Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 4 (2022). С. 621–634
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634
УДК 517.972

О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Задорожний, Г. С. Тихомиров

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Получены явные формулы для математического ожидания и вторых моментных функций решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайным параметром и векторной случайной правой частью. Задача сводится к детерминированной задаче Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Получена явная формула решения линейных систем уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами. Приведен пример, показывающий, что случайные факторы могут оказывать стабилизирующее влияние на линейную систему дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений со случайным параметром и векторной случайной правой частью, моментные функции, система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, явная формула решения

Для цитирования: *В. Г. Задорожний, Г. С. Тихомиров.* О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **68**, № 4. С. 621–634. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634

1. Введение

Рассмотрим векторную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\varepsilon(\omega)Ax + f(t,\omega), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2}$$

где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $x : \mathbb{R} \to X$ — векторная функция, принимающая значения в n-мерном вещественном пространстве X со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|x\| = \langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}}$, A — оператор в пространстве X, f — векторный случайный процесс, ε — случайная величина, $t_0 \in \mathbb{R}$, x_0 — случайный вектор, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Наша цель — найти математическое ожидание $E[x(t)]$ решения задачи (1.1), (1.2) и моментные функции второго порядка. Задача связана с задачей стабилизации решений дифференциальных уравнений с помощью случайных помех. На примере показана возможность стабилизации случайным шумом.

Если ε, f, x_0 не являются случайными параметрами, то эта задача изучается даже в стандартных курсах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решение задачи (1.1), (1.2) записывается в виде

$$x(t,\omega) = \exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{t_0}^{t} a(s)ds A\right)x_0 + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{\tau}^{t} a(s)ds A\right)f(\tau,\omega)d\tau.$$

Если ε — заданное число, а f зависит от случайных событий, то для решения задачи (1.1), (1.2) можно написать моментные функции любого порядка.

Мы можем формально представить выражение для математического ожидания как

$$E[x(t,\omega)] = E\left[\exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{t_0}^{t} a(s)ds A\right)x_0 + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{\tau}^{t} a(s)ds A\right)f(\tau,\omega)d\tau\right] =$$

$$= \int_{\Omega}\left[\exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{t_0}^{t} a(s)ds A\right)x_0 + \int_{t_0}^{t}\exp\left(\varepsilon(\omega)\int_{\tau}^{t} a(s)ds A\right)f(\tau,\omega)d\tau\right]d\omega.$$

Здесь Ω — пространство случайных событий. Иногда удается вычислить интегралы (см. [4]), но трудности очевидны. Для некоторых дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами формулы для моментных функций решения можно найти в [4]. Математическое ожидание решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка было получено Адомианом, см. [1, с. 245].

Предположим, что известен характеристический функционал (см. [3, с. 323], [4, с. 30]) для ε, f:

$$\psi(z,u) = E\left[\exp\left(i\varepsilon(\omega)z + i\int_T \langle f(s,\omega), u(s)\rangle ds\right)\right],$$

где E — знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов ε, f (ниже зависимость от случайных событий ω в записи не отражается), $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$, u — интегрируемая вектор-функция на отрезке T, т. е. $u \in L_1(T)$, где $L_1(T)$ — пространство интегрируемых вектор-функций на отрезке T с нормой $\|u\|_1 = \int_T \|u(t)\|dt$.

В дальнейшем используется понятие вариационной производной. Напомним ее определение, см. [4, с. 14]. Пусть X банахово пространство, $u \in L_1(T)$, $h \in L_1(T)$, $y : L_1(T) \to X$. Если $y(u+h) - y(u) = \int_T \varphi(t,u)h(t)dt + o(h)$, где интеграл понимается в смысле Лебега и является линейным ограниченным по переменной $h \in L_1(T)$ оператором, то $\varphi : T \times L_1(T) \to X$ называется *вариационной производной* отображения y и обозначается $\dfrac{\delta y(u)}{\delta u(t)}$.

