Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 153–165

УДК 517.9

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ

© 2015 г. **А. Л. ТАСЕВИЧ**

Аннотация. В круге рассматривается первая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения, содержащего преобразования ортотропного сжатия аргументов искомой функции. Изучается гладкость обобщенных решений внутри подобластей специального вида и вблизи их границ. Формулируются некоторые условия сильной эллиптичности.

1. Введение

В работе рассматривается первая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

$$A_R u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB} u_{x_i})_{x_j} = f(x), \quad x \in B, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial B} = 0 \tag{1.2}$$

в круге $B \subset \mathbb{R}^2$ некоторого радиуса r с центром в начале координат. Здесь оператор R_{ijB} является композицией следующих операторов:

$$R_{ijB} = P_B R_{ij} I_B,$$

где $I_B : L_2(B) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ — оператор продолжения функций из $L_2(B)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \backslash B$, $P_B : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(B)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на B, а оператор $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ определяется по формуле

$$R_{ij} v(x) = a_{ij0} v(x) + a_{ij1} v(q^{-1}x_1, p x_2) + a_{ij,-1} v(q x_1, p^{-1} x_2).$$

В рассматриваемой задаче числа $p, q > 1$, коэффициенты уравнения $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1, 2)$, а функция $f \in L_2(B)$ является комплекснозначной.

Сформулируем теперь определение сильной эллиптичности следующим образом:

Определение 1.1. Уравнение (1.1) будем называть сильно эллиптическим уравнением, а соответствующий оператор A_R — сильно эллиптическим оператором, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для любой функции $u \in C_0^\infty(B)$ выполняется неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} \geqslant c_1 \|u\|^2_{H^1(B)} - c_2 \|u\|^2_{L_2(B)}. \tag{1.3}$$

С задачей (1.1), (1.2) свяжем непрерывную на пространстве $\mathring{H}^1(B)$ полуторалинейную форму

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB} u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u, v]| \leqslant M \|u\|_{H^1(B)} \|v\|_{H^1(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)). \tag{1.4}$$

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, Проект № 1974 на тему «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

Кроме того, неравенство (1.3), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с $\operatorname{Re} a_R[u,u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re} a_R[u,u] \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} - c_2\|u\|^2_{L_2(B)} \quad (u \in \mathring{H}^1(B)) \tag{1.5}$$

на всем пространстве $\mathring{H}^1(B)$.

Определение 1.2. Функция $u \in \mathring{H}^1(B)$ называется обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если интегральное тождество

$$a_R[u,v] = (f,v)_{L_2(B)} \tag{1.6}$$

выполнено для любой функции $v \in \mathring{H}^1(B)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(B) \to L_2(B),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1.1), (1.2), когда f пробегает все пространство $L_2(B)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \mathring{H}^1(B)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(B)$.

Изучение гладкости обобщенных решений является естественным шагом при исследовании краевых задач. Использованный в статье подход основан на аппроксимации производных конечными разностями. Для эллиптических дифференциальных уравнений он применялся в книгах О. А. Ладыженской [4] и В. П. Михайлова [5]. В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, гладкость обобщенных решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений может нарушаться в ограниченной области и сохраняться только в некоторых подобластях. Гладкость решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений была изучена А. Л. Скубачевским в работах [10,11,23], а также в [12]. Случай, когда правая часть дифференциально-разностного уравнения принадлежит пространству Гельдера, рассматривался в работе [21]. Ряд результатов по гладкости для функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями и растяжениями получен в [8]. В вышеперечисленных работах было показано возникновение степенных особенностей у решения в некоторых точек внутри области.

