

ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕПРОСТОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ ЗАДАННОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Рассматривается задача построения n -линейных ($n \geq 2$) плоских векторных полей с изолированной особой точкой и заданными сепаратрисами определенных типов. Такие построения основаны на использовании векторной алгебры, качественной теории динамических систем второго порядка и классических методов исследования их особых точек. Эта задача по существу является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и ее решение может быть использовано для синтеза математических моделей управляемых динамических систем различной физической природы.

Ключевые слова: векторное поле, ОДУ, топологическая структура, особая точка, сепаратриса, обратная задача качественной теории ОДУ, математическая модель, программируемое движение, управляемая частица

Для цитирования: С. В. Волков. Построение плоских векторных полей с непростой особой точкой заданной топологической структуры // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 575–595. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595>

1. ВВЕДЕНИЕ

Векторное поле $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ связано с соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.1)$$

и наоборот. Поэтому построение векторного поля \vec{v} с требуемыми свойствами по существу является обратной задачей качественной теории ОДУ и предполагает восстановление уравнений (1.1) из их фазового портрета заданной топологической структуры. Топологическая структура векторного поля класса C^0 полностью определяется набором его особых орбит (а именно, особых точек, сепаратрис и предельных циклов), их типами и взаимным расположением [9]. В частности, эта информация может быть представлена как:

- (1) набор интегральных кривых [6];
- (2) набор простых особых точек заданных типов (седла, фокусы, узлы) [1];
- (3) набор предельных циклов заданных типов [2];
- (4) непростая критическая точка со своими сепаратрисами заданных типов [13];
- (5) набор всех особых орбит, топологическая структура которых задана в некоторой ограниченной области фазовой плоскости [3, 17, 18].

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».



Примерами таких задач являются обратные задачи классической механики, а именно: задача Ньютона об определении сил, под действием которых планеты движутся по законам Кеплера [14]; задача Бертрана о нахождении позиционной силы, заставляющей частицу двигаться по коническому сечению вне зависимости от начальных условий этой частицы [11]; задача Суслова о поиске силовой функции, при которой голономная система с n степенями свободы имеет $n - 1$ заданных независимых интегралов [8]; задача Мещерского — обратная задача динамики частицы с переменной массой, заключающаяся в нахождении закона изменения массы для обеспечения требуемой траектории и заданного закона движения частицы по этой траектории [7]; и другие проблемы, рассмотренные в [4]. В дальнейшем заметный рост интереса к обратным задачам теории ОДУ был вызван потребностями теории управления, когда к требованию существования заданных фазовых орбит добавились требования устойчивости, оптимальности и другие свойства движений управляемых систем [5].

В работе рассматривается построение плоских векторных полей, компоненты которых являются однородными полиномами одинаковой степени, а фазовые портреты которых имеют только одну изолированную непростую особую точку с сепаратрисами заданных типов. Известные решения этой задачи предполагают построение рациональной дроби, представляющей собой разность наклонов искомого векторного поля и центрального векторного поля с центром в особой точке. Набор нулей этой дроби и их свойства должны соответствовать заданному набору сепаратрис и их типам. Такой подход, обратный методу раздутья для исследования особых точек системы (1.1), можно охарактеризовать как алгебраический.

Целью данной статьи является представление другого метода, основанного на использовании скалярных и векторных произведений искомого и указанного выше центрального векторных полей, причем последнее является векторным полем направлений сравнения. Такой подход можно назвать геометрическим, и его главной особенностью является возможность использовать любое векторное поле класса C^0 в качестве векторного поля направлений сравнения. Это позволяет строить векторные поля любой топологической структуры, приемлемой для векторных полей этого класса (случай, указанный выше в пункте (5)).

В данной статье геометрический подход применяется для решения задач указанного в заглавии типа.

2. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Построим векторные поля $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$, удовлетворяющие следующим требованиям:

- (i) компоненты $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются однородными полиномами одинаковой степени, причем $P(x, y)^2 + Q(x, y)^2 \neq 0$ за исключением случая $x = y = 0$;
- (ii) топологическая структура фазового портрета определяется:
 - (a) по заданному набору его интегральных прямых

$$\Lambda_i : \omega_i(x, y) \equiv a_i x + b_i y = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (2.1)$$

- (b) по заданным типам сепаратрис L_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$), лежащих на соответствующих прямых Λ_i :

$$\Lambda_i = L_{i1} \cup \{O\} \cup L_{i2} \quad (i = \overline{1, m}),$$

где $O(0; 0)$ — особая точка.

Замечание 2.1. Поскольку векторное поле $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ связано с системой дифференциальных уравнений (1.1), поставленная задача идентична задаче построения правых частей $P(x, y), Q(x, y)$ этих уравнений, фазовый портрет которых удовлетворяет требованиям пунктов (i) и (ii). Таким образом, мы можем использовать результаты [6, 10, 12] для обоснования приведенного ниже решения поставленной задачи.

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Согласно [10], существует четыре типа сепаратрис особых точек, а именно: *параболическая*, *гиперболическая*, *параболическая слева* и *параболическая справа*. Последние два типа называются *смешанными*.

Обозначим через $K(\theta)$ открытый сектор, ограниченный сепаратрисой L и лучом, исходящими из начала координат O и образующими угол θ , отсчитываемый от L с учетом знака. Тогда сепаратрису L можно назвать *параболической справа* (соответственно, *слева*), если существует $\theta > 0$ такое, что для всех орбит в $K(-\theta)$ (соответственно, $K(\theta)$) сепаратриса L является касательной в особой точке, а для орбит в $K(\theta)$ (соответственно, $K(-\theta)$) не является.

Очевидно, что типы смежных сепаратрис L_{ij} и $L_{i+1,j}$ критической точки ($i = \overline{1, m}$; $j = 1, 2$; $L_{m+1,1} = L_{12}$, $L_{m+1,2} = L_{11}$) определяют тип ограничиваемого ими сектора S_{ij} . Эти секторы могут быть гиперболическими, эллиптическими, параболическими справа и параболическими слева. В частности, сектор S_{ij} называется *параболическим справа* (соответственно, *слева*), если при достаточно малом $\theta > 0$ для всех орбит в $K_{ij}(\theta)$ (соответственно, $K_{i+1,j}(-\theta)$) сепаратриса L_{ij} (соответственно, $L_{i+1,j}$) является касательной в особой точке O , а все орбиты в $K_{i+1,j}(-\theta)$ (соответственно, $K_{ij}(\theta)$) не имеют касательной в точке O .

Приведенная выше классификация сепаратрис и секторов используется в дальнейшем для формулировки требований подпункта (b) в разделе 2.

Замечание 3.1. Для любого векторного поля рассматриваемого типа все лучи, исходящие из критической точки O , являются изоклинами. Поэтому топологическая структура такого векторного поля и соответствующей системы (1.1) полностью определяется по следующим данным:

- (1) совокупность сепаратрис, лежащих в какой-либо полуплоскости, с началом O , находящимся на границе;
- (2) типы этих сепаратрис;
- (3) направления векторного поля на этих сепаратрисах;
- (4) четность степени особенности в $O(0;0)$ (т. е. четность степени $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, см. [15]).

Замечание 3.2. Свойства фазового портрета (2)–(4) в замечании 3.1 могут быть выражены в аналитической форме с помощью скалярного $\vec{r} \cdot \vec{v}$ и векторного $\vec{r} \times \vec{v}$ произведений, где вектор положения точки фазовой плоскости $\vec{r} = \{x, y, 0\}$ и $\vec{v} = \{P, Q, 0\}$ даны в правой прямоугольной системе координат $Oxyz$.

Предположение 3.1. Пусть полуплоскость, упомянутая в пункте (1) замечания 3.1, ограничена осью y и включает в себя все точки (x, y) с неотрицательными абсциссами. Тогда предположим, что:

- (1) сепаратрисы L_{11} и L_{12} — отрицательная и положительная полуоси оси y соответственно, т. е. $y|_{L_{11}} < 0$ и $y|_{L_{12}} > 0$;
- (2) сепаратрисы L_{i1} и L_{i2} находятся справа и слева от оси y соответственно, т. е. $x|_{L_{i1}} > 0$ и $x|_{L_{i2}} < 0$ ($i = \overline{2, m}$);
- (3) S_{ik} обозначает открытый сектор, ограниченный соседними сепаратрисами L_{ik} и $L_{i+1,k}$ ($i = \overline{1, m}$; $k = 1, 2$), где $L_{m+1,1} = L_{12}$ и $L_{m+1,2} = L_{11}$.

Предположение 3.2. Предположим для определенности и удобства, что

$$\begin{aligned} a_1 > 0, \quad b_1 = 0, \quad b_i \geq 0 \quad (i = \overline{2, m}), \\ a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i > 0 \quad (i = \overline{1, m-1}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что

- (1) Λ_1 совпадает с осью y ;
- (2) числа u_2, u_3, \dots, u_m , где $u_i = -a_i/b_i$, образуют возрастающую последовательность, определяющую расположение прямых $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ относительно друг друга.

Предположение 3.3. В силу пункта (1) замечания 3.1 не будет неоднозначности, если в дальнейшем для простоты мы будем опускать второй индекс k во всех обозначениях L_{ik} и S_{ik} ($i = \overline{1, m}$), а L_{12} обозначать как L_{m+1} .

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

4.1. В соответствии с (2.1) $\vec{n}_i = \{a_i; b_i; 0\}$ является нормалью соответствующей сепаратрисы L_i ($i = \overline{1, m}$). Тогда ее вектор направления $\vec{\tau}_i = \{b_i; -a_i; 0\}$ есть векторное произведение

$$\vec{\tau}_i = \vec{n}_i \times \vec{k} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

где $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ — единичный вектор направления оси z .