2. Сведение к детерминированной задаче

Введем обозначение $w = w(z,u) = \exp(i\varepsilon z + i\int_T \langle f(s,\omega), u(s)\rangle ds)$. Умножая равенства (1.1), (1.2) на w и записывая математическое ожидание полученных равенств, получаем

$$E\Big[\frac{dx}{dt}w\Big] = E[\varepsilon a(t)Axw] + E[f(t)w], \tag{2.1}$$

$$E[x(t_0)w] = E[x_0 w]. \tag{2.2}$$

Введем обозначение $y = y(t,z,u) = E[x(t)w]$. Тогда (формально)

$$y(t,0,0) = E[x(t)], \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = E\Big[\frac{dx}{dtw}\Big], \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = E[i\varepsilon wx], \qquad \frac{\delta_p\psi}{\delta u(t)} = E[iwf(t)],$$

где $\dfrac{\delta_p\psi}{\delta u(t)}$ — частная вариационная производная (см. [4, с. 14]) по переменной u. Если x_0 не зависит от ε и f, то равенства (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -ia(t)A\frac{\partial y}{\partial z} - i\frac{\delta_p\psi}{\delta u(t)}, \qquad y(t_0,z,u) = E[x_0]\psi(z,u). \tag{2.3}$$

Определение 2.1. $y(t, 0, 0)$ называется *математическим ожиданием* $E[x(t)]$ решения задачи (1.1), (1.2), где y — детерминированное решение задачи Коши (2.3) в некоторой окрестности точки с компонентами $z = 0$, $u = 0$.

3. Решение линейной однородной задачи

Рассмотрим линейную однородную задачу

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a(t)A\frac{\partial y}{\partial z}, \tag{3.1}$$

$$y(t_0, z) = y_0(z)\xi, \tag{3.2}$$

где $y_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (здесь $\mathbb{C}$ — это множество комплексных чисел), $\xi \in Y$, Y — комплексное нормированное пространство, $a : T \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Это линейная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2, 5–9, 12]. Пусть I обозначает тождественный оператор, действующий в пространстве Y, а $y_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ является аналитической функцией на $\mathbb{R}$. Введем операторную функцию

$$\Phi = y_0\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^k. \tag{3.3}$$

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при $|z| \leqslant l$ для любого $l > 0$. В этом случае следующие ряды абсолютно сходятся:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{k-1} = \frac{dy_0}{dz}\Big|_{z=zI+A\int_{t_0}^{t} a(s)ds},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|\left\|zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right\|^k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k|b_k|\left\|zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right\|^{k-1}. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Если y_0 является аналитической функцией на $\mathbb{R}$ и $a : T \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, тогда существует производная $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ и выполняется равенство*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} kb_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{k-1}.$$

Доказательство. Пусть Δz является приращением переменной z. Поскольку ряд (3.4) сходится, то мы имеем

$$\left\|\frac{1}{\Delta z}\left[\Phi(t, z+\Delta z) - \Phi(t, z) - \Delta z\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{k-1}\right]\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{\Delta z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds + \Delta zI\right)^k\right] -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^k - \Delta z\sum_{k=1}^{\infty} kb_k\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{k-1}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{1}{\Delta z}\left[\sum_{k=0}^{\infty} b_k\left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m\left(zI + A\int_{t_0}^{t} a(s)ds\right)^{k-m}(\Delta z)^m I -\right.\right.\right.$$

$$-\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k}-\Delta zk\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\|=$$

$$=\left\|\frac{1}{\Delta z}\left[\sum_{k=2}^{\infty}b_k\left(\sum_{m=2}^{k}C_k^m\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-m}(\Delta z)^mI\right)\right]\right\|=$$

$$=\left\|\Delta z\sum_{k=2}^{\infty}b_k\left(\sum_{m=2}^{k}C_k^m\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-m}(\Delta z)^mI\right)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant|\Delta z|\sum_{k=2}^{\infty}|b_k|\left\|zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds+(\Delta z)I\right\|^{k}.$$

Поскольку ряд (3.3) сходится, то последнее выражение стремится к нулю при $\Delta z\to 0$. Переходя к пределу при Δz, стремящемся к нулю, получаем требуемое утверждение.

