Современная математика. Фундаментальные направления. Том 68, № 4 (2022). С. 564–574
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574
УДК 517.957

СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ РЕАКЦИЕЙ-ДИФФУЗИЕЙ

Л. Верон

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция

Мы изучаем существование решений задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= \mu \quad \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$

в ограниченной области Ω, где $p > 1$, $1 < q < 2$, $M > 0$, μ — неотрицательная мера Радона в $\partial\Omega$, а также связанной с ней задачи с изолированной граничной особенностью в точке $a \in \partial\Omega$,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Трудность заключается в оппозиции двух нелинейных членов, имеющих разную природу. Существование решений задачи (1) достигается при емкостном условии

$$\mu(K) \leqslant c \min\left\{ cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}, cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'} \right\} \quad \text{для всех компактов } K \subset \partial\Omega.$$

Задача (2) зависит от нескольких критических условий на p и q, а также от соотношения величин q и $\dfrac{2p}{p+1}$.

Ключевые слова: уравнение реакции-диффузии, сингулярная краевая задача, задача с данными-мерами, задача с граничной особенностью

Для цитирования: *Л. Верон.* Сингулярные краевые задачи для квазилинейных уравнений со смешанной реакцией-диффузией// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **68**, № 4. С. 564–574. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область в C^2, $p > 1$, $1 < q < 2$ и $M > 0$. Мы получим некоторые результаты, касающиеся сингулярного граничного поведения положительных функций, удовлетворяющих в Ω уравнению

$$\mathcal{L}_{p,q,M} u := -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.1}$$

Основная характеристика оператора $\mathcal{L}_{p,q,M}$ состоит в том, что в нем проявляется конкуренция между членом поглощения u^p и членом-источником $|\nabla u|^q$, и эти члены имеют разную природу. Следствием этой конкуренции является возникновение богатого разнообразия явлений. Основная часть результатов была получена в сотрудничестве с M. F. Bidaut-Véron и M. Garcia-Huidobro [7]. В нашем исследовании главное внимание уделяется двум направлениям:

1. существование решений с мерой в качестве граничных данных;
2. описание решений с изолированной граничной особенностью.

Если $q = \dfrac{2p}{p+1}$, то уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразований масштабирования T_ℓ, $\ell > 0$ определяемых равенством

$$T_\ell[u](x) = \ell^{\frac{2}{p-1}} u(\ell x). \tag{1.2}$$

Если $1 < q < \dfrac{2p}{p+1}$, то член поглощения является доминирующим, и поведение сингулярных решений моделируется *уравнением Эмдена—Фаулера*

$$-\Delta u + u^p = 0. \tag{1.3}$$

Если $q > \dfrac{2p}{p+1}$, то член-источник является доминирующим, и поведение сингулярных решений моделируется *уравнением эйконала*

$$u^p - M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.4}$$

Другим уравнением, которое играет важную роль, является *уравнение Риккатти*

$$-\Delta u - M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.5}$$

Если $q = \dfrac{2p}{p+1}$, то ни один из членов реакции не является доминирующим, и определяющим становится значение M.

Важным инструментом построения решений является существование естественных суб- и суперрешений, которые естественным образом упорядочены, если они имеют одинаковые граничные данные: уравнения Эмдена—Фаулера (соответственно, уравнение Риккатти) дает субрешение (соответственно, суперрешение) для уравнения (1.1).

Задачи о краевых особенностях и краевые задачи с данными-мерами для соответствующих операторов изучались в последнее время, но с другими соотношениеми между членами реакций. В следующем уравнении, изученном в [16], два эффекта реакции суммируются, даже если они имеют разную природу:

$$-\Delta u + u^p + M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.6}$$

В этом случае один термин может стать доминирующим, не отменяя действие другого. Уравнения только с одним членом поглощения, u^p или $M|\nabla u|^q$, дают естественные суперрешения.

В уравнении

$$-\Delta u - u^p - M|\nabla u|^q = 0, \tag{1.7}$$

оба члена реакции являются членами-источниками. Уравнения только с одним членом-источником, u^p или $M|\nabla u|^q$, дают естественные субрешения. В [5] проводится анализ задачи, представляющий некоторую аналогию с настоящей работой.

Сингулярная краевая задача для в определенной степени похожего уравнения

$$-\Delta u - u^p + M|\nabla u|^q = 0 \tag{1.8}$$

изучена в [10]. В нем два члена реакции также находятся в оппозиции друг другу: ситуация похожа на ту, которая исследуется нами, но эта оппозиция дает существенно иной эффект.

