

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670

УДК 517.956.3+517.958

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В НЕВЫПУКЛОМ УГЛЕ

А. МЕРЗОН¹, П. ЖЕВАНДРОВ², Х. Э. ДЕ ЛА ПАС МЕНДЕС³, М. И. РОМЕРО РОДРИГЕС⁴¹*Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика*²*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика*³*Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Сьюдад Альтамирано, Мексика*⁴*Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Богота, Колумбия*

В этой работе мы даем явное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в невыпуклом угле с периодическими граничными данными. Мы представляем теоремы единственности и существования в соответствующем функциональном классе и даем явную формулу решения в виде интеграла Зоммерфельда. Используется метод комплексных характеристик [14].

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, невыпуклый угол, интеграл Зоммерфельда, метод комплексных характеристик

Для цитирования: А. Мерзон, П. Жевандров, Х. Э. Де ла Пас Мендес, М. И. Ромеро Родригес. Явное решение задачи Дирихле в невыпуклом угле // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 653–670. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую модельную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в плоском угле Q величины $\Phi > \pi$ с комплексной частотой $\omega \in \mathbb{C}^+ = \{\text{Im } \omega > 0\}$ и периодическими граничными данными:

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2)u(y) = 0, & y \in Q, \\ u(y, 0) = e^{-ik_1 y_1}, & y_1 > 0, \\ u(y_2 \text{ ctg } \phi, y_2) = e^{\frac{-ik_2 y_2}{\sin \Phi}}, & y_2 > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $k_1, k_2 > 0$ (см. рис. 1).

Заметим, что эта задача аналогична краевой задаче в [12, формула (23)] возникающей в задаче о нестационарной дифракции:

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2)U(\omega, y) = 0, & y \in Q, \\ U(\omega, y) = -g(\omega)e^{i\omega y_1 \cos \alpha}, & y \in Q_1, \\ U(\omega, y) = -g(\omega)e^{-i\omega y_2 (\cos(\alpha+\Phi)/\sin \Phi)}, & y \in Q_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Однако есть существенные различия. Экспоненты в правой части этой задачи комплексные ($\text{Im } \omega > 0$), поэтому соответствующие функции экспоненциально убывают при $y_{1,2} \rightarrow +\infty$, поскольку $\alpha < \phi < \frac{\pi}{2}$.

Более того, структура граничных условий в (1.2) связана с первым уравнением через общий параметр ω . Это дает уникальную возможность свести задачу (1.2) к разностному уравнению, которое легко решается в явном виде.

Напротив, задача (1.1) имеет периодические граничные условия, которые не зависят от первого уравнения. Это приводит к тому, что соответствующее разностное уравнение не может быть решено так же просто, как в предыдущем случае, за исключением случая, когда $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ (см. раздел 5).

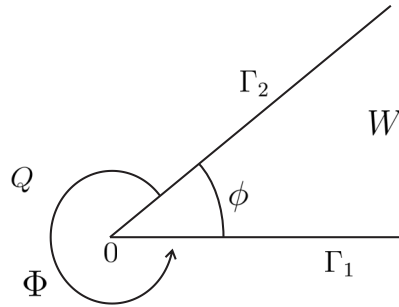


Рис. 1. Краевая задача во внешнем угле
 FIG. 1. Boundary-value problem in an exterior corner

В свою очередь, задача (1.1) в силу линейности распадается на две задачи для u_1, u_2 таких, что $U = u_1 + u_2$:

$$\begin{cases} -\Delta u_1(y, \omega) - \omega^2 u_1(y, \omega) = 0, & y \in Q, \\ u_1(y_1, 0) = e^{-ik_1 y_1}, & y_1 > 0, \\ u_1(y_2 \operatorname{ctg} \phi, y_2) = 0, & y_2 > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2(y, \omega) - \omega^2 u_2(y, \omega) = 0, & y \in Q, \\ u_2(y_1, 0) = 0, & y_1 > 0, \\ u_2(y_2 \operatorname{ctg} \phi, y_2) = e^{-\frac{ik_2 y_2}{\sin \phi}}, & y_2 > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Данная статья посвящена решению модельной задачи (1.3). Решение (1.4) получается из (1.3) простой заменой переменной (см. (2.3), где θ заменяется на $\theta_1 = -\theta + 4\pi - \Phi$).

Отметим, что краевая задача в прямом угле Q или в его дополнении и в других частных углах, величины которых соизмеримы с π , рассматривалась во многих работах [3–7, 18–22, 26]. В этих работах точные результаты были получены с помощью операторных методов. Граничные данные в этих работах принадлежат пространствам Соболева $H_s(\mathbb{R})$, $s > 0$. Рассмотрим другой тип граничных данных, а именно периодические функции. Точные решения получены в явном виде, а именно в виде интегралов типа Зоммерфельда. Используем метод автоморфных функций (МАФ) на комплексных характеристиках [14]. Этот метод был разработан А. Комечем для $\Phi < \pi$ в [10] и затем распространен на $\Phi > \pi$ в [14, раздел 1.2 и часть 2]. Он позволяет найти все решения-распределения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в произвольных углах с общими краевыми условиями. Он применялся, в частности, к нестационарным задачам дифракции на углах [11, 15–17, 23, 24].

Следует отметить, что существует весьма эффективный метод Зоммерфельда—Мальжинца построения решений задач дифракции в углах; с помощью этого метода было получено много важных результатов [2]. Этот метод позволяет получить решение в виде интеграла Зоммерфельда. Важное приложение этого метода для произвольного угла рассмотрено в [8]. Однако этот метод не позволяет доказать единственность, которую обычно доказывают на основе физических соображений. Мы также получаем решение в интегральной форме Зоммерфельда, используя МАФ, что дополнительно позволяет нам доказать единственность в соответствующем функциональном пространстве (см., например, [12]).

Статья организована следующим образом: в разделе 2 мы формулируем основной результат. В разделе 3 краевая задача сводится к разностному уравнению и приводятся необходимые и достаточные условия существования решения. В разделах 4 и 5 мы находим решение разностного уравнения для $\Phi \neq \frac{3}{2}\pi$ и $\Phi = \frac{3}{2}\pi$, соответственно. В разделе 6 мы исследуем асимптотику подынтегральной функции для зоммерфельдовского представления решения. В разделе 7 мы даем представление решения типа Зоммерфельда и набросок доказательства основного результата.

В этой статье мы не приводим подробных доказательств, это будет сделано в другой публикации.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем строить решения задач (1.3) и (1.4) в виде известных интегралов Зоммерфельда, которые имеют вид

$$\int_C e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w} v(w + i\theta) dw, \tag{2.1}$$

где C — некоторый контур на комплексной плоскости. Основную трудность задачи составляет правильное построение множителя $v(w)$, обеспечивающее выполнение краевых условий для (2.1).

Для формулировки основного результата нам необходимо описать подынтегральную функцию $v(w)$ интеграла Зоммерфельда. Построение этого подынтегрального выражения является основным содержанием данной статьи.

Рассмотрим функцию $\hat{v}_1(w)$, заданную в виде (3.19), где $\hat{v}_1^1(w)$ задано в виде (4.10) для $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ и (5.5) для $\Phi = \frac{3\pi}{2}$, а \hat{G} имеет вид (3.20). Пусть (ρ, θ) — полярные координаты в \mathbb{R}_y^2 ,

$$y_1 = \rho \cos \theta, \quad y_2 = \rho \sin \theta, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [2\pi - \Phi, 2\pi],$$

и C — двухпетлевой контур Зоммерфельда, см. рис. 6.

Определение 2.1. Введем E как пространство функций $u \in C^\infty(\overline{Q} \setminus \{0\})$, ограниченных вместе со своими первыми производными в $\overline{Q} \setminus B_\varepsilon(0) \forall \varepsilon > 0$ и допускающих в нуле следующую асимптотику:

$$\left. \begin{aligned} u(\rho, \theta) &= C(\theta) + o(1) \\ \nabla u(\rho, \theta) &= C_1(\theta)\rho^{-1} + C_2(\theta) + o(1) \end{aligned} \right| \rho \rightarrow 0. \tag{2.2}$$

Наш основной результат состоит в следующем утверждении.

Теорема 2.1.

i) Пусть $\omega \in \mathbb{C}^+, k_1, k_2 > 0$. Существует решение $u_1(\rho, \theta)$ задачи (1.3), принадлежащее E , которое допускает интегральное представление Зоммерфельда

$$u_1(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_C e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w} \hat{v}_1(w + i\theta) dw, \tag{2.3}$$

где \hat{v}_1 строится по алгоритму, представленному ниже.

ii) Решение u_1 единственно в E .

Замечание 2.1. Интеграл в (2.3) сходится абсолютно, так как бесконечная часть C принадлежит области сверхэкспоненциального убывания $e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w}$ (см. рис. 6) и \hat{v}_1 допускает асимптотику (6.2). Граничные значения понимаются в смысле распределений.

3. СВЕДЕНИЕ К РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДАННЫХ НЕЙМАНА

Рассмотрим задачу (1.3). МАФ позволяет свести эту задачу к нахождению данных Неймана решения u_1 за несколько шагов. В следующих пунктах мы рассмотрим эти шаги.

