим

$$\int\limits_{S_\varepsilon^T} u_\varepsilon^- w dxdt \leqslant 0$$

для произвольной функции $w \in L^2(S_\varepsilon^T)$. Следовательно, $u_\varepsilon^- \equiv 0$ для п.в. $(x,t) \in S_\varepsilon^T$, т. е. $u_\varepsilon \geqslant 0$ на S_ε^T. Следовательно, $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$.

Теперь возьмем произвольную функцию $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$ ($v^- \equiv 0$ п.в. на S_ε^T) и получим

$$\int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta}\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta}\rangle_{S_\varepsilon} dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla (v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt - \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt = \delta^{-1} \int\limits_{S_\varepsilon^T} (v^- - u_{\varepsilon,\delta}^-)(v - u_{\varepsilon,\delta}) dsdt \geqslant 0.$$

Переписывая это неравенство, получаем

$$\int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_{\varepsilon,\delta}|^2 dxdt \leqslant \int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta}\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta}\rangle_{S_\varepsilon} dt +$$
$$+ \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla v dxdt - \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt = \int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int\limits_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v\rangle_{S_\varepsilon} dt + \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla v dxdt -$$
$$- \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt - \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon,\delta}(x,T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} - \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,\delta}(x,T)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}.$$

Отображения $t \to \|u_{\varepsilon,\delta}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ и $t \to \|u_{\varepsilon,\delta}(x,t)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}$ непрерывны, поэтому последние два члена определены корректно. Более того, из оценки $u_{\varepsilon,\delta}$ получаем, что последовательность $u^2_{\varepsilon,\delta}(x,T)$ ограничена в соответствующем пространстве, поэтому можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получаем

$$\int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(x,T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_\varepsilon(x,T)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{\delta \to 0} \Big(\int\limits_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_{\varepsilon,\delta}|^2 dxdt + \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon,\delta}(x,T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,\delta}(x,T)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} \Big) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v\rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla v dxdt - \int_{Q_\varepsilon^T} f(v-u_\varepsilon) dxdt.$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v-u_\varepsilon\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v-u_\varepsilon\rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (v-u_\varepsilon) dxdt \geqslant \int_{Q_\varepsilon^T} f(v-u_\varepsilon) dxdt.$$

Следовательно, предельная функция u_ε является решением (2.1). Оценки (2.4) следуют из оценок функции $u_{\varepsilon,\delta}$.

Далее покажем единственность решения. Предположим противное, что существует два решения u_ε^1 и u_ε^2. Возьмем u_ε^2 в качестве пробной функции в вариационном неравенстве для u_ε^1 и наоборот. Затем суммируем неравенства и получаем

$$-\int_0^T \langle \partial_t(u_\varepsilon^2-u_\varepsilon^1), u_\varepsilon^2-u_\varepsilon^1\rangle_{\Omega_\varepsilon} dt - \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t(u_\varepsilon^2-u_\varepsilon^1), u_\varepsilon^2-u_\varepsilon^1\rangle_{S_\varepsilon} dt - \|\nabla(u_\varepsilon^2-u_\varepsilon^1)\|^2_{L^2(Q_\varepsilon^T)} \geqslant 0.$$

Отсюда сразу заключаем, что $u_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^2$ п.в. в Q_ε^T и S_ε^T. □

Мы будем использовать хорошо известный результат о продолжении (см. [18]).

Теорема 2.2. *Пусть Ω_ε — определенная выше перфорированная область. Тогда существует оператор продолжения $P_\varepsilon : H^1(Q_\varepsilon^T) \to H^1(Q^T)$, $Q^T = \Omega \times (0,T)$, такой, что*

$$P_\varepsilon u = u \quad \text{в } Q_\varepsilon^T,$$
$$\|P_\varepsilon u\|_{H^1(Q^T)} \leqslant K\|u\|_{H^1(Q_\varepsilon^T)},$$
$$\|\partial_t(P_\varepsilon u_\varepsilon)\|^2_{L^2(Q^T)} + \|\nabla_x P_\varepsilon u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q^T)} \leqslant K(\|\partial_t u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\varepsilon^T)} + \|\nabla_x u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\varepsilon^T)}).$$

Следовательно, из оценок (2.4) следует, что существует подпоследовательность (используем обозначение исходной последовательности) такая, что при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\begin{gathered} P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\ P_\varepsilon u_\varepsilon \to u_0 \quad \text{сильно в } L^2(Q^T),\\ \partial_t(P_\varepsilon u_\varepsilon) \rightharpoonup \partial_t u_0 \quad \text{слабо в } L^2(Q^T), \end{gathered} \tag{2.5}$$

где u_ε — решение задачи (2.1).

2.3. Теорема усреднения.

Следующая теорема описывает предельную функцию u_0 из (2.5).