$\square$

Теорема 3.2. *Если y_0 — аналитическая функция на $\mathbb{R}$ и $a:T\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, то существует производная $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ и*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=a(t)A\frac{\partial\Phi}{\partial z}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Пусть Δt — приращение переменной t, тогда

$$\left\|\frac{1}{\Delta t}\left[\Phi(t+\Delta t,z)-\Phi(t,z)-a(t)A\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\right\|=$$

$$=\Bigg\|\frac{1}{\Delta t}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds+A\int\limits_{t}^{t+\Delta t}a(s)ds\right)^{k}-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k}-a(t)A\Delta t\sum_{k=1}^{\infty}kb_k\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-1}\Bigg]\Bigg\|=$$

$$=\Bigg\|\frac{1}{\Delta t}\Bigg[\sum_{k=0}^{\infty}b_k\Bigg(\sum_{m=1}^{k}C_k^m\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-m}(\Delta tAa(t)+o(\Delta t))^m-$$

$$-\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k}-a(t)A\Delta tk\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-1}\Bigg)\Bigg]\Bigg\|=$$

$$=\Bigg\|\frac{1}{\Delta t}\Bigg[\sum_{k=2}^{\infty}b_k\left(\sum_{m=2}^{k}C_k^m\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-m}(\Delta tAa(t)+o(\Delta t))^m\right)-$$

$$-\sum_{k=2}^{\infty}b_kC_k^1\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-1}o(\Delta t)\Bigg]\Bigg\|\leqslant$$

$$\leqslant|\Delta t|\left\|\sum_{k=2}^{\infty}b_k\left(\sum_{m=2}^{k}C_k^m\left(zI+A\int\limits_{t_0}^{t}a(s)ds\right)^{k-m}(Aa(t)+o(\Delta t))^m(\Delta t)^{m-2}\right)\right\|+$$

$$+\left|\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right|\sum_{k=2}^{\infty}|b_k|k\left\|zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right\|^{k-1}\leqslant$$

$$\leqslant|\Delta t|\sum_{k=2}^{\infty}|b_k|\left\|\left(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds+Aa(t)+\right)^{k-m}\left(Aa(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right)\right\|^{k}+$$

$$+\left|\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right|\sum_{k=2}^{\infty}|b_k|k\left\|zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right\|^{k-1}.$$

В последнем неравенстве мы использовали $|\Delta t|\leqslant 1$. Поскольку ряд (3.4) сходится, последнее выражение стремится к нулю при $\Delta t\to 0$. Тогда, согласно определению производной, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}$ существует и равна $a(t)A\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$. □

Замечание. Если a непрерывна на T и y_0 является аналитической функцией на $\mathbb{R}$, то $\Phi = y_0\Big(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\Big)$ является решением операторной задачи Коши

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Phi}{\partial t}=a(t)A\frac{\partial\Phi}{\partial z},\\&\Phi(t_0,z)=y_0(zI)=y_0(z)I.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Теперь предположим, что для уравнения (3.1) начальное условие имеет более общий вид

$$y(t_0,z)=y_0(z)=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(z)e_j,\tag{3.7}$$

где e_j — ортогональный базис в Y.

Теорема 3.3. *Пусть $y_j:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ — аналитическая функция на $\mathbb{R}$, a — непрерывная функция на T и $\Phi_j=y_{0j}\Big(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\Big)$. Тогда*

$$y(t,z)=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(t,z)e_j=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}\left(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)e_j\tag{3.8}$$

является решением уравнения (3.1) *с начальным условием* (3.7).

Доказательство. Используя равенство (3.6), получаем

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi_j(t,z)}{\partial t}e_j=\sum_{j=1}^{n}a(t)A\frac{\partial\Phi_j(t,z)}{\partial z}e_j=a(t)A\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}\Phi_je_j=a(t)A\frac{\partial y}{\partial z},$$

т. е. функция (3.8) является решением уравнения (3.1). Далее

$$y(t_0,z)=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j(t_0,z)e_j=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(z)e_j=y_0(z),$$

следовательно, начальное условие (3.7) выполнено. □

4. Линейное неоднородное уравнение

Рассмотрим линейную неоднородную задачу

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a(t)A\frac{\partial y}{\partial z}+b(t,z),\tag{4.1}$$

$$y(t_0,z)=y_0(z)=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(z)e_j, \tag{4.2}$$

где $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $b=\sum\limits_{j=1}^{n}b_j(t,z)e_j$, $y_0(z)=\sum\limits_{j=1}^{n}y_{0j}(z)e_j$ заданы.

Теорема 4.1. *Если $a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $y:\mathbb{R}\to Y$ — аналитическая вектор-функция на $\mathbb{R}$ и b — вектор-функция, непрерывная по t и аналитическая по z на $\mathbb{R}$, то*

$$y(t,z)=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}\left(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)e_j+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}b_j\left(s,zI+A\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau\right)e_jds \tag{4.3}$$

является решением задачи Коши (4.1), (4.2).