2. Устранимые граничные особенности

Предположим, что Ω — ограниченная область в C^2 и $0 \in \partial\Omega$. Положим $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $p \geqslant \dfrac{N+1}{N-1}$, $M > 0$, *и пусть* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega} \setminus \{0\})$ — *неотрицательная функция, которая удовлетворяет условиям*

$$\mathcal{L}_{p,q,M} u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

(i) $p = \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $1 < q < \dfrac{N+1}{N}$;

(ii) $p > \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $1 < q \leqslant \dfrac{2p}{p+1}$.

Тогда $u \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$, $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega)$ *и*

$$\int\limits_\Omega (-u\Delta\zeta + (u^p - M|\nabla u|^q)\zeta)\,dx = 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{X}(\Omega), \tag{2.2}$$

где

$$\mathbb{X}(\Omega) := \{\zeta \in C^1(\overline{\Omega}) : \zeta = 0 \text{ на } \partial\Omega,\ \Delta\zeta \in L^\infty(\Omega)\}. \tag{2.3}$$

Кроме того, если выполнено (i) *или одно из следующих условий*:

(iii) $p > \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $1 < q < \dfrac{2p}{p+1}$;

(iv) $p > \dfrac{N+1}{N-1}$, $q = \dfrac{2p}{p+1}$ *и*

$$M < m^{**} := (p+1)\left(\frac{(N-1)p-(N+1)}{2p}\right)^{\frac{p}{p+1}}, \tag{2.4}$$

тогда $u = 0$.

Замечание. Заметим, что в случае (i) существуют положительные функции, удовлетворяющие условиям (2.1) с особенностью, сосредоточенной в 0. Эта особенность не обнаруживается в смысле распределений. То же самое происходит для решений задачи

$$-\Delta u = u^p \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \{0\}, \tag{2.5}$$

когда $\dfrac{N+1}{N-1} \leqslant p < \dfrac{N+1}{N-3}$, см. [9].

Доказательство теоремы 2.1.

Шаг 1: *априорная оценка.* Если $M \geqslant 0$, $1 < q < \min\{p, 2\}$ и функция $u \geqslant 0$ удовлетворяет условиям (2.1), тогда мы сначала докажем с помощью модификации метода Келлера—Оссермана, что при некотором $c_1 > 0$

$$u(x) \leqslant c_1 \max\left\{M^{\frac{1}{p-q}}|x|^{-\frac{q}{p-q}}, |x|^{-\frac{2}{p-1}}\right\} \quad \text{для всех } x \in \Omega. \tag{2.6}$$

Как следствие, используя свойства регулярности эллиптических уравнений (см., например, [14]) и преобразование масштабирования T_ℓ, что возможно при $q \leqslant \dfrac{2p}{p+1}$, получаем оценку градиента

$$|\nabla u(x)| \leqslant c_2 \max\left\{|x|^{-\frac{p}{p-q}}, |x|^{-\frac{p+1}{p-1}}\right\} \quad \text{для всех } x \in \Omega \cap B_1. \tag{2.7}$$

Шаг 2: *замена неизвестной функции.* Положим $u = v^b$ при $0 < b \leqslant 1$, тогда v удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v - (b-1)\frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{1}{b}v^{(p-1)b+1} = Mb^{q-1}v^{(b-1)(q-1)}|\nabla v|^q. \tag{2.8}$$

Задача состоит в том, чтобы избавиться от слагаемого в правой части. Это делается следующим образом: при $\epsilon > 0$ в силу неравенства Гельдера имеем

$$v^{(b-1)(q-1)}|\nabla v|^q \leqslant \frac{q\epsilon^{\frac{2}{q}}}{2}\frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{2-q}{2\epsilon^{\frac{2}{2-q}}}v^{\frac{(2b-1)q-2(b-1)}{2-q}}.$$

Тогда из уравнения (2.8) получаем

$$-\Delta v + \left(1 - b - M\frac{qb^{q-1}\epsilon^{\frac{2}{q}}}{2}\right)\frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{1}{b}v^{(p-1)b+1} - Mb^{q-1}\frac{2-q}{2\epsilon^{\frac{2}{2-q}}}v^{\frac{(2b-1)q-2(b-1)}{2-q}} \leqslant 0. \tag{2.9}$$

Теперь возникает вопрос, как управлять показателем степени v, чтобы поглощение стало преобладающим при больших v. Для этого необходимо

$$\frac{(2b-1)q-2(b-1)}{2-q} \leqslant (p-1)b+1 \Longleftrightarrow q \leqslant \frac{2p}{p+1}.$$

Отметим, что это условие не зависит от b. Зафиксируем

$$b = \frac{2}{(N-1)(p-1)} \Longleftrightarrow (p-1)b + 1 = \frac{N+1}{N-1},$$

что является порогом устранимости изолированных граничных особенностей решений уравнения Эмдена—Фаулера. При таком выборе остается только проконтролировать знак коэффициента при $\dfrac{|\nabla v|^2}{v}$.

