Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 4 (2022). С. 635–652
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652
УДК 517.927.2

МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ СТРУННОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ В УЗЛЕ

М. Б. Зверева[1,2]

[1]*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2]*Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия*

В настоящей работе проведено исследование модели деформаций системы стилтьесовских струн, расположенных вдоль геометрического графа-звезды, с нелинейным условием в узле. Такого рода условие возникает за счет наличия в узле ограничителя на перемещение струн под воздействием внешней нагрузки. В работе установлены необходимое и достаточное условия экстремума энергетического функционала; доказаны теоремы существования и единственности решения; проанализированы критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение струн с ограничителем; установлена зависимость решения от длины ограничителя.

Ключевые слова: система стилтьесовских струн, граф-звезда, ограничитель на перемещение струн, существование и единственность решения, анализ критических нагрузок

Для цитирования: *М. Б. Зверева.* Модель деформаций струнной системы на графе-звезде с нелинейным условием в узле// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **68**, № 4. С. 635–652. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652

1. Введение

Математические модели, описываемые в терминах ветвящегося аргумента, т. е. аргумента, принимающего значения из некоторого геометрического графа, возникают при анализе процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Такого рода объекты достаточно типичны. Например, упругие сетки, решетки стержней, электрические цепи, акустические сети, волноводы, гидравлические системы и пр. Активный математический интерес к исследованию таких задач привел к появлению многочисленных публикаций. Особенно отметим работы Ю. В. Покорного [7, 8, 20–22], В. Л. Прядиева [10], О. М. Пенкина [3, 4], А. В. Боровских [19], В. В. Провоторова [9, 24, 25], В. А. Юрко [26], М. Ш. Бурлуцкой [1, 13, 14], А. П. Хромова [2], Р. Ч. Кулаева [5, 6], J. von Below [11, 12], S. Nicaise [16]. Однако во всех этих работах рассматривались задачи с линейными граничными условиями. В данной статье для дифференциального уравнения второго порядка с импульсными особенностями в коэффициентах и правой части, порождаемыми наличием локализованных внешних нагрузок (упругих опор, сосредоточенных сил), исследуется граничная задача на геометрическом графе-звезде с нелинейным условием в узле.

Мы предполагаем, что граф-звезда Γ ориентирован от узла, состоит из ребер-интервалов $\gamma_i = (0, l_i)$, занумерованных произвольным образом ($i = 1, 2, \ldots, n$), и внутренней вершины 0 (узла). Здесь и далее используется терминология из [7]. Через $\partial\Gamma$ обозначается множество граничных вершин графа Γ. В нашем случае им соответствуют точки l_i на каждом из ребер. Введем множества $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \partial\Gamma$; $R(\Gamma) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \gamma_i$.

Скалярной функцией $z(x)$, заданной на графе Γ, называется отображение $z : \Gamma \to \mathbb{R}$. Сужение $z(x)$ на ребро γ_i будем обозначать как $z_i(x)$.

Изучаемая математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \int\limits_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) \in N_{[-m,m]} u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \ldots = u_n(0) = u(0), \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь функция $u(x)$ описывает отклонение жестко закрепленной в граничных вершинах Γ системы струн, соединенных между собой в узле, от положения равновесия, совпадающего с Γ, под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F(x)$; $p(x)$ характеризует упругие свойства струн; $Q(x)$ описывает распределение упругой реакции внешней среды. Функции $u_i(x)$ определяются в точках $x = 0$ и $x = l$ предельными значениями. Условие жесткого закрепления струн означает, что $u(a) = 0$, где $a \in \partial\Gamma$, или $u_i(l_i) = 0$. Условие соединения струн в узле имеет вид $u_1(+0) = u_2(+0) = \ldots = u_n(+0) = u(0)$. Через $N_{[-m,m]} u(0)$ обозначен нормальный конус в точке $u(0)$ к отрезку $[-m, m]$, определяемый как числовое множество

$$N_{[-m,m]} u(0) = \{\xi : \xi(c - u(0)) \leqslant 0 \quad \forall c \in [-m, m]\},$$

где $u(0) \in [-m, m]$.

Нелинейное условие

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) \in N_{[-m,m]} u(0) \tag{1.2}$$

возникает за счет наличия ограничителя, представленного отрезком $[-m, m]$, на перемещение струн в узле. Из (1.2) вытекает, что если внешняя сила такова, что $|u(0)| < m$, то $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) = 0$. Иначе выполняются условия $u(0) = m$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) \geqslant 0$, либо условия $u(0) = -m$, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0) u_i'(+0) \leqslant 0$.

Из уравнения в (1.1) вытекает, что в каждой точке $\xi_i \in \gamma_i$, в которой хотя бы одна из функций p_i, Q_i, F_i терпит разрыв, имеет место равенство

$$-p_i(\xi_i + 0) u_i'(\xi_i + 0) + p_i(\xi_i - 0) u_i'(\xi_i - 0) + u_i(\xi_i) \Delta Q_i(\xi_i) = \Delta F_i(\xi_i), \tag{1.3}$$

где $\Delta F_i(\xi_i) = F_i(\xi_i + 0) - F_i(\xi_i - 0)$, $\Delta Q_i(\xi_i) = Q_i(\xi_i + 0) - Q_i(\xi_i - 0)$. Здесь скачок $\Delta Q_i(\xi_i)$ соответствует упругости опоры (пружины), закрепленной в точке ξ_i ребра с номером i; скачок $\Delta F_i(\xi_i)$ равен сосредоточенной в точке ξ_i силе. В данной работе мы не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила, однако на ребрах такие особенности допускаются.

Переменная x на каждом ребре принадлежит специальному расширению $(0, l_i)$, обозначаемому через $\gamma_{i\sigma_i}$, на котором всякая точка ξ_i разрыва хотя бы одной из функций p_i, Q_i, F_i заменяется парой $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$.

Мы предполагаем, что

(i) функции p, F имеют ограниченную вариацию на каждом ребре, причем, $\inf\limits_{R(\Gamma)} p > 0$;

(ii) функция Q не убывает на каждом ребре;

(iii) функции p, F, Q непрерывны в точках из $\partial\Gamma$;

$$\sum_{i=1}^{n} (Q_i(0+0) - Q(0)) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} (F_i(0+0) - F(0)) = 0.$$

Решение $u(x)$ задачи (1.1) мы ищем в классе E абсолютно непрерывных на $\overline{\Gamma}$ функций $u(x)$, производные которых $u'(x)$ являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Модель (1.1) может быть переписана как

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + \dfrac{dQ}{d\Gamma}(x)u(x) = \dfrac{dF}{d\Gamma}(x), \quad x \in R_\sigma(\Gamma), \\ \dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \end{cases} \tag{1.4}$$

где обозначено

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{d\sigma_i}(p_i u_i')(x), & x \neq 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0), & x = 0, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\frac{dQ}{d\Gamma} = \begin{cases} \dfrac{dQ_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \begin{cases} \dfrac{dF_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Здесь знак $\dfrac{d}{d\sigma_i}$ означает дифференцирование по σ_i-мере, порождаемой на каждом ребре графа соответствующей возрастающей функцией

$$\sigma_i(x) = x + p_i^+(x) + p_i^-(x) + Q_i(x) + F_i^+(x) + F_i^-(x),$$

где $p_i^+(x), p_i^-(x)$, $F_i^+(x)$, $F_i^-(x)$ — неубывающие функции из жорданова представления функций ограниченной вариации $p_i(x) = p_i^+(x) - p_i^-(x)$, $F_i(x) = F_i^+(x) - F_i^-(x)$. В точке $x = 0$ производные $\dfrac{dQ}{d\Gamma}$ и $\dfrac{dF}{d\Gamma}$ определяются нулевыми значениями, поскольку мы в данной работе не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила. Решения u задачи (1.4) принадлежат E, поэтому условие непрерывности в узле здесь сразу включено в класс допустимых решений. Множество $R_\sigma(\Gamma)$ представляет собой объединение по всем ребрам множеств $\gamma_{i\sigma_i}$ с всевозможными точками разрыва p, Q, F, за исключением узла.