Учитывая уравнения сепаратрис (2.1), мы можем, согласно [6], представить искомое векторное поле следующим образом:

$$\vec{v} = (-1)^{\alpha_1} \lambda_1 \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_m \vec{\tau}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m} \lambda_m \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_{m-1} \vec{\tau}_m, \quad (4.2)$$

где $\alpha_i = 1, 2$ и λ_i — однородные полиномы s -й степени, положительные на соответствующей выколоте прямой Λ_i :

$$\deg_{(x,y)} \lambda_i = s \quad (s = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad \lambda_i|_{\Lambda_i \setminus \{0\}} > 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.3)$$

4.2. Требования пункта (3) в замечании 3.1 могут быть легко удовлетворены соответствующим выбором α_i в (4.2). Это сразу следует из вида

$$\vec{v}|_{L_i} = (-1)^{\alpha_i} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega_j|_{L_i} \cdot \vec{\tau}_i$$

который принимает равенство (4.2) на соответствующей сепаратрисе L_i ($i = \overline{1, m}$).

4.3. Чтобы сформулировать условия, обеспечивающие искомые типы секторов S_i в терминах скалярных и векторных произведений векторов \vec{r} и \vec{v} , сначала заметим, что

$$\vec{r} \times \vec{\tau}_i = \vec{r} \times (\vec{n}_i \times \vec{k}) = -\omega_i \vec{k} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.4)$$

Тогда для вектора (4.2) получим

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda \omega_1 \dots \omega_m \vec{k}, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda = (-1)^{\alpha_1} \lambda_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m} \lambda_m. \quad (4.6)$$

Теперь мы можем сформулировать следующие утверждения.

Утверждение 4.1. Сектор S_i является параболическим справа, если

- (a) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$ (рис. 1, 1.a); либо
- (b) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$ (рис. 1, 1.b).

Утверждение 4.2. Сектор S_i является параболическим слева, если

- (a) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$ (рис. 1, 2.a); либо
- (b) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$ (рис. 1, 2.b).

Утверждение 4.3. Сектор S_i является гиперболическим, если

- (a) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$ (рис. 1, 3.a); либо
- (b) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$ (рис. 1, 3.b).

Утверждение 4.4. Сектор S_i является эллиптическим, если

- (a) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$ (рис. 1, 4.a); либо
- (b) $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$, $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$ (рис. 1, 4.b).

4.4. Чтобы доказать утверждения 4.1–4.4, мы применим технику Фроммера [12] для изучения особых точек дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (4.7)$$

соответствующего рассматриваемому векторному полю. В соответствии с этим сначала подставим $y = u(x) \cdot x$ в равенство (4.7), что приводит к уравнению

$$xu' = \varphi(u), \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{Q(1, u)}{P(1, u)} - u. \quad (4.8)$$

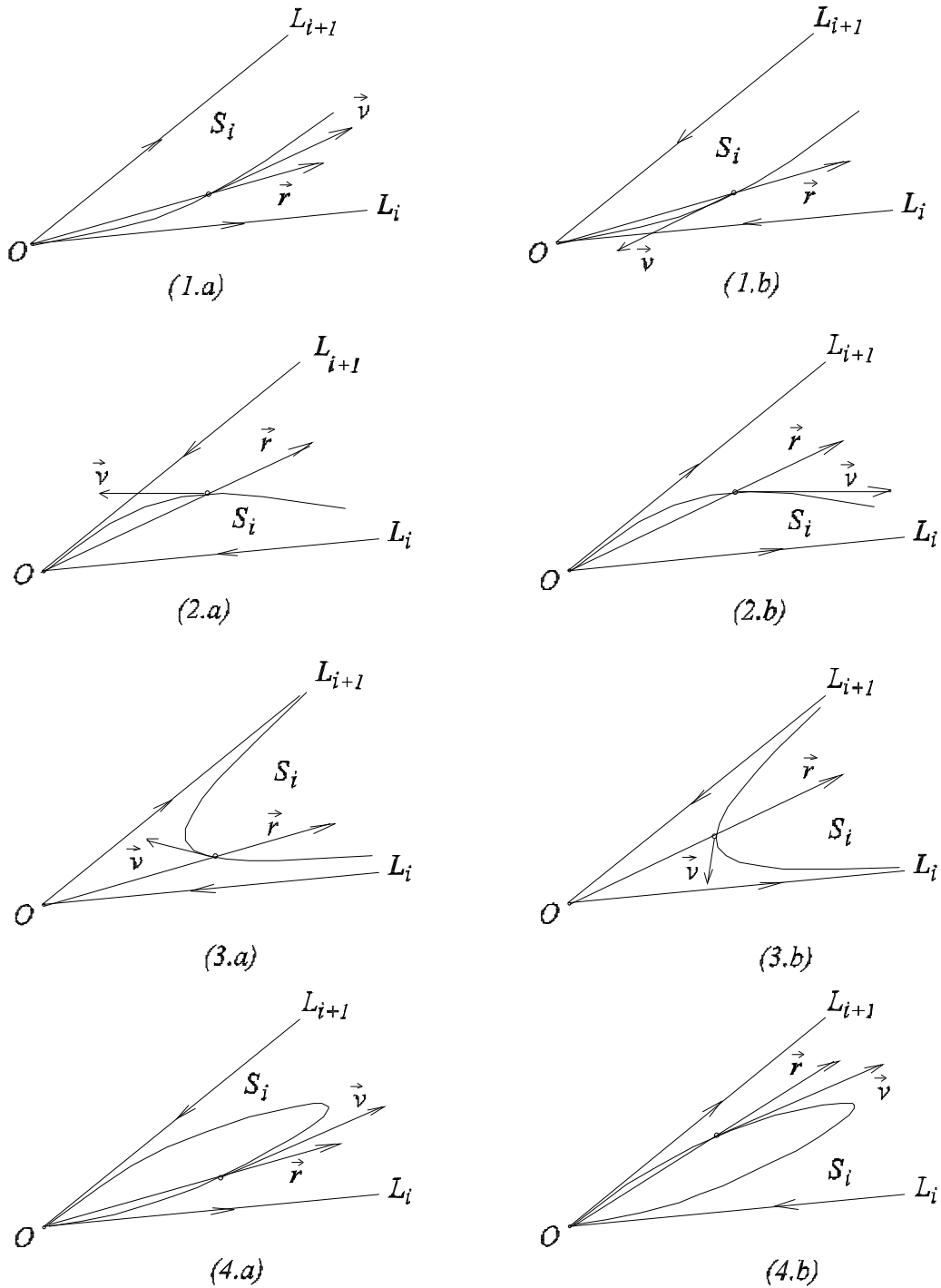


РИС. 1. Зависимость типа сектора особой точки от взаимных направлений векторов \vec{v} и $\vec{r} \times \vec{v}$: (1.a) и (1.б) для секторов, параболических справа; (2.a) и (2.б) для секторов, параболических слева; (3.a) и (3.б) для гиперболических секторов; (4.a) и (4.б) для эллиптических секторов.

FIG. 1. Dependence of the sector type of critical point on the mutual directions of the vectors \vec{v} and $\vec{r} \times \vec{v}$: (1.a) and (1.b) for sectors parabolic on the right; (2.a) and (2.b) for sectors parabolic on the left; (3.a) and (3.b) for hyperbolic sectors; (4.a) and (4.b) for elliptic sectors.

Вещественные корни $\varphi(u) = 0$ дают конечные наклоны сепаратрис. Далее, чтобы узнать, существуют ли сепаратрисы, лежащие на оси y , мы должны подставить $x = w(y) \cdot y$ в (4.7) и рассмотреть полученное уравнение

$$yw' = \psi(w), \quad \text{где} \quad \psi(w) = \frac{P(w, 1)}{Q(w, 1)} - w. \tag{4.9}$$

Если $\psi(0) \neq 0$, то не существует сепаратрис, в противном случае сепаратрисы существуют. Таким образом, для вектора (4.2) с компонентами

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j b_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \omega_k, \quad Q(x, 1) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j (-a_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \omega_k \tag{4.10}$$

мы имеем

$$\varphi(u) = -\frac{\lambda(1, u) \prod_{j=2}^m b_j (u - u_j)}{P(1, u)}, \quad \psi(w) = \frac{\lambda(w, 1) \prod_{j=1, j \neq k}^m a_j (w - w_j)}{Q(w, 1)} \tag{4.11}$$

в равенствах (4.8) и (4.9), соответственно, где k таково, что $a_k = 0$,

$$P(1, u) = \sum_{j=2}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j(1, u) b_j \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^m b_k (u - u_k), \tag{4.12}$$

$$Q(w, 1) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j(w, 1) (-a_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m a_k (w - w_k) \tag{4.13}$$

для P и Q из (4.10). Из равенств (4.11)–(4.13) следует, что

$$\varphi(u_i) = 0, \quad P(1; u_i) \neq 0 \quad (i = \overline{2, m}), \quad \psi(0) = 0, \quad Q(0; 1) \neq 0.$$

Следовательно, $L_{i,k}$ ($i = \overline{1, m}; k = 1, 2$) — сепаратрисы особой точки O векторного поля (4.2) (см. [10, 12]).

Согласно [10, 12], тип сепаратрисы L_i ($i = \overline{2, m}$) зависит от поведения производной $\varphi'(u)$ в соответствующей достаточно малой проколотой окрестности $(u_i - \varepsilon, u_i) \cup (u_i, u_i + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$.

Предложение 4.1. *Если $\varphi'(u) > 0$ (соответственно, < 0) при $u \in (u_i - \varepsilon, u_i) \cup (u_i + \varepsilon, u_i)$, то соответствующая сепаратриса L_i является параболической (соответственно, гиперболической).*

Предложение 4.2. *Если $\varphi'(u) > 0$ (соответственно, < 0) при $u \in (u_i - \varepsilon, u_i)$ и $\varphi'(u) < 0$ (соответственно, > 0) при $u \in (u_i, u_i + \varepsilon)$, то сепаратриса L_i является параболической справа (соответственно, слева).*

Аналогично, тип сепаратрисы L_1 определяется свойствами знака $\varphi'(w)$ в достаточно малой окрестности точки $w = 0$.