(i) Если $p > \dfrac{N+1}{N-1}$, $q < \dfrac{2p}{p+1}$, то выберем $\epsilon = \left(\dfrac{2(1-b)}{Mqb^{q-1}}\right)^{\frac{q}{2}}$. Тогда (2.9) преобразуется в виду

$$-\Delta v + \frac{(N-1)(p-1)}{4} v^{\frac{N+1}{N-1}} \leqslant A. \tag{2.10}$$

Согласно результату Гмиры—Верона [15], v остается ограниченным, и утверждение следует из соответствующего выбора пробных функций и стандартных результатов о регулярности [14].

(ii) Если $p > \dfrac{N+1}{N-1}$, $q = \dfrac{2p}{p+1}$, то мы выбираем такое же b, но более тонко подбираем ϵ, учитывая M.

(iii) Если $p = \dfrac{N+1}{N-1}$, $q < \dfrac{N+1}{N}$, то используем (2.6) для улучшения оценки (2.7), и затем с помощью итераций выводим ограниченность u. Это подробно описано в [7]. $\square$

Теорему 2.1 можно распространить на более общие граничные сингулярные множества.

Теорема 2.2. *Предположим, что* $p > \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $\dfrac{N+1}{N-1} < r < p$. *Пусть выполнено одно из следующих условий*:

(i) $q = \dfrac{2p}{p+1}$,

$$M < m_r^{**} := (p+1)\left(\frac{p-r}{p(r-1)}\right)^{\frac{p}{p+1}}; \tag{2.11}$$

(ii) $1 < q < \dfrac{2p}{p+1}$, $r \leqslant 3$, M — *произвольное.*

Тогда если $K \subset \partial\Omega$ — *компактное множество такое, что* $cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{r},r'}(K) = 0$, *то любое решение* u *задачи*

$$\mathcal{L}_{p,q,M} u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus K \tag{2.12}$$

тождественно равно 0.

Доказательство. Принцип доказательства в определенной степени аналогичен: положим $u = v^b$ при некотором $b \in (0,1)$ и сведем (2.10) к неравенству типа

$$-\Delta v + C_1 v^r \leqslant C_2 \text{ в } \Omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus K, \tag{2.13}$$

где $C_1, C_2 > 0$. Поскольку $cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{r},r'}(K) = 0$, по теореме об устранимости (см. [18]) v ограничено сверху, и результат легко получается при подходящем выборе пробных функций. $\square$

3. Задачи с данными-мерами

Естественным пространством пробных функций для изучения краевых задач является пространство $\mathbb{X}(\Omega)$, определенное формулой (2.3).

Определение 3.1. Пусть $\mu \in \mathfrak{M}(\partial\Omega)$ и $p, q \geqslant 1$. Борелевская функция u, определенная в Ω, является *слабым решением* задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u + |u|^{p-1}u - M|\nabla u|^q = 0 &\qquad \text{в } \Omega, \\ u = \mu &\qquad \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

если $u \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$, $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega} \left(-u\Delta\zeta + (|u|^{p-1}u - M|\nabla u|^q)\zeta\right) dx = -\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathbf{n}} d\mu \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{X}(\Omega). \tag{3.2}$$

Следующие две задачи, в которых μ является мерой Радона на $\partial\Omega$, естественным образом связаны с задачей (3.1).

1. Уравнение Эмдена—Фаулера:

$$\begin{aligned} -\Delta v + |v|^{p-1}v &= 0 && \text{в } \Omega, \\ v &= \mu && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

2. Уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} -\Delta w - M|\nabla w|^q &= 0 && \text{в } \Omega, \\ w &= \mu && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В [18] доказано, что задача (3.3) допускает решение, обязательно единственное, тогда и только тогда, когда

$$\textit{для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega : cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}(E) = 0 \implies |\mu|(E) = 0. \tag{3.5}$$

Относительно задачи (3.4) в [8] доказано, что она имеет решение, если для некоторого $C > 0$ μ удовлетворяет условию

$$\textit{для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega : |\mu|(E) \leqslant C cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'}(E). \tag{3.6}$$

Комбинируя эти два результата, мы получим следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $p > 1$, $1 < q < 2$, μ — неотрицательная мера Радона на $\partial\Omega$, которая при некотором $C > 0$ удовлетворяет*

$$\mu(E) \leqslant C \min\left\{cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'}(E), cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}(E)\right\} \textit{ для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega. \tag{3.7}$$

Тогда существует $c_0 > 0$ такое, что для любого $0 < c \leqslant c_0$ существует неотрицательное слабое решение (3.2) с граничными данными $c\mu$. Кроме того, граничным следом u является мера $c\mu$.