Модель (1.1) получена вариационным методом из задачи о минимизации функционала потенциальной энергии

$$\Phi(u) = \int\limits_\Gamma \frac{pu'^2}{2}dx + \int\limits_\Gamma \frac{u^2}{2}dQ - \int\limits_\Gamma u dF$$

при условиях $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $|u(0)| \leqslant m$.

Аналог данной задачи для случая отрезка был рассмотрен в работе [15].

Статья устроена следующим образом. Во втором разделе приведены необходимые определения и результаты. В третьем разделе содержится точное описание модели и вариационное обоснование. В четвертом разделе установлены основные результаты работы. В частности, доказаны теоремы существования и единственности решения, проанализирована зависимость решения от длины ограничителя.

2. Используемые понятия и факты

Будем говорить, что определенная на ребре γ_i функция $z(x)$ имеет *ограниченную вариацию* на этом ребре, если:

1. функция $z(x)$ имеет конечные односторонние пределы в граничных точках $x = 0$ и $x = l_i$ ребра γ_i;

2. найдется константа c_i такая, что для любого разбиения ребра γ_i точками $0 = x_0^i < x_1^i < \ldots < x_{n_i}^i = l_i$ сумма $\sum\limits_{j=0}^{n_i-1} |z(x_{j+1}^i) - z(x_j^i)| \leqslant c_i$, где в граничных точках ребра функция z определяется предельными значениями.

Определенная на ребре γ_i функция $z(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на этом ребре, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что какова бы ни была конечная система принадлежащих ребру γ_i попарно непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{n_i}$ такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n_i}(\beta_i - \alpha_i) < \delta$, то выполняется неравенство $\sum\limits_{j=1}^{n_i} |z(\beta_i) - z(\alpha_i)| < \varepsilon$.

Будем называть определенную на $\overline{\Gamma}$ функцию *абсолютно непрерывной* на $\overline{\Gamma}$, если она является абсолютно непрерывной на каждом ребре γ_i и непрерывной в узле, т. е. такой, что односторонние пределы по ребрам совпадают и их общее значение равно значению функции в узле, непрерывной в точках из $\partial\Gamma$.

Важную роль в настоящей статье будет играть интегро-дифференциальное уравнение вида

$$-(\widetilde{p}v')(x) + \int\limits_0^x v d\widetilde{Q} = \widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(0) - (\widetilde{p}v')(+0), \quad x \in \overline{[0,l]}_\sigma, \tag{2.1}$$

исследуемое в работах [15,23]. Предполагается, что функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ имеют ограниченную вариацию на отрезке $[0,l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} \widetilde{p} > 0$; функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ непрерывны в точках $x = 0$, $x = l$. Решения уравнения (2.1) рассматриваются в классе абсолютно непрерывных на отрезке $[0,l]$ функций, производная которых имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$. В случае гладких функций $\widetilde{p}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{F}$ уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$-(\widetilde{p}v')' + \widetilde{Q}'v = \widetilde{F}'.$$

В общем случае уравнение (2.1) содержит разрывные функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ наряду с интегралом Стилтьеса. Сохраняя явное присутствие скалярного аргумента, (2.1) обнаруживает и его особые значения: это те точки, в которых производная $v'(x)$ и функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ могут иметь разрыв, те значения верхнего предела в интеграле, когда этот интеграл может терять смысл. Например, если в (2.1) точка x совпадает с одной из точек ξ разрыва функции $\widetilde{Q}$, и если при этом $\widetilde{Q}(\xi) \neq \widetilde{Q}(\xi-0)$ и $\widetilde{Q}(\xi) \neq \widetilde{Q}(\xi+0)$, то соответствующее значение $\int\limits_0^{\xi} v(x)d\widetilde{Q}(x)$ отлично как от $\int\limits_0^{\xi-0} v(x)d\widetilde{Q}(x)$, так и от $\int\limits_0^{\xi+0} v(x)d\widetilde{Q}(x)$, что приводит к потере смысла $v'(\xi)$ в (2.1). При этом каждый из символов $\int\limits_0^{\xi-0} vd\widetilde{Q}$ и $\int\limits_0^{\xi+0} vd\widetilde{Q}$ требует дополнительных разъяснений. Например, то ли $\int\limits_0^{\xi-0} vd\widetilde{Q}$ обозначает интеграл по интервалу $(0,\xi)$, то ли несобственный интеграл $\lim\limits_{\delta\downarrow 0} \int\limits_0^{\xi-\delta} vd\widetilde{Q}$. Чтобы устранить отмеченные поводы для возможных недоразумений, мы проводим конструкцию, описанную в [15,18], заменяя каждую особую точку ξ парой $\{\xi-0, \xi+0\}$.

Обозначим через S множество точек, в которых функции $\widetilde{p}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{Q}$ имеют ненулевые простые скачки, т. е. различные левый и правый пределы. Через $\overline{[0,l]}_\sigma$ обозначим множество $[0,l]$, полученное заменой точек $\xi \in S$ на соответствующие пары $\{\xi-0, \xi+0\}$. Мы полагаем, что $\xi - 0 > x$ для всех $x < \xi$ и $\xi + 0 < x$ для всех $x > \xi$.

Множеству $\overline{[0,l]}_\sigma$ можно дать следующее корректное определение как одномерному метрическому пространству. Рассмотрим жорданово представление функций ограниченной вариации $\widetilde{p}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{F}$ в виде $\widetilde{p} = \widetilde{p}^+ - \widetilde{p}^-$, $\widetilde{Q} = \widetilde{Q}^+ - \widetilde{Q}^-$, $\widetilde{F} = \widetilde{F}^+ - \widetilde{F}^-$. Обозначим через $\sigma(x)$ функцию

$$\sigma(x) = x + \widetilde{p}^+(x) + \widetilde{p}^-(x) + \widetilde{Q}^+(x) + \widetilde{Q}^-(x) + \widetilde{F}^+(x) + \widetilde{F}^-(x). \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что функция $\sigma(x)$ имеет разрывы только в точках из S. Введем на множестве $[0,l] \setminus S$ метрику $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S \neq \varnothing$, то это метрическое пространство, очевидно, не является полным. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с $\overline{[0,l]}_\sigma$, индуцируя в нем топологию.