Теорема 2.3. *Пусть $n \geqslant 3$, $\alpha = \gamma = \dfrac{n}{n-2}$, u_ε — слабое решение задачи (2.1). Тогда функция u_0, определенная в (2.5), является слабым решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} \partial_t u_0 - \Delta u_0 + \mathcal{A}_n(u_0 - H_{u_0}) = f(x,t), & (x,t) \in Q^T,\\ \partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n H_{u_0} \geqslant \mathcal{B}_n u_0, \quad H_{u_0} \geqslant 0, \quad H_{u_0}(\partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n(H_{u_0} - u_0)) = 0, & (x,t) \in Q^T,\\ u_0 = 0, & (x,t) \in \Gamma^T,\\ u_0(x,0) = 0, & x \in \Omega,\\ H_{u_0}(x,0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

где константы $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ выражаются в виде

$$\mathcal{A}_n = (n-2)C_0^{n-2}\omega_n, \quad \mathcal{B}_n = (n-2)C_0^{-1}, \quad \omega_n = |\,\partial G_0\,|\,.$$

3. Нелокальный странный член

В усредненном уравнении (2.6) появляется нелокальный странный член как решение некоторой задачи, связанной с дифференциальным неравенством. В этом разделе мы докажем существование и единственность этого решения и выведем некоторые его свойства.

Пусть $\varphi \in L^2(0,T)$ фиксировано. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi \geqslant \mathcal{B}_n\varphi, \quad H_\varphi \geqslant 0, \quad \left(\dfrac{d}{dt}H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n\varphi\right) H_\varphi = 0, \quad t \in (0,T), \\ H_\varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Вариационная формулировка задачи (2.1) имеет следующий вид: найти функцию $H_\varphi \in H^1(0,T)$, $H_\varphi(0) = 0$, $H_\varphi \geqslant 0$ при $t \in (0,T)$ такую, что

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt}H_\varphi(v - H_\varphi)dt + \mathcal{B}_n \int\limits_0^T H_\varphi(v - H_\varphi)dt \geqslant \mathcal{B}_n \int\limits_0^T \varphi(v - H_\varphi)dt, \tag{3.2}$$

где $v \in L^2(0,T)$ и $v \geqslant 0$ при п.в. $t \in (0,T)$.

Теорема 3.1. *Существует единственное решение $H_\varphi \in H^1(0,T)$ вариационного неравенства* (3.2).

Доказательство. Сначала покажем единственность решения. Предположим противное, что существует два решения H^1_φ и H^2_φ. Введем функцию $w = \dfrac{H^1_\varphi + H^2_\varphi}{2}$. Очевидно, что $w \geqslant 0$ при п.в. $t \in (0,T)$. Затем возьмем $v = w$ в качестве пробной функции в вариационных неравенствах для двух решений и просуммируем их:

$$-\int\limits_0^T \frac{d}{dt}(H^1_\varphi - H^2_\varphi)(H^1_\varphi - H^2_\varphi)dt - \mathcal{B}_n \int\limits_0^T (H^1_\varphi - H^2_\varphi)^2 dt \geqslant 0.$$

Далее мы имеем

$$-|(H^1_\varphi - H^2_\varphi)(T)|^2 - \int\limits_0^T (H^1_\varphi - H^2_\varphi)^2 dt \geqslant 0.$$

Отсюда немедленно следует $H^1_\varphi = H^2_\varphi$ при $t \in (0,T)$.

Мы будем использовать метод штрафа, чтобы доказать существование решения. Уравнение со штрафом, связанное с вариационным неравенством, принимает вид

$$\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} + \mathcal{B}_n H_{\varphi,\delta} + \frac{1}{\delta}H^-_{\varphi,\delta} = \mathcal{B}_n\varphi \tag{3.3}$$

с начальным условием $H_{\varphi,\delta}(0) = 0$. Существование и единственность решения этого уравнения такого, что $H_{\varphi,\delta} \in H^1(0,T)$, устанавливается стандартными методами. Далее мы покажем, что решение этой задачи сходится к решению вариационного неравенства при $\delta \to 0$. Во-первых, мы получим априорные оценки, взяв $H_{\varphi,\delta}$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве для штрафной задачи. При $\tau \in (0,T)$ имеем

$$\int\limits_0^\tau \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}H_{\varphi,\delta}dt + \mathcal{B}_n \int\limits_0^\tau H^2_{\varphi,\delta}dt + \delta^{-1}\int\limits_0^\tau (H^-_{\varphi,\delta})^2 dt = \mathcal{B}_n \int\limits_0^\tau \varphi H_{\varphi,\delta}dt.$$

Отсюда мы получим

$$\frac{1}{2}(H_{\varphi,\delta}(\tau))^2 + \mathcal{B}_n \int\limits_0^\tau H^2_{\varphi,\delta}dt + \delta^{-1}\int\limits_0^\tau (H^-_{\varphi,\delta})^2 dt \leqslant K\|\varphi\|^2_{L^2(0,T)} + \frac{\mathcal{B}_n}{2}\int\limits_0^\tau H^2_{\varphi,\delta}dt, \tag{3.4}$$