Замечание. Никаких условий на $cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}$ (соответственно, на $cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'}$) не требуется, если $1 < p < \dfrac{N+1}{N-1}$ (соответственно, $1 < q < \dfrac{N+1}{N}$) в силу теоремы вложения Соболева—Морри.

Сокращенное доказательство. Поскольку положительное решение v_μ уравнения (3.3) является субрешением $\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0$ и меньше любого решения w_μ уравнения (3.4), которое является суперрешением для $\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0$, то из [11] следует, что существует функция $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, которая удовлетворяет $v_\mu \leqslant u \leqslant w_\mu$ в Ω и

$$\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3.8}$$

Функция u принадлежит C^1. Следовательно, по принципу сэндвича,

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\rho(x)=\delta} w_\mu Z dS(x) = \int\limits_{\partial\Omega} Z d\mu = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\rho(x)=\delta} v_\mu Z dS(x) = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{\rho(x)=\delta} u Z dS(x) \tag{3.9}$$

для всех $Z \in C(\overline{\Omega})$, $Z \geqslant 0$. Ограничение $Z \geqslant 0$ можно снять, и это означает, что u допускает граничный след в динамическом определении граничного следа [19]. Поэтому мы обозначим $u = u_\mu$. Чтобы утверждать, что u_μ является слабым решением в смысле определения 3.1, нам потребуются некоторые оценки. Обозначим через $\mathbb{P}_\Omega[.]$ оператор Пуассона в Ω.

Оценка решений: выполняется

$$v_\mu \leqslant \mathbb{P}_\Omega[\mu] \leqslant w_\mu \leqslant c\mathbb{P}_\Omega[\mu],$$

(см. [8]) и

$$0 \leqslant v_\mu \leqslant u_\mu \leqslant w_\mu \leqslant c\mathbb{P}_\Omega[\mu].$$

Если μ удовлетворяет условию (3.6), то существует $C' > 0$ такое, что при $0 < c \leqslant C'$ существует неотрицательное решение $z \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$ задачи

$$\begin{aligned} -\Delta z - z^p &= 0 && \text{в } \Omega, \\ z &= c\mu && \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

(см. [2]). Оно очевидно удовлетворяет $c\mathbb{P}_\Omega[\mu] \leqslant z$. Тогда $w_\mu \in L^p_\rho(\Omega) \Longrightarrow u_\mu \in L^p_\rho(\Omega)$.

Для градиента положим $\phi = \mathbb{G}_\Omega[u^p_\mu]$, тогда $\phi \geqslant 0$ и

$$-\Delta(u_\mu + \phi) = |\nabla u_\mu|^q \geqslant 0.$$

По теореме Дуба

$$-\Delta(u_\mu + \phi) \in L^1_\rho(\Omega) \Longrightarrow |\nabla u_\mu| \in L^q_\rho(\Omega).$$

Так как $u_\mu \in L^p_\rho(\Omega)$, $|\nabla u_\mu| \in L^q_\rho(\Omega)$ и u_μ имеет граничный след μ, то нетрудно доказать, что это слабое решение. □

Условие (3.7) в большинстве случаев можно упростить, используя классические результаты о бесселевых емкостях [1], которые дают в общем виде

$$cap^{\partial\Omega}_{\beta,b}(E) \leqslant c\left(cap^{\partial\Omega}_{\alpha,a}(E)\right)^\theta \text{ для всех борелевских множеств } E \subset \partial\Omega$$

при подходящих условиях, включающих $a, p > 1$, $\alpha, \beta > 0$ и $\theta \geqslant 1$. Докажем два следствия.

Следствие 3.1. *Предположим, что* $p \geqslant \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $\dfrac{2p}{p+1} \leqslant q < 2$. *Если* μ *— неотрицательная мера Радона на* $\partial\Omega$, *удовлетворяющая при некотором* $C > 0$ *условию*

$$\mu(E) \leqslant C cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'}(E) \text{ для всех борелевских множеств } E \subset \partial\Omega, \tag{3.11}$$

то выполняется утверждение теоремы 3.1.

Следствие 3.2. *Предположим, что* $\dfrac{N+1}{N} \leqslant q < \dfrac{2p}{p+1}$. *Если* μ *— неотрицательная мера Радона на* $\partial\Omega$ *такая, что при некоторой константе* $C > 0$ *для любого борелевского множества справедливо* $E \subset \partial\Omega$,

$$\mu(E) \leqslant C cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}(E), \tag{3.12}$$

то выполняется утверждение теоремы 3.1.

Замечание. Отметим, что в силу следствий 3.1, 3.2 и замечания после теоремы 3.1 мы покрываем весь диапазон $(p, q) \in (1, \infty) \times (1, 2)$ и показываем, что используется единственная бесселева емкость.