Таким образом, мы рассматриваем уравнение (2.1) на множестве значений x из $\overline{[0,l]}_\sigma$, не допуская тем самым в (2.1) значения x из S. На $\overline{[0,l]}_\sigma$ значения $\widetilde{p}(\xi \pm 0)$, $\widetilde{Q}(\xi \pm 0)$ и $\widetilde{F}(\xi \pm 0)$, которые были на $[0,l]$ предельными, оказываются собственными значениями в соответствующих точках из $\overline{[0,l]}_\sigma$. Непрерывность функции $v(\cdot)$ позволяет сохранять обычный смысл интеграла Римана—Стилтьеса для интегрального слагаемого в (2.1) при $x = \xi - 0$ и $x = \xi + 0$, беря в качестве собственных значения, бывшие ранее предельными.

Таким образом, уравнение (2.1) нами рассматривается как бы двухслойно: нижний уровень — для значений $x \in [0,l]$, если речь идет о самих решениях $v(x)$ (под знаком интеграла), и второй уровень — для значений x в тождестве (2.1), где $x \in \overline{[0,l]}_\sigma$.

Заметим, что в каждой точке $\xi \in S$ имеет место равенство

$$-\widetilde{p}(\xi+0)v'(\xi+0) + \widetilde{p}(\xi-0)v'(\xi-0) + v(\xi)\Delta\widetilde{Q}(\xi) = \Delta\widetilde{F}(\xi).$$

При этом, согласно [23, теорема 1.4],

$$v'(\xi+0) = \lim_{x\to\xi+0} v'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \frac{v(\xi+\varepsilon)-v(\xi)}{\varepsilon} = v'_+(\xi),$$

$$v'(\xi-0) = \lim_{x\to\xi-0} v'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0-0} \frac{v(\xi+\varepsilon)-v(\xi)}{\varepsilon} = v'_-(\xi).$$

Зафиксируем номер произвольного ребра i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Основным объектом в настоящей статье является уравнение

$$-\left(p_i u_i'\right)(x) + \int\limits_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), x \in \gamma_{i\sigma_i},$$

в котором функции p_i, Q_i, F_i доопределены на отрезок $[0,l_i]$ предельными значениями

$$\sigma_i(x) = x + p_i^+(x) + p_i^-(x) + Q_i(x) + F_i^+(x) + F_i^-(x),$$

$\gamma_{i\sigma_i} = \overline{[0,l_i]}_{\sigma_i}$. Заметим, что полученное уравнение может быть продифференцировано по σ_i-мере, порождаемой на каждом ребре соответствующей возрастающей функцией $\sigma_i(x)$. Имеем

$$-\frac{d}{d\sigma_i}(p_i u_i')(x) + \frac{dQ_i}{d\sigma_i}(x)u_i(x) = \frac{dF_i}{d\sigma_i}(x), \quad x \in \gamma_{i\sigma_i} \cup S(\sigma_i),$$

где $S(\sigma_i)$ — множество точек разрыва функции $\sigma_i(x)$. Обозначив через $R_\sigma(\Gamma) = (\bigcup\limits_{i=1}^n(\gamma_{i\sigma_i} \cup S(\sigma_i)))\backslash\{0\}$, можем записать n уравнений в едином виде

$$-\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + u(x)\frac{dQ}{d\Gamma}(x) = \frac{dF}{d\Gamma}(x), \quad x \in R_\sigma(\Gamma) \tag{2.3}$$

где обозначено $\dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \dfrac{d}{d\sigma_i}(p_i u_i')(x)$, $\dfrac{dQ}{d\Gamma}(x) = \dfrac{dQ_i}{d\sigma_i}(x)$, $\dfrac{dF}{d\Gamma}(x) = \dfrac{dF_i}{d\sigma_i}(x)$ при $x \neq 0$.

Далее нам понадобятся следующие результаты.

Лемма 2.1 (см. [15, лемма 3.1]). *Пусть $A(x)$ является функцией ограниченной вариации на $[0,l]$. Пусть для любой абсолютно непрерывной на $[0,l]$ функции $h(x)$, производная которой $h'(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,l]$, удовлетворяющей условиям $h(0) = h(l) = 0$, выполняется равенство*

$$\int\limits_0^l A dh = 0. \tag{2.4}$$

Тогда

$$A(x-0) = A(x+0) \equiv const$$

для всех $x \in (0,l)$.

Теорема 2.1 (см. [23, теорема 1.5]). *Для любых чисел* u_0, v_0 *и для любой точки* $x_0 \in \overline{[0,l]}_\sigma$ *задача*

$$\begin{cases} -(\widetilde{p}v')(x) + (\widetilde{p}v')(0) + \int\limits_0^x v d\widetilde{Q} = \widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(0), x \in \overline{[0,l]}_\sigma, \\ v(x_0) = v_0, \\ v'(x_0) = w_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-\left(\widetilde{p}v'\right)(x) + \left(\widetilde{p}v'\right)(0) + \int\limits_0^x v d\widetilde{Q} = 0. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2 (см. [23, лемма 1.1]). *Пространство решений уравнения* (2.5) *двумерно.*

Лемма 2.3 (см. [23, предложение 2.2]). *Пусть функция* $\widetilde{Q}$ *не убывает на* $[0,l]$. *Тогда каждое нетривиальное решение уравнения* (2.5) *может иметь на* $[0,l]$ *не более одного нуля.*

Теорема 2.2 (см. [23, теорема 2.1]). *Для любой пары решений* φ_1, φ_2 *уравнения* (2.5) *выполняется*

$$p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)) \equiv const$$

на $\overline{[0,l]}_\sigma$.

Пусть задано замкнутое выпуклое множество $G \subset H$, где H — гильбертово пространство. Пусть $x \in G$. *Нормальным конусом* в точке x ко множеству G называется множество

$$N_G(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x\rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in G\}.$$

Заметим, что если x — внутренняя точка G, то $N_G(x) = \{0\}$. Если $G = [-m,m]$, где $m > 0$, то $N_G(m) = [0,+\infty)$, $N_G(-m) = (-\infty, 0]$.

3. Вариационная мотивация подхода

Пусть точки O, A_1, A_2,…, A_n принадлежат горизонтальной плоскости π. Рассмотрим механическую систему, состоящую из n струн, соединенных между собой в одной точке, которые в положении равновесия совпадают с отрезками OA_1, OA_2,…, OA_n. Под воздействием внешней силы, направленной перпендикулярно плоскости π, струны отклоняются от равновесного положения. При этом предполагается, что отклонение всех точек струн параллельно прямой, перпендикулярной плоскости π. Введем систему координат, чтобы описать процесс деформаций. Ось Ox для i-й струны ($i = 1,2,\ldots,n$) содержит отрезок OA_i и направлена от O к A_i. Ось Oy направлена перпендикулярно к плоскости π и проходит через точку O. Таким образом, точке O соответствует начало координат. Точка A_i имеет на своей оси Ox координату l_i ($i = 1,2,\ldots,n$). Граф-звезда Γ, вдоль которого в положении равновесия расположена струнная система, ориентирован от узла и состоит из ребер-интервалов $\gamma_i = (0,l_i)$ и внутренней вершины 0 (узла). Через $\partial\Gamma$ обозначается множество граничных вершин графа Γ; $\overline{\Gamma} = \Gamma \bigcup \partial\Gamma$.