Доказательство. Отметим, что

$$b_j\left(s,zI+A\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau\right),\quad y_{0j}\left(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right),\quad j=1,2,\ldots,n$$

удовлетворяет уравнению (3.6).

Отсюда получаем

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a(t)A\frac{\partial}{\partial z}\sum_{j=1}^{n}y_{0j}\left(zI+A\int_{t_0}^{t}a(s)ds\right)e_j+\sum_{j=1}^{n}b_j(t,z)e_j+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}a(t)A\frac{\partial}{\partial z}b_j\left(s,zI+A\int_{s}^{t}a(\tau)d\tau\right)e_jds=a(t)A\frac{\partial y}{\partial z}+b(t,z).$$

Следовательно, y является решением уравнения (4.1). Далее

$$y(t_0,z)=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(zI)e_j=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(z)Ie_j=\sum_{j=1}^{n}y_{0j}(z)e_j=y_0(z),$$

т. е. выполняется и начальное условие (4.2). □

Замечание. Уравнение (4.1) представляет собой векторное представление линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Явный вид (4.3) решений этой системы ранее не встречался.

5. Нахождение математического ожидания решения задачи (1.1), (1.2)

Вернемся к задаче (2.3). Она имеет вид (4.1), (4.2) (где u — параметр).

Теорема 5.1. *Если ψ — аналитическая функция переменной z на $\mathbb{R}$ и существуют вариационные производные $\dfrac{\delta\psi}{\delta u_j(s)}$, $j=1,2,\ldots,n$, то*

$$y=\psi\left(zI-iA\int_{t_0}^{t}a(\tau)d\tau,u\right)E[x_0]-i\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\frac{\delta_p\psi\left(zI-iA\int_s^t a(\tau)d\tau,u\right)}{\delta u_j(s)}e_jds \tag{5.1}$$

является решением задачи (2.3).

Доказательство. Отметим, что $y(t_0,z)=\psi(zI)E[x_0]=\psi(z)IE[x_0]=\psi(z)E[x_0]$, т. е. начальное условие выполнено. Далее, согласно формуле (4.3) имеем

$$y(t,z,u) = \sum_{j=1}^{n} \psi \left(zI - iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, u \right) E[x_0]e_j - i \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_p \psi \left(zI - iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, u \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds =$$

$$= \psi \left(zI - iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, u \right) E[x_0] - i \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_p \psi \left(zI - iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, u \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds.$$

$\square$

Используя определение $M[x(t_0)] = y(t,0,0)$ из (5.1), получаем следующий результат.

Теорема 5.2. *Если ψ — аналитическая функция переменной z на $\mathbb{R}$, имеющая вариационную производную $\dfrac{\delta_p \psi}{\delta u(t)}$, тогда*

$$E[x(t)] = \psi \left(-iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, 0 \right) E[x_0] - i \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_p \psi \left(-iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, 0 \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds \tag{5.2}$$

является математическим ожиданием решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Если ε, f независимы, то $\psi(z,u) = \psi_\varepsilon(z)\psi_f(u)$, где $\psi_\varepsilon(z) = E[\exp i\varepsilon z]$ — характеристическая функция ε, а $\psi_f(u) = E[\exp(i \int\limits_T \langle f(s), u(s) \rangle ds)]$ — характеристический функционал для f.

Теорема 5.3. *Если случайная величина ε и векторный случайный процесс f независимы, существует вариационная производная $\dfrac{\delta \psi_f}{\delta u(s)}$, а ψ_ε является аналитической функцией на $\mathbb{R}$, то*

$$E[x(t)] = \psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \right) E[x_0] - i \int\limits_{t_0}^{t} \psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau \right) E[f(s)]ds \tag{5.3}$$

является математическим ожиданием решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Доказательство. Воспользуемся формулой (5.3). При этом $\psi_f(0) = 1$,

$$\frac{\delta \psi_f(0)}{\delta u_j(s)} = \frac{\delta}{\delta u_j(s)} E \left[\exp \left(i \int\limits_T \langle f(s), u(s) \rangle \right) ds \right] \Bigg|_{u=0} = E \left[\exp \left(i \int\limits_T \langle f(s), u(s) \rangle \right) ds i f_j(s) \right] \Bigg|_{u=0} = \\ = iE[f(s)]_j.$$