где константа K не зависит от δ. Таким образом, мы имеем

$$|H_{\varphi,\delta}(\tau)| \leqslant C,$$

$$\|H_{\varphi,\delta}\|^2_{L^2(0,T)} + \delta^{-1}\|H_{\varphi,\delta}\|^2_{L^2(0,T)} \leqslant C.$$

Тогда возьмем $\dfrac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}$ в качестве пробной функции в интегральном тождестве для задачи на $H_{\varphi,\delta}$ и получим

$$\int\limits_0^T \left|\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}\right|^2 dt + \frac{\mathcal{B}_n}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \frac{\delta^{-1}}{2}|H^-_{\varphi,\delta}(T)|^2 = \mathcal{B}_n\int\limits_0^T \varphi\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}dt.$$

Используя неравенство Коши, получаем

$$\left\|\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}\right\|_{L^2(0,T)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^2(0,T)}.$$

Следовательно, мы имеем $\|H_{\varphi,\delta}\|_{H^1(0,T)} \leqslant K$.

Таким образом, существует подпоследовательность (по-прежнему с индексом δ) такая, что $H_{\varphi,\delta} \to H_\varphi$ равномерно по $t \in [0,T]$, $H^-_{\varphi,\delta} \to 0$ сильно в $L^2(0,T)$ и $\dfrac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} \rightharpoonup \dfrac{d}{dt}H_\varphi$ слабо в $L^2(0,T)$ при $\delta \to 0$. Далее покажем, что $H^-_\varphi \equiv 0$. Действительно, имеем

$$\int\limits_0^T (H^-_{\varphi,\delta} - \psi^-)(H_{\varphi,\delta} - \psi)dt \geqslant 0$$

при произвольной функции $\psi \in L^2(0,T)$. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$-\int\limits_0^T \psi^-(H_\varphi - \psi)dt \geqslant 0.$$

Взяв $\psi = H_\varphi - \lambda w$, $w \in L^2(0,T)$, $\lambda > 0$, мы будем иметь

$$\int\limits_0^T (H_\varphi - \lambda w)^- w dt \leqslant 0$$

и, переходя к пределу при $\lambda \to 0$, получим, что $H^-_\varphi \equiv 0$ при п.в. $t \in (0,T)$, значит, $H_\varphi \geqslant 0$ и H_φ — допустимая функция.

Наконец, возьмем произвольную функцию $v \in L^2(0,T)$ такую, что $v \geqslant 0$ для п.в. $t \in (0,T)$, и получим

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}(v - H_{\varphi,\delta})dt + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T (H_{\varphi,\delta} - \varphi)(v - H_{\varphi,\delta})dt = \delta^{-1}\int\limits_0^T (v^- - H^-_{\varphi,\delta})(v - H_{\varphi,\delta})dt \geqslant 0.$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T H^2_{\varphi,\delta}dt \leqslant \int\limits_0^T \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}v dt + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T H_{\varphi,\delta}v dt - \mathcal{B}_n\int\limits_0^T \varphi(v - H_{\varphi,\delta})dt.$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, мы получим

$$\frac{1}{2}|H_\varphi(T)|^2 + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T H^2_\varphi dt = \lim_{\delta\to 0}\Big(\frac{1}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T H^2_{\varphi,\delta}dt\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \frac{d}{dt}H_\varphi v dt + \mathcal{B}_n\int\limits_0^T H_\varphi v dt - \mathcal{B}_n\int\limits_0^T \varphi(v - H_\varphi)dt.$$

В итоге получаем, что H_φ удовлетворяет условию

$$\int\limits_0^T \frac{d}{dt} H_\varphi (v - H_\varphi)dt + \mathcal{B}_n \int\limits_0^T H_\varphi(v - H_\varphi)dt \geqslant \mathcal{B}_n \int\limits_0^T \varphi(v - H_\varphi)dt.$$

Значит, H_φ является решением вариационного неравенства. □

Пусть H_φ и H_ψ — решения вариационных неравенств с ϕ и ψ в правой части неравенства. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3.1. *Оператор $H_\varphi : L^2(0,T) \to L^2(0,T)$, переводящий функцию φ в решение вариационного неравенства* (3.2)*, является непрерывным по Липшицу и монотонным. Другими словами, пусть φ, $\psi \in L^2(0,T)$, тогда соответствующие решения H_φ и H_ψ удовлетворяют*

$$\|H_\varphi - H_\psi\|_{L^2(0,T)} \leqslant \|\varphi - \psi\|_{L^2(0,T)}, \quad \int\limits_0^T (H_\varphi - H_\psi)(\varphi - \psi)dt \geqslant 0.$$

Доказательство. Введем функцию $w = \dfrac{H_\varphi + H_\psi}{2}$ и возьмем ее в качестве пробной в вариационных неравенствах для функций H_φ, H_ψ. Затем суммируем полученные выражения и получаем

$$-\int\limits_0^T \frac{d}{dt}(H_\varphi - H_\psi)(H_\varphi - H_\psi)dt - \mathcal{B}_n \int\limits_0^T (H_\varphi - H_\psi)^2 dt \geqslant -\mathcal{B}_n \int\limits_0^T (\varphi - \psi)(H_\varphi - H_\psi)dt.$$