4. Отделимые решения

Отделимые решения уравнения (1.1) выражаются в сферических координатах $x = (r, \sigma)$ в $\mathbb{R}^N \sim \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$ в виде

$$u(x) = u(r, s) = r^{-\alpha}\omega(s).$$

Для уравнения (1.1) существование таких решений в конусе $C_S := (0, \infty) \times S$, порожденном сферической областью $S \subseteq S^{N-1}$, накладывает условия $q = \dfrac{2p}{p+1}$ и $\alpha = \dfrac{2}{p-1}$. Тогда ω удовлетворяет

$$\mathcal{S}_{p,M}\omega := -\Delta'\omega + \alpha(N-2-\alpha)\omega + |\omega|^{p-1}\omega - M\left(\alpha^2\omega^2 + |\nabla'\omega|^2\right)^{\frac{p}{p+1}} = 0 \quad \text{в } S, \tag{4.1}$$

где Δ' — оператор Лапласа—Бельтрами на S^{N-1}.

1. Если $S = S^{N-1}$, то положительные решения единственны и постоянны. Задача вполне разрешима.
2. Если мы имеем дело с граничными особенностями, то модельным случаем является $S = S^{N-1}_+$, а проблема изолированных граничных особенностей принимает вид

$$\mathcal{S}_{p,M}\omega = 0 \text{ в } S^{N-1}_+, \quad \omega = 0 \text{ на } \partial S^{N-1}_+. \tag{4.2}$$

При $M = 0$ в [15] доказано, что не существует положительного решения, если $p \geqslant \dfrac{N+1}{N-1}$. Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 4.1. *Существует положительное решение ω задачи* (4.2), *если выполняется одно из следующих условий*:

(i) $1 < p < \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $M \geqslant 0$;

(ii) $p = \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $M > 0$;

(iii) $1 < p < 3$ *или* $p > \dfrac{N+1}{N-1}$ *и* $M \geqslant M_{N,p}$ *для некоторого явного значения* $M_{N,p} > 0$.

Сокращенное доказательство. Существование получается построением суперрешений (фактически достаточно больших констант) и субрешений вида $\delta\phi_1$, где ϕ_1 — первая собственная функция оператора $-\Delta'$ в $W_0^{1,2}(S^{N-1})$ и $\delta > 0$ достаточно малое. Таким образом, $\mathcal{S}_{p,M}(\delta\phi_1) \leqslant 0$ и существование снова следует согласно [11]. □

Результат существования (iii) довольно точен, поскольку имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть $p > \dfrac{N+1}{N-1}$. Если $M \leqslant m^{**}$* (*см.* (2.4)), *то не существует положительного решения ω задачи* (4.2).

Доказательство тонкое и основано на преобразовании $\omega = \eta^b$, $b > 0$.

5. Сингулярные решения

В докритическом случае при $1 < p < \dfrac{N+1}{N-1}$ и $0 < q < \dfrac{N+1}{N}$ для любых $M > 0$ и $k > 0$ существуют *минимальные фундаментальные решения* — положительные решения уравнения (1.1) в Ω, обращающиеся в нуль на $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и такие, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{u_k(x)}{\mathbb{P}_\Omega(x)} = k. \tag{5.1}$$

Они являются решениями уравнения $\mathcal{L}_{p,q,M} u = 0$ в Ω такими, что $u = k\delta_0$ на $\partial\Omega$.

Отображение $k \mapsto u_k$ является возрастающим (между минимальными решениями, поскольку единственность может не выполняться), и имеет место

$$\lim_{x\to 0} \frac{u_\infty(x)}{\mathbb{P}_\Omega(x)} = \infty. \tag{5.2}$$

Поскольку функции u_k равномерно локально ограничены сверху в $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ оценкой (2.6), существует $u_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$.

Чтобы охарактеризовать u_∞, мы введем следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta'\psi + \alpha(N-2-\alpha)\psi + |\psi|^{p-1}\psi &= 0 \qquad && \text{в } S_+^{N-1}, \\ \psi &= 0 && \text{на } \partial S_+^{N-1}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Существование и единственность положительного решения задачи (5.3) при $1 < q < \dfrac{N+1}{N-1}$ доказаны в [15]. Чтобы описать особенность в точке 0, мы предполагаем, что $\partial\mathbb{R}_+^N \sim \mathbb{R}^{N-1}$ является касательной гиперплоскостью к $\partial\Omega$ в точке 0, а вектор нормали $\mathbf{e}_N$ — вектор внутренней единичной нормали к Ω в точке 0. Будем говорить, что Ω находится *в нормальной ситуации* в точке 0. Наш основной результат о поведении положительного решения вблизи изолированной особенности на границе состоит в следующем.