4.5. В этом подразделе мы применим предложения 4.1 и 4.2 для доказательства утверждений 4.1–4.4.

В случае пункта (а) в утверждении 4.1:

(i) из неравенства $(\lambda \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_m)|_{S_i} < 0$ ($i = \overline{2, m-1}$) следует, что

$$\frac{1}{x^{m+s}} \cdot \left(\lambda \prod_{j=1}^m \omega_j \right) \Big|_{y=ux} = \lambda(1, u) \prod_{j=2}^m b_j (u - u_j)$$

является убывающей функцией от u на $(u_i, u_i + \varepsilon)$ и возрастающей на $(u_{i+1} - \varepsilon, u_{i+1})$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и любом $x > 0$;

(ii) из неравенств $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$ и $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$ следует, что

$$P(1, u_i) > 0, \quad P(1, u_{i+1}) > 0,$$

а значит, по построению \vec{v} в равенстве (4.2)

$$\text{sign } P(1, u_j) = \text{sign } (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_j} \quad (j = \overline{2, m}).$$

Из (i) и (ii) получаем, что $\varphi'(u_i + 0) > 0$ и $\varphi'(u_{i+1} - 0) < 0$ для $\varphi(u)$ из (4.11). Следовательно, по предложениям 4.1 и 4.2 сектор S_i является параболическим справа (рис. 1, 1.a).

В пунктах (a) и (b) утверждения 4.1 соответствующие неравенства отличаются друг от друга только знаками неравенств. Это означает, что $\varphi'(u_i + 0)$ одна и та же в обоих случаях, а значит, и $\varphi'(u_{i+1} - 0)$. Следовательно, в обоих случаях сектор S_i является параболическим (рис. 1, 1.a и 1.b).

Для установления типа сектора S_1 сначала заметим, что

$$\left(\frac{\lambda \cdot \prod_{j=1}^m \omega_j}{\vec{r} \cdot \vec{v}} \right) \Big|_{x=wy} = \frac{\lambda(w, 1) \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^m a_j(w - w_j)}{Q(w, 1) + wP(w, 1)}, \quad (4.14)$$

где k -й множитель в правой части следует опустить, если соответствующее $a_k = 0$. Из равенства (4.14) следует, что если выполняются условия утверждения 4.1, то $\psi(w)$ из (4.11) является убывающей функцией w на всем интервале $(-w_2, -w_2 + \varepsilon)$ и возрастающей функцией на всем $(-\varepsilon, 0)$, где $w_2 = 1/u_2$ и ε — достаточно малое положительное число. Следовательно, $\psi'(-w_2 + 0) < 0$ и $\psi'(0 - 0) > 0$. Тогда, согласно предложениям 4.1 и 4.2, сектор S_1 является параболическим справа. Аналогично можно доказать утверждение 4.1 для сектора S_m . Таким образом, утверждение 4.1 полностью доказано.

Аналогичное доказательство работает для утверждений 4.2–4.4.

Замечание 4.1. Задача, поставленная в разделе 2, допускает бесконечно много решений, так как существует бесконечно много наборов λ_i ($i = \overline{1, m}$) в (4.6), удовлетворяющих тем же требованиям пунктов (i) и (ii) из раздела 2. Это следует из утверждений 4.1–4.4, где на типы секторов S_i ($i = \overline{1, m}$) влияет только знак λ , а не его величина.

4.6. Пусть C — окружность с центром в начале координат O , C_i — ее дуга, проведенная между двумя соседними сепаратрисами, ограничивающими сектор S_i , β_i — угол, опирающийся в начале координат на C_i , θ — угол, который векторное поле \vec{v} образует с положительной полуосью x ($i = \overline{1, m}$). Если $\Delta\vartheta_i$ — это приращение θ , когда начало \vec{v} обходит дугу C_i против часовой стрелки, то

$$\Delta\vartheta_i = \begin{cases} \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — параболический;} \\ -\pi + \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — гиперболический;} \\ \pi + \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — эллиптический.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Доказательство равенства (4.15) использует рис. 1.

Плоское векторное поле \vec{v} называется *четным* (соответственно, *нечетным*), если $\vec{v}(-x, -y) \uparrow\uparrow \vec{v}(x, y)$ (соответственно, $\vec{v}(-x, -y) \uparrow\downarrow \vec{v}(x, y)$) при любых x и y . Тогда из (4.15) следует, что векторное поле рассматриваемого типа четно (соответственно, нечетно) тогда и только тогда, когда количество гиперболических и эллиптических секторов его фазового портрета в полуплоскости, ограниченной любой из прямых $\omega_i = 0$, нечетно (соответственно, четно). Этот факт следует учитывать при решении конкретных задач.

5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Утверждения 4.1–4.4 позволяют свести решение основной задачи, поставленной в разделе 2, к подходящему выбору множителей λ_i ($i = \overline{1, m}$) в (4.2). В этом разделе рассматриваются некоторые примеры использования такого подхода.

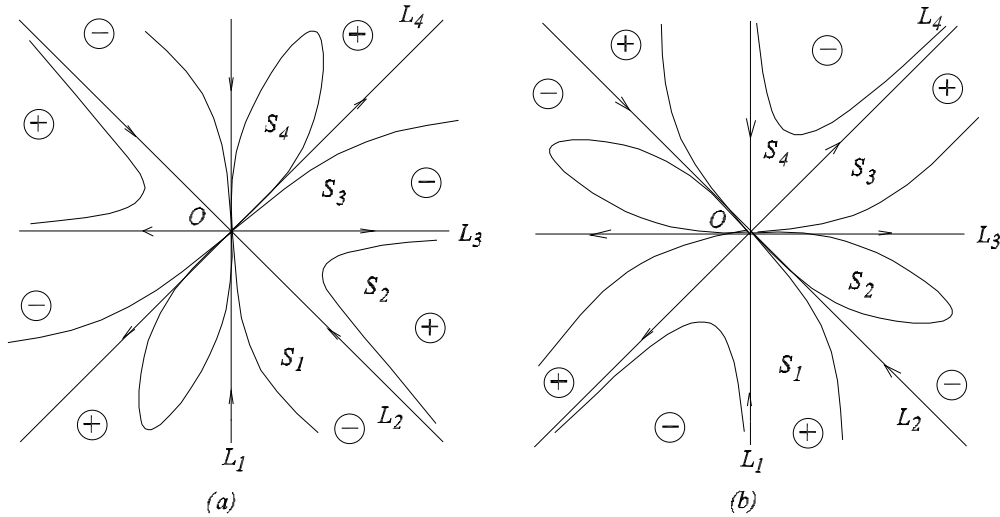


Рис. 2. Нечетные векторные поля
 FIG. 2. Odd vectors fields

5.1. Векторные поля с сепаратрисами несмешанного типа. Для получения векторных полей, фазовые портреты которых имеют сепаратрисы только несмешанного типа, достаточно ограничить выбор λ_i ($i = \overline{1, m}$) положительными константами. Тогда λ из (4.6) также постоянно, и поэтому каждое ω_i ($i = \overline{1, m}$) входит в правую часть равенства (4.5) только в первой степени.

5.1.1. Построение нечетных векторных полей.

Пример 5.1. Построить векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 2, и сепаратрисами L_{ik} ($i = \overline{1, 4}; k = 1, 2$), лежащими на соответствующих прямых

$$\omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \quad \omega_4 \equiv -x + y = 0. \tag{5.1}$$

Решение. Используя направляющие векторы сепаратрис

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{1; 1\}, \tag{5.2}$$

мы представим в соответствии с [6] искомый вектор в виде

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 - \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 - \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3, \tag{5.3}$$

где λ_i ($i = \overline{1, 4}$) — положительные константы, а знаки перед ними обеспечивают такие направления этого вектора на L_i ($i = \overline{1, 4}$), как показано стрелками на схеме (а) рис. 2.

Для \vec{v} из (5.3) имеем

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) \vec{k}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что знак проекции $\vec{r} \times \vec{v}$ на ось z совпадает в секторе S_i ($i = \overline{1, 4}$) с показанным внутри этого сектора на схеме (а) рис. 2, если

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 < 0.$$

В частности, $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_2 = 2$ удовлетворяют последнему неравенству и при подстановке в (5.3) дают искомый вектор

$$\vec{v} = \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 - 2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 - \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \tag{5.5}$$

с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -2xy(-x + y) - x(x + y)(-x + y) + (x + y)xy, \\ Q &= -(x + y)y(-x + y) + 2xy(-x + y) + x(x + y)y. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k}. \tag{5.7}$$

Утверждения 4.1–4.4 в сочетании с равенствами (5.5) и (5.7) приводят к результатам, согласующимся с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 2. \square

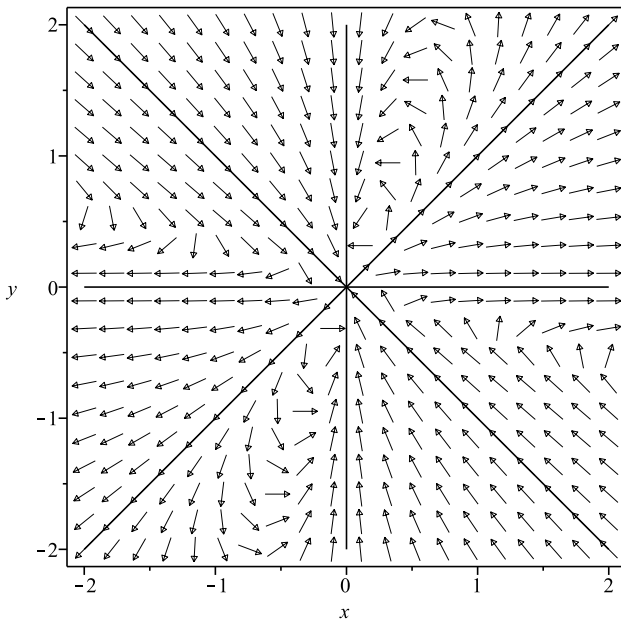


Рис. 3. Векторное поле (5.5).