Поскольку ε и f независимы, то

$$\psi \left(-iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, 0 \right) = \psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \right) \psi_f(0) = \psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau \right),$$

$$\frac{\delta_p \psi \left(-iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, 0 \right)}{\delta u_j(s)} e_j = \psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau \right) \frac{\delta \psi_f(0)}{\delta u_j(s)} e_j = i\psi_\varepsilon \left(-iA \int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau \right) E[f(s)]_j e_j. \tag{5.4}$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.3), получаем (5.4). $\square$

6. Пример

Требуется найти математическое ожидание решения задачи Коши

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\varepsilon t x_2 + f_1(t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = -2\varepsilon t x_1 + f_2(t),$$
$$x_1(0) = x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20},$$

где ε — случайная величина, f_1, f_2 — случайные процессы с характеристическим функционалом

$$\psi(z,u_1,u_2) = \exp\left(imz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + i\int_0^T (E[f_1(s)]u_1(s) + E[f_2(s)]u_2(s))\,ds - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T b_{11}(s_1,s_2)u_1(s_1)u_1(s_2)ds_1ds_2 - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T b_{22}(s_1,s_2)u_2(s_1)u_2(s_2)ds_1ds_2\right).$$

Здесь $m, \sigma > 0$ — заданные числа, b_{11}, b_{22} — заданные ковариационные функции.

Решение. Эта задача имеет форму задачи (4.1), (4.2). В нашем случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(t) = 2t, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

$E[f_1(t)], E[f_2(t)]$ — математические ожидания случайных процессов f_1, f_2, а b_{11}, b_{22} — элементы ковариационной матрицы случайных процессов f_1, f_2. Пусть $E[f_1(t)] = 2t$, $E[f_2(t)] = t^2$. Из вида характеристического функционала следует, что ε и f независимы, поэтому для нахождения математического ожидания $E[x(t)]$ можно использовать формулу (5.4). В таком случае

$$E[x(t)] = \exp\left(im\left(-iA\int_0^t 2\tau d\tau\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\left(-iA\int_0^t 2\tau d\tau\right)^2\right)\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} +$$
$$+\int_0^t \exp\left(im\left(-iA\int_s^t 2\tau d\tau\right) - \frac{1}{2}\sigma^2\left(-iA\int_s^t 2\tau d\tau\right)^2\right)\begin{pmatrix} 2s \\ s^2 \end{pmatrix} ds.$$

Хорошо известно, что $\exp(At)$ является суммой сходящегося матричного ряда

$$\exp(At) = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots + \frac{(At)^k}{k!} + \ldots$$

Это матричная функция, вектор-столбцы которой φ_j, $j = 1,2,\ldots,n$ являются решениями системы дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ с начальными условиями $\varphi_j(0) = e_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, где e_j — единичный вектор. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы A. Корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ уравнения $\lambda^2 + 1 = 0$ являются собственными значениями матрицы A и $h_1 = (-i\ 1)^T$, $h_2 = (i\ 1)^T$ — соответствующие собственные векторы (здесь T — знак транспонирования). Общее решение системы уравнений $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ имеет вид

$$x(t) = c_1\exp(it)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\exp(-it)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = c_1(\cos t + i\sin t)\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(\cos t - i\sin t)\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее действительное решение имеет вид

$$x_r(t) = c_3\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_4\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Здесь c_3, c_4 — произвольные вещественные числа.

Запишем начальное условие $x(0) = e_1$:

$$c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда $c_3 = 1, c_4 = 0$ и $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$ — решение, которое удовлетворяет первому начальному условию. Аналогично находим второе решение $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ и

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\exp(At)^2 = \begin{pmatrix} \exp(-t^2) & 0 \\ 0 & \exp(-t^2) \end{pmatrix}.$$

Используя эти выражения, находим

$$E[x(t)] = \begin{pmatrix} \cos m\tau^2 & \sin m\tau^2 \\ -\sin m\tau^2 & \cos m\tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\dfrac{\sigma^2 t^4}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\dfrac{\sigma^2 t^4}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} +$$

$$+ \int\limits_0^t \begin{pmatrix} \cos m(t^2 - s^2) & \sin m(t^2 - s^2) \\ -\sin m(t^2 - s^2) & \cos m(t^2 - s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\dfrac{\sigma^2 (t^2 - s^2)^2}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\dfrac{\sigma^2 (t^2 - s^2)^2}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s \\ s^2 \end{pmatrix} ds. \tag{6.1}$$

7. Смешанные моментные функции

Смешанные моментные функции $E[x(t)\varepsilon]$ и $E[x(t)f^T(\xi)]$ для решения задачи (1.1), (1.2) также представляют интерес. Мы можем их найти аналогично тому, как находили математическое ожидание решения. Тем не менее, формула для $y(t, z, u)$ позволяет сделать это короче.