Гладкости обобщенных решений сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями посвящены разделы 5 и 6. Предварительно в разделе 4 доказано необходимое условие сильной эллиптичности (в частном случае отсутствия смешанных производных оно будет и достаточным). Это условие формулируется в виде, отличном от работы [9], посвященной проблеме коэрцитивности уравнения (1.1). Изучение проблемы коэрцитивности началось в 50-х годах XX века с работ М. И. Вишика [1] и Л. Гординга [16], в которых были рассмотрены дифференциальные уравнения, включая системы дифференциальных уравнений, переменные коэффициенты и уравнения высокого порядка. Для дифференциально-разностных уравнений необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Гординга (1.3), которое рассматривается как аналог сильной эллиптичности, были получены в [22,23], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — в работах [6–8]. Хорошо известно, что неравенство Гординга гарантирует фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра. Кроме того это неравенство связано с решением известной проблемы Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора [13–15, 17–19].

2. Некоторые геометрические конструкции

Данная глава посвящена построению специальных геометрических конструкций, связанных с рассматриваемым преобразованием и зависящих от исходной области, а также обсуждению их свойств. Схема построения основывается на подходе, разработанном для дифференциально-разностных уравнений А. Л. Скубачевским [22, 23]. Для полноты и обоснованности результатов этой статьи основные положения подхода, модифицированного для функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями, приводятся ниже.

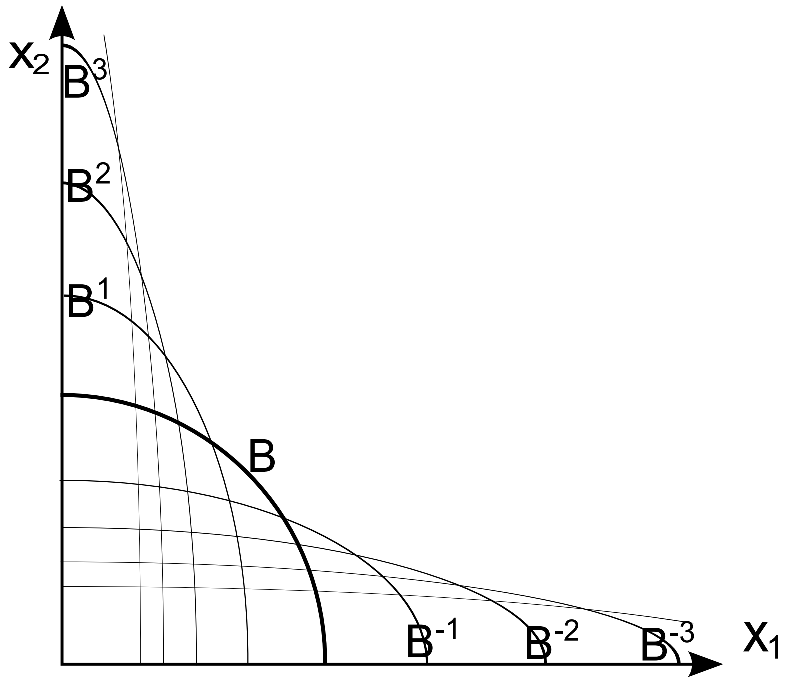

Рис. 1. Множества B^k, $k = \overline{-4, 4}$.

Опишем геометрические конструкции, связанные с отражением $(x_1, x_2) \to (q^{-1}x_1, px_2)$, $q, p > 1$, в круге B. Обозначим через B^k множество

$$B^k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (q^{k-1}x_1, p^{1-k}x_2) \in B\},$$

а через B_r — открытую компоненту множества $B \setminus \left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \partial B^k \right)$.

Замечание 2.1. Далее обозначение $\Omega^k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (q^{k-1}x_1, p^{1-k}x_2) \in \Omega\}$ используется для любых областей $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Определение 2.1. Множество B_r будем называть подобластью, а множество $\mathcal{R}$ всех подобластей B_r назовем разбиением области B.

На рис. 1 мы видим разбиение $\mathcal{R}$ круга B, рассматриваемое в первой координатной четверти. Легко убедиться, что $\mathcal{R}$ счетно.

Для круга B, а также и для более сложной по форме области, будут справедливы следующие леммы:

Лемма 2.1. $\overline{\bigcup\limits_r \partial B_r} = \left(\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \partial B^k \right) \bigcap \overline{B}$.