FIG. 3. Vector field (5.5).

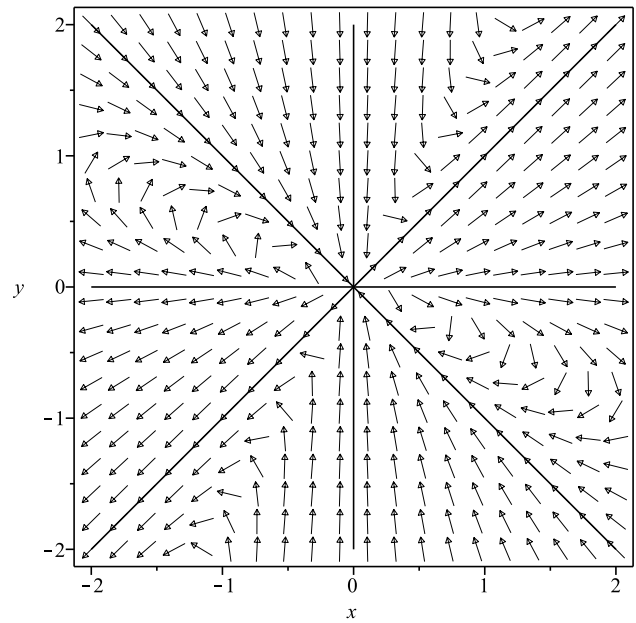


Рис. 4. Векторное поле (5.8).

FIG. 4. Vector field (5.8).

Чтобы получить векторное поле (5.5) в графической форме (рис. 3), можно использовать функцию `fieldplot` из пакета `MAPLE plot`, выполнив следующие команды:

```
with(plots, implicitplot):
P := (x, y) -> -2 * x * y * (-x + y) - x * (x + y) * (-x + y) + x * (x + y) * y;
Q := (x, y) -> -(x + y) * y * (-x + y) + 2 * x * y * (-x + y) + x * (x + y) * y;
F1 := fieldplot([P, Q], -2.0..2.0, -2.0..2.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, axes = boxed, scaling = constrained);
```

Понятно, что использование функции `fieldplot` не является достаточной проверкой правильности аналитического решения, однако может быть полезно как вспомогательный инструмент обнаружения ошибок.

Пример 5.2. Чтобы показать зависимость типов сепаратрис L_i и секторов S_i ($i = \overline{1, 4}$) от значений $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, в примере 5.1 возьмем $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Тогда в (5.3) мы получим векторное поле

$$\vec{v} = 2\vec{\tau}_1\omega_2\omega_3\omega_4 - \vec{\tau}_2\omega_1\omega_3\omega_4 - \vec{\tau}_3\omega_1\omega_2\omega_4 + \vec{\tau}_4\omega_1\omega_2\omega_3 \quad (5.8)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -xy(-x + y) - x(x + y)(-x + y) + (x + y)xy, \\ Q &= -2(x + y)y(-x + y) + xy(-x + y) + (x + y)xy \end{aligned} \quad (5.9)$$

и векторным произведением

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\vec{k}. \quad (5.10)$$

Согласно утверждениям 4.1–4.4, векторное поле (5.8) имеет топологическую структуру, соответствующую схеме (b) на рис. 2.

Замечание 5.1. Векторные произведения (5.7) и (5.10) отличаются друг от друга только знаком. Следовательно:

- (i) векторные поля (5.5) и (5.8) имеют одинаковую совокупность сепаратрис;

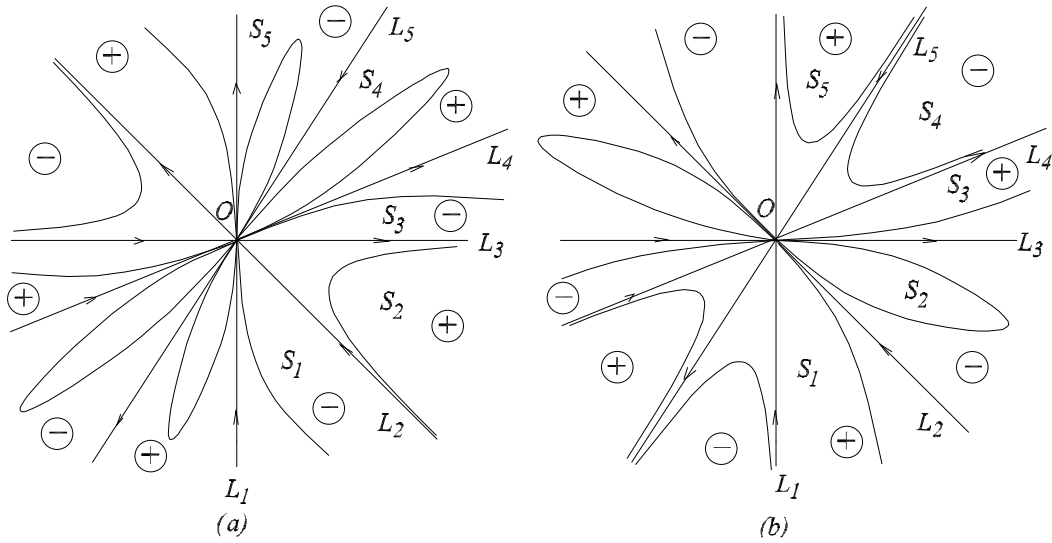


Рис. 5. Четные векторные поля

FIG. 5. Even vector fields

(ii) сепаратриса, параболическая (соответственно, гиперболическая) для одного из этих векторных полей, является гиперболической (соответственно, параболической) для другого.

Из пунктов (i) и (ii) следует, что (см. рис. 2):

- гиперболический сектор векторного поля (5.5) является эллиптическим сектором векторного поля (5.8) и наоборот;
- сектор, параболический справа для векторного поля (5.5), является параболическим слева для векторного поля (5.8) и наоборот.

Выполняя программный код из примера 5.1 при условии, что в этом коде P и Q заменены их выражениями из (5.9), мы получаем графическое представление векторного поля (5.8) (см. рис. 4).

5.1.2. Построение четных векторных полей.

Пример 5.3. Построить векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 5, с уравнениями соответствующих сепаратрис $L_{i,k}$ ($i = \overline{1,5}; k = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \\ \omega_4 \equiv -x + 2y = 0, \quad \omega_5 \equiv -2x + y = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Решение. Возьмем

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{2; 1\}, \quad \vec{\tau}_5 = \{1; 2\} \tag{5.12}$$

в качестве направляющих векторов сепаратрис L_i ($i = \overline{1,5}$), соответственно. Тогда для получения искомого векторного поля \vec{v} требуемых направлений на L_i запишем (4.2) в виде

$$\vec{v} = -\lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \lambda_5 \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4. \tag{5.13}$$

Для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \vec{k}. \tag{5.14}$$

Из утверждений 4.1–4.4 следует, что типы секторов S_i ($i = \overline{1,5}$) векторного поля \vec{v} из (5.13) согласуются с показанными на схеме (а) на рис. 5, если

$$\lambda = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 > 0.$$

Например, полагая $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$, мы удовлетворим последнее неравенство и в (5.13) получим

$$\vec{v} = -\vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + 2\vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + 2\vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4. \tag{5.15}$$

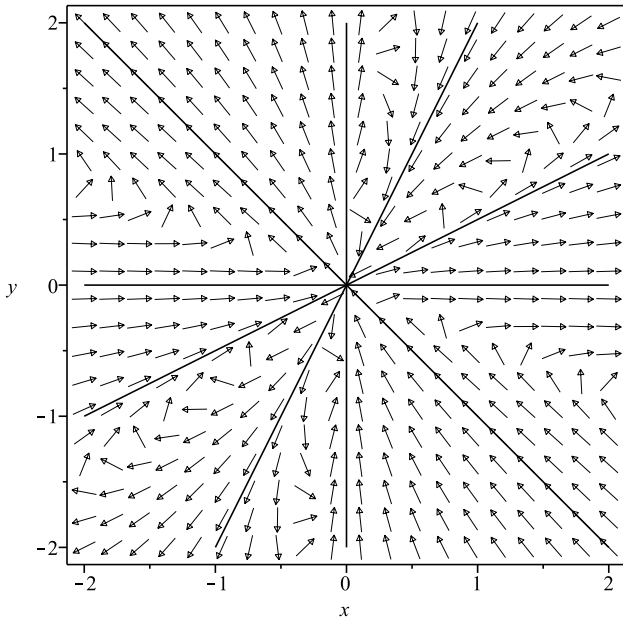


РИС. 6. Векторное поле (5.13)

FIG. 6. Vector field (5.13)

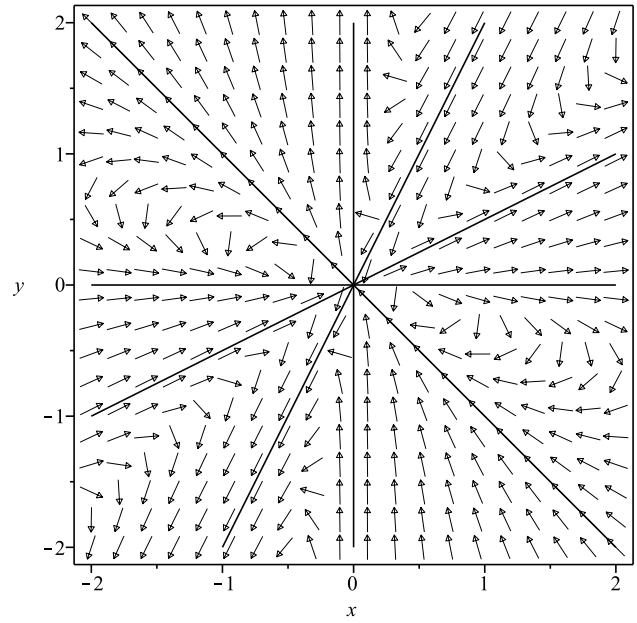


РИС. 7. Векторное поле (5.18)