Теорема 5.1. *Пусть Ω — C^2-гладкая область и $0 \in \partial\Omega$ в нормальной ситуации в точке* 0, $1 < p < \dfrac{N+1}{N-1}$, $1 < q < \dfrac{N+1}{N}$ *и* $M > 0$. *Предположим, что u — положительная функция, удовлетворяющая условию* (2.1).

1. *Если* $1 < q < \dfrac{2p}{p+1}$, *тогда*
   (i) *либо*
   $$\lim_{r\to 0} r^{\alpha} u(r,.) = \psi \text{ локально равномерно на } S_+^{N-1}, \tag{5.4}$$
   где ψ — *единственное положительное решение задачи* (5.3);
   (ii) *либо существует* $k \geqslant 0$ *такое, что выполняется равенство* (5.1). *Если* $k = 0$, *тогда* $u \equiv 0$ *в* Ω.
2. *Если* $q = \dfrac{2p}{p+1}$, *тогда*
   (i) *либо* $u \geqslant u_\infty$ *и*
   $$\psi \leqslant \liminf_{r\to 0} r^{\alpha} u(r,.) \leqslant \limsup_{r\to 0} r^{\alpha} u(r,.) = \overline{\varpi} \text{ локально равномерно на } S_+^{N-1}, \tag{5.5}$$
   где $\overline{\varpi}$ — *максимальное положительное решение задачи* (4.2);
   (ii) *либо выполнено утверждение* (ii) *случая* 1.

Доказательство. Доказательство громоздкое и использует сведение задачи к квазиавтономному уравнению второго порядка, как это было сделано в [15]. □

Замечание. В случае 1(i) $u = u_\infty$ — единственное положительное решение (1.1), обращающееся в нуль на $\partial\Omega \setminus \{0\}$ и удовлетворяющее условию (5.2).

Если $\dfrac{2p}{p+1} < q < p$, то разрушение решения моделируется уравнением эйконала (1.4). Скорость разрушения имеет порядок $r^{-\gamma}$, где показатель степени γ равен
$$\gamma = \frac{q}{p-q}.$$
Обратите внимание, что в этом диапазоне $\gamma > \alpha$. Это уравнение существенно изотропно, поэтому трудно построить сингулярные решения, обращающиеся в нуль на границе, кроме одной точки. Тонкими построениями с использованием суб- и суперрешений получен следующий результат.

Теорема 5.2. *Предположим, что* $M > 0$, $p > 1$ *и* $\dfrac{2p}{p+1} < q < \min\{2, p\}$. *Тогда существует положительное решение* $u \in \mathbb{R}_+^N$ *уравнения* (1.1), *которое обращается в нуль на* $\partial\mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$ *и такое, что*
$$c_3 \phi_1(\sigma) r^{-\gamma} \leqslant u(r,s) \leqslant c_4 \max\left\{r^{-\alpha}, M^{\frac{1}{p-q}} r^{-\gamma}\right\} \tag{5.6}$$
для всех $(r,s) \in (0, r^*) \times \overline{S_+^{N-1}}$ *при некотором* $r^* \in (0,\infty]$, *где* $c_3, c_4 > 0$ *зависят от* N, p, q. *Если* $Nq > (N-1)p$, *то* $r^* = \infty$.

Результат можно адаптировать к решению в ограниченной области Ω с изолированной особенностью в точке $0 \in \partial\Omega$.

6. Открытые задачи

Задача 1. В работах M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro и L. Véron доказано, что если
$$\max\{\frac{N}{N-1}, \frac{2p}{p+1}\} < q < \min\{2,p\} \quad \text{и} \quad M > 0,$$
то существует бесконечно много радиальных решений уравнения (1.1) в $B_R \setminus \{0\}$ для малых R, которые удовлетворяют
$$u(r) = \xi_M r^{-\beta}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad r \to 0, \tag{6.1}$$
где
$$\beta = \frac{2-q}{q-1} \quad \text{и} \quad \xi_M = \frac{1}{\beta}\left(\frac{(N-1)q - N}{M(p-1)}\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{6.2}$$
Эти решения обладают тем свойством, что скорость их разрушения меньше, чем у явного радиального отделимого решения. Было бы интересно построить аналогичные решения уравнения (1.1) в $\mathbb{R}_+^N$ (или, что более вероятно, в B_R^+), которые *обращаются в нуль на* $\partial\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$.