Переписывая это неравенство, получаем

$$\int\limits_0^T (H_\varphi - H_\psi)^2 dt \leqslant \int\limits_0^T (\varphi - \psi)(H_\varphi - H_\psi)dt. \tag{3.5}$$

Отсюда получим

$$\|H_\varphi - H_\psi\|_{L^2(0,T)} \leqslant \|\varphi - \psi\|_{L^2(0,T)}.$$

Последняя оценка дает непрерывность оператора, а (3.5) подразумевает монотонность. Это завершает доказательство. □

Замечание 3.1. Непрерывность и монотонность оператора H_φ влечет существование и единственность решения усредненной задачи (2.6), что можно доказать методом Галеркина (см. [5]).

Замечание 3.2. Если в краевом условии для задачи (2.1) взять $\beta \partial_t u_\varepsilon$, $\beta > 0$, то в задаче (3.1) будем иметь $\beta \dfrac{d}{dt} H_\varphi$. Переходя к пределу при $\beta \to 0$, получаем условия: $H_\varphi \geqslant \varphi$, $H_\varphi \geqslant 0$, $H_\varphi(H_\varphi - \varphi) = 0$. Задача имеет очевидное решение $H_\varphi = \varphi^+$, где $\varphi^+ = \sup(0, \varphi)$. Это приводит к стандартным результатам, например, ср. с результатом статьи [13].

4. Доказательство теоремы об усреднении

4.1. Выбор пробной функции.

4.1.1. Пространственная составляющая. Рассмотрим вспомогательные функции w_ε^j, $j \in \Upsilon_\varepsilon$, как решение краевых задач

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon^j = 0, & x \in T^j_{\varepsilon/4} \setminus \overline{G^j_\varepsilon}, \\ w_\varepsilon^j = 1, & x \in \partial G^j_\varepsilon, \\ w_\varepsilon^j = 0, & x \in \partial T^j_{\varepsilon/4}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Мы можем найти в явном виде решение задачи (4.1):

$$w_\varepsilon^j = \frac{|x - P_\varepsilon^j|^{2-n} - (\varepsilon/4)^{2-n}}{a_\varepsilon^{2-n} - (\varepsilon/4)^{2-n}}. \tag{4.2}$$

Положим

$$W_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, & x \in T^j_{\varepsilon/4} \setminus \overline{G^j_\varepsilon}, \\ 1, & x \in G^j_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup\limits_{j\in\Upsilon_\varepsilon} T^j_{\varepsilon/4}}. \end{cases} \tag{4.3}$$

Нетрудно видеть, что $W_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H^1_0(\Omega)$.

4.1.2. Временная составляющая. Рассмотрим $\varphi = \eta(t)\psi(x)$, $\eta(t) \in C^1([0,T])$, $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ и определим функции $H^{\varepsilon,j}_\varphi(t)$ как решение набора задач для дифференциального неравенства

$$\begin{cases} \partial_t H^{\varepsilon,j}_\varphi + \mathcal{B}_n H^{\varepsilon,j}_\varphi \geqslant \mathcal{B}_n\varphi(P^j_\varepsilon, t), \quad H^{\varepsilon,j}_\varphi \geqslant 0, \quad (\partial_t H^{\varepsilon,j}_\varphi + \mathcal{B}_n(H^{\varepsilon,j}_\varphi - \varphi(P^j_\varepsilon,t)))H^{\varepsilon,j}_\varphi = 0, \quad t\in(0,T), \\ H^{\varepsilon,j}_\varphi(0) = 0. \end{cases} \tag{4.4}$$

Заметим, что $H^{\varepsilon,j}_\varphi(t) = H_\varphi(P^j_\varepsilon, t)$, где H_φ — решение задачи

$$\begin{cases} \partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi \geqslant \mathcal{B}_n\varphi(x,t), \quad H_\varphi \geqslant 0, \quad (\partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n\varphi(x,t))H_\varphi = 0, \quad t\in(0,T), \\ H_\varphi(x,0) = 0, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $x \in \Omega$ — параметр.