Предположим, что решение $u_1 \in S'(Q) := \{u|_Q, u \in S'(\mathbb{R}^2)\}$. Первым шагом МАФ является сведение задачи к дополнению первого квадранта и продолжение решения u_1 на всю плоскость, см. [13, 14].

3.1. Первый шаг: продолжение $v_l^\beta(x_l)$ на всю плоскость \mathbb{R}^2 . Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathcal{J}(y) : x_1 = y_1 + y_2 \operatorname{ctg} \Phi, \quad x_2 = -\frac{y_2}{\sin \Phi},$$

переводящее угол Q в прямой угол $K := \{(x_1, x_2) : x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0\}$. Это преобразование сводит систему (1.3) к задаче (3.1a)–(3.1c) в дополнении K первого квадранта для

$$v(x) := u_1(\mathcal{J}^{-1}(y)),$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}(D)v(x) = 0, & x \in K, \\ v(x_1, 0) = e^{-ikx_1}, & x_1 > 0, \\ v(0, x_2) = 0, & x_2 > 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1a) \\ (3.1b) \\ (3.1c) \end{matrix}$$

где

$$\mathcal{H}(D) = -\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\Delta - 2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] - \omega^2. \quad (3.2)$$

Согласно [14, лемма 8.2], если $v(x) \in S'(K)$ — решение уравнения (3.1a), то существует продолжение решения v нулем $v_0 \in S'(\mathbb{R}^2)$ такое, что $v_0|_K = v$,

$$\mathcal{H}(D)v_0(x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

где $\gamma \in S'(\mathbb{R}^2)$ и имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\delta(x_2)v_1^1(x_1) + \delta'(x_2)v_1^0(x_1) + \delta(x_1)v_2^1(x_2) + \delta'(x_1)v_2^0(x_2) - \right. \\ & \left. - 2 \cos \Phi \delta(x_2) \partial_{x_1} v_1^0(x_1) - 2 \cos \Phi \delta(x_1) \partial_{x_2} v_2^0(x_2) \right], \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$v_l^\beta(x_l) \in S'(\overline{\mathbb{R}^+}) := \left\{ v \in S'(\mathbb{R}) : \text{supp } v \subset \overline{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Мы будем использовать продолжение преобразования Фурье F , определенного на $S(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}^2)$, в $S'(\mathbb{R}^2)$ по непрерывности: $\varphi(x_1, x_2) \rightarrow \tilde{\varphi}(z_1, z_2)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$,

$$F_{x \rightarrow z}[\varphi](z) = F[\varphi(x)](z) = \tilde{\varphi}(z_1, z_2) := \iint e^{iz_1 x_1 + iz_2 x_2} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.5)$$

Будем обозначать это продолжение знаком «тильда»: $\tilde{v}(z) = F_{x \rightarrow z}[v(x)]$, $v \in S'(\mathbb{R}^2)$. Применяя это преобразование к (3.3) и учитывая, что $\mathcal{H}(z) \neq 0, z \in \mathbb{R}^2$, получаем

$$\tilde{v}_0(z) = \frac{\tilde{\gamma}(z)}{\mathcal{H}(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{v}_0 \in S'(\mathbb{R}^2). \quad (3.6)$$

Следовательно,

$$v_0(x) = F_{x \rightarrow z}^{-1} \left[\frac{\tilde{\gamma}(z)}{\mathcal{H}(z)} \right], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad v(x) = v_0(x)|_K. \quad (3.7)$$

Здесь $\tilde{\gamma}(z)$ — преобразование Фурье (3.4), и при $z \in \mathbb{R}^2$ имеем

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\tilde{v}_1^1(z_1) - \tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2 \cos \Phi iz_1) + \tilde{v}_2^1(z_2) - \tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1 - 2 \cos \Phi iz_2) \right], \quad (3.8)$$

где $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$ — преобразование Фурье от $v_l^\beta(x_l)$. Таким образом, если известно $v_l^\beta(x_l)$, то известно v из (3.7), и задача (3.10) сводится к нахождению четырех функций $\tilde{v}_l^\beta(x_l)$, $l = 1, 2, \beta = 0, 1$.

В нашем случае решение задачи не принадлежит $C^\infty(\overline{K})$ (оно принадлежит только $C^\infty(\overline{K} \setminus 0)$). Однако и в этом случае решение также описывается с помощью (3.4).

Оказывается, что формула (3.4) остается справедливой и для решений в смысле распределений. Следующие две леммы описывают решение уравнения (3.1a) в терминах его данных Коши.

Лемма 3.1 (см. [14, Лемма 8.3]). Пусть $v \in S'(K)$ — решение уравнения (3.1a) в смысле распределений, и пусть v_0 — его продолжение нулем в \mathbb{R}^2 , удовлетворяющее (3.3), (3.4). Тогда существуют данные Коши

$$\left\{ \begin{aligned} v_1^\beta(x_1) &:= \partial_2^\beta v_0(x_1, 0-), & x_1 > 0, \\ v_2^\beta(x_2) &:= \partial_2^\beta v_0(0-, x_2), & x_2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad \beta = 0, 1 \quad (3.9)$$

(здесь пределы понимаются в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) := \mathcal{D}'(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$).

Лемма 3.2 (см. [14, Лемма 8.4]). Пусть $v \in S'(K)$ — решение уравнения (3.1a) в смысле пределов, заданное формулой (3.7), где γ определяется формулой (3.4). Тогда $v_l^\beta|_{\mathbb{R}^+}$ являются данными Коши для v .

Замечание 3.1. Формула (3.7) и лемма 3.2 показывают, что достаточно найти данные Неймана v_1^1, v_2^1 в (3.4), чтобы решить задачу (3.1a)-(3.1c).

Теперь воспользуемся граничными условиями (3.1b), (3.1c). Пусть $v \in S'(K)$ — решение (3.1a)-(3.1c) и $v_0 \in S'(\overline{K})$ — его продолжение нулем, удовлетворяющее (3.3); тогда из (3.9)

$$v_1^0(x_1)\Big|_{\mathbb{R}^+} = e^{-ikx_1}, \quad x_1 > 0, \quad v_2^0(x_2)\Big|_{\mathbb{R}^+} = 0, \quad x_2 > 0. \tag{3.10}$$

Так как $\text{supp } v_l^0(x_l) \subset \overline{\mathbb{R}^+}$, то по теории распределений, вообще говоря, мы имеем

$$\begin{cases} v_1^0(x_1) = \left[e^{-ikx_1} \right]_0 + c_1^0 \delta(x_1) + c_1^1 \delta'(x_1) + \dots + c_1^m \delta^{(m)}(x_1), \\ v_2^0(x_2) = c_2^0 \delta(x_2) + c_2^1 \delta'(x_2) + \dots + c_2^m \delta^{(m)}(x_2), \end{cases}$$

для некоторого $m \geq 0$. Здесь $\left[e^{-ikx_1} \right]_0$ — продолжение нулем $e^{ikx_1}, x_1 > 0$, до отрицательных значений x_1 . Очевидно, $\left[e^{-ikx_1} \right]_0 = \Theta(x-1)e^{-ikx_1}$, где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда. Найдем решение (3.1a)-(3.1c) при

$$c_1^0 = \dots = c_1^m = c_2^0 = \dots = c_2^m = 0.$$

Таким образом, мы положим

$$v_1^0(x_1) = \left[e^{-ikx_1} \right]_0 \in S'(\mathbb{R}), \quad v_2^0(x_2) = 0. \tag{3.11}$$

Подставляя v_1^0 и v_2^0 из (3.11) в (3.3), получаем

$$\mathcal{H}(D)v_0(x) = \gamma(x), \tag{3.12}$$

где γ содержит только две неизвестные функции v_1^1 и v_2^1 .

МАФ дает необходимые и достаточные условия на функции v_1^1 и v_2^1 , что позволяет найти эти функции в явном виде. Подставляя эти функции в (3.12), получаем v_0 (и, следовательно, v) с помощью (3.7), (3.4). Далее мы рассматриваем уравнение (3.12).