Согласно определению, $y(t, z, u) = E[x(t)w]$, где $w = \exp\left(i\varepsilon z + i\int\limits_T \langle f(t), u(t)\rangle dt\right)$. Тогда

$$\frac{\partial y(t, z, u)}{\partial z}\Big|_{z=0,u=0} = E[x(t)w(z, u)i\varepsilon]|_{z=0,u=0} = iE[x(t)\varepsilon]$$

Используя формулу (5.1), имеем

$$E[x(t)\varepsilon] = \left.\left(\frac{1}{i}\frac{\partial\psi\left(zI - iA\int\limits_{t_0}^t a(\tau)d\tau, u\right)}{\partial z}E[x_0] - \int\limits_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta_p\psi\left(zI - iA\int\limits_s^t a(\tau)d\tau, u\right)}{\delta u(s)ds}\right)\right|_{z=0,u=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial\psi\left(-iA\int\limits_{t_0}^t a(\tau)d\tau, 0\right)}{\partial z}E[x_0] - \int\limits_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z}\frac{\delta_p\psi\left(-iA\int\limits_s^t a(\tau)d\tau, 0\right)}{\delta u(s)ds}.$$

Аналогично (но сложнее)

$$\frac{\delta y(t, z, u)}{\delta u(\xi)}\Big|_{z=0,u=0} = E[x(t)w(z, u)if^T(\xi)]\Big|_{z=0,u=0} = iE[x(t)f^T(\xi)],$$

$$E[x(t)f^T(\xi)] = \left(\frac{1}{i}\frac{\delta\psi(zI - iA\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, u)}{\delta u(\xi)}E[x_0] - \int\limits_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2\psi(zI - iA\int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, u)}{\delta u(s)\delta u(\xi)}ds\right)\Bigg|_{z=0,u=0} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\delta_p\psi\left(-iA\int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau, 0\right)}{\delta u(\xi)}E[x_0] - \int\limits_{t_0}^{t}\frac{\delta_p^2\psi\left(-iA\int\limits_{s}^{t} a(\tau)d\tau, 0\right)}{\delta u(s)\delta u(\xi)}ds.$$

8. Вторая моментная функция решения задачи (1.1), (1.2)

Умножим уравнение (1.1) на $x^T(\tau)w$ и усредним по функции распределения для ε, f, получим

$$E\Big[\frac{dx}{dt}x^T(\tau)w\Big] = E[a(t)\varepsilon Axx^T(\tau)w]E[f(t)x^T(\tau)w]. \tag{8.1}$$

Введем отображение $\zeta(t,\tau,z,u) = E[x(t)x^T(\tau)w]$.

$$\zeta(t,\tau,z,u) = \zeta(\tau,t,z,u), \quad \zeta(t,\tau,0,0) = E[x(t)x^T(\tau)]. \tag{8.2}$$

Уравнение (8.1) с помощью ζ записывается в виде

$$\frac{\partial\zeta(t,\tau,z,u)}{\partial t} = -iA\frac{\partial\zeta(t,\tau,z,u)}{\partial z} - i\Big(\frac{\delta_p y(\tau,z,u)}{\delta u(t)}\Big)^T. \tag{8.3}$$

Умножим условие (1.2) на $x^T(t_0)w$ и усредним по функции распределения для ε, f, получим

$$E[x(t_0)x^T(t_0)w] = E[x(t_0)x^T(t_0)]\psi(x,u) \tag{8.4}$$

(мы воспользовались независимостью x_0 от ε, f).

Определение 8.1. *Второй моментной функцией* $E[x(t)x^T(\tau)]$ решения задачи (1.1), (1.2) называется $\zeta(t,\tau,0,0)$, где $\zeta(t,\tau,z,u)$ — симметричное по переменным t,τ решение уравнения (8.3), удовлетворяющее условию (8.5).