FIG. 7. Vector field (5.18)

В этом случае

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\vec{k}. \quad (5.16)$$

Проектируя равенство (5.15) на оси x и y , получим компоненты искомого векторного поля:

$$\begin{aligned} P &= 2xy(-x+2y)(-2x+y) + 2x(x+y)(-x+2y)(-2x+y) - \\ &\quad - 2x(x+y)y(-2x+y) - x(x+y)y(-x+2y), \\ Q &= (x+y)y(-x+2y)(-2x+y) - 2xy(-x+2y)(-2x+y) - \\ &\quad - x(x+y)y(-2x+y) - 2x(x+y)y(-x+2y). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Выполним следующий программный код в среде *MAPLE*:

```
with(plots, implicitplot);
P := (x, y) -> 2 * x * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) + 2 * x * (x + y) * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - 2 * x * (x + y) * y * (-2 * x + y) - x * (x + y) * y * (-x + 2 * y);
Q := (x, y) -> (x + y) * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - 2 * x * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - x * (x + y) * y * (-2 * x + y) - 2 * x * (x + y) * y * (-x + 2 * y);
F1 := fieldplot([P, Q], -2.0..2.0, -2.0..2.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + 2 * y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G5 := implicitplot(-2 * x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, G5, axes = boxed, scaling = constrained);
```

и получим графическое представление векторного поля (5.13) (см. рис. 6). \square

Пример 5.4. Чтобы еще раз обратить внимание на соотношение между типами сепаратрис и секторов двух векторных полей одного вида (5.13), для которых векторные произведения $\vec{r} \times \vec{v}$ различаются только знаками (см. замечание 5.1), положим $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$ в (5.13). Таким образом, мы получим векторное поле

$$\vec{v} = -\vec{\tau}_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5 + \vec{\tau}_2\omega_1\omega_3\omega_4\omega_5 + \vec{\tau}_3\omega_1\omega_2\omega_4\omega_5 - \vec{\tau}_4\omega_1\omega_2\omega_3\omega_5 - \vec{\tau}_5\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4 \quad (5.18)$$

с компонентами

$$\begin{aligned}
 P &= xy(-x + 2y)(-2x + y) + x(x + y)(-x + 2y)(-2x + y) - \\
 &\quad - 2x(x + y)y(-2x + y) - x(x + y)y(-x + 2y), \\
 Q &= (x + y)y(-x + 2y)(-2x + y) - xy(-x + 2y)(-2x + y) - \\
 &\quad - x(x + y)y(-2x + y) - 2x(x + y)y(-x + 2y)
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

и векторным произведением

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\vec{k}.
 \tag{5.20}$$

Учитывая направления \vec{v} из (5.18) на L_i ($i = \overline{1, 5}$) и знаки проекции $(\vec{r} \times \vec{v})_z$ в S_i ($i = \overline{1, 5}$), для $\vec{r} \times \vec{v}$ из (5.20) мы можем утверждать, что согласно утверждениям 4.1–4.4 векторное поле (5.18) имеет топологическую структуру, заданную схемой (b) на рис. 5.

Результаты сравнения схем (a) и (b) на рис. 5 (или рис. 6 и 7) согласуются с замечанием 5.1.

5.2. Векторные поля с сепаратрисами смешанных типов. Если $1 \leq s \leq m$ для s в (4.3), то $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ можно выбрать так, что

$$\lambda = \lambda_0\omega_{i_1}\omega_{i_2} \dots \omega_{i_s}$$

в (4.6), где λ_0 — константа, а $\{i_1, \dots, i_s\}$ — s -элементное подмножество m -элементного множества $\{1, 2, \dots, m\}$. В этом случае правая часть в (4.5) содержит множители $\omega_{i_1}^2, \dots, \omega_{i_s}^2$. Следовательно, $(u - u_{i_q})^2$ является множителем числителя $\varphi(u)$ в (4.11), если $\omega_{i_q} \neq x$, а $(w - w_{i_q})^2$ — множитель числителя $\psi(w)$ в (4.11), если $\omega_{i_q} \neq y$, где $q = \overline{1, s}$. Следовательно, производные $\varphi'(u)$ и $\psi'(w)$ меняют знаки при соответствующих $u = u_{i_q}$ и $w = w_{i_q}$ ($q = \overline{1, s}$), соответственно. Таким образом, согласно предложению 4.2, L_{i_1}, \dots, L_{i_s} — сепаратрисы смешанного типа.

5.2.1. Векторные поля с двумя сепаратрисами смешанного типа. Предположим, что векторное поле \vec{v} в (4.2) имеет только две сепаратрисы смешанного типа, лежащие на одной прямой $\omega_q = 0$, $q \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i\bar{\omega}_i, \quad \bar{\omega}_i \equiv \bar{a}_ix + \bar{b}_iy \quad (i = \overline{1, m}),
 \tag{5.21}$$

где $\bar{\lambda}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$ — константы, а $\bar{\lambda}_i > 0$. Тогда искомый вектор (4.2) принимает вид

$$\vec{v} = (-1)^{\alpha_1}\lambda_1\vec{\tau}_1\omega_2 \dots \omega_m\bar{\omega}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\lambda_m\vec{\tau}_m\omega_1 \dots \omega_{m-1}\bar{\omega}_m.$$

В силу (4.4) для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda_0\omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m\vec{k},
 \tag{5.22}$$

если

$$(-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{\omega}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{\omega}_m = \lambda_0\omega_q,$$

где λ_0 — константа. Таким образом, построение искомого векторного поля сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases}
 (-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{a}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{a}_m = \lambda_0a_q, \\
 (-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{b}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{b}_m = \lambda_0b_q
 \end{cases}$$

при положительных $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m$.

Утверждение 5.1. Пусть $M_q(\theta) = K_q(\theta) \cup K_q(-\theta)$, где θ положительно для определенности. Тогда соответствующая сепаратриса L_q является параболической справа (соответственно, слева), если при достаточно малых θ

$$(\lambda_0\omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m)|_{M_q(\theta)} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_q} > 0 \quad (\text{соответственно, } < 0).$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что векторному произведению $\vec{r} \times \vec{v}$ из (5.22) соответствует функция

$$\varphi(u) = -\frac{\lambda_0 b_q^2 (u - u_q)^2 \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq q}}^m b_j (u - u_j)}{P(1, u)} \quad (i = \overline{2, m})$$

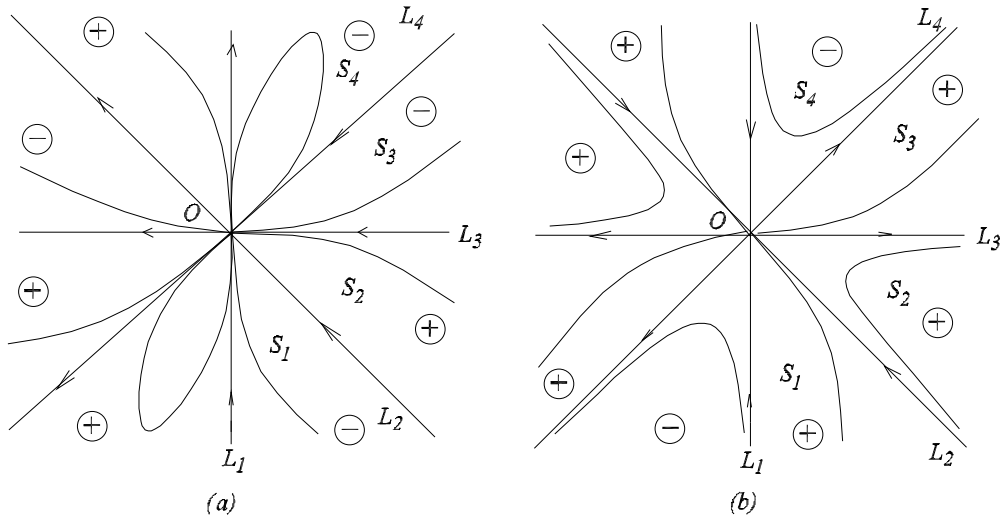


Рис. 8. Векторные поля с сепаратрисами смешанных типов.

FIG. 8. Vector fields with separatrices of mixed types.

в (4.8) и ее производная

$$\varphi'(u) = - \frac{2\lambda_0 b_q^2 (u - u_q) \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq q}}^m b_j (u - u_j) + o(u - u_q)}{P(1, u)}. \quad (5.23)$$

Предположим, что

$$(\lambda_0 \omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m)|_{M_q(\theta)} > 0 \quad \text{и} \quad (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_q} > 0 \quad (5.24)$$

для малых положительных θ . Из (5.23) и (5.24) мы заключаем, что $\varphi'(u) > 0$, если $u \in (u_q - \varepsilon; u_q)$, и $\varphi'(u) < 0$, если $u \in (u_q; u_q + \varepsilon)$ для достаточно малых положительных ε . Следовательно, согласно предложению 4.2, сепаратриса L_q является параболической справа. Те же рассуждения применимы и к случаю с обратными знаками неравенства в (5.24).

Таким же образом можно доказать утверждение 5.1 для $q = 1$, рассматривая $\psi(w)$ в (4.9) в достаточно малой области $M_1(\theta)$.