Обозначим через $u(x)$ определенную на $\overline{\Gamma}$ функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции $F(x)$. Будем предполагать, что струнная система жестко закреплена в граничных вершинах, что означает выполнение условий $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$. Сужения $u_i(x)$ функции $u(x)$ на ребра определяют деформации каждой из струн; в качестве аргумента мы используем натуральный параметр, т. е. расстояние от соответствующей точки до общего узла. Обозначим через $F_i(x)$ сужение $F(x)$ на ребро γ_i. Физический смысл $F_i(x)$ — сила, приложенная на участок $(0,x]$ соответствующего ребра.

Дополнительно мы предполагаем, что в узле вдоль оси Oy установлен ограничитель на перемещение струн, представленный отрезком $[-m,m]$. Таким образом, имеется условие $|u(0)| \leqslant m$. В зависимости от приложенной внешней силы, узловая точка струнной системы либо остается внутри интервала $(-m, m)$, либо касается границ ограничителя. Опишем эту ситуацию в форме единой модели.

Согласно [21,22], функционал потенциальной энергии для системы стилтьесовских струн имеет вид

$$\Phi(u) = \int\limits_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx + \int\limits_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int\limits_{\Gamma} u dF. \tag{3.1}$$

Пусть функции p, Q, F удовлетворяют условиям (i), (ii), (iii). Поскольку в данной работе мы не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила, то интегралы по графу понимаются как соответствующие суммы интегралов Стилтьеса по ребрам. Здесь первый интеграл определяет работу силы упругости струн (при малых деформациях), второй интеграл — работу силы упругости внешней среды, третий интеграл — работу внешней силы, под воздействием которой происходит процесс деформаций. Согласно принципу Лагранжа—Гамильтона, реальная форма, принятая струнной системой, минимизирует функционал $\Phi(u)$. При этом мы рассматриваем случай, когда выполняются условия

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad |u(0)| \leqslant m. \tag{3.2}$$

Функционал $\Phi(u)$ с условиями (3.2) будем рассматривать на множестве E абсолютно непрерывных на $\overline{\Gamma}$ функций $u(x)$, производные которых $u'(x)$ являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Пусть функция $u_0(x)$ минимизирует функционал $\Phi(u)$ с условиями (3.2). Тогда

$$\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u)$$

для всех $u \in E$, удовлетворяющих (3.2).

Рассмотрим функции $h \in E$ такие, что $h(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $h(0) = 0$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где λ принимает вещественные значения. Заметим, что $u \in E$, $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $|u(0)| = |u_0(0)| \leqslant m$. Тогда

$$\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав h, рассмотрим функцию $\varphi_h(\lambda)$ вещественной переменной λ, определяемую как $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Тогда для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ верно

$$\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма $\dfrac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$. Последнее равенство можно переписать как

$$\int\limits_{\Gamma} pu_0'h' dx + \int\limits_{\Gamma} u_0 h dQ - \int\limits_{\Gamma} h dF = 0. \tag{3.3}$$

Обозначим через p_i, Q_i, F_i сужения p, Q, F на ребра γ_i. Доопределим функции p_i, Q_i, F_i в точках 0 и l_i предельными значениями. Обозначим $g_i(x) = \int\limits_0^x u_{0i} dQ_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим $\int\limits_{\Gamma} u_0 h dQ$. Имеем

$$\int\limits_{\Gamma} u_0 h dQ = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} h_i u_{0i} dQ_i = \sum_{i=1}^{n} (h_i g_i)|_0^{l_i} - \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} g_i dh_i.$$

Поскольку $h_i(l_i) = h_i(0) = 0$, то $\int\limits_{\Gamma} u_0 h dQ = -\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} g_i dh_i$. Аналогично, $\int\limits_{\Gamma} h dF = -\sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} F_i dh_i$. Тогда равенство (3.3) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} \left(p_i u_{0i}' - \int\limits_0^x u_{0i} dQ_i + F_i \right) dh_i = 0. \tag{3.4}$$

Равенство (3.4) верно для всех функций $h \in E$ таких, что

$$h_i(0) = h_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Рассмотрим функции h такие, что $h_1(0) = h_1(l_1) = 0$, $h_i(x) \equiv 0$ при $i \geqslant 2$. Для таких функций (3.4) примет вид

$$\int_0^{l_1} \left(p_1 u_{01}' - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1 \right) dh_1 = 0. \tag{3.6}$$

Применив лемму 2.1 к равенству (3.6), получим, что

$$(p_1 u_{01}')(x) - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1(x) = const, \tag{3.7}$$

что можно переписать как

$$(p_1 u_{01}')(x) - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1(x) = F_1(+0) + (p_1 u_1')(+0).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что верны равенства

$$-\left(p_i u_{0i}'\right)(x) + \int_0^x u_{0i} dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_{0i}')(+0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.8}$$

Зафиксируем любое число $c \in [-m, m]$. Рассмотрим теперь функции $h \in E$ такие, что $h(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $h(0) = c - u_0(0)$. Функции вида $u = u_0 + \lambda h$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, принадлежат классу E и удовлетворяют условиям $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$. Рассмотрим условие в узле. Имеем

$$u(0) = u_0(0) + \lambda h(0) = u_0(0) + \lambda(c - u_0(0)) = \lambda c + (1 - \lambda) u_0(0).$$

Так как $c \in [-m, m]$, $u_0(0) \in [-m, m]$, отрезок $[-m, m]$ — выпуклое множество, то для всех $\lambda \in [0, 1]$ имеем $u(0) \in [-m, m]$. Значит, при $\lambda \in [0, 1]$ верно неравенство

$$\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав указанную выше функцию h, введем функцию $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$, где $\lambda \in [0, 1]$. Тогда

$$\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda).$$

Значит, для правой производной имеет место неравенство

$$\frac{d^+}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geqslant 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left(p_i u_{0i}' - \int_0^x u_{0i} dQ_i + F_i \right) dh_i + \sum_{i=1}^n h_i(0) F_i(+0) \geqslant 0. \tag{3.9}$$

С учетом $h_i(l_i) = 0$, $h_i(0) = h(0) = c - u_0(0)$ и равенства (3.8) перепишем неравенство (3.9) как

$$-\sum_{i=1}^n (p_i u_{0i}')(+0)(c - u_0(0)) \geqslant 0,$$

т. е. $\sum\limits_{i=1}^n (p_i u_{0i}')(+0) \in N_{[-m,m]}(u_0(0))$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть функция u_0 минимизирует функционал $\Phi(u)$ при условиях $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $|u(0)| \leqslant m$. Тогда $u_0(x)$ является решением задачи*

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \int\limits_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u_i')(+0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ \sum\limits_{i=1}^n (p_i u_i')(+0) \in N_{[-m,m]} u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = u(0), \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

С использованием (2.3), (1.5), (1.6), (1.7) полученная модель может быть переписана как

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + \dfrac{dQ}{d\Gamma}(x)u(x) = \dfrac{dF}{d\Gamma}(x), \quad x \in R_\sigma(\Gamma) \\ \dfrac{d}{d\Gamma}(pu')(0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma. \end{cases}$$

4. Основные результаты

Пусть выполнены условия (i), (ii), (iii). Рассмотрим задачу (1.1).