3.2. Второй шаг: преобразование Фурье—Лапласа и поднятие до римановой поверхности. Уравнение связи. В дополнение к вещественному преобразованию Фурье (3.5) мы будем использовать комплексное преобразование Фурье (или преобразование Фурье—Лапласа (ФЛ)). Пусть

$$f \in S'(\overline{\mathbb{R}^+}) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subset \overline{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Тогда по теореме Пэли—Винера [27] (см. также [9, теорема 5.2]) $\tilde{f}(z) = F[f] \in \mathbb{R}$ допускает аналитическое продолжение $\tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$, $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ и $\lim_{z_2 \rightarrow 0} \tilde{f}(z_1 + iz_2) = \tilde{f}(z_1)$ в $S'(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Так как $v_l^\beta(x_l) \in S'(\overline{\mathbb{R}^+})$, то существуют преобразования ФЛ

$$\tilde{v}_l^\beta(z_l) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+), \quad l = 1, 2; \quad \beta = 0, 1. \tag{3.13}$$

В частности, из (3.11) имеем

$$\tilde{v}_1^0(z_1) = \frac{i}{z_1 - k}, \quad z_1 \in \overline{\mathbb{C}^+}, \tag{3.14}$$

где для $z_1 \in \mathbb{R}$, $\tilde{v}_1^0(z_1) = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0+} \tilde{v}_1^0(z_1 + i\tau_1)$ в $S'(\mathbb{R})$. Следовательно, используя (3.8), получаем (поскольку $v_2^0 \equiv 0$)

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[\tilde{v}_1^1(z_1) + \frac{z_2 - 2 \cos \Phi z_1}{z_1 - k} + \tilde{v}_2^1(z_2) \right], \quad z \in \mathbb{R}^2. \tag{3.15}$$

В МАФ риманова поверхность комплексных нулей символа оператора (3.2) играет существенную роль, поскольку необходимое условие существования решения на $\tilde{\gamma}(z)$ можно записать в терминах этой поверхности. Символом этого оператора является многочлен

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left(z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \Phi \right) - \omega^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Очевидно, $\mathcal{H}(z)$ не имеет действительных нулей, но имеет комплексные. Обозначим риманову поверхность комплексных нулей \mathcal{H} через

$$V := \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{H}(z) = 0\}.$$

Комплексную поверхность V удобно параметризовать, вводя параметр $w \in \mathbb{C}$.

Риманова поверхность V допускает универсальное накрытие \hat{V} , изоморфное \mathbb{C} (см. [14, гл. 15]). Пусть w — параметр на $\hat{V} \cong \mathbb{C}$. Тогда формулы

$$\left. \begin{cases} z_1 = z_1(w) = -i\omega \operatorname{sh} w, \\ z_2 = z_2(w) = -i\omega \operatorname{sh}(w + i\Phi) \end{cases} \right| w \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

описывают бесконечнолистное накрытие \mathbb{C} на V .

«Поднимем» функции $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$, $z_l \in \mathbb{C}^+$ до \hat{V} . Для этого мы должны отождествить $V_l^+ := \{z \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} z_l > 0\}$ с областями на \hat{V} . Это можно сделать разными способами. Например, определим для $\omega \in \mathbb{C}^+$,

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(\omega) := \left\{ w_1 + i \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) \middle| w_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Очевидно, что при $w \in \Gamma_0$, $\operatorname{Im}(z_1(w)) = 0$. Более того, $\operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) \xrightarrow{w_1 \rightarrow \pm\infty} \pm \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}$. При $\alpha \in \mathbb{R}$ определим

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(w) := \Gamma_0(w) + i\alpha$$

и при $\alpha < \beta$ определим

$$V_\alpha^\beta := \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) < \operatorname{Im} w < \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) + \beta \right\}.$$

Для $l = 1, 2$ «поднимем» V_l^+ до \hat{V} . Обозначим это поднятие через $\hat{V}_l^+ = \{w \in \hat{V} : (z_l(w)) \in V_l^+\}$. Тогда

$$\hat{V}_1^+ = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}, \quad \hat{V}_1^- = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_{(2k+1)\pi}^{2k\pi}, \quad V_2^\pm = V_1^\pm - 2i\Phi.$$

Обратите внимание, что $\pm \operatorname{Im}(z_l(\omega, w)) > 0$, $w \in \hat{V}_l^\pm$. Выберем связную компоненту \hat{V}_1^+ , соответствующую условию $\operatorname{Im} z_l > 0$ при $\hat{V}_1^+ := V_0^\pi$, $\hat{V}_2^+ = V_{-\Phi}^{\pi-\Phi}$ (см. рис. 2, где $\Gamma_\alpha(w)$ представлены для $\omega_1 \geq 0$).

Теперь мы «поднимем» $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$ до \hat{V}_l^+ , $l = 1, 2$, $\beta = 0, 1$, используя (3.16). Получаем из (3.14), (3.11)

$$\hat{v}_1^0(w) = \frac{i}{-i\omega \operatorname{sh} w - k}, \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad \hat{v}_2^0(w) = 0, \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (3.17)$$

Далее, $\hat{v}_l^1(w)$ — аналитические функции в \hat{V}_l^+ по (3.13). Наша цель — найти неизвестные функции \hat{v}_l^1 , $l = 1, 2$. Имея эти функции, мы получаем $\tilde{\gamma}(z)$ и решение $v_0(x)$ из (3.7), (3.6).

Обратим внимание, что в случае $\Phi > \pi$ функция $\tilde{\gamma}(z)$, заданная формулой (3.15), не может быть поднята до \hat{V} , так как $\hat{\gamma}(w) := \tilde{\gamma}(z_1(w), z_2(w))$ не определена ни в одной точке \hat{V} . На самом деле $\hat{v}_1^1(w)$ не определена в \hat{V}_2^+ , а $\hat{v}_2^1(w)$ не определена в \hat{V}_1^+ , так как $\hat{V}^* := \hat{V}_1^+ \cap \hat{V}_2^+ = \emptyset$, см. рис. 2. В случае $\Phi < \pi$ это пересечение непусто, и такой подъем до \hat{V}^* возможен [14]. Таким образом, в этом случае существует связь между \hat{v}_1^1 и \hat{v}_2^1 , порожденная (3.6), поскольку $\mathcal{H}(z)$ имеет нули в \hat{V}^* и $\hat{\gamma}(w)$ должно равняться нулю при $w \in \hat{V}^*$.

Тем не менее, аналогичная связь между \hat{v}_1^1 и \hat{v}_2^1 существует и в случае $\Phi > \pi$ (см. [14, гл. 21]). Опишем соответствующую конструкцию. Функция $\hat{\gamma}(z)$ естественным образом разбивается на два слагаемых, каждое из которых продолжается до \hat{V}_1^+ и \hat{V}_2^+ , соответственно. А именно,

$$\sin^2 \Phi \tilde{\gamma}(z_1, z_2) = \tilde{v}_1(z_1, z_2) + \tilde{v}_2(z_1, z_2),$$

где

$$v_1(z_1, z_2) := \tilde{v}_1^1(z_1) + \frac{z_2 - 2 \cos \Phi z_1}{z_1 - k}, \quad v_2(z_1, z_2) := \tilde{v}_2^1(z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$

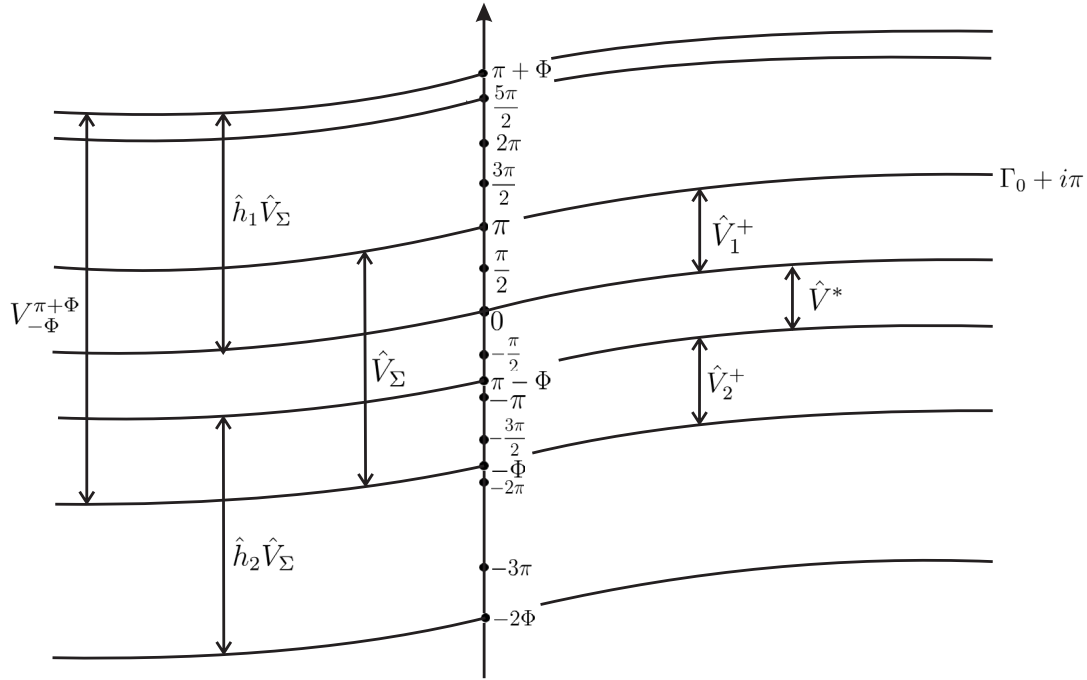


Рис. 2. Уравнение связи
 FIG. 2. Connection equation

По теореме Пэли–Винера функция $\tilde{v}_1(z_1, z_2)$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}_{z_1}^+ \times \mathbb{C}$, а $\tilde{v}_2(z_1, z_2)$ допускает аналитическое продолжение в $\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}_{z_2}^+$, где $\mathbb{C}_{z_k}^+ = \{z_k \mid \text{Im } z_k > 0\}$. Теперь мы можем «поднять» \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 до римановой поверхности \hat{V} по формулам (3.16). Получаем

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) + \omega \text{sh}(w - i\Phi) \hat{v}_1^0(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad \hat{v}_2(w) = \hat{v}_2^1(w), \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (3.18)$$

Далее из (3.18), (3.17) имеем

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (3.19)$$

где

$$\hat{G}(w) := \frac{i\omega \text{sh}(w - i\Phi)}{i\omega \text{sh } w + k}, \quad w \in \mathbb{C}. \quad (3.20)$$

В случае $\Phi < \pi$ функции $\hat{v}_1(w)$ и $\hat{v}_2(w)$ имеют общую область определения \hat{V}^* , которая непуста, и поэтому уравнение связи имеет следующий вид (см. [14, гл. 10]):

$$\hat{v}_1(w) + \hat{v}_2(w) = 0, \quad w \in \hat{V}^*. \quad (3.21)$$

В случае $\Phi > \pi$ область $\hat{V}^* = \emptyset$ (см. рис. 2). Тем не менее, оказывается, что в этом случае существует связь между \hat{v}_1 и \hat{v}_2 такая, что (3.21) выполняется в несколько ином смысле: это уравнение верно для аналитических продолжений \hat{v}_1 и \hat{v}_2 . Сформулируем точно соответствующую теорему.