Задача 2. Можно ли определить граничный след для любого положительного решения уравнения (1.1) в $\mathbb{R}^N_+$, учитывая тот факт, что такой результат справедлив по отдельности для положительных решений уравнений (1.3) и (1.5)? Заметим, что если $u \in L^p_\rho(\Omega)$, то применима теория неотрицательных супергармонических с точностью до возмущения в $L^1_\rho(\Omega)$ функций [12]: таким образом, $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega)$ и существует неотрицательная мера Радона μ такая, что u является решением задачи (3.1). Далее, если $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega$, то может быть легко адаптирована теория граничного следа положительных решений уравнения Эмдена—Фаулера, развитая в [17]. В этом случае существуют замкнутое множество $\mathcal{S} \subset \partial\Omega$ и неотрицательная мера Радона μ в $\mathcal{R} := \partial\Omega \setminus \mathcal{S}$ такие, что

$$\lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\{x:\rho(x)=\tau\}\cap B_\epsilon(x)} udS(x) = \infty \tag{6.3}$$

для всех $x \in \mathcal{S}$ и $\epsilon > 0$, и

$$\lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\{x:\rho(x)=\tau\}} \zeta(x)udS(x) = \int\limits_{\mathcal{R}} \zeta d\mu \tag{6.4}$$

для всех $\zeta \in C(\overline{\Omega})$, обращающихся в нуль в окрестности $\mathcal{S}$. Трудность для уравнения (1.1) возникает из-за того, что в некоторых граничных точках x выполняется

$$\int\limits_{\Omega\cap B_\epsilon(x)} u^p \rho dx = \int\limits_{\Omega\cap B_\epsilon(x)} |\nabla u|^q \rho dx = \infty \tag{6.5}$$

при некоторм $\epsilon > 0$.

Задача 3. Единственны ли слабые решения задачи Дирихле (3.1) с граничными данными-мерами? Обратим внимание, что существует мало результатов единственности для решений с изолированными граничными особенностями, которые могут быть получены с использованием методов масштабирования (при геометрических ограничениях на область).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams D., Hedberg L.* Function spaces and potential theory. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1996.
2. *Adams D. R., Pierre M.* Capacitary strong type estimates in semilinear problems// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1991. — *41*. — С. 117–135.
3. *Alarcón S., García-Melián J., Quaas A.* Nonexistence of positive supersolutions to some nonlinear elliptic problems// J. Math. Pures Appl. — 2013. — *90*. — С. 618–634.
4. *Baras P., Pierre M.* Singularités éliminable pour des équations semi-linéaires// Ann. Inst. Fourier. — 1984. — *34*, № 1. — С. 185–206.
5. *Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L.* A priori estimates for elliptic equations with reaction terms involving the function and its gradient// Math. Ann. — 2020. — *378*. — С. 13–58.
6. *Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L.* Measure data problems for a class of elliptic equations with mixed absorption-reaction// Adv. Nonlinear. Stud. — 2020. — *21*. — С. 261–280.
7. *Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L.* Boundary singular solutions of a class of equations with mixed absorption-reaction// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2022. — *61*, № 3. — 113.
8. *Bidaut-Véron M. F., Hoang G., Nguyen Q. H., Véron L.* An elliptic semilinear equation with source term and boundary measure data: the supercritical case// J. Funct. Anal. — 2015. — *269*. — С. 1995–2017.
9. *Bidaut-Véron M. F., Ponce A., Véron L.* Isolated boundary singularities of semilinear elliptic equations// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2011. — *40*. — С. 183–221.
10. *Bidaut-Véron M. F., Véron L.* Trace and boundary singularities of positive solutions of a class of quasilinear equations// Discr. Cont. Dyn. Syst. — 2022. — в печати.
11. *Boccardo L., Murat F., Puel J. P.* Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1984. — *11*. — С. 213–235.
12. *Doob J. L.* Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1984.
13. *Gidas B., Spruck J.* Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1981. — *34*. — С. 525–598.
14. *Gilbarg D., Trudinger N.* Elliptic partial differential equations of second order. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1983.

15. *Gmira A., Véron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations// Duke Math. J. — 1991. — *64.* — C. 271–324.
16. *Marcus M., Nguyen P. T.* Elliptic equations with nonlinear absorption depending on the solution and its gradient// Proc. Lond. Math. Soc. — 2015. — *111.* — C. 205–239.
17. *Marcus M., Véron L.* The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1998. — *144.* — C. 200–231.
18. *Marcus M., Véron L.* Removable singularities and boundary traces// J. Math. Pures Appl. — 2001. — *80.* — C. 879–900.
19. *Marcus M., Véron L.* Nonlinear elliptic equations involving measures. — Berlin: de Gruyter, 2014.
20. *Nguyen P. T., Véron L.* Boundary singularities of solutions to elliptic viscous Hamilton—Jacobi equations// J. Funct. Anal. — 2012. — *263.* — C. 1487–1538.
21. *Véron L.* Singular solutions of some nonlinear elliptic equations// Nonlinear Anal. — 1981. — *5.* — C. 225–242.
22. *Véron L.* Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. — Hackensack: World Scientific, 2017.