Решением задачи (1.1) назовем функцию $u \in E$, удовлетворяющую на соответствующих ребрах уравнениям (3.8) (для всех $x \in \overline{[0,l_i]}_{\sigma_i}$), а также удовлетворяющую условиям $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$ и $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i u_i')(+0) \in N_{[-m,m]}u(0)$.

Теорема 4.1. *Если решение задачи* (1.1) *существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $v(x)$ и $w(x)$ — решения задачи (1.1). Рассмотрим функцию $u(x) = w(x) - v(x)$. Данная функция удовлетворяет системе

$$\begin{cases} -\left(p_i u_i'\right)(x) + \int\limits_0^x u_i dQ_i = -(p_i u_i')(+0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Предположим, что для некоторого номера i функция $u_i(x)$ отлична от нуля. Тогда, согласно лемме 2.3, $u_i(x)$ сохраняет знак на $[0, l_i)$. Пусть для определенности $u_i(x) > 0$ для всех $x \in [0, l_i)$. Поскольку $u_1(0) = \ldots = u_i(0) = \ldots = u_n(0) = u(0)$, то $u_j(0) > 0$ для всех номеров $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как все функции $u_j(x)$ удовлетворяют условиям $u_j(l_j) = 0$, то из $u_j(0) > 0$ и леммы 2.3 следует, что $u_j(x) > 0$ при $x \in [0, l_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, при этом $u_j'(l - 0) < 0$. В то же время

$$-\left(p_j u_j'\right)(x) = \int\limits_x^{l_j} u_j dQ_j - (p_j u_j')(l_j - 0).$$

Следовательно, $(p_j u_j')(x) < 0$. Тогда для всех номеров $j = 1, 2, \ldots, n$ верно $(p_j u_j')(+0) < 0$.

С другой стороны, так как $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i w_i')(+0) \in N_{[-m,m]}(w(0))$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i v_i')(+0) \in N_{[-m,m]}(v(0))$, то для всех $c \in [-m, m]$ верно

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i w_i')(+0)(c - w(0)) \leqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n}(p_i v_i')(+0)(c - v(0)) \leqslant 0.$$

Взяв $c = v(0)$ в первом неравенстве и $c = w(0)$ во втором неравенстве, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(p_i w_i')(+0)(v(0) - w(0)) \leqslant 0, \qquad -\sum_{i=1}^{n}(p_i v_i')(+0)(v(0) - w(0)) \leqslant 0.$$

Сложив последние два неравенства, имеем

$$\sum_{i=1}^{n}((p_i w_i')(+0) - (p_i v_i')(+0))(v(0) - w(0)) \leqslant 0,$$

откуда следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i u_i')(+0)u(0) \geqslant 0$, что противоречит неравенствам $(p_i u_i')(+0) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $u(0) > 0$. Аналогично, случай $u_i(x) < 0$ на $[0, l_i)$ не возможен. Значит, $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть функции* $\varphi_1^i(x)$ *и* $\varphi_2^i(x)$ *являются решениями однородного уравнения*

$$-(p_i u_i')(x) + (p_i u_i')(+0) + \int\limits_0^x u_i dQ_i = 0 \tag{4.1}$$

и удовлетворяют условиям

$$\varphi_1^i(0) = 1, \quad \varphi_1^i(l_i) = 0; \qquad \varphi_2^i(0) = 0, \quad \varphi_2^i(l_i) = 1, \tag{4.2}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда если*

$$\left| \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \right| < m,$$

то решение задачи (1.1) *имеет вид*

$$u_i(x) = \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) - \\ - \frac{\varphi_1^i(x)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right). \tag{4.3}$$

Если

$$m + \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \leqslant 0,$$

то решение задачи (1.1) *имеет вид*

$$u_i(x) = m\varphi_1^i(x) + \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s). \tag{4.4}$$

Если

$$m - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \leqslant 0,$$

то решение задачи (1.1) *имеет вид*

$$u_i(x) = -m\varphi_1^i(x) + \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s), \tag{4.5}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Зафиксируем любое число $i = 1, 2, \ldots, n$. Заметим, что задача

$$\begin{cases} -(p_i\varphi_1^{i'})(x) + \int\limits_0^x \varphi_1^i dQ_i = -(p_i\varphi_1^{i'})(+0), \\ \varphi_1^i(0) = 1, \\ \varphi_1^i(l_i) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. В самом деле, применив теорему 2.1 и лемму 2.2, получим $\varphi_1^i(x) = c_1^i u_1^i(x) + c_2^i u_2^i(x)$, где функции $u_1^i(x)$ и $u_2^i(x)$ являются решениями однородного уравнения (4.1) такими, что $u_1^i(0) = 0$, $u_1^{i'}(+0) = 1$ и $u_2^i(0) = 1$, $u_2^{i'}(+0) = 0$. Поскольку функция $Q_i(x)$ не убывает на $[0, l_i]$, $u_1^i(0) = 0$, то согласно лемме 2.3 функция $u_1^i(x)$ не имеет других нулей. Из условия

$u_1^{i'}(+0)=1$ следует, что $u_1^i(x)>0$ для всех $x\in(0,l_i]$, и в частности, $u_1^i(l_i)>0$. Подставив представление для $\varphi_1^i(x)$ в граничные условия, получим $c_2^i=1$, $c_1^i=\dfrac{-u_2^i(l_i)}{u_1^i(l_i)}$. Аналогично, существует решение задачи

$$\begin{cases} -(p_i\varphi_2^{i'})(x)+\int\limits_0^x\varphi_2^i dQ_i=-(p_i\varphi_2^{i'})(+0),\\ \varphi_2^i(0)=0,\\ \varphi_2^i(l_i)=1.\end{cases}$$

Покажем, что $\varphi_1^{i'}(+0)\neq 0$. Так как $\varphi_1^i(l_i)=0$, $\varphi_1^i(0)=1$, то $\varphi_1^i(x)>0$ для всех $x\in[0,l_i)$. Значит, $\varphi_1^{i'}(l_i-0)<0$. Так как

$$-(p_i\varphi_1^{i'})(x)=\int\limits_x^{l_i}\varphi_1^i dQ_i-(p_i\varphi_1^{i'})(l_i-0),$$

то $(p_i\varphi_1^{i'})(x)<0$, и в частности, $(p_i\varphi_1^{i'})(+0)<0$. Так как $\varphi_2^i(0)=0$, $\varphi_2^i(l_i)=1$, то $\varphi_2^{i'}(+0)>0$.

Пусть

$$\left|\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\right|<m.$$

Покажем, что функции $u_i(x)$, определяемые равенством (4.3), составляют решение задачи (1.1).