4.1.3. Пробная функция. При $t \in [0,T]$ введем вспомогательную функцию

$$W_{\varphi,\varepsilon}(x,t) = \begin{cases} w^j_\varepsilon(x)(\varphi(x,t) - H^{\varepsilon,j}_\varphi(t)), & x \in T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \overline{\bigcup\limits_{j\in\Upsilon_\varepsilon} T^j_{\varepsilon/4}}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Легко видеть, что функция $W_{\varphi,\varepsilon}$ принадлежит $H^1(Q^T_\varepsilon)$. Из теоремы 2.2 следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\begin{gathered} P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon} \rightharpoonup 0 \text{ в } L^2(0,T;H^1_0(\Omega)), \quad P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon} \to 0 \text{ в } L^2(Q^T), \\ \partial_t(P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon}) \rightharpoonup 0 \ \text{ слабо в } L^2(Q^T). \end{gathered} \tag{4.7}$$

4.2. Преобразование интегрального неравенства. Рассмотрим функцию $\zeta = \varphi(x,t) - W_{\varphi,\varepsilon}$. На каждом $T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}$ имеем $\zeta = (1-w^j_\varepsilon(x))\varphi(x,t) + w^j_\varepsilon(x)H^{\varepsilon,j}_\varphi(t)$. В частности, $\zeta = H^{\varepsilon,j}_\varphi(t) \geqslant 0$ на S^j_ε. Следовательно, $\zeta \geqslant 0$ на S_ε и $\zeta \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Возьмем ζ в качестве пробной функции в интегральном неравенстве (2.3) и получим

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q^T_\varepsilon} (\partial_t\varphi - \partial_t W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_0^T\int\limits_{S_\varepsilon} \partial_t(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dsdt + \\ + \int\limits_{Q^T_\varepsilon} \nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon})\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{Q^T_\varepsilon} f(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt + \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_{S^T_\varepsilon} g(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dsdt - \\ - \frac{1}{2}\|\varphi(x,0) - W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0}\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} - \frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}\|\varphi(x,0) - W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0}\|^2_{L_2(S_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Поскольку $W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0} = \varphi(x,0) - H^{\varepsilon,j}_\varphi(0)$ на S_ε и $H^{\varepsilon,j}_\varphi(0) = 0$, последнее слагаемое равно нулю.

Ввиду того, что (2.5) и (4.7) при $\varepsilon \to 0$, заключаем, что

$$\begin{gathered}\int\limits_{Q_\varepsilon^T} (\partial_t\varphi - \partial_t W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt \to \int\limits_{Q^T} \partial_t\varphi(\varphi - u_0)dxdt,\\ \int\limits_{Q_\varepsilon^T} f(x,t)(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt \to \int\limits_{Q^T} f(x,t)(\varphi - u_0)dxdt,\\ \frac{1}{2}\|\varphi(x,0) - W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0}\|^2_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \to \frac{1}{2}\|\varphi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{gathered} \tag{4.9}$$

Используя определение $W_{\varphi,\varepsilon}$, мы получим

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma}\int\limits_0^T\int\limits_{S_\varepsilon} \partial_t(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dsdt = \varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_{S_\varepsilon^j} \frac{d}{dt}H_\varphi^{\varepsilon,j}(t)(H_\varphi^{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt. \tag{4.10}$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}&\int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon})\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt =\\ &\qquad= \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla\varphi\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt - \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla W_{\varphi,\varepsilon}\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Используя (2.5) и (4.7), мы получаем для первого члена в (4.11), что при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla\varphi\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt \to \int\limits_{Q^T} \nabla\varphi\nabla(\varphi - u_0)dxdt. \tag{4.12}$$

Затем переходим ко второму члену в (4.11). Сначала, используя свойства функций w_ε^j, получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = \int\limits_{Q_\varepsilon^T} \nabla W_{\varphi,\varepsilon}\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T \int\limits_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} \nabla W_{\varphi,\varepsilon}\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon))dxdt =\\ = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T \int\limits_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} \nabla w_\varepsilon^j\nabla((\varphi(P_\varepsilon^j,t) - H_\varphi^{\varepsilon,j})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon))dxdt + \kappa_{1,\varepsilon},\end{aligned} \tag{4.13}$$

где

$$\kappa_{1,\varepsilon} = \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T \int\limits_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} \nabla(w_\varepsilon^j(\varphi(x,t) - \varphi(P_\varepsilon^j,t))\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt.$$

Далее покажем, что $\kappa_{1,\varepsilon} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Действительно, $|\varphi(x,t) - \varphi(P_\varepsilon^j,t)| \leqslant K_1|x - P_\varepsilon^j| \leqslant K_2\varepsilon$ при $x \in T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}$, где константа K_2 не зависит от ε. Используя эту оценку, получаем

$$\begin{aligned}&\Big|\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T \int\limits_{T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon}} (\varphi(x,t) - \varphi(P_\varepsilon^j,t))\nabla w_\varepsilon^j\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)dxdt\Big| \leqslant\\ &\qquad\leqslant K\varepsilon\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}(\|\nabla w_\varepsilon^j\|^2_{L^2(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon})} + \|\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)\|^2_{L^2(T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G^j_\varepsilon})}) \leqslant\\ &\qquad\qquad\leqslant K\varepsilon(\|\nabla W_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}) \leqslant K\varepsilon \to 0\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. Поскольку функция W_ε стремится к 0 сильно в $L^2(\Omega)$, имеем

$$\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{T_\varepsilon^j\setminus\overline{G_\varepsilon^j}} w_\varepsilon^j\nabla(\varphi(x,t)-\varphi(P_\varepsilon^j,t))\nabla(\varphi-W_{\varphi,\varepsilon}-u_\varepsilon)dxdt=\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon\nabla\varphi\nabla(\varphi-W_{\varphi,\varepsilon}-u_\varepsilon)dxdt\to 0.$$