Определение 3.1. Обозначим $\hat{V}_\Sigma := \hat{V}_1^+ \cup \hat{V}_2^+ \cup \hat{V}^*$, где $\hat{V}^* = V_{\pi-\Phi}^0$. Обратим внимание, что $\hat{V}_\Sigma = V_{-\Phi}^{\pi+\Phi}$ (см. рис. 2).

Теорема 3.1 (уравнение связи при $\Phi > \pi$, см. [14, п. 20.1, теорема 20.1]). Пусть $v \in S'(K)$ — любое решение уравнения (3.1а) в смысле распределений. Тогда функции (3.18) допускают аналитические продолжения $[\hat{v}_l]$ вдоль римановой поверхности \hat{V} из \hat{V}_1^+ в \hat{V}_Σ (см. рис. 2) и

$$[\hat{v}_1(w)] + [\hat{v}_2(w)] = 0, \quad w \in \hat{V}_\Sigma. \quad (3.22)$$

Замечание 3.2. Используя уравнение связи (3.22), найдем \hat{v}_1 . Решение u_1 задачи (1.3) задается через (2.3).

3.3. Третий шаг: сведение к разностному уравнению. Из (3.22), (3.19) следует, что $\hat{v}_1^1(w)$ и $\hat{v}_2^1(w)$ допускают мероморфные продолжения в \hat{V}_Σ и

$$\hat{v}_1^1(w) + \hat{v}_2^1(w) = \hat{G}(w), \quad w \in \hat{V}_\Sigma. \quad (3.23)$$

Мы будем использовать следующие автоморфизмы на \hat{V} (см. [14, гл. 13] и [12, формула (73)]):

$$h_1 w = -w + \pi i, \quad h_2 w = -w + \pi i - 2i\Phi, \quad w \in \mathbb{C},$$

которые являются симметриями относительно $i\frac{\pi}{2}$ и $i\frac{\pi}{2} - i\Phi$, соответственно.

Иногда мы будем использовать обозначение $f^{h_l}(w) := f(h_l(w))$, $l = 1, 2$.

Функции \hat{v}_1^1 и \hat{v}_2^1 являются автоморфными функциями относительно h_1 и h_2 , соответственно:

$$\hat{v}_1^1(-w + \pi i) = \hat{v}_1^1(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (3.24)$$

$$\hat{v}_2^1(-w + \pi i - 2i\Phi) = \hat{v}_2^1(w), \quad w \in \hat{V}_2^+, \quad (3.25)$$

как следует из того, что $\hat{v}_l^1(z_l)$ зависят только от z_l и, следовательно, их поднятия $\hat{v}_l(w)$ до \hat{V}_l^+ удовлетворяют (3.24), (3.25), поскольку $\text{sh } w$ удовлетворяет (3.24), а $\text{sh}(w + i\Phi)$ удовлетворяет (3.25).

Благодаря этой автоморфии мы можем исключить одну неизвестную функцию в недоопределенном уравнении (3.23) и свести его к уравнению со сдвигом, см. [12]. Идея этого метода принадлежит Малышеву [1].

Лемма 3.3. Пусть функция $v \in S'(\mathbb{R})$ удовлетворяет (3.1a)–(3.1c) и $v_l^1(x_l)$, $l = 1, 2$ — ее данные Неймана. Тогда соответствующие поднятия $\hat{v}_l^1(w)$, $w \in \hat{V}_l^+$, на \hat{V} допускают мероморфные продолжения в \mathbb{C} (которые мы также обозначаем как \hat{v}_l^1) такие, что при $w \in \mathbb{C}$

$$\hat{v}_1^1(w) + \hat{v}_2^1(w) = \hat{G}(w), \quad (3.26)$$

а также являются h_l -автоморфными функциями,

$$\hat{v}_1^1(h_1(w)) = \hat{v}_1^1(w), \quad \hat{v}_2^1(h_2(w)) = \hat{v}_2^1(w). \quad (3.27)$$

Теперь мы сведем систему (3.26)–(3.27) к разностному уравнению (также называемому уравнением сдвига). Это сведение является частью МАФ, введенной в [1] для разностных уравнений в углах. Используется автоморфия \hat{v}_l^β на \hat{V} при автоморфизмах h_l , и термин МАФ связан с этим наблюдением.

При $w \in \mathbb{C}$ определим

$$\hat{G}_2(w) := \hat{G}(w) - \hat{G}(h_2(w)) = \frac{i\omega \text{sh}(w - i\Phi)}{i\omega \text{sh } w + k} - \frac{i\omega \text{sh}(w + 3i\Phi)}{i\omega \text{sh}(w + 2i\Phi) + k}. \quad (3.28)$$

Для области U в \mathbb{C} мы будем обозначать здесь и далее через $\mathcal{M}(U)$ множество мероморфных функций на U .

Лемма 3.4. Пусть $v \in S'(K)$ удовлетворяет (3.1a)–(3.1b). Тогда выполняется уравнение связи (3.22), а функция \hat{v}_1^1 принадлежит $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$ и удовлетворяет разностному уравнению

$$\hat{v}_1^1(w) - \hat{v}_1^1(w + 2i\Phi) = \hat{G}_2(w) \quad (3.29)$$

и автоморфному условию (3.27).

Наша цель — найти $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$, для которого выполнены (3.29), (3.27) и условие $\hat{v}_1(w) \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma)$. Здесь \hat{v}_1 задается через (3.18). В свою очередь, это условие эквивалентно условию

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w) \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma) \quad (3.30)$$

в силу (3.19).

В следующем пункте мы найдем необходимые и достаточные условия для \hat{v}_1^1 , при которых выполняется условие (3.30).

3.4. Необходимое и достаточное условие для \hat{v}_1^1 . Условие аналитичности (3.30), которое следует из уравнения связи (3.22), накладывает некоторые необходимые условия на полюсы функции \hat{v}_1^1 , точнее, ее продолжения, полученного в лемме 3.3. Этот пункт посвящен выводу этих условий и доказательству того факта, что они также достаточны для выполнения (3.22).

Обозначим

$$P := \left\{ p_1, -p_1 \pm \pi i, p_1 + 2\pi i \right\}, \quad p_1 := \text{sh}^{-1} \left(\frac{ik}{\omega} \right) \in \Gamma_0.$$

(См. рис. 3, где положения кривых Γ_α соответствуют случаю $\text{Re } \omega > 0$. В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это рассматривается этот случай; при $\text{Re } \omega < 0$ построение аналогично.)

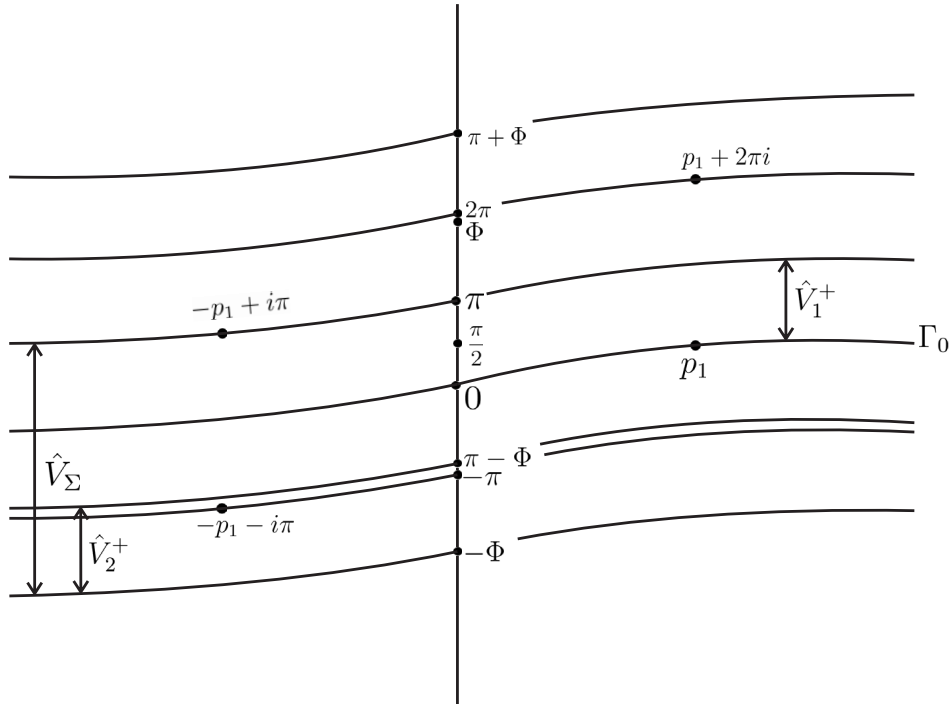


Рис. 3. Необходимые условия
 FIG. 3. Necessary conditions

Введем следующие два важных параметра:

$$r_1 := \text{res}_{-p_1 \pm \pi i} \hat{G} := -\frac{\text{sh}(p_1 + i\Phi)}{\text{ch } p_1}, \quad r_2 := \text{res}_{p_1} \hat{G} := \frac{\text{sh}(p_1 - i\Phi)}{\text{ch } p_1}. \tag{3.31}$$

В следующем утверждении мы даем необходимое и достаточное условие для \hat{v}_1^1 , гарантирующее выполнение условия (3.28).