Пример 5.5. Построим векторное поле с топологической структурой, показанной на схеме (а) рис. 8, с уравнениями сепаратрис

$$\omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \quad \omega_4 \equiv -x + y = 0. \quad (5.25)$$

Решение. Пусть

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{1; 1\} \quad (5.26)$$

— направляющие векторы соответствующих сепаратрис L_i ($i = \overline{1, 4}$). Чтобы обеспечить требуемые направления искомого векторного поля \vec{v} на L_i ($i = \overline{1, 4}$), указанные стрелками на схеме (а) рис. 8, предположим, что

$$\vec{v} = -\bar{\lambda}_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_1 + \bar{\lambda}_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \bar{\omega}_4, \quad (5.27)$$

где

$$\bar{\lambda}_i > 0, \quad \bar{\omega}_i \equiv \bar{a}_i x + \bar{b}_i y, \quad \bar{b}_i > 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (5.28)$$

$$-\frac{\bar{a}_i}{\bar{b}_i} < -\frac{\bar{a}_{i+1}}{\bar{b}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.29)$$

Поскольку для \vec{v} из (5.27)

$$\vec{r} \times \vec{v} = (\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k},$$

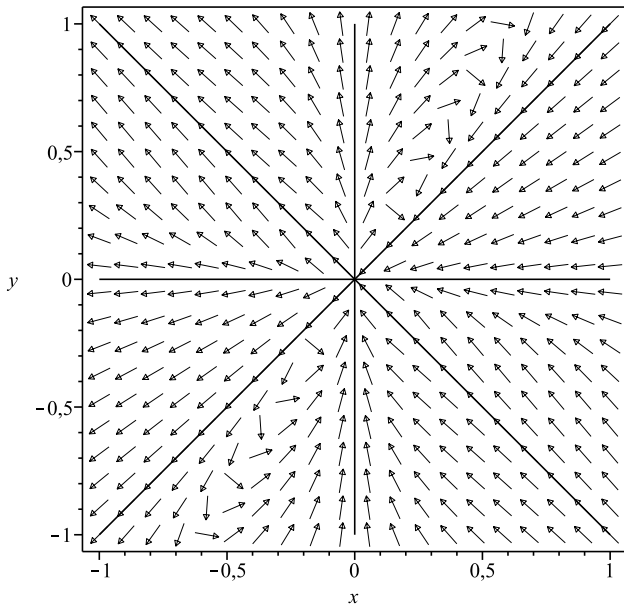


РИС. 9. Векторное поле из примера 5.5.

FIG. 9. Vector field from Example 5.5.

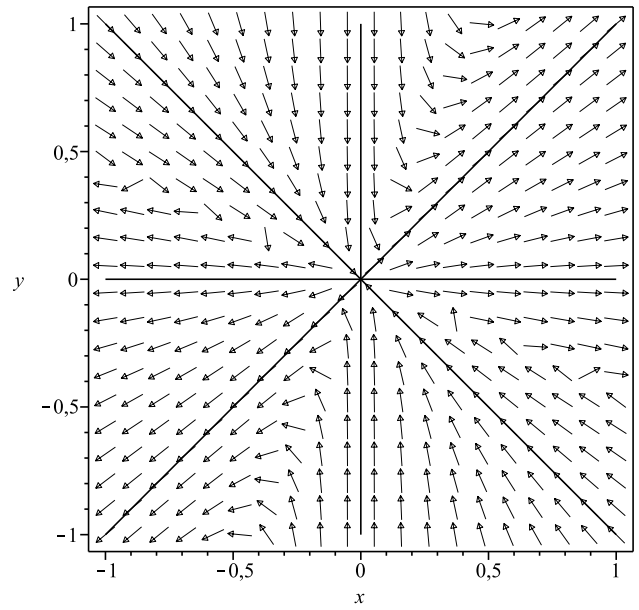


РИС. 10. Векторное поле из примера 5.6.

FIG. 10. Vector field from Example 5.6.

то требования к типам секторов S_i ($i = \overline{1,4}$) выполняются по утверждению 5.1, если

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4 = -\lambda_0 \omega_4, \quad \text{где } \lambda_0 > 0.$$

Заменяя ω_4 и $\bar{\omega}_i$ ($i = \overline{1,4}$) их явными выражениями (5.25) и (5.28) в последнем равенстве, сведем задачу к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 \bar{a}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{a}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{a}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{a}_4 = \lambda_0, \\ \bar{\lambda}_1 \bar{b}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{b}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{b}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{b}_4 = -\lambda_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

для положительных значений $\bar{\lambda}_i$ ($i = \overline{1,4}$). В частности, при

$$\bar{\omega}_1 \equiv 2x + y, \quad \bar{\omega}_2 \equiv x + 2y, \quad \bar{\omega}_3 \equiv -x + 2y, \quad \bar{\omega}_4 \equiv -2x + y, \quad (5.31)$$

удовлетворяющих (5.28) и (5.29), система (5.30) принимает вид

$$\begin{cases} 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 + 2\bar{\lambda}_4 = \lambda_0, \\ \bar{\lambda}_1 - 2\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 = -\lambda_0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы можно записать следующим образом:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3}(3\lambda_0 + 4\bar{\lambda}_3 - 5\bar{\lambda}_4), \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{1}{3}(3\lambda_0 + 5\bar{\lambda}_3 - 4\bar{\lambda}_4). \quad (5.32)$$

Чтобы получить частное решение, положим $\lambda_0 = \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_4 = 1$. Далее, согласно (5.32), $\bar{\lambda}_1 = \frac{2}{3}$, $\bar{\lambda}_2 = \frac{4}{3}$. Подставив такие λ_0 , $\bar{\lambda}_i$ ($i = \overline{1,4}$) и (5.25), (5.26), (5.31) в (5.27), получим компоненты искомого векторного поля:

$$P = \frac{4}{3}xy(y-x)(x+2y) - x(x+y)y(y-x)(2y-x) + x(x+y)y(y-2x),$$

$$Q = \frac{2}{3}(x+y)y(y-x)(2x+y) - \frac{4}{3}xy(y-x)(x+2y) + x(x+y)y(y-2x).$$

Эти компоненты, предварительно умноженные на 3, используем в следующем программном коде:

```

with(plots, implicitplot);
P := (x, y) -> 4 * x * y * (-x + y) * (x + 2 * y) - 3 * x * (x + y) * (-x + y) * (-x + 2 * y) + 3 *
(x + y) * x * y * (-2 * x + y);
Q := (x, y) -> 2 * (x + y) * y * (-x + y) * (2 * x + y) - 4 * x * y * (-x + y) * (x + 2 * y) + 3 * x *
(x + y) * y * (-2 * x + y);
F1 := fieldplot([P, Q], -1.0..1.0, -1.0..1.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, axes = boxed, scaling = constrained);

```

Выполнив этот код, получим векторное поле, показанное на рис. 9. \square

5.2.2. *Векторные поля с четырьмя сепаратрисами смешанного типа.* Пусть начало координат O разбивает две прямые (2.1), скажем, $\omega_q = 0$ и $\omega_k = 0$, на четыре сепаратрисы смешанного типа, а все остальные сепаратрисы — несмешанного типа. Для построения векторного поля с таким набором сепаратрис достаточно, в силу предыдущего, положить в (4.2)

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i(\xi_i x^2 + 2\eta_i xy + \zeta_i y^2),$$

где $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ($i = \overline{1, 4}$) — некоторые константы такие, что

$$\bar{\lambda}_i, \xi_i, \zeta_i > 0, \quad \eta_i^2 - 4\xi_i\zeta_i < 0, \quad \lambda = \lambda_0\omega_q\omega_k \text{ в (4.6).}$$

Пример 5.6. Построим векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (b) на рис. 8, и сепаратрисами, заданными уравнениями (5.25).

Решение. Во-первых, используя направляющие векторы (5.26) сепаратрис, мы представим искомое векторное поле в виде

$$\vec{v} = \bar{\lambda}_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \bar{\omega}_4, \quad (5.33)$$

где

$$\bar{\omega}_i \equiv \xi_i x^2 + 2\eta_i xy + \zeta_i y^2, \quad \bar{\lambda}_i, \xi_i, \zeta_i > 0, \quad \eta_i^2 - 4\xi_i\zeta_i < 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (5.34)$$

а $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ ($i = \overline{1, 4}$) — константы. Знаки, стоящие перед членами в правой части (5.33), выбраны так, что на сепаратрисе L_i ($i = \overline{1, 4}$) вектор \vec{v} имеет то же направление, что и соответствующая стрелка на схеме (b) на рис. 8. Далее с учетом (4.4) получаем

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k}. \quad (5.35)$$

Предположим, что

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4 = \lambda_0 \omega_2 \omega_3, \quad \text{где } \lambda_0 > 0. \quad (5.36)$$

Тогда равенство (5.35) принимает вид

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda_0 \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4 \vec{k},$$

где знак $-\lambda_0 \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4$ внутри каждого из секторов S_i ($i = \overline{1, 4}$) идентичен знаку, отмеченному в этом секторе на схеме (b) рис. 8. Следовательно, согласно утверждениям 4.1–4.4 все эти сектора относятся к требуемым типам.