Учитывая полученные сходимости, заключаем, что $\kappa_{1,\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Используя формулу Грина и определение w_ε^j, сделаем преобразование

$$\mathcal{L}_1=\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}\partial_\nu w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H_\varphi^{\varepsilon,j})(\varphi-W_{\varphi,\varepsilon}-u_\varepsilon)dsdt+$$
$$+\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{S_\varepsilon^j}\partial_\nu w_\varepsilon^j(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H_\varphi^{\varepsilon,j})(\varphi-W_{\varphi,\varepsilon}-u_\varepsilon)dsdt+\kappa_{1,\varepsilon},\quad(4.14)$$

где $\kappa_{1,\varepsilon}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Используя явную формулу, для функций w_ε^j получаем

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j|_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}=-(n-2)\frac{\varepsilon C_0^{n-2}2^{2n-2}}{1-a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4}},\qquad \partial_\nu w_\varepsilon^j|_{S_\varepsilon^j}=(n-2)\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{n-2}}}{C_0(1-a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4})}.\quad(4.15)$$

Подставляя (4.15) в интегральные выражения, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{1,\varepsilon}&=-\frac{C_0^{n-2}2^{2n-2}(n-2)}{1-a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4}}\varepsilon\sum_{j\in\Upsilon}\int_0^T\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H^{\varepsilon,j})(\varphi-u_\varepsilon)dsdt,\\ \mathcal{I}_{2,\varepsilon}&=\frac{\varepsilon^{-\frac{n}{n-2}}C_0^{-1}(n-2)}{1-a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4}}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{S_\varepsilon^j}(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H_\varphi^{\varepsilon,j})(H_\varphi^{\varepsilon,j}-u_\varepsilon)dsdt.\end{aligned}\quad(4.16)$$

4.3. Вывод эффективного члена. Чтобы найти $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_{1,\varepsilon}$, воспользуемся леммой, введенной в [3]:

Лемма 4.1. *Пусть $h_\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$ и $h_\varepsilon\rightharpoonup h_0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$, тогда*

$$2^{2n-4}\varepsilon\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}}h_\varepsilon ds\to\omega_n\int_\Omega h dx\ \ as\ \varepsilon\to 0,$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{I}_{1,\varepsilon}=-(n-2)C_0^{n-2}\omega_n\int_0^T\int_\Omega(\varphi(x,t)-H_\varphi(x,t))(\varphi-u_0)dxdt.\quad(4.17)$$

4.4. Граничные интегралы включения. Тогда мы имеем

$$\mathcal{I}_{2,\varepsilon}=Q_\varepsilon+(n-2)C_0^{-1}\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{S_\varepsilon^j}(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H_\varphi^{\varepsilon,j})(H_\varphi^{\varepsilon,j}-u_\varepsilon)dsdt,\quad(4.18)$$

где

$$Q_\varepsilon=(n-2)\frac{(a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4})C_0^{-1}\varepsilon^{-\gamma}}{1-a_\varepsilon^{n-2}\varepsilon^{2-n}2^{2n-4}}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{S_\varepsilon^j}(\varphi(P_\varepsilon^j,t)-H_\varphi^{\varepsilon,j})(H_\varphi^{\varepsilon,j}-u_\varepsilon)dsdt.\quad(4.19)$$

Легко видеть, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon = 0$.

Поскольку функции $H_\varphi^{\varepsilon,j}$ удовлетворяют задаче (4.4), имеем

$$\left(\frac{d}{dt}H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n H_\varphi^{\varepsilon,j} - \mathcal{B}_n \varphi(P_\varepsilon^j, t)\right) u_\varepsilon \geqslant 0.$$

Следовательно, мы получаем

$$\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_{S_\varepsilon^j}\left(\frac{d}{dt}H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n H_\varphi^{\varepsilon,j} - \mathcal{B}_n\varphi(P_\varepsilon^j, t)\right)(H_\varphi^{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt \leqslant 0. \tag{4.20}$$

4.5. Усредненное уравнение для u_0. Используя (4.9)–(4.20), мы заключаем, что u_0 удовлетворяет следующему интегральному неравенству:

$$\int\limits_{Q^T}\partial_t\varphi(\varphi - u_0)dxdt + \int\limits_{Q^T}\nabla\varphi\nabla(\varphi - u_0)dxdt + \mathcal{A}_n\int\limits_{Q^T}(\varphi(x,t) - H_\varphi(x,t))(\varphi - u_0)dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Q^T} f(x,t)(\varphi - u_0)dxdt - \frac{1}{2}\|\varphi(x,0)\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{4.21}$$