Laurent Véron
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция
E-mail: `veronl@univ-tours.fr`

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574
UDC 517.957

Boundary singular problems for quasilinear equations involving mixed reaction-diffusion

L. Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France

We study the existence of solutions to the problem
$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q = 0 \quad &\text{in } \ \Omega, \\ u = \mu \quad &\text{on } \ \partial\Omega \end{aligned} \tag{1}$$
in a bounded domain Ω, where $p > 1$, $1 < q < 2$, $M > 0$, μ is a nonnegative Radon measure in $\partial\Omega$, and the associated problem with a boundary isolated singularity at $a \in \partial\Omega$,
$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q = 0 \quad &\text{in } \ \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{on } \ \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{aligned} \tag{2}$$
The difficulty lies in the opposition between the two nonlinear terms which are not on the same nature. Existence of solutions to (1) is obtained under a capacitary condition
$$\mu(K) \leqslant c \min\left\{cap^{\partial\Omega}_{\frac{2}{p},p'}, cap^{\partial\Omega}_{\frac{2-q}{q},q'}\right\} \quad \text{for all compacts } K \subset \partial\Omega.$$
Problem (2) depends on several critical exponents on p and q as well as the position of q with respect to $\dfrac{2p}{p+1}$.

Keywords: reaction-diffusion equation, boundary singular problem, measure as boundary data, isolated boundary singularity

For citation: L. Véron, "Boundary singular problems for quasilinear equations involving mixed reaction-diffusion," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 564–574. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574`

REFERENCES

1. D. Adams and L. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1996.
2. D. R. Adams and M. Pierre, "Capacitary strong type estimates in semilinear problems," *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*), 1991, **41**, 117–135.
3. S. Alarcón, J. García-Melián, and A. Quaas, "Nonexistence of positive supersolutions to some nonlinear elliptic problems," *J. Math. Pures Appl.*, 2013, **90**, 618–634.
4. P. Baras and M. Pierre, "Singularités éliminable pour des équations semi-linéaires," *Ann. Inst. Fourier*, 1984, **34**, No. 1, 185–206.
5. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, "A priori estimates for elliptic equations with reaction terms involving the function and its gradient," *Math. Ann.*, 2020, **378**, 13–58.
6. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, "Measure data problems for a class of elliptic equations with mixed absorption-reaction," *Adv. Nonlinear. Stud.*, 2020, **21**, 261–280.
7. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, "Boundary singular solutions of a class of equations with mixed absorption-reaction," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2022, **61**, No. 3, 113.
8. M. F. Bidaut-Véron, G. Hoang, Q. H. Nguyen, and L. Véron, "An elliptic semilinear equation with source term and boundary measure data: the supercritical case," *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, 1995–2017.
9. M. F. Bidaut-Véron, A. Ponce, and L. Véron, "Isolated boundary singularities of semilinear elliptic equations," *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2011, **40**, 183–221.
10. M. F. Bidaut-Véron and L. Véron, "Trace and boundary singularities of positive solutions of a class of quasilinear equations," *Discr. Cont. Dyn. Syst.*, to appear (2022).
11. L. Boccardo, F. Murat, and J. P. Puel, "Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* (4), 1984, **11**, 213–235.
12. J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1984.
13. B. Gidas and J. Spruck, "Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1981, **34**, 525–598.
14. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1983.
15. A. Gmira and L. Véron, "Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations," *Duke Math. J.*, 1991, **64**, 271–324,.
16. M. Marcus and P. T. Nguyen, "Elliptic equations with nonlinear absorption depending on the solution and its gradient," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2015, **111**, 205–239.
17. M. Marcus and L. Véron, "The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1998, **144**, 200–231.
18. M. Marcus and L. Véron, "Removable singularities and boundary traces," *J. Math. Pures Appl.*, 2001, **80**, 879–900.
19. M. Marcus and L. Véron, *Nonlinear Elliptic Equations Involving Measures*, de Gruyter, Berlin, 2014.
20. P. T. Nguyen and L. Véron, "Boundary singularities of solutions to elliptic viscous Hamilton–Jacobi equations," *J. Funct. Anal.*, 2012, **263**, 1487–1538.
21. L. Véron, "Singular solutions of some nonlinear elliptic equations," *Nonlinear Anal.*, 1981, **5**, 225–242.
22. L. Véron, *Local and Global Aspects of Quasilinear Degenerate Elliptic Equations*, World Scientific, Hackensack, 2017.

Laurent Véron
Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France
E-mail: veronl@univ-tours.fr