Чтобы найти $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$, удовлетворяющие (5.36), заменим ω_i и $\bar{\omega}_i$ в (5.35) их выражениями (5.25) и (5.34), соответственно:

$$\begin{aligned} & (\bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_2 \xi_2 - \bar{\lambda}_3 \xi_3 + \bar{\lambda}_4 \xi_4) x^2 + 2(\bar{\lambda}_1 \eta_1 - \bar{\lambda}_2 \eta_2 - \bar{\lambda}_3 \eta_3 + \bar{\lambda}_4 \eta_4) xy + \\ & + (\bar{\lambda}_1 \zeta_1 - \bar{\lambda}_2 \zeta_2 - \bar{\lambda}_3 \zeta_3 + \bar{\lambda}_4 \zeta_4) y^2 = \lambda_0 [a_2 a_3 x^2 + (a_2 b_3 + b_2 a_3) xy + b_2 b_3 y^2]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Приравнявая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях равенства (5.37), получаем

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_2 \xi_2 - \bar{\lambda}_3 \xi_3 + \bar{\lambda}_4 \xi_4 = \lambda_0 a_2 a_3, \\ \bar{\lambda}_1 \eta_1 - \bar{\lambda}_2 \eta_2 - \bar{\lambda}_3 \eta_3 + \bar{\lambda}_4 \eta_4 = \lambda_0 (a_2 b_3 + b_2 a_3) / 2, \\ \bar{\lambda}_1 \zeta_1 - \bar{\lambda}_2 \zeta_2 - \bar{\lambda}_3 \zeta_3 + \bar{\lambda}_4 \zeta_4 = \lambda_0 b_2 b_3. \end{cases}$$

Для упрощения этих равенств положим $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1 = \dots = \bar{\lambda}_4 = 1$ и подставим $a_2 = 1$, $b_2 = 1$, $a_3 = 0$, $b_3 = 1$, согласно (5.25):

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0, \\ \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4 = 1/2, \\ \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4 = 1. \end{cases} \quad (5.38)$$

Частное решение

$$\eta_1 = \eta_4 = 1/2, \quad \eta_2 = \eta_3 = 1/4, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = 1, \quad \zeta_3 = \zeta_4 = 1/2$$

системы (5.38) удовлетворяет всем неравенствам (5.34) и соответствует

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &\equiv x^2 + xy + y^2, & \bar{\omega}_2 &\equiv x^2 + 0,5xy + 0,5y^2, \\ \bar{\omega}_3 &\equiv x^2 + 0,5xy + 0,5y^2, & \bar{\omega}_4 &\equiv x^2 + xy + y^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Подставляя (5.25), (5.26), (5.39) и $\bar{\lambda}_i = 1$ ($i = \overline{0,4}$) в (5.33), получим искомое векторное поле \vec{v} с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -xy(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) - \\ &\quad - x(x+y)(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) + x(x+y)y(x^2 + xy + y^2), \\ Q &= -(x+y)y(y-x)(x^2 + xy + y^2) + \\ &\quad + xy(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) + x(x+y)y(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Графическое изображение этого векторного поля на рис. 10 получается выполнением программного кода из примера 5.5 при условии, что в этом коде P и Q заменены их выражениями из (5.40). \square

Замечание 5.2. Если $\vec{r} \times \vec{v} = \prod_{i=1}^m \omega_i^{\alpha_i}$ и $\alpha_i > 1$, то соответствующая строка $\omega_i = 0$ разбивается, вообще говоря, на α_i сепаратрис при сколь угодно малом возмущении компонент векторного поля. Таким образом, все сепаратрисы смешанного типа являются неустойчивыми элементами фазовых портретов и поэтому представляют меньший интерес для приложений, чем сепаратрисы несмешанного типа, соответствующие $\alpha_i = 1$.

Замечание 5.3. Начало координат O является неустойчивой критической точкой для любого векторного поля рассматриваемого типа, если его степень сингулярности $d \geq 2$. В этом случае даже малые гладкие возмущения компонент векторного поля расщепляют O на критические точки меньших степеней сингулярности (см. [15]). Все эти новые критические точки находятся в произвольно малой окрестности O , если возмущения достаточно малы. Это позволяет использовать результаты настоящей работы для построения математических моделей динамических систем при условии, что их свойства могут быть связаны со свойствами векторных полей, перечисленными в разделе 2. Реализация такой возможности демонстрируется в примере 6.1 в разделе 6.

6. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММИРУЕМЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЧАСТИЦЫ НА ПЛОСКОСТИ

Предположим, что целью управляемого плоского движения частицы является ее движение со скоростями, образующими векторное поле $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ типа, описанного в разделе 2. Тогда соответствующие уравнения (1.1) можно рассматривать как параметры программируемого движения частицы и использовать для нахождения управляющих сил, реализующих это движение. Например, из уравнений

$$\frac{d}{dt}[\dot{x} - P(x, y)] = -\mu[\dot{x} - P(x, y)], \quad \frac{d}{dt}[\dot{y} - Q(x, y)] = -\mu[\dot{y} - Q(x, y)], \quad (6.1)$$

где μ — произвольная положительная функция, следует экспоненциальная сходимости \dot{x} и \dot{y} к их программным значениям P и Q при $t \rightarrow +\infty$. Из (6.1) мы получаем компоненты ускорения $\ddot{\vec{r}}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left[\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \mu \right] \dot{x} + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \dot{y} + \mu P(x, y), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \left[\frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} - \mu \right] \dot{y} + \mu Q(x, y).\end{aligned}\quad (6.2)$$

Подставляя этот вектор в уравнение динамики

$$M\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \quad (6.3)$$

частицы массы M , мы находим искомую управляющую силу $F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

Пример 6.1. Предположим, что частица единичной массы начинает свое движение в плоскости Oxy при следующих начальных условиях:

$$x(0) = x_{0i}, \quad y(0) = y_{0i}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (6.4)$$

где (x_{0i}, y_{0i}) — точка соответствующего сектора S_i ($i = 1, 2, 3, 4$) фазового портрета, приведенного в примере 5.1 (схема (а) на рис. 2). Найдем силу, действующую на частицу так, чтобы ее скорость образовывала векторное поле с тем же набором сепаратрис и топологической структурой, что и в примере 5.1.

Решение. В этих условиях векторное поле (5.5) можно рассматривать как поле программируемых скоростей частиц. Поэтому замена P и Q в (6.2) их выражениями из (5.6) дает компоненты искомой силы, поскольку $M = 1$:

$$\begin{aligned}F_x &= (6xy - 2y^2 + 3x^2 - \mu)\dot{x} + (3x^2 - 4xy)\dot{y} - \mu(3x^2y + 2xy^2 - x^3), \\ F_y &= 3y^2\dot{x} + (-3y^2 + 6xy - \mu)\dot{y} - \mu(y^3 - 3xy^2).\end{aligned}\quad (6.5)$$

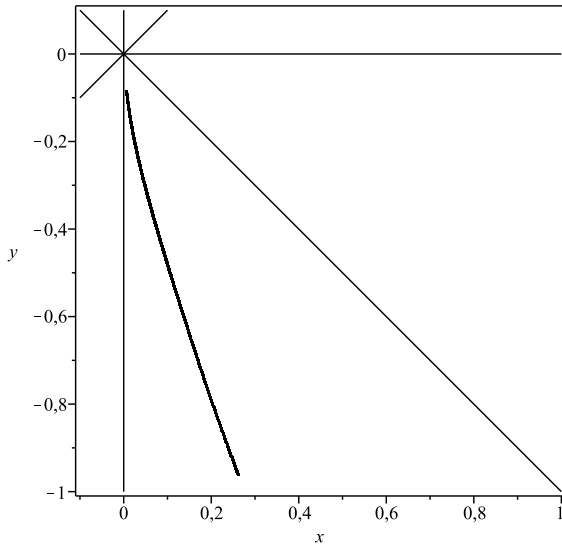
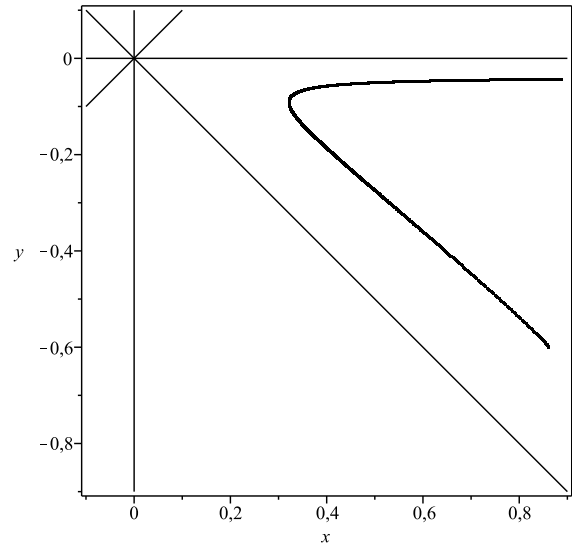
Для проверки этого решения можно взять некоторую точку (x_{0i}, y_{0i}) в каждом из секторов S_i ($i = \overline{1, 4}$) в качестве начального положения частицы и проинтегрировать уравнения (6.5) численно, комбинируя процедуру `Iter`

```
Iter := proc(x, y, n :: integer, m, h)
local Itv, Itc, i, w1, w2, u, v; Itv := array(1..n, 1..2); Itc := array(1..n, 1..2);
Itv[1, 1] := 0; Itv[1, 2] := 0; Itc[1, 1] := x; Itc[1, 2] := y;
w1 := -m * x * (3 * x * y + 2 * y^2 - x^2); w2 := -m * y^2 * (y - 3 * x);
for i from 2 to n do
Itv[i, 1] := Itv[i - 1, 1] + w1 * h; Itv[i, 2] := Itv[i - 1, 2] + w2 * h;
Itc[i, 1] := Itc[i - 1, 1] + Itv[i - 1, 1] * h + (1/2) * w1 * h^2;
Itc[i, 2] := Itc[i - 1, 2] + Itv[i - 1, 2] * h + (1/2) * w2 * h^2;
u := Itc[i, 1]; v := Itc[i, 2];
w1 := (6 * u * v - 2 * v^2 + 3 * u^2 - m) * Itv[i, 1] + (3 * u^2 - 4 * u * v) * Itv[i, 2] - m * (-3 *
u^2 * v + 2 * u * v^2 - u^3);
w2 := 3 * v^2 * Itv[i, 1] + (-3 * v^2 + 6 * u * v - m) * Itv[i, 2] - m * (v^3 - 3 * u * v^2) end do;
eval(Itc);
convert(Itc, matrix)
end proc;
```

с функцией `pointplot` пакета *MAPLE*, т. е.:

```
Ai := Iter(x0i, y0i, n, m, h);
with(plots);
pointplot(Ai, symbol = point);
```

В частности:

Рис. 11. Кривая, исходящая из M_{01} FIG. 11. Curve emanating from M_{01} Рис. 12. Кривая, исходящая из M_{02} FIG. 12. Curve emanating from M_{02}

— для точки $M_{01}(0,26; -0,96)$ в S_1 , выполнив код

```
A1 := Iter(.26, -.96, 5650, 2, 0.1e - 1);
with(plots); pointplot(A1, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 11;

— для точки $M_{02}(0,86; -0,6)$ в S_2 , выполнив код

```
A2 := Iter(.86, -.6, 1785, 2, 0.1e - 1);
with(plots); pointplot(A2, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 12;

— для точки $M_{03}(0,0086; 0,005)$ в S_3 , выполнив код

```
A3 := Iter(0.86e - 2, 0.5e - 2, 17150, 10, .2);
with(plots); pointplot(A3, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 13;

— для точки $M_{04}(0,3; 0,42)$ в S_4 , выполнив код

```
A4 := Iter(0.3, 0.42, 19650, 2, 0.01);
with(plots); pointplot(A4, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 14.