Лемма 2.2.
1. $\overline{\bigcup\limits_r B_r} = \overline{B}$.
2. *Для любой подобласти* B_{r_1} *и* $k \in \mathbb{Z}$ *или существует* B_{r_2} *такое, что* $B_{r_2} = (B_{r_1})^k$, *или* $(B_{r_1})^k \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$.

Мы можем разбить множество $\mathcal{R}$ на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $B_{r_1}, B_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $\exists k \in \mathbb{Z}$ такое, что $(B_{r_1})^k = B_{r_2}$. Обозначим подобласти B_r через B_{sl}, где s является номером класса, а l — номером подобласти в s-м классе, $l = \overline{1, N(s)}$. В силу ограниченности круга каждый класс состоит из конечного числа подобластей. Количество классов будет счетным, поскольку область B содержит начало координат — точку сгущения орбит оператора P.

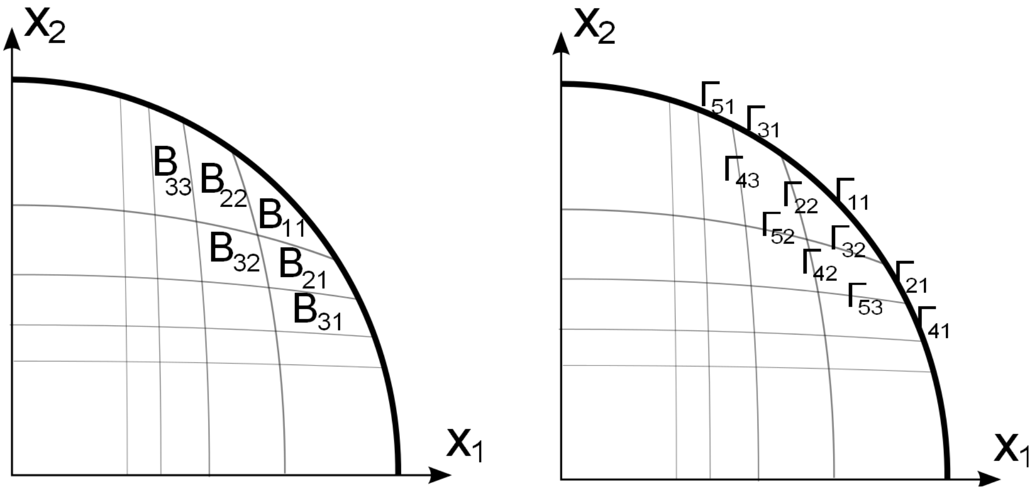

Рис. 2. Множества B_{sl} и Γ_{rj}.

Замечание 2.2. В каждой координатной четверти возможно упорядочить классы подобластей таким образом, что номер класса совпадет с числом его элементов, т. е. $N(s) = s$. В этом можно убедиться на рис. 2. Поэтому без ограничения общности везде далее считаем, что количество элементов класса совпадает с его номером.

Введем множество $\mathcal{K}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{\substack{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \\ k_1 \neq k_2}} \{\overline{B} \cap \left(\partial B^{k_1}\right) \cap \left(\partial B^{k_2}\right)\}. \tag{2.1}$$

Можно заметить, что для круга выполняется следующее условие:

Условие 2.1. $\mu(\mathcal{K} \cap \partial B) = 0$.

Обозначим через Γ_p компоненты множества $\partial B \setminus \mathcal{K}$, являющиеся открытыми и связными в топологии ∂B.

Мы можем разбить множество $\{\Gamma_p^k : \Gamma_p^k \subset \overline{B}, p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{p_1}^{k_1}$ и $\Gamma_{p_2}^{k_2}$ принадлежат одному классу, если существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\Gamma_{p_1}^{k_1} = \left(\Gamma_{p_2}^{k_2}\right)^k$.

Очевидно, что множество Γ_p^k может содержаться только в одном классе. Обозначим множество Γ_p^k через Γ_{rj}, где r — это номер класса, а j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Для круга B возможно упорядочить множества элементов класса так, чтобы $\Gamma_{r1} \subset \partial B, \Gamma_{r2}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset B$.