Учитывая, что линейная оболочка функций

$$\{\psi(x)\eta(t) : \psi \in C_0^\infty(\Omega),\, \eta \in C^1([0,T])\}$$

плотна в пространстве $\mathcal{H} = \{u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) |\, \partial_t u \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$, получаем, что неравенство (4.21) справедливо для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{H}$. Тогда возьмем $\varphi = u_0 \pm \lambda w$, где $\lambda \geqslant 0$, $w \in \mathcal{H}$, в качестве пробной функции в неравенстве (4.21) и перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. Отсюда, переходя к пределу, заключаем, что u_0 удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_0^T\langle\partial_t u_0, w\rangle_\Omega dt + \int\limits_{Q^T}\nabla u_0\nabla w dxdt + \mathcal{A}_n\int\limits_{Q^T}(u - H_u)w dxdt = \int\limits_{Q^T} f(x,t)w dxdt, \tag{4.22}$$

и $u_0(x,0) = 0$ при п.в. $x \in \Omega$. Следовательно, u_0 — слабое решение задачи (2.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бекмаганбетов К. А., Чепыжов В. В., Чечкин Г. А.* Сильная сходимость аттракторов системы реации-диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2022. — *86*, № 6. — С. 47–78.
2. *Диаз Ж. И., Гомез-Кастро Д., Подольский А. В., Шапошникова Т. А.* Усреднение вариационных неравенств типа Синьорини для p-Лапласиана в перфорированной области для случая $p \in (1,2)$// Докл. РАН — 2017. — *473*, № 4. — С. 395–400.
3. *Зубова М. Н., Шапошникова Т. А.* Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с третьим граничным условием и об изменении характера нелинейности задачи в результате усреднения// Дифф. уравн. — 2011. — *47*, № 1. — С. 79–91.
4. *Зубова М. Н., Шапошникова Т. А.* Усреднение уравнения диффузии в области, перфорированной вдоль $(n-1)$-мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций: критический случай// Докл. РАН — 2019. — *99*, № 3. — С. 245–251.
5. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: УРСС, 2010.
6. *Angulano M.* Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media// ArXiv. — 2017. — 1712.01183.
7. *Arrieta J. M., Quittner P., Rodriguez-Bernal A.* Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data// Differ. Integral Equ. — 2011. — *14*, № 12. — С. 1487–1510.
8. *Bandle C., von Below J., Reichel W.* Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up// Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl. — 2006. — *17*, № 1. — С. 35–67.
9. *Bejenaru I., Diaz J. I., Vrabie I. I.* An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamical boundary conditions// Electron. J. Differ. Equ. — 2001. — *50*. — С. 1–19.

10. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzov V. V.* Attractors and a «strange term» in homogenized equation// C. R. Mecanique — 2020. — *348*, № 5. — С. 351–359.
11. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzov V. V.* «Strange term» in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain// Chaos Solitons Fractals. — 2020. — *140*. — 110208.
12. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Toleubay A. M.* Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium// Bull. Karaganda Univ. Math. — 2022. — № 3. — С. 35–50.
13. *Conca C., Murat F., Timofte C.* A generalized strange term Signorini's type problems// ESAIM: Math. Model. Numer. Anal. — 2003. — *3*, № 57. — С. 773–805.
14. *Diaz J. I., Gomez-Castro D., Podolskiy A. V., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of a net of periodic critically scaled boundary obstacles related to reverse osmosis «nano-composite» membranes// Adv. Nonlinear Anal. — 2018. — *9*. — С. 193–227.
15. *Diaz J. I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* A nonlocal memory strange term arising in the critical scale homogenisation of a diffusion equation with a dynamic boundary condition// Electron. J. Differ. Equ. — 2019. — *2019*. — 77.
16. *Diaz J. I., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape// Electron. J. Differ. Equ. — 2022. — *2022*. — 52.
17. *Escher J.* Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions// Commun. Part. Differ. Equ. — 1993. — *18*. — С. 1309–1364.
18. *Gomez D., Lobo M., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* On critical parameters in homogenization for nonlinear fluxes in perforated domains by thin tubes and related spectral problems// Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — *38*, № 12. — С. 2606–2629.
19. *Gomez D., Perez M. E., Podolskii A. V., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of variational inequalities for the p-Laplace operator in perforated media along manifolds// Appl. Math. Optim. — 2017. — *475*. — С. 1–19.
20. *Timofte C.* Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media// Math. Model. Anal. — 2003. — *8*. — С. 337–350.
21. *Wang W., Duan J.* Homogenized dynamics of stochastic partial differential equations with dynamical boundary conditions// Commun. Math. Phys. — 2007. — *275*, № 1. — С. 163–186.

А. В. Подольский
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `AVPodolskiy@yandex.ru`

Т. А. Шапошникова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `shaposh.tan@mail.ru`

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685
UDC 517.956.225

Homogenization of a parabolic equation in a perforated domain with a unilateral dynamic boundary condition: critical case

A. V. Podolskiy and T. A. Shaposhnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

In this paper, we study the homogenization of a parabolic equation given in a domain perforated by "tiny" balls. On the boundary of these perforations, a unilateral dynamic boundary constraints are specified. We address the so-called "critical" case that is characterized by a relation between the coefficient in the boundary condition, the period of the structure and the size of the holes. In this case, the homogenized equation contains a nonlocal "strange" term. This term is obtained as a solution of the variational problem involving ordinary differential operator.