Запишем уравнение (8.3) при $\tau = t_0$.

$$\frac{\partial\zeta(t,t_0,z,u)}{\partial t} = -iA\frac{\partial\zeta(t,t_0,z,u)}{\partial z} - i\Big(\frac{\delta_p y(t_0,u)}{\delta u(t)}\Big)^T. \tag{8.5}$$

Задача (8.3), (8.5) имеет вид задачи (4.1), (4.2). Решение находим по формуле (4.3):

$$\zeta(t,t_0,z,u) = \psi\left(zI - iA\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0x_0^T] - i\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(t_0, zI - iA\int\limits_{s}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)_{jk}^T e_{jk}ds.$$

Здесь $\dfrac{\delta_p y}{\delta u}_{jk}$ — элементы матрицы с индексами jk, $e_{jk} = 0$ при $j \neq k$, и $e_{jj} = 1$. Поскольку ζ симметрично по двум первым переменным, то

$$\zeta(t_0,\tau,z,u) = \psi\left(zI - iA\int\limits_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0x_0^T] - i\int\limits_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(t_0, zI - iA\int\limits_{s}^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)_{jk}^T e_{jk}ds. \tag{8.6}$$

Задача (8.3), (8.6) имеет вид задачи (4.1), (4.2). По формуле (4.3) находим

$$\zeta(t,\tau,z,u) = \psi\left(zI - iA\int\limits_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi - iA\int\limits_{s}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0x_0^T] -$$

$$-i\int_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(t_0, zI - iA\int_s^{\tau} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds -$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(s, zI - iA\int_s^{t} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds. \quad (8.7)$$

Подставляя (5.1) в (8.7), получаем другое представление для ζ:

$$\zeta(t,\tau,z,u) = \psi\left(zI - iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi - iA\int_s^{t} a(\xi)d\xi, u\right) E[x_0x_0^T] -$$

$$-i\int_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p \psi\left(zI - iA\int_s^{\tau} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0]}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds -$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p \psi\left(zI - iA\int_s^{t} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0]}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds -$$

$$-\int_{t_0}^{t}d\sigma\int_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p^2 \psi\left(zI - iA\int_\sigma^{t} a(\xi)d\xi - i\int_\mu^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(\mu)\delta u(\sigma)}\right)^T_{jk} e_{jk}d\mu. \quad (8.8)$$

Отметим, что ζ симметрично по переменным t,τ.

Теорема 8.1. *Если ψ — аналитическая функция переменной z на $\mathbb{R}$, имеющая две вариационные производные по переменной u, то вторая моментная функция имеет вид*

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \psi\left(-iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi - iA\int_s^{t} a(\xi)d\xi, 0\right) E[x_0x_0^T] -$$

$$-\left(i\int_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(t_0, -iA\int_s^{\tau} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds -\right.$$

$$\left.-i\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p y\left(s, -iA\int_s^{t} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(s)}\right)^T_{jk} e_{jk}ds\right)\Bigg|_{u=0},$$

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \left(\psi\left(-iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi - iA\int_{s}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0x_0^T] -\right.$$

$$-i\int_{t_0}^{\tau}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p\psi\left(-iA\int_{s}^{\tau} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{t} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0]}{\delta u(s)}\right)_{jk}^{T} e_{jk}ds -$$

$$-i\int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\delta_p\psi\left(-iA\int_{s}^{t} a(\xi)d\xi - iA\int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)E[x_0]}{\delta u(s)}\right)_{jk}^{T} e_{jk}ds -$$

$$\left.-\int_{t_0}^{t} d\sigma\int_{t_0}^{\tau}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\delta_p^2\psi\left(-iA\int_{\sigma}^{t} a(\xi)d\xi - i\int_{\mu}^{\tau} a(\xi)d\xi, u\right)}{\delta u(\mu)\delta u(\sigma)}\right)_{jk}^{T} e_{jk}d\mu\right)\Bigg|_{u=0}.$$

Доказательство. Согласно определению

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \zeta(t, \tau, 0, 0).$$

Подставляя в (8.7), (8.8) $z = 0$, $u = 0$, находим $E[x(t)x^T(\tau)]$. □

9. Заключение

В работе получены явные формулы (5.3), (5.4) для математического ожидания решения задачи (1.1), (1.2), формулы для нахождения смешанных моментных функций $E[x(t)\varepsilon], E[x(t)f^T(\xi)]$ и формула (4.3) решения задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (4.1), (4.2). Более сложным оказывается получение формулы для второй моментной функции $E[x(t)x^T(\tau)]$ решения задачи (1.1), (1.2).