Предложение 3.1. Пусть $\hat{v}_1^1 \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$ удовлетворяет (3.29) и (3.27). Тогда $\hat{v}_1 \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma)$ тогда и только тогда, когда

$$\hat{v}_1^1 \in \mathcal{H}(V_{-\Phi}^{\Phi+\pi} \setminus P), \tag{3.32}$$

$$\text{res}_{p_1} \hat{v}_1^1 = r_2, \quad \text{res}_{-p_1 - \pi i} \hat{v}_1^1 = r_1. \tag{3.33}$$

Замечание 3.3. Из условия (3.32) следует $\hat{v}_1^1 \in \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$.

4. h_1 -АВТОМОРФНОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ (3.29) В СЛУЧАЕ $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$

В этом разделе мы строим h_1 -автоморфное решение разностного уравнения (3.29), удовлетворяющее всем условиям утверждения 3.1 при $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$. Это ограничение связано со способом получения решения, использующим интеграл типа Коши. Ядро этого интеграла должно быть

аналитическим на контуре интегрирования. Оказывается, найти такое ядро можно только при $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$. К счастью, в случае $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ интеграл типа Коши не нужен, так как в этом случае разностное уравнение (3.29) решается элементарными методами (см. раздел 5).

4.1. Сведение разностного уравнения к сопряженной задаче. Обозначим

$$\hat{\Pi} := V_{\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\frac{\pi}{2}+\Phi}, \quad \hat{\Pi}_{\pm} = \left\{ w \in \hat{\Pi} : \pm \operatorname{Re} w > 0 \right\}, \quad \partial\hat{\Pi}_+ = \hat{\beta} \cup \hat{\gamma} \cup (\hat{\beta} - 2i\Phi),$$

где

$$\hat{\beta} := \left\{ w \in \Gamma_{\frac{\pi}{2}-i\Phi} : \operatorname{Re} w \geq 0 \right\}, \quad \hat{\gamma} := \left\{ w \mid \operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w \in \left[\frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi \right] \right\}.$$

Будем искать решение следующей задачи: найти аналитическую функцию в $\hat{\Pi}_+$, граничные значения которой на $\partial\hat{\Pi}_+$:

$$\hat{a}_1(w + i0), \quad w \in \hat{\beta}; \quad \hat{a}_1(w + 2i\Phi - i0), \quad w \in \hat{\beta} + 2i\Phi, \quad \hat{a}_1(w + 0), \quad w \in \hat{\gamma},$$

— существуют и удовлетворяют следующим условиям сопряжения (см. рис. 4):

$$\hat{a}_1(w + i0) - \hat{a}_1(w + 2i\Phi - i0) = \hat{G}_2(w), \quad w \in \hat{\beta}, \tag{4.1}$$

$$\hat{a}_1(w + 0) = \hat{a}_1(-w + \pi i + 0), \quad w \in \hat{\gamma}. \tag{4.2}$$

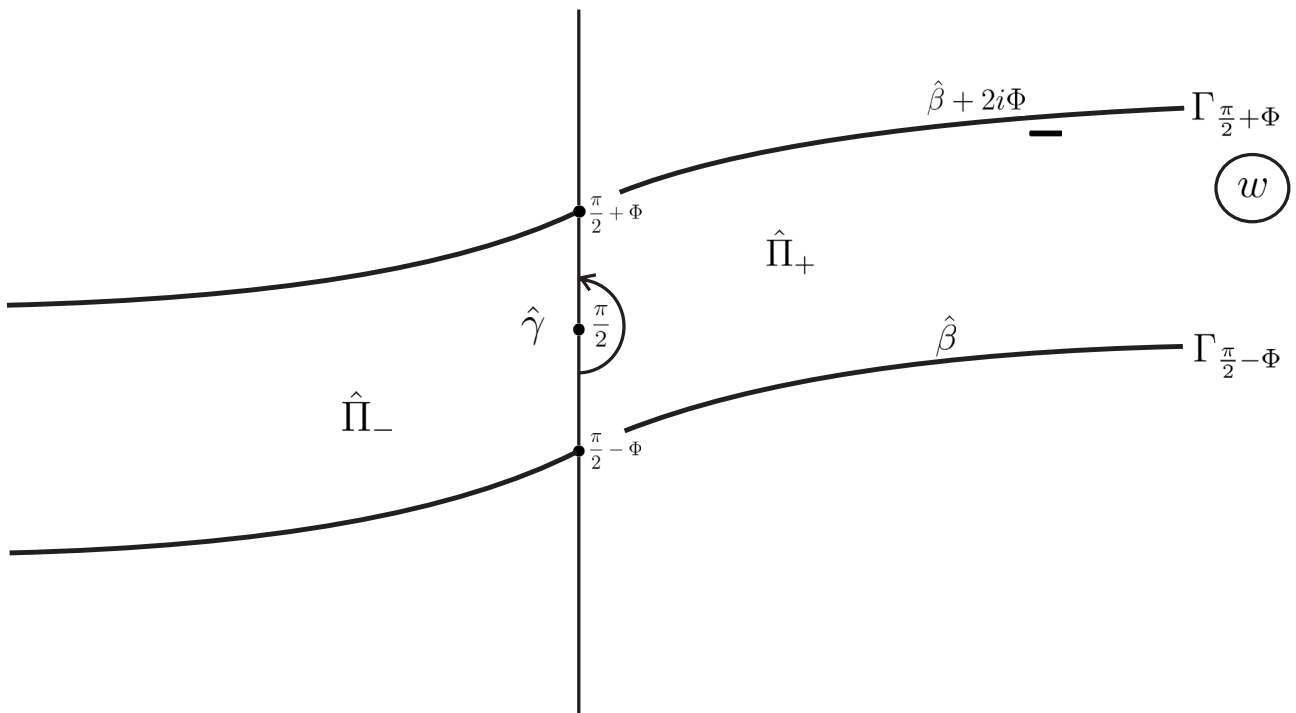


Рис. 4. Сведение к сопряженной задаче

FIG. 4. Reduction to the conjugate problem

4.2. Решение сопряженной задачи при $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$. Приступим к решению задачи (4.1), (4.2).

Сведем эту задачу к проблеме Римана–Гильберта. С этой целью конформно отобразим $\hat{\Pi}_+$ на $\check{\Pi} := \mathbb{C}^* \setminus \check{\beta}$, где \mathbb{C}^* — сфера Римана, $\check{\beta} := t(\beta)$. Например, определим

$$w \mapsto t = t(w) = \operatorname{cth}^2 \left(\frac{\pi}{2\Phi} \left(w - \frac{\pi i}{2} \right) \right), \quad w \in \hat{\Pi}_+. \tag{4.3}$$

Обозначим обратное преобразование $w(t) : \check{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_+$.