Заметим, что

$$u_1(0)=u_2(0)=\ldots=u_n(0)=-\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)};\qquad u_i(l_i)=0.$$

Зафиксируем любое число $i=1,2,\ldots,n$. Покажем, что во всякой точке $\xi_i\in(0,l_i)$ разрыва функции $F_i(x)$ верно $u_i(\xi_i+0)=u_i(\xi_i-0)$. В самом деле,

$$u_i(\xi_i+0)-u_i(\xi_i-0)=\frac{\varphi_1^i(\xi_i)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\varphi_2^i(\xi_i)\Delta F_i(\xi_i)-\frac{\varphi_1^i(\xi_i)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\varphi_2^i(\xi_i)\Delta F_i(\xi_i)=0.$$

Определим значение функции u_i в точке $x=\xi_i$ как $u_i(\xi_i)=u_i(\xi_i+0)=u_i(\xi_i-0)$.

Так как функции $\varphi_1^i(x)$ и $\varphi_2^i(x)$ абсолютно непрерывны и для любых $\alpha\leqslant\beta$ выполняется равенство

$$u_i(\beta)-u_i(\alpha)=\frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\left((\varphi_1^i(\beta)-\varphi_1^i(\alpha))\int\limits_0^{\beta}\varphi_2^i(s)dF_i(s)+(\varphi_2^i(\beta)-\varphi_2^i(\alpha))\int\limits_{\beta}^{l_i}\varphi_1^i(s)dF_i(s)\right)+$$
$$+\frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int\limits_{\alpha}^{\beta}((\varphi_1^i(\alpha)-\varphi_1^i(s))\varphi_2^i(s)+(\varphi_2^i(s)-\varphi_2^i(\alpha))\varphi_1^i(s))dF_i(s)-$$
$$-\frac{(\varphi_1^i(\beta)-\varphi_1^i(\alpha))\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)},$$

то функция $u_i(x)$ абсолютно непрерывна на $[0,l_i]$.

Покажем, что производная $u_i'(x)$ от функции $u_i(x)$ удовлетворяет равенству

$$u_i'(x) = \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s)dF_i(s) + \frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s)dF_i(s) - \\ - \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left(\sum_{j=1}^n \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s) \right). \quad (4.6)$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon u_i = u_i(x+\varepsilon) - u_i(x+0)$, где $\varepsilon > 0$. Докажем утверждение для правой производной (для левой производной доказательство аналогично). Имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon u_i}{\varepsilon} = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon} \int\limits_0^{x+\varepsilon} \varphi_2^i dF_i + \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2^i}{\varepsilon} \int\limits_{x+\varepsilon}^{l_i} \varphi_1^i dF_i + \\ + \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon} dF_i(s) - \\ - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^n \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s) \right).$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left(\int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon} dF_i(s) \right) = 0. \quad (4.7)$$

Имеем

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon} \left(\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s) \right) dF_i(s) \right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \left(\max_{x \leqslant s \leqslant x+\varepsilon} |\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \right) V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i),$$

где через $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i)$ обозначена вариация функции F_i на $[x+0, x+\varepsilon]$. Заметим, что

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leqslant \|\varphi_1^i\| \cdot |\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)| + \|\varphi_2^i\| \cdot |\varphi_1^i(x) - \varphi_1^i(s)| \leqslant \\ \leqslant \|\varphi_1^i\| \cdot \left| \int\limits_x^s |\varphi_2^{i'}(\tau)| d\tau \right| + \|\varphi_2^i\| \cdot \left| \int\limits_x^s |\varphi_1^{i'}(\tau)| d\tau \right|,$$

где $\|\varphi_j^i\| = \max\limits_{[0,l_i]} |\varphi_j^i(x)|$, $j = 1, 2$. Так как функции φ_1^i, φ_2^i абсолютно непрерывны на $[0, l_i]$ и их производные имеют ограниченные вариации, то $|\varphi_2^{i'}(\tau)| \leqslant c_{0i}$ и $|\varphi_1^{i'}(\tau)| \leqslant c_{0i}$. Значит,

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leqslant (\|\varphi_1^i\| + \|\varphi_2^i\|) c_{0i} \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \leqslant s \leqslant x+\varepsilon} |\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leqslant (\|\varphi_1^i\| + \|\varphi_2^i\|) c_{0i}.$$

Так как $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, получаем равенство (4.7).

Таким образом, равенство (4.6) доказано. Из (4.6) следует, что u_i' имеет ограниченную вариацию на $(0, l_i)$. Таким образом, функция $u(x)$ принадлежит классу E.

Поскольку $|u(0)| < m$, покажем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) = 0$. Имеем

$$p_i(+0)u_i'(+0) = \int\limits_0^{l_i} \varphi_1^i(s)dF_i(s) - \frac{p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s) \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(+0)u_i'(+0) = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_0^{l_i} \varphi_1^i(s)dF_i(s) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left(\sum_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s) \right) = 0.$$

Зафиксировав произвольное $i = 1, 2, \ldots, n$, покажем, что функция $u_i(x)$ является решением уравнения из (1.1). Заметим, что

$$\int\limits_0^x u_i(s)dQ_i(s) = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \left(\int\limits_0^x \varphi_1^i(s) \int\limits_0^s \varphi_2^i(\tau)dF_i(\tau)dQ_i(s) + \int\limits_0^x \varphi_2^i(s) \int\limits_s^l \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau)dQ_i(s) \right) -$$

$$- \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_1^i(s)dQ_i(s).$$

Применим теорему Фубини и воспользуемся свойствами функций φ_1^i, φ_2^i. Имеем

$$\int\limits_0^x \varphi_1^i(s) \int\limits_0^s \varphi_2^i(\tau)dF_i(\tau)dQ_i(s) = \int\limits_0^x \varphi_2^i(\tau)((p_i{\varphi_1^i}')(x) - (p_i{\varphi_1^i}')(\tau))dF_i(\tau);$$

$$\int\limits_0^x \varphi_2^i(s) \int\limits_s^{l_i} \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau)dQ_i(s) = \int\limits_0^x \varphi_1^i(\tau)(p_i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0))dF_i(\tau) +$$

$$+ \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau)((p_i(x)\varphi_2^{i'}(x) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0))dF_i(\tau) =$$

$$= \int\limits_0^x \varphi_1^i(\tau)p_i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau)dF_i(\tau) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)\int\limits_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau) + p_i(x)\varphi_2^{i'}(x) \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau).$$

Согласно теореме 2.2, $p_i(\tau)(\varphi_1^i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau) - \varphi_2^i(\tau)\varphi_1^{i'}(\tau)) \equiv const = p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)$. Тогда

$$\int\limits_0^x u_i dQ_i = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \left((p_i{\varphi_1^i}')(x) \int\limits_0^x \varphi_2^i(\tau)dF_i(\tau) + (p_i{\varphi_2^i}')(x) \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau) \right) -$$

$$- \int\limits_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau) + F_i(x) - F_i(+0) - \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_1^i(s)dQ_i(s).$$

Следовательно,

$$
\begin{gathered}
-p_i(x)u_i'(x)+\int\limits_0^x u_i dQ_i = \\
= F_i(x)-F_i(+0)-\int\limits_0^{l_i}\varphi_1^i(\tau)dF_i(\tau)+\frac{p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\left(\sum_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)\right)= \\
= F_i(x)-F_i(+0)-p_i(+0)u_i'(+0),
\end{gathered}
$$

что и требовалось.