Заметим, что рассматриваемая система является линейной, поэтому устойчивость решений эквивалентна устойчивости нулевого решения линейной однородной системы, см. [2, с. 136]. Если $\varepsilon = 1$, то система в примере устойчива по Ляпунову (поскольку спектр матрицы A лежит на мнимой оси и нет кратных собственных значений, см. [8]).

Из формы математического ожидания решения (8.1)

$$E[x(t)] = \begin{pmatrix} \cos m\tau^2 & \sin m\tau^2 \\ -\sin m\tau^2 & \cos m\tau^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \exp(-\dfrac{\sigma^2t^4}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\dfrac{\sigma^2t^4}{2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что математическое ожидание $E[x(t)]$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, т. е. имеет место асимптотическая устойчивость в среднем (см. [10, с. 231]) системы со случайным фактором ε. Таким образом, в данном примере случайные факторы оказывают стабилизирующее влияние на систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адомиан Д.* Стохастические системы. — М.: Мир, 1987.
2. *Боровских А. В., Перов А. И.* Дифференциальные уравнения. — М.: Юрайт, 2016.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции. Некоторые применения гармоночеcкого анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматлит, 1961.
4. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — Москва—Ижевск: Рег. и хаот. динамика, 2006.
5. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: Физматлит, 2003.

6. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
7. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: МГУ, 2004.
8. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
9. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.—Ижевск: Рег. и хаот. динамика, 2000.
10. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
11. *Adomian D.* Stochastic systems. — New York—London etc.: Academic press, 1983.
12. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. — New York—London: Interscience Publishers, 1962.

В. Г. Задорожний
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zador@amm.vsu.ru

Г. С. Тихомиров
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: tgs.gami@bk.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634
UDC 517.972

On a system of differential equations with random parameters

V. G. Zadorozhniy and G. S. Tikhomirov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

An explicit formula for the mathematical expectation and second moment functions of a solution to a linear system of ordinary differential equations with a random parameter and a vector random right-hand side is obtained. The problem is reduced to the deterministic Cauchy problem for systems of first-order linear partial differential equations. We obtain an explicit formula for a solution of linear systems of partial differential equations of the first order with constant coefficients. An example is given showing that random factors can have a stabilizing effect on a linear system of differential equations.

Keywords: linear system of ordinary differential equations with a random parameter and a vector random right-hand side, moment functions, system of first-order linear partial differential equations, explicit solution

For citation: V. G. Zadorozhniy, G. S. Tikhomirov, "On a system of differential equations with random parameters," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 621–634. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634

REFERENCES

1. D. Adomian, *Stokhasticheskie sistemy* [Stochastic Systems], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
2. A. V. Borovskikh and A. I. Perov, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], Yurayt, Moscow, 2016 (in Russian).

3. I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, *Obobshchennye funktsii. Nekotorye primeneniya garmonocheskogo analiza. Osnashchennye gil'bertovy prostranstva* [Generalized Functions. Some Applications of Harmonic Analysis. Framed Hilbert Spaces], Fizmatlit, Moscow, 1961 (in Russian).
4. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Variation Analysis Methods], Reg. i Khaot. Dinamika, Moscow–Izhevsk, 2006 (in Russian).
5. V. F. Zaytsev and A. D. Polyanin, *Spravochnik po differentsial'nym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [Handbook of First Order Partial Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
6. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
7. V. V. Stepanov, *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of Differential Equations], MSU, Moscow, 2004 (in Russian).
8. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
9. A. F. Filippov, *Sbornik zadach po differentsial'nym uravneniyam* [Collection of Problems on Differential Equations], Reg. i Khaot. Dinamika, Moscow–Izhevsk, 2000 (in Russian).
10. R. Z. Khas'minskiy, *Ustoychivost' sistem differentsial'nykh uravneniy pri sluchaynykh vozmushcheniyakh ikh parametrov* [Stability of Systems of Differential Equations under Random Perturbations of Their Parameters], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
11. D. Adomian, *Stochastic Systems*, Academic press, New York–London etc., 1983.
12. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York–London, 1962.

V. G. Zadorozhniy
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zador@amm.vsu.ru

G. S. Tikhomirov
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: tgs.gami@bk.ru