Обратим внимание, что когда $w \in \hat{\Pi}_+$ стремится к $\hat{\beta}$, то $t(w)$ стремится к $\check{\beta}$ сверху, а когда $w \in \hat{\Pi}_+$ стремится к $\beta + 2i\Phi$, то $t(w)$ стремится к $\check{\beta}$ снизу. Очевидно (см. рис. 5), что

$$t(\check{\gamma}) =: \check{\gamma} = [-\infty, 0], \quad t\left(\pm i\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right)\right) = 0, \quad t(\infty) = 1, \quad t\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \infty.$$

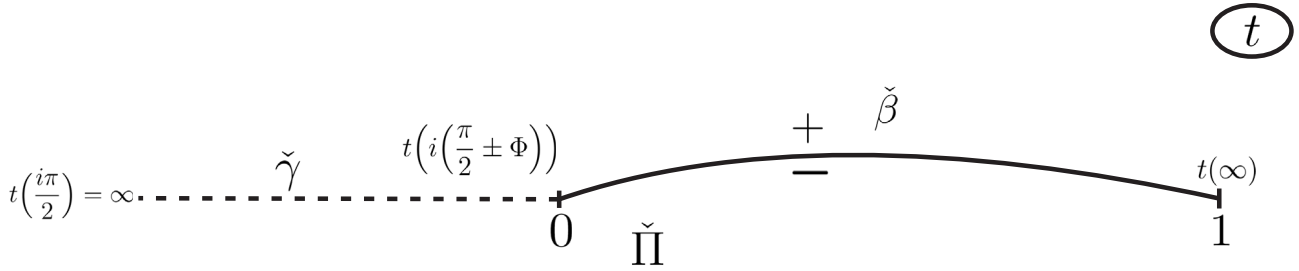


Рис. 5. Проблема Римана–Гильберта
 FIG. 5. Riemann–Hilbert problem

Тогда задача (4.1), (4.2) эквивалентна задаче Римана–Гильберта для $\check{a}_1(t) := \hat{a}_1(w(t)), t \in \check{\Pi}_+$, что одновременно является задачей о скачке (см. [14, гл. 16, 18])

$$\check{a}_1(t + i0) - \check{a}_1(t - i0) = \check{G}_2(t), \quad t \in \check{\beta}. \tag{4.4}$$

Здесь $\check{G}_2(t) = \hat{G}_2(w(t)), t \in \hat{\Pi}$, $\check{a}_1(t) := \check{a}_1(w(t)), t \in \check{\Pi}_+$; $\check{a}_1(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \check{a}_1(t \pm i\varepsilon)$ и для $t \in \check{\beta}$, $w \in \hat{\beta}$, $w \in \hat{\Pi}_+$.

Хорошо известно, что частное решение (4.4) задается интегралом типа Коши

$$\check{a}_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\check{\beta}} \frac{\check{G}_2(t')}{t' - t} dt', \quad t \in \check{\Pi}. \tag{4.5}$$

Очевидно, $\check{a}_1(t) \in \mathcal{H}(\check{\Pi})$ и $\check{a}_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. Более того, существует $\lim_{t \rightarrow 0} \check{a}_1(t), t \notin \check{\beta}$.

В следующей лемме мы рассмотрим асимптотику (4.5) при $t \rightarrow 1$; она играет важную роль в описании принадлежности решения к определенному классу, а значит, его единственности.

Лемма 4.1. *Функция $\check{a}_1(t)$ допускает асимптотику*

$$\check{a}_1(t) = -\frac{\check{G}_2(1)}{2\pi i} \ln \frac{1}{t-1} + C + O(t-1), \quad t \rightarrow 1, \tag{4.6}$$

где под $\ln \frac{1}{t-1}$ понимается некоторая ветвь, которая однозначна на плоскости, разрезанной вдоль $\check{\beta}$; C зависит только от \check{G}_2 ; кроме того,

$$\frac{d}{dt} \check{a}_1(t) = \frac{\sin \Phi}{\pi} \frac{1}{1-t} + \frac{\check{G}'_2(1)}{2\pi i} \ln(1-t) + C_1 + o(1),$$

где C, C_1 зависят только от \check{G}_2 .

Предложение 4.1. При $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$:

- i) Существует мероморфное в \mathbb{C} и аналитическое в $\hat{\Pi}$ решение \hat{a}_1 задачи (3.29), (3.27), заданное формулами (4.5), (4.3), (3.29).
 ii) Функция $\hat{a}_1(w)$ допускает асимптотику

$$\hat{a}_1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left(w - \frac{\pi i}{2} \right) + o\left(e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty,$$

$$\frac{d}{dw} \hat{a}_1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left(e^{\mp \frac{\pi}{\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty,$$

равномерную по $\operatorname{Im} w$, $w \in \hat{\Pi}_+$.

- iii) Решение \hat{a}_1 имеет полюсы в $\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\pi+\Phi}}$ при $\Phi > \frac{3\pi}{2}$ только в $q_1 := -p_1 - \pi i + 2i\Phi$, $-q_1 + \pi i = p_1 + 2\pi i - 2i\Phi$ и $p_1 - 2\pi i$ с вычетами

$$\operatorname{res}_{q_1} \hat{a}_1 = -r_1, \quad \operatorname{res}_{-q_1+\pi i} \hat{a}_1 = r_1, \quad \operatorname{res}_{p_1-2\pi i} \hat{a}_1 = r_2. \quad (4.7)$$

При $\Phi \leq \frac{3\pi}{2}$ функция \hat{a}_1 имеет полюсы в $\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\pi+\Phi}}$ только в $p_1 + 2\pi i$, $-p_1 - \pi i$ и $-p_1 + \pi i - 2i\Phi$ с вычетами

$$\operatorname{res}_{p_1+2\pi i} \hat{a}_1 = -r_1, \quad \operatorname{res}_{-p_1-\pi i} \hat{a}_1 = r_1, \quad \operatorname{res}_{-p_1+\pi i-2i\Phi} \hat{a}_1 = r_2. \quad (4.8)$$

4.3. Решение разностного уравнения, случай $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$. Мы хотим преобразовать \hat{a}_1 в \hat{v}_1^1 ,

которое будет удовлетворять всем условиям утверждения 3.1. Для этого при $\Phi > \frac{3\pi}{2}$, во-первых, прибавим T_1 к \hat{a}_1 , удаляя полюсы q_1 и $-q_1 + \pi i$ (см. (4.7)), так как по этому утверждению функция \hat{v}_1^1 должна быть аналитической в этих точках. Оказывается, можно построить функцию T_1 так, чтобы она породила полюс $-p_1 - \pi i$ с желаемым вычетом, как того требует то же утверждение.

Во-вторых, прибавим T_2 , получая полюс p_1 с желаемым вычетом в соответствии с тем же утверждением.

Рассмотрим

$$T_1(w) = \frac{\pi}{2\Phi} r_1 \left(\operatorname{cth} \left(\frac{\pi(w - q_1)}{2\Phi} \right) + \operatorname{cth} \left(\frac{\pi(-w + \pi i - q_1)}{2\Phi} \right) \right),$$

где r_1 задано с помощью (3.33) и $q_1 = -p_1 - \pi i + 2i\Phi$.

Легко видеть, что функция T_1 удовлетворяет следующим условиям:

$$T_1(-w + \pi i) = T_1(w), \quad T_1(w + 2i\Phi) = T_1(w). \quad (4.9)$$

Далее мы определим

$$T_2(w) := \frac{\pi}{2\Phi} r_2 \left(\operatorname{cth} \left(\frac{\pi(w - p_1)}{2\Phi} \right) + \operatorname{cth} \left(\frac{\pi(-w + \pi i - p_1)}{2\Phi} \right) \right),$$

где r_2 задано по формуле (3.31). Очевидно, T_2 также удовлетворяет (4.9).

Наконец, мы определим

$$\hat{v}_1^1(w) := \begin{cases} \hat{a}_1(w) + T_1(w) + T_2(w), & \Phi > \frac{3\pi}{2}, \\ \hat{a}_1(w) + T_2(w), & \Phi < \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad (4.10)$$

где $\hat{a}_1(w)$ дано в утверждении 4.1.

Теорема 4.1. Пусть $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$.

- i) Функция \hat{v}_1^1 удовлетворяет всем условиям утверждения 3.1.

ii) $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{H}\left(\overline{V_{\frac{3\pi}{2}} \setminus \Gamma_\pi}\right)$ и имеет единственный полюс в $-r_1 + \pi i$ от Γ_π с вычетом

$$\operatorname{res}_{-r_1+\pi i} \hat{v}_1^1 = -r_2.$$

iii) $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{M}\left(\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}}\right)$ и имеет единственный полюс в $r_1 - 2\pi i$ для $\Phi > \frac{3\pi}{2}$ с вычетом

$$\operatorname{res}_{r_1-2\pi i} \hat{v}_1^1 = r_2.$$

Следствие 4.1. При $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ единственный полюс \hat{v}_1 , принадлежащий $\overline{V_{-\frac{3\pi}{2}-\Phi}}$, равен $-r_1 + \pi i$, при этом

$$\operatorname{res}_{-r_1+\pi i} \hat{v}_1 = 2i \sin \Phi.$$

5. h_1 -ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ $\Phi = \frac{3\pi}{2}$

В предыдущих разделах мы построили решение задачи (3.29), (3.27), удовлетворяющее всем условиям утверждения 3.1 при $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$.

Тем же методом можно построить решение для $\Phi = \frac{3\pi}{2}$. Небольшое техническое неудобство в данном случае возникает из-за того, что функция $\check{G}_2(t)$ имеет полюс в $\check{\beta}$. Тем не менее, можно получить решение со свойствами, указанными в теореме 4.1.

Однако мы предпочитаем искать решение задачи в случае $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ другим способом. Дело в том, что в этом случае легко найти решение разностного уравнения (3.29) в *явном виде* без использования интеграла типа Коши.

Используя теорему Лиувилля, легко показать, что это элементарное решение совпадает с решением, полученным с помощью интеграла типа Коши.

В этом разделе мы строим мероморфное h_1 -инвариантное решение уравнения (3.29).