Пусть

$$
m+\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\leqslant 0.
$$

Покажем, что функции, определяемые равенством (4.4), дают решение задачи (1.1). Проверка свойств функций $u_i(x)$, доказательство представления для производной

$$
u_i'(x)=m\varphi_1^{i'}(x)+\frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int\limits_0^x\varphi_2^i(s)dF_i(s)+\frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int\limits_x^{l_i}\varphi_1^i(s)dF_i(s)
$$

и подстановка в уравнения осуществляются аналогично предыдущему случаю. Заметим, что $u_i(l_i)=0$, $u_i(0)=u(0)=m$, $i=1,2,\dots,n$. Покажем, что $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0)\in N_{[-m,m]}u(0)$. Поскольку $u(0)=m$, то нужно доказать, что $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0)\geqslant 0$. Имеем

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^n p_i(+0)u_i'(+0)=\sum_{i=1}^n p_i(+0)\left(m\varphi_1^{i'}(+0)+\frac{\varphi_2^{i'}(+0)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)}\int\limits_0^{l_i}\varphi_1^i(s)dF_i(s)\right)= \\
= m\sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)+\sum_{i=1}^n\int\limits_0^{l_i}\varphi_1^i(s)dF_i(s)=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}\left(m+\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\right)\geqslant 0,
\end{gathered}
$$

так как $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)<0$.

Случай

$$
m-\frac{\sum\limits_{j=1}^n\int\limits_0^{l_j}\varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)}\leqslant 0
$$

может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана. □

Теорема 4.3. *Пусть $u_0(x)$ — решение задачи* (1.1). *Тогда u_0 минимизирует функционал $\Phi(u)$ при условиях $u(a)=0$, $a\in\partial\Gamma$, $|u(0)|\leqslant m$.*

Доказательство. Докажем, что для любой функции $u \in E$, удовлетворяющей условиям $u(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$, $|u(0)| \leqslant m$, верно $\Phi(u) - \Phi(u_0) \geqslant 0$. Представим функцию $u(x)$ как $u(x) = u_0(x) + h(x)$, где $h(x) = u(x) - u_0(x)$. Заметим, что $h \in E$, $h(a) = 0$, $a \in \partial\Gamma$. Тогда

$$\Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) = \int\limits_\Gamma (pu_0')h'dx + \int\limits_\Gamma \frac{ph'^2}{2}dx - \int\limits_\Gamma hdF + \int\limits_\Gamma \frac{h^2}{2}dQ + \int\limits_\Gamma hu_0dQ =$$

$$= \sum_{i=1}^n h_i(0)F_i(+0) + \sum_{i=1}^n \int\limits_0^{l_i} (p_iu_{0i}' - \int\limits_0^x u_{0i}dQ_i + F_i)dh_i + \int\limits_\Gamma \frac{h^2}{2}dQ + \int\limits_\Gamma \frac{ph'^2}{2}dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^n (p_iu_{0i}')(+0)h(0) + \int\limits_\Gamma \frac{h^2}{2}dQ + \int\limits_\Gamma \frac{ph'^2}{2}dx \geqslant 0,$$

так как $h(0) = u(0) - u_0(0)$, $u(0) \in [-m, m]$, $\sum\limits_{i=1}^n p_i(+0)u_{0i}'(+0) \in N_{[-m,m]}u_0(0)$. □

Теорема 4.4. *Пусть* $m \to 0$. *Тогда решение задачи* (1.1) *равномерно на* $\overline{\Gamma}$ *стремится к решению задачи*

$$\begin{cases} -\left(p_iu_i'\right)(x) + \int\limits_0^x u_idQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_iu_i')(+0), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ u_i(0) = 0, \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{4.8}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения $u_m(x)$ задачи (1.1). Так как $m \to 0$, то

$$\left| \frac{-\sum\limits_{j=1}^n \int\limits_0^{l_j} \varphi_1^j(s)dF_j(s)}{\sum\limits_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \right| \geqslant m.$$

Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, n$

$$\left| u_{im}(x) - \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s)dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s)dF_i(s) \right| = \left| m\varphi_1^i(x) \right| \leqslant c_i|m| \to 0,$$

поскольку функция $\varphi_1^i(x)$ ограничена на $[0, l_i]$. Таким образом,

$$u_{im}(x) \rightrightarrows u_i(x) = \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_0^x \varphi_2^i(s)dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int\limits_x^{l_i} \varphi_1^i(s)dF_i(s).$$

Аналогично теореме 4.2 проверяется, что функции $u_i(x)$ составляют решение задачи (4.8). Теорема доказана. □

Финансовая поддержка. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009); гранта РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20-51-15003 НЦНИ-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш.* Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — *59*, № 3. — С. 380–390.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Оператор Дирака с потенциалом специального вида и периодическими краевыми условиями// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 5. — С. 592–601.

3. *Диаб А. Т., Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М.* О кратности собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля на графах// Мат. заметки. — 2016. — *99*, № 4. — С. 489–501.
4. *Диаб А. Т., Кулешов П. А., Пенкин О. М.* Оценка первого собственного значения лапласиана на графе// Мат. заметки. — 2014. — *96*, № 6. — С. 885–895.
5. *Кулаев Р. Ч.* О свойстве неосцилляции уравнения на графе// Сиб. мат. журн. — 2016. — *57*, № 1. — С. 85–97.
6. *Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А.* Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 6. — С. 947–952.
7. *Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2005.
8. *Покорный Ю. В., Прядиев В. Л.* Некоторые вопросы качественной теории Штурма—Лиувилля на пространственной сети// Усп. мат. наук. — 2004. — *59*, № 3. — С. 315–350.
9. *Провоторов В. В., Хоанг В. Н.* Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций// Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2022. — *27*, № 137. — С. 80–94.
10. *Прядиев В. Л.* Интегральный оператор, обращающий начально-краевую задачу для гиперболического уравнения на геометрическом графе// Докл. РАН. — 2008. — *423*, № 6. — С. 737–739.
11. *von Below J.* Kirchhoff laws and diffusion on networks// Linear Algebra Appl. — 1989. — *121*. — С. 692–697.
12. *von Below J., Lubary J., Vasseur B.* Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees// Results Math. — 2013. — *63*. — С. 1331–1350.
13. *Burlutskaya M.* Fourier method in a mixed problem for the wave equation on a graph// Dokl. Math. — 2015. — *92*, № 3. — С. 735–738.
14. *Burlutskaya M.* On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph// Mem. Differ. Equ. Math. Phys. — 2017. — *72*. — С. 37–44.
15. *Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M.* On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end// Optimization. — 2020. — *69*, № 9. — С. 1935–1959.
16. *Kramar Fijavz M., Mugnolo D., Nicaise S.* Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks// J. Evol. Equ. — 2021. — *21*, № 3. — С. 3639–3673.
17. *Lubary J. A., Sola-Morales J.* Nonreal eigenvalues for second order differential operators on networks with circuits// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — *275*, № 1. — С. 238–250.
18. *Pokorny Yu. V.* The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations// Dokl. Math. — 1999. — *59*, № 1. — С. 34–37.
19. *Pokornyi Yu. V., Borovskikh A. V.* Differential equation on networks (geometric graphs)// J. Math. Sci. — 2004. — *119*, № 6. — С. 691–718.
20. *Pokorny Yu. V., Pryadiev V. L.* On conditions for transmission in the Sturm—Liouville problem on a network// J. Math. Sci. — 2005. — *130*, № 5. — С. 5013–5045.
21. *Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Bakhtina Zh. I.* On Stieltjes differentials on geometric graphs// Dokl. Math. — 2008. — *78*, № 3. — С. 877–879.
22. *Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Bakhtina Zh. I.* Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph// Differ. Equ. — 2012. — *48*, № 8. — С. 1103–1111.
23. *Pokorny Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A.* Sturm—Liouville oscillation theory for impulsive problems// Russ. Math. Surv. — 2008. — *63*, № 1. — С. 109–153.
24. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N.* Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph// Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes. — 2020. — *16*, № 4. — С. 402–414.
25. *Provotorov V. V., Sergeev S. M., Part A. A.* Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation// Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes. — 2019. — *15*, № 1. — С. 107–117.
26. *Yurko V. A.* Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks// Russ. Math. Surv. — 2016. — *71*, № 3. — С. 539–584.