Заметим, что для каждого $\Gamma_{r1} \subset \partial B$ существует подобласть B_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial B_{sl}$ и $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_1 l_1} = \varnothing$, если $(s_1, l_1) \neq (s, l)$. Также для каждого класса $r \in \mathbb{N}$ существует единственное число $s = s(r)$ такое, что $J(r) = s$ и после перенумерации $\Gamma_{rl} \subset \partial B_{sl}$ $(l = \overline{1, s})$. Отсюда, в свою очередь, можно получить, что для каждого $\Gamma_{rj} \subset B$ существуют подобласти $B_{s_1 l_1}$ и $B_{s_2 l_2}$ такие, что $B_{s_1 l_1} \neq B_{s_2 l_2}, \Gamma_{rj} \subset \partial B_{s_1 l_1} \cap \partial B_{s_2 l_2}$ и $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_3 l_3} = \varnothing$, если $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

3. Оператор ортотропного сжатия и его свойства

В данном пункте рассмотрим отдельно функциональный оператор $P : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, определенный по формуле

$$Pu(x_1, x_2) = u\left(q^{-1} x_1, p x_2\right),$$

где $p, q > 1$ — некоторые фиксированные вещественные числа. Обратный и сопряженный операторы имеют вид

$$P^{-1} u(x_1, x_2) = u(q x_1, p^{-1} x_2),$$
$$P^* u(x_1, x_2) = \frac{q}{p} u(q x_1, p^{-1} x_2) = \frac{q}{p} P^{-1} u(x_1, x_2).$$

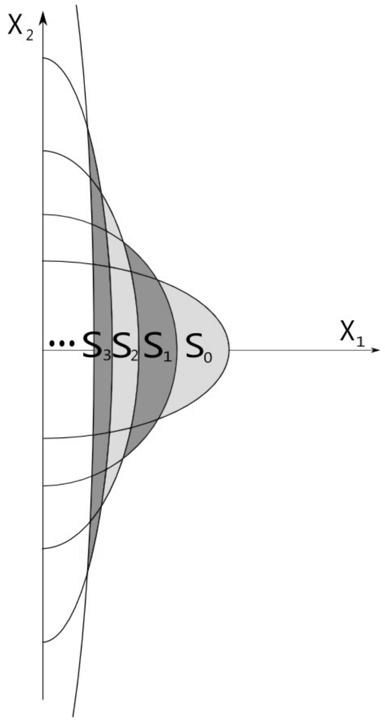

Рис. 3. Множества S_j.

Отсюда следует, что оператор $\sqrt{p/q}P$ является унитарным, а сам оператор P будет нормальным, т. е. $PP^* = P^*P$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ минимальную замкнутую подалгебру алгебры ограниченных операторов в $L_2(\mathbb{R}^2)$, порожденную операторами P и P^*. Несложно проверяется, что при таком построении $\mathcal{A}$ будет коммутативной B^*-алгеброй. Спектр $\sigma(P)$ является пространством максимальных идеалов алгебры $\mathcal{A}$. Поэтому по теореме Гельфанда—Наймарка существует сохраняющий инволюцию изометрический изоморфизм между алгеброй $\mathcal{A}$ и алгеброй $C(\sigma(P))$ комплекснозначных непрерывных функций на спектре оператора P

$$C(\sigma(P)) \ni r(\lambda) \mapsto R(P) \in \mathcal{A}, \tag{3.1}$$

при котором $\overline{r(\lambda)} \mapsto (R(P))^*,\ 1 \mapsto I,\ \lambda \mapsto P$. Функцию $r(\lambda)$ будем называть символом оператора $R(P)$. Переход к символам операторов очень удобен с точки зрения алгебраических свойств (положительность, обратимость и т. д.). При этом спектр оператора $R(P)$ будет совпадать с множеством значений его символа $r(\lambda)$.

Лемма 3.1. *Спектр оператора P совпадает со всей окружностью*

$$\sigma(P) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \sqrt{q/p}