5.1. Мероморфное решение разностного уравнения при $\Phi = \frac{3\pi}{2}$. В этом случае построение мероморфного решения разностного уравнения (3.29) проще, чем в случае $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$, и \hat{v}_1^1 выражается через элементарные функции. В силу (3.28) при $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ имеем

$$G_2(w) = \frac{i\omega^2 \operatorname{sh} 2w}{\omega^2 \operatorname{sh}^2 w + k^2}. \tag{5.1}$$

Решим в этом случае разностное уравнение (3.29). Сначала мы решаем (3.29) в классе мероморфных функций. Решение легко найти интуитивно, используя $3\pi i$ -периодичность G_2 . Обозначим

$$m_1(w) := \frac{iw G_2(w)}{3\pi}.$$

Тогда в силу (5.1) m_1 удовлетворяет (3.29). Конечно, это решение не единственное. Все остальные решения отличаются от него на $3\pi i$ -периодическую функцию. Аналогично случаю $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ модифицируем это решение таким образом, чтобы оно удовлетворяло всем условиям утверждения 3.1.

Функция (5.1) не автоморфна относительно \hat{h}_1 . Симметризуем ее.

Введем

$$m(w) := \frac{m_1(w) + m_1(-w + \pi i)}{2}.$$

Тогда

$$m(w) = \frac{\pi + 2iw}{6\pi} \cdot G_2(w). \tag{5.2}$$

Лемма 5.1. Функция m является h_1 -автоморфным решением задачи (3.29).

Теперь модифицируем функцию $m(w)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям (3.32), (3.33) утверждения 3.1. Для этого добавим к m подходящую $3\pi i$ -периодическую функцию.

5.2. Решение разностного уравнения при $\Phi = \frac{3\pi}{2}$. Пусть

$$\begin{aligned} m_1 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{i}{6}, & m_2 &:= -\frac{p_1}{3\pi} - \frac{i}{6}, & m_3 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{i}{2}, \\ m_4 &:= -\frac{p_1}{3\pi} - \frac{i}{2}, & m_5 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{5i}{6}, & m_6 &:= \frac{p_1}{3\pi} + \frac{5i}{6}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Итак, рассмотрим следующие функции (периодические дополнения):

$$\begin{aligned} Q_1(w) &:= \frac{i - m_1}{3} \left[\operatorname{cth} \frac{w - p_1}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 + \pi i)}{3} \right], \\ Q_2(w) &:= -\frac{m_2}{3} \left[\operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1)}{3} \right], \\ Q_3(w) &:= -\frac{m_3}{3} \left[\operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 - \pi i)}{3} \right], \end{aligned}$$

где $m_{1,2,3}$ определяются в (5.3). Очевидно, что функции $Q_{1,2,3}$ являются $3\pi i$ -периодическими и \hat{h}_1 -автоморфными:

$$Q_{1,2,3}(w + 3\pi i) = Q_{1,2,3}(w), \quad Q_{1,2,3}(\hat{h}_1 w) = Q_{1,2,3}(w).$$

Наконец, определим

$$\begin{aligned} Q(w) &:= Q_1(w) + Q_2(w) + Q_3(w) = \frac{i - m_1}{3} \operatorname{cth} \frac{w - p_1}{3} - \frac{m_2 + m_3}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \\ &- \frac{i - m_1}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 + \pi i)}{3} + \frac{m_2}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1)}{3} + \frac{m_3}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 - \pi i)}{3}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем

$$\hat{v}_1^1(w) := m(w) + Q(w), \quad (5.5)$$

где m задается по формуле (5.2) и Q задается по формуле (5.4).

Теорема 5.1.

i) При $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ функция \hat{v}_1^1 удовлетворяет всем условиям утверждения 3.1.

ii) Полюсы \hat{v}_1^1 в $V_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$ равны

$$-p_1 - \pi i, \quad -p_1 + \pi i, \quad p_1, \quad p_1 - 2\pi i$$

со следующими вычетами:

$$\operatorname{res}_{-p_1 - \pi i} \hat{v}_1^1 = i, \quad \operatorname{res}_{-p_1 + \pi i} \hat{v}_1^1 = -i, \quad \operatorname{res}_{p_1} \hat{v}_1^1 = i, \quad \operatorname{res}_{p_1 - 2\pi i} \hat{v}_1^1 = i.$$

Теперь приведем важное свойство функции \hat{v}_1 , аналогичное следствию 4.1 для случая $\Phi = \frac{3\pi}{2}$.

Следствие 5.1. При $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ функция \hat{v}_1 , заданная формулой (3.30), имеет единственный полюс в $-p_1 + \pi i$, принадлежащий $V_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$, и вычет $\operatorname{res}_{-p_1 + \pi i} \hat{v}_1 = -2i$.

Напомним, что эта функция играет ключевую роль в построении представления типа Зоммерфельда для решения основной задачи. Это представление будет дано в следующем разделе.

6. АСИМПТОТИКА \hat{v}_1 НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Нам нужно доказать асимптотику (2.2). Для этого нужно найти асимптотику подынтегральной функции $\hat{v}_1(w)$ на бесконечности.

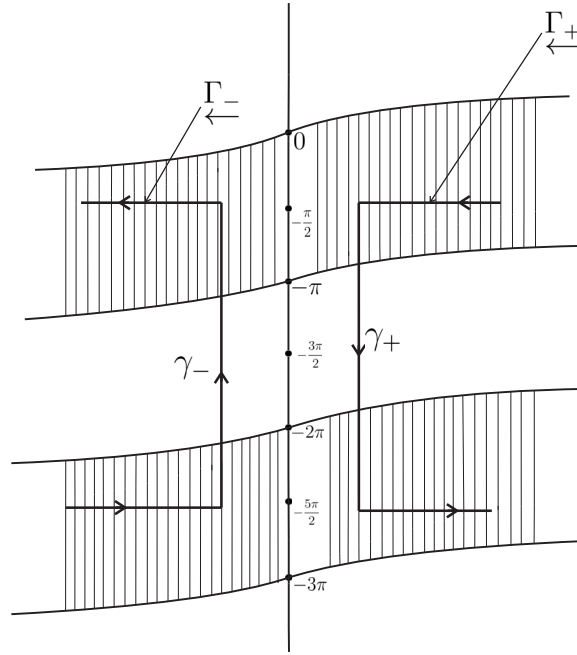


Рис. 6. Двухпетлевой контур Зоммерфельда $\mathcal{C} = \mathcal{C}(i)$

FIG. 6. Sommerfeld two-loop contour $\mathcal{C} = \mathcal{C}(i)$

6.1. Асимптотика \hat{v}_1^1 на бесконечности.

Лемма 6.1. Для любого $\Phi \in (\pi, 2\pi)$ функция \hat{v}_1^1 допускает следующую асимптотику:

$$\begin{cases} \hat{v}_1^1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left(w - \frac{\pi i}{2} \right) + o\left(e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \\ \frac{d}{dw} \hat{v}_1^1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left(e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right) \end{cases} \quad \left| \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty. \right. \quad (6.1)$$

Замечание 6.1. Асимптотики \hat{v}_1^1 совпадают для случаев $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ и $\Phi = \frac{3\pi}{2}$.

6.2. Асимптотика $\hat{v}_1(w)$. Согласно (3.30), $\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w)$, $w \in \mathbb{C}$, где $\hat{G}(w)$ задается через (3.20). Очевидно,

$$\hat{G}(w) = \pm e^{\mp i\Phi} + o\left(e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \frac{d}{dw} \hat{G}(w) = o\left(e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty.$$

Следовательно, в (6.1)

$$\hat{v}_1(w) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \cdot \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left(w - \frac{\pi i}{2} \right) + \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) w i \Phi} + o\left(e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{w\pi}{2\Phi}} \right), \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dw} \hat{v}_1(w) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left(e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{w\pi}{2\Phi}} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty. \quad (6.3)$$

7. НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Определим контур \mathcal{C} как на рис. 6 и определим $u_1(\rho, \theta)$ с помощью (2.3), $\hat{v}_1(w)$ с помощью (3.30), $\hat{v}_1^1(w)$ с помощью (4.10) при $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ и с $\hat{v}_1^1(w)$ с помощью (5.5) при $\Phi = \frac{3\pi}{2}$.

Из асимптотики (6.2), (6.3) следует, что u_1 , заданная с помощью (2.3), принадлежит пространству E , описанному в определении 2.1. Она единственна в силу теоремы Лиувилля и (4.6). Более того, нетрудно показать, что функция (2.3) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям. На этом доказательство теоремы 2.1 завершено.