М. Б. Зверева
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;
Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия
E-mail: `margz@rambler.ru`

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652
UDC 517.927.2

A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node

M. B. Zvereva[1,2]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia*

In this paper, a model of deformations of Stieltjes strings system located along a geometric star graph with a nonlinear condition at the node is studied. This kind of condition arises due to the presence of a limiter for the movement of strings in the node under the influence of an external load. In the present paper, the necessary and sufficient conditions for the extremum of the energy functional are established; existence and uniqueness theorems for the solution are proved; the critical loads at which the strings come into contact with the limiter are analyzed; the dependence of the solution on the limiter length is studied.

Keywords: Stieltjes strings system, star graph, string movement limiter, existence and uniqueness of solution, critical loads analysis

For citation: M. B. Zvereva, "A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 635–652. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652`

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya, "Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya sistemy uravneniy pervogo poryadka s nepreryvnym potentsialom" [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a system of first-order equations with a continuous potential], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 3, 380–390 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, "Operator Diraka s potentsialom spetsial'nogo vida i periodicheskimi kraevymi usloviyami" [Dirac operator with a potential of special form and with the periodic boundary conditions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 5, 592–601 (in Russian).
3. A. T. Diab, B. K. Kaldybekova, and O. M. Penkin, "O kratnosti sobstvennykh znacheniy v zadache Shturma–Liuvillya na grafakh" [On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 4, 489–501 (in Russian).
4. A. T. Diab, P. A. Kuleshov, and O. M. Penkin, "Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya laplasiana na grafe" [Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2014, **96**, No. 6, 885–895 (in Russian).
5. R. Ch. Kulaev, "O svoystve neostsillyatsii uravneniya na grafe" [On the nonoscillation property of an equation on a graph], *Sib. mat. zhurn.* [Sib. Math. J.], 2016, **57**, No. 1, 85–97 (in Russian).
6. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, "Teoremy Shturma o raspredelenii nuley dlya uravneniya chetvertogo poryadka na grafe" [Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 947–952 (in Russian).
7. Yu. V. Pokornyy, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).

8. Yu. V. Pokornyy and V. L. Pryadiev, “Nekotorye voprosy kachestvennoy teorii Shturma–Liuvillya na prostranstvennoy seti” [Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2004, **59**, No. 3, 315–350 (in Russian).
9. V. V. Provotorov and V. N. Hoang, “Ustoychivost’ trekhsloynoy simmetrichnoy differentsial’no-raznostnoy skhemy v klasse summiruemykh na setepodobnoy oblasti funktsiy” [Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain], *Vestn. ros. un-tov. Mat.* [Bull. Russ. Univ. Math.], 2022, **27**, No. 137, 80–94 (in Russian).
10. V. L. Pryadiev, “Integral’nyy operator, obrashchayushchiy nachal’no-kraevuyu zadachu dlya giperbolicheskogo uravneniya na geometricheskom grafe” [Integral operator inverting the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation on a geometric graph], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2008, **423**, No. 6, 737–739 (in Russian).
11. J. von Below, “Kirchhoff laws and diffusion on networks,” *Linear Algebra Appl.*, 1989, **121**, 692–697.
12. J. von Below, J. Lubary, and B. Vasseur, “Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees,” *Results Math.*, 2013, **63**, 1331–1350.
13. M. Burlutskaya, “Fourier method in a mixed problem for the wave equation on a graph,” *Dokl. Math.*, 2015, **92**, No. 3, 735–738.
14. M. Burlutskaya, “On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph,” *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.*, 2017, **72**, 37–44.
15. M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, and M. Zvereva, “On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end,” *Optimization*, 2020, **69**, No. 9, 1935–1959.
16. M. Kramar Fijavz, D. Mugnolo, and S. Nicaise, “Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks,” *J. Evol. Equ.*, 2021, **21**, No. 3, 3639–3673.
17. J. A. Lubary and J. Sola-Morales, “Nonreal eigenvalues for second order differential operators on networks with circuits,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **275**, No. 1, 238–250.
18. Yu. V. Pokorny, “The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations,” *Dokl. Math.*, 1999, **59**, No. 1, 34–37.
19. Yu. V. Pokornyi and A. V. Borovskikh, “Differential equation on networks (geometric graphs),” *J. Math. Sci.*, 2004, **119**, No. 6, 691–718.
20. Yu. V. Pokorny and V. L. Pryadiev, “On conditions for transmission in the Sturm—Liouville problem on a network,” *J. Math. Sci.*, 2005, **130**, No. 5, 5013–5045.
21. Yu. V. Pokorny, M. B. Zvereva, and Zh. I. Bakhtina, “On Stieltjes differentials on geometric graphs,” *Dokl. Math.*, 2008, **78**, No. 3, 877–879.
22. Yu. V. Pokorny, M. B. Zvereva, and Zh. I. Bakhtina, “Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph,” *Differ. Equ.*, 2012, **48**, No. 8, 1103–1111.
23. Yu. V. Pokorny, M. B. Zvereva, and S. A. Shabrov, “Sturm–Liouville oscillation theory for impulsive problems,” *Russ. Math. Surv.*, 2008, **63**, No. 1, 109–153.
24. V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, and V. N. Hoang, “Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph,” *Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes*, 2020, **16**, No. 4, 402–414.
25. V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, and A. A. Part, “Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation,” *Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes*, 2019, **15**, No. 1, 107–117.
26. V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks,” *Russ. Math. Surv.*, 2016, **71**, No. 3, 539–584.

M. B. Zvereva
Voronezh State University, Voronezh, Russia;
Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia
E-mail: `margz@rambler.ru`