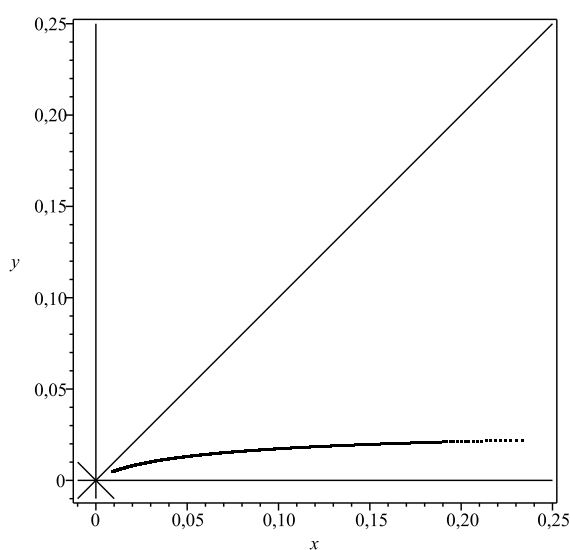
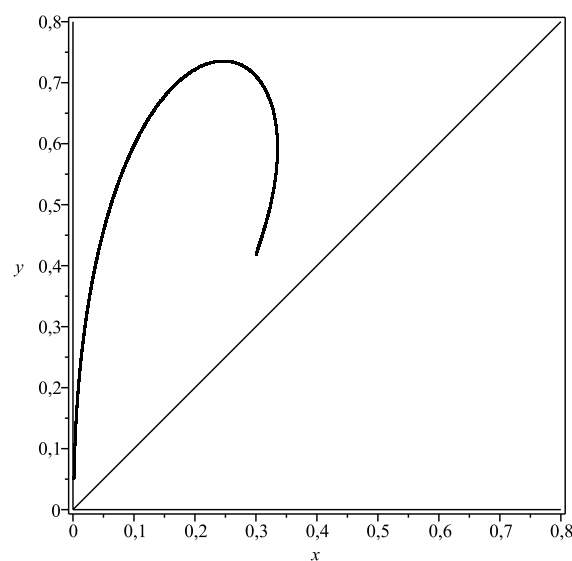
Полученные таким образом кривые, их форма и расположение относительно сепаратрис согласуются с заданным поведением управляемой частицы в секторах S_i ($i = \overline{1,4}$). \square

Замечание 6.1. Пусть в классической задаче двух тел одно тело является управляемым спутником с массой M , пренебрежимо малой по сравнению с массой другого тела, которое является точкой, находящейся в начале координат O инерциальной системы отсчета Oxy . Если программа относительного движения спутника задана в виде векторного поля скорости типа, указанного в разделе 2, то разница между уравнением (6.3) и уравнением относительного движения двух тел (см. [16, пункт 8.2])

$$M\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{F}_c \quad (6.6)$$

дает управляющую силу

$$\vec{F}_c = \vec{F} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (6.7)$$

Рис. 13. Кривая, исходящая из M_{03} FIG. 13. Curve emanating from M_{03} Рис. 14. Кривая, исходящая из M_{04} FIG. 14. Curve emanating from M_{04}

Таким образом, объединяя уравнения (6.6) и (6.7), получим математическую модель управляемого движения спутника в плоскости Oxy . Характер этого движения зависит от типа сектора, в котором находится спутник.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альмухамедов М. И. Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1963. — № 4. — С. 3–6.
2. Альмухамедов М. И. О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1965. — № 1. — С. 12–16.
3. Волков С. В. Управление квазилинейными динамическими системами с двумя степенями свободы // Докл. РАН. — 2002. — 384, № 1. — С. 43–46.
4. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. — М.: Мир, 1984.
5. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
6. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. мат. мех. — 1952. — 16, № 6. — С. 659–670.
7. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
8. Сулов Г. К. О силовой функции, допускающей данные частные интегралы // Докт. дисс. — Киев: Киевский ун-т, 1890.
9. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Qualitative theory of second-order dynamic systems on a plane. — New York: John Wiley & Sons, 1973.
10. Argémi J. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1968. — 79. — С. 35–69.
11. Bertrand M. J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // Comp. Rend. Acad. Sci. — 1873. — 77. — С. 849–853.
12. Frommer M. Die integralkurven einer gervonlichen differentialgleichung erster ordnung in der umgebung rationaler unbestimmtheitsstellen // Math. Ann. — 1928. — 99. — С. 222–272.
13. Jaumes G. Synthèse d'un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné // Int. J. Nonlinear Mech. — 1972. — 7, № 6. — С. 597–608.
14. Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. — London, 1687.
15. Schecter S., Singer M. F. Separatrices at singular points of planar vector fields // Acta Math. — 1980. — 145. — С. 47–78.
16. Shaub H., Junkins L. J. Analytical mechanics and aerospace systems. — <https://www.fisica.net/mecanicaclassica/Analytical%20Mechanics%20of%20Aerospace%20Systems.pdf>, 2002.
17. Sverdlove R. Inverse problems for dynamical systems // J. Differ. Equ. — 1981. — 42, № 1. — С. 72–105.
18. Volkov S. V. Modelling of the controlled motion of a point on a plane // J. Appl. Math. Mech. — 2005. — 69. — С. 173–182.

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595

UDC 517.911+517.925.54+517.925.71

Construction of the planar vector fields with nonsimple critical point of prescribed topological structure

S. V. Volkov

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

The problem of constructing n -linear ($n \geq 2$) plane vector fields with isolated critical point and given separatrices of prescribed types is considered. Such constructions are based on the use of vector algebra, the qualitative theory of second-order dynamic systems and classical methods for investigating their critical points. This problem is essentially an inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations, and its solution can be used to synthesize mathematical models of controlled dynamical systems of various physical nature.

Keywords: vector field, ODE, phase portrait, topological structure, critical point, separatrix, inverse problem of qualitative theory of ODE, mathematical model, programmed motion, controlled particle

For citation: S. V. Volkov, "Construction of the planar vector fields with nonsimple critical point of prescribed topological structure," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 575–595. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595>

REFERENCES

1. M. I. Almukhamedov, "Obratnaya zadacha kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy" [An inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1963, No. 4, 3–6 (in Russian).
2. M. I. Almukhamedov, "O konstruirovani differentsial'nogo uravneniya, imeyushchego svoimi predel'nymi tsiklami zadannye krivye" [On the construction of a differential equation having given curves as limit cycles], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1965, No. 1, 12–16 (in Russian).
3. S. V. Volkov, "Upravlenie kvazilineynymi dinamicheskimi sistemami s dvumya stepenyami svobody" [Control of the quasi-linear dynamical systems with two degrees of freedom], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, 384, No. 1, 43–46 (in Russian).
4. A. S. Galiullin, *Obratnye zadachi dinamiki* [Inverse Problems of Dynamics], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
5. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Problems of Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. N. P. Erugin, "Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nyu krivuyu" [Construction of the totality of systems of differential equations that have a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, 16, No. 6, 659–670 (in Russian).
7. I. V. Meshcherskiy, *Raboty po mekhanike tel peremennoy massy* [Researches on the Mechanics of Bodies of Variable Mass], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
8. G. K. Suslov, *O silovoy funktsii, dopuskayushchey dannye chastnye integraly* [On the Force Function, Admitting Given Particular Integrals], Doctoral Thesis, Kiev Univ., Kiev, 1890.



9. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems on a Plane*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
10. J. Argémi, “Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans \mathbb{R}^2 ,” *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1968, **79**, 35–69.
11. M. J. Bertrand, “Théorème relatif au mouvement d’un point attiré vers un centre fixe,” *Comp. Rend. Acad. Sci.*, 1873, **77**, 849–853.
12. M. Frommer, “Die integralkurven einer gewissen differentialgleichung erster ordnung in der umgebung rationaler unbestimmtheitsstellen,” *Math. Ann.*, 1928, **99**, 222–272.
13. G. Jaumes, “Synthèse d’un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1972, **7**, No. 6, 597–608.
14. I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687.
15. S. Schecter and M. F. Singer, “Separatrices at singular points of planar vector fields,” *Acta Math.*, 1980, **145**, 47–78.
16. H. Shaub and L. J. Junkins, *Analytical mechanics and aerospace systems*, <https://www.fisica.net/mecanicaclassica/Analytical%20Mechanics%20of%20Aerospace%20Systems.pdf>, 2002.
17. R. Sverdlove, “Inverse problems for dynamical systems,” *J. Differ. Equ.*, 1981, **42**, No. 1, 72–105.
18. S. V. Volkov, “Modelling of the controlled motion of a point on a plane,” *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, **69**, 173–182.

S. V. Volkov

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: volkov-sv@rudn.ru