Благодарности. П. Жевандров и А. Мерзон благодарят CONACYT-México и CIC-UMSNH, Х.Э. Де ла Пас Мендес благодарит CONACYT-México, и М.И. Ромеро Родригес благодарит проректора по науке Universidad Militar Nueva Granada за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшиев В. А.* Случайные блуждания. Уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. — М.: МГУ, 1970.
2. *Babich V. M., Lyalinov M. A., Grikurov V. E.* Diffraction theory: The Sommerfeld—Malyuzhinets Technique. — Oxford: Alpha Science, 2008.
3. *Castro L. P., Kapanadze D.* Dirichlet—Neumann impedance boundary-value problems arising in rectangular wedge diffraction problems// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — 136. — С. 2113–2123.
4. *Castro L. P., Kapanadze D.* Wave diffraction by a 45 degree wedge sector with Dirichlet and Neumann boundary conditions// Math. Comput. Modelling. — 2008. — 48, № 1/2. — С. 114–121.
5. *Castro L. P., Kapanadze D.* Wave diffraction by a 270 degrees wedge sector with Dirichlet, Neumann and impedance boundary conditions// Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2011. — 155. — С. 96–99.
6. *Castro L. P., Speck F.-O., Teixeira F. S.* On a class of wedge diffraction problems posted by Erhard Meister// Oper. Theory Adv. Appl. — 2004. — 147. — С. 213–240.
7. *Castro L. P., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant// Integral Equ. Oper. Theory. — 2006. — 56. — С. 1–44.
8. *Croisille J.-P., Lebeau G.* Diffraction by an elastic immersed wedge. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1999.
9. *Kay I.* The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge// Commun. Pure Appl. Math. — 1953. — 6. — С. 521–546.
10. *Komech A. I.* Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary// Math. USSR Sb. — 1973. — 21. — С. 91–135.
11. *Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* DN-scattering of a plane wave by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2011. — 34, № 15. — С. 1843–1872.
12. *Komech A. I., Mauser N. J., Merzon A. E.* On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2004. — 28. — С. 147–183.
13. *Komech A. I., Merzon A. E.* Limiting amplitude principle in the scattering by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2006. — 29, № 10. — С. 1147–1185.
14. *Komech A., Merzon A.* Stationary diffraction by wedges. — Cham: Springer, 2019.
15. *Komech A. I., Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* On uniqueness and stability of Sobolev's solution in scattering by wedges// Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — 66, № 5. — С. 2485–2498.
16. *Komech A. I., Merzon A. E., Esquivel Navarrete A., De la Paz Méndez J. E., Villalba Vega T. J.* Sommerfeld's solution as the limiting amplitude and asymptotics for narrow wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — 42. — С. 4957–4970.
17. *Komech A. I., Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* Time-dependent scattering of generalized plane waves by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — 38, № 18. — С. 4774–4785.
18. *Meister E.* Some solved and unsolved canonical problems of diffraction theory// В сб.: «Differ. Equ. Math. Phys. Proc. Int. Conf., Birmingham, USA, March 3-8, 1986». — Berlin etc.: Springer, 1987. — С. 320–336.
19. *Meister E., Passow A., Rottbrand K.* New results on wave diffraction by canonical obstacles// Oper. Theory Adv. Appl. — 1999. — 110. — С. 235–256.
20. *Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equations in a quadrant// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1993. — 123, № 2. — С. 275–294.
21. *Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Two canonical wedge problems for the Helmholtz equation// Math. Methods Appl. Sci. — 1994. — 17. — С. 877–899.
22. *Meister E., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Wiener—Hopf—Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions// J. Integral Equ. Appl. — 1992. — 4, № 2. — С. 229–255.
23. *Merzon A. E., Komech A. I., De la Paz Méndez J. E., Villalba T. J.* On the Keller—Blank solution to the scattering problem of pulses by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — 38, № 10. — С. 2035–2040.
24. *Merzon A. E., Zhevandrov P. N., De la Paz Méndez J. E.* On the behavior of the edge diffracted nonstationary wave in scattering by wedges near the front// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — 22, № 4. — С. 491–503.
25. *Muskhlishvili N. I.* Singular integral equations. — Dordrecht: Springer, 1958.
26. *Penzel F., Teixeira F. S.* The Helmholtz equation in a quadrant with Robin's conditions// Math. Methods Appl. Sci. — 1999. — 22. — С. 201–216.
27. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness. — New York: Academic Press, 1975.
28. *Sommerfeld A.* Mathematical theory of diffraction. — Boston: Birkhäuser, 2004.

Анатолий Мерзон
 Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика
 E-mail: anatolimx@gmail.com

П. Жевандров
 Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика
 E-mail: pzhevand@gmail.com

Х. Э. Де ла Пас Мендес
 Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Сьюдад Альтамирано, Мексика
 E-mail: jeligio12@gmail.com

М. И. Ромеро Родригес
 Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Богота, Колумбия
 E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670

UDC 517.956.3+517.958

Explicit solution of a Dirichlet problem in nonconvex angle

A. Merzon¹, P. Zhevandrov², J. E. De la Paz Méndez³, and M. I. Romero Rodríguez⁴

¹*Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México*

²*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México*

³*Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Cd. Altamirano Guerrero, México*

⁴*Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá Colombia*

In the present work, we give an explicit solution of the Dirichlet boundary-value problem for the Helmholtz equation in a nonconvex angle with periodic boundary data. We present uniqueness and existence theorems in an appropriate functional class and we give an explicit formula for the solution in the form of the Sommerfeld integral. The method of complex characteristics [14] is used.

Keywords: Helmholtz equation, nonconvex angle, Sommerfeld integral, method of complex characteristics

For citation: A. Merzon, P. Zhevandrov, J. E. De la Paz Méndez, M. I. Romero Rodríguez, “Explicit solution of a Dirichlet problem in nonconvex angle,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 653–670. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670>

REFERENCES

1. V. A. Malyshev, *Random Walks. Wiener–Hopf Equations in the Quadrant of Plane. Galois Automorphisms*, Moscow Univ., Moscow, 1970 (in Russian).
2. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, and V. E. Grikurov, *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique*, Alpha Science, Oxford, 2008.
3. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Dirichlet–Neumann impedance boundary-value problems arising in rectangular wedge diffraction problems,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2008, **136**, 2113–2123.
4. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Wave diffraction by a 45 degree wedge sector with Dirichlet and Neumann boundary conditions,” *Math. Comput. Modelling*, 2008, **48**, No. 1/2, 114–121.
5. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Wave diffraction by a 270 degrees wedge sector with Dirichlet, Neumann and impedance boundary conditions,” *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2011, **155**, 96–99.



6. L. P. Castro, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “On a class of wedge diffraction problems posted by Erhard Meister,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2004, **147**, 213–240.
7. L. P. Castro, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant,” *Integral Equ. Oper. Theory*, 2006, **56**, 1–44.
8. J.-P. Croisille and G. Lebeau, *Diffraction by an Elastic Immersed Wedge*. — Springer, Berlin–Heidelberg, 1999.
9. I. Kay, “The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1953, **6**, 521–546.
10. A. I. Komech, “Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary,” *Math. USSR Sb.*, 1973, **21**, 91–135.
11. A. I. Komech, N. J. Mauser, and A. E. Merzon, “On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2004, **28**, 147–183.
12. A. I. Komech and A. E. Merzon, “Limiting amplitude principle in the scattering by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2006, **29**, No. 10, 1147–1185.
13. A. Komech and A. Merzon, *Stationary Diffraction by Wedges*, Springer, Cham, 2019.
14. A. I. Komech, A. E. Merzon, and J. E. De la Paz Méndez, “On uniqueness and stability of Sobolev’s solution in scattering by wedges,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**, No. 5, 2485–2498.
15. A. I. Komech, A. E. Merzon, and J. E. De la Paz Méndez, “Time-dependent scattering of generalized plane waves by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 18, 4774–4785.
16. A. I. Komech, A. E. Merzon, A. Esquivel Navarrete, J. E. De la Paz Méndez, and T. J. Villalba Vega, “Sommerfeld’s solution as the limiting amplitude and asymptotics for narrow wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, **42**, 4957–4970.
17. E. Meister, “Some solved and unsolved canonical problems of diffraction theory,” In: *Differ. Equ. Math. Phys. Proc. Int. Conf., Birmingham, USA, March 3-8, 1986*, Springer, Berlin etc., 1987, pp. 320–336.
18. E. Meister, A. Passow, and K. Rottbrand, “New results on wave diffraction by canonical obstacles,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 1999, **110**, 235–256.
19. E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equations in a quadrant,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1993, **123**, No. 2, 275–294.
20. E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Two canonical wedge problems for the Helmholtz equation,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1994, **17**, 877–899.
21. E. Meister, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Wiener–Hopf–Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions,” *J. Integral Equ. Appl.*, 1992, **4**, No. 2, 229–255.
22. A. E. Merzon and J. E. De la Paz Méndez, “DN-scattering of a plane wave by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2011, **34**, No. 15, 1843–1872.
23. A. E. Merzon, A. I. Komech, J. E. De la Paz Méndez, and T. J. Villalba, “On the Keller–Blank solution to the scattering problem of pulses by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 10, 2035–2040.
24. A. E. Merzon, P. N. Zhevandrov, and J. E. De la Paz Méndez, “On the behavior of the edge diffracted nonstationary wave in scattering by wedges near the front,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 491–503.
25. N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Springer, Dordrecht, 1958.
26. F. Penzel and F. S. Teixeira, “The Helmholtz equation in a quadrant with Robin’s conditions,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1999, **22**, 201–216.
27. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
28. A. Sommerfeld, *Mathematical Theory of Diffraction*, Birkhäuser, Boston, 2004.

A. Merzon

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México
E-mail: anatolimx@gmail.com

P. Zhevandrov

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México
E-mail: pzhevand@gmail.com

J. E. De la Paz Méndez

Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Cd. Altamirano Guerrero, México
E-mail: jeligio12@gmail.com

M. I. Romero Rodríguez

Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá Colombia
E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co