Keywords: homogenization of parabolic equation, perforated domain, critical case, strange nonlocal term

For citation: A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova, "Homogenization of a parabolic equation in a perforated domain with a unilateral dynamic boundary condition: critical case," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 671–685. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685`

REFERENCES

1. K. A. Bekmaganbetov, V. V. Chepyzhov, and G. A. Chechkin, "Sil'naya skhodimost' attraktorov sistemy reatsii-diffuzii s bystro ostsilliruyushchimi chlenami v ortotropnoy poristoy srede" [Strong convergence of attractors of a reaction-diffusion system with rapidly oscillating terms in an orthotropic porous medium], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, **86**, No. 6, 47–78 (in Russian).
2. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, A. V. Podolskiy, and T. A. Shaposhnikova, "Usrednenie variatsionnykh neravenstv tipa Sin'orini dlya p-Laplasiana v perforirovannoy oblasti dlya sluchaya $p \in (1,2)$" [Homogenization of Signorini's type variational inequalities for the p-Laplacian in a perforated domain for the case $p \in (1,2)$], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **473**, № 4, 395–400 (in Russian).
3. M. N. Zubova and T. A. Shaposhnikova, "Ob usrednenii kraevykh zadach v perforirovannykh oblastyakh s tret'im granichnym usloviem i ob izmenenii kharaktera nelineynosti zadachi v rezul'tate usredneniya" [On the homogenization of boundary-value problems in perforated domains with the third boundary condition and on the change in the nature of the nonlinearity of the problem as a result of homogenization], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 1, 79–91 (in Russian).
4. M. N. Zubova and T. A. Shaposhnikova, "Usrednenie uravneniya diffuzii v oblasti, perforirovannoy vdol' $(n-1)$-mernogo mnogoobraziya s dinamicheskimi kraevymi usloviyami na granitse perforatsiy: kriticheskiy sluchay" [Homogenization the diffusion equation in a domain perforated along an $(n-1)$-dimensional manifold with dynamic boundary conditions on the boundary of perforations: critical case], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **99**, No. 3, 245–251 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary-Value Problems], URSS, Moscow, 2010 (Russian translation).
6. M. Angulano, "Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media," *ArXiv*, 2017, 1712.01183.

7. J. M. Arrieta, P. Quittner, and A. Rodriguez-Bernal, "Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data," *Differ. Integral Equ.*, 2011, **14**, No. 12, 1487–1510.
8. C. Bandle, J. von Below, and W. Reichel, "Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up," *Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl.*, 2006, **17**, No. 1, 35–67.
9. I. Bejenaru, J. I. Diaz, and I. I. Vrabie, "An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamical boundary conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2001, **50**, 1–19.
10. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzov, "Attractors and a «strange term» in homogenized equation," *C. R. Mecanique*, 2020, **348**, No. 5, 351–359.
11. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzov, "«Strange term» in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain," *Chaos Solitons Fractals*, 2020, **140**, 110208.
12. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and A. M. Toleubay, "Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium," *Bull. Karaganda Univ. Math.*, 2022, No. 3, 35–50.
13. C. Conca, F. Murat, and C. Timofte, "A generalized strange term Signorini's type problems," *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.*, 2003, **3**, No. 57, 773–805.
14. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, A. V. Podolskiy, and T. A. Shaposhnikova, "Homogenization of a net of periodic critically scaled boundary obstacles related to reverse osmosis «nano-composite» membranes," *Adv. Nonlinear Anal.*, 2018, **9**, 193–227.
15. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, "A nonlocal memory strange term arising in the critical scale homogenisation of a diffusion equation with a dynamic boundary condition," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019, **2019**, 77.
16. J. I. Diaz, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, "A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2022, **2022**, 52.
17. J. Escher, "Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1993, **18**, 1309–1364.
18. D. Gomez, M. Lobo, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, "On critical parameters in homogenization for nonlinear fluxes in perforated domains by thin tubes and related spectral problems," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 12, 2606–2629.
19. D. Gomez, M. E. Perez, A. V. Podolskii, and T. A. Shaposhnikova, "Homogenization of variational inequalities for the p-Laplace operator in perforated media along manifolds," *Appl. Math. Optim.*, 2017, **475**, 1–19.
20. C. Timofte, "Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media," *Math. Model. Anal.*, 2003, **8**, 337–350.
21. W. Wang and J. Duan, "Homogenized dynamics of stochastic partial differential equations with dynamical boundary conditions," *Commun. Math. Phys.*, 2007, **275**, No. 1, 163–186.

A. V. Podolskiy
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `AVPodolskiy@yandex.ru`

T. A. Shaposhnikova
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `shaposh.tan@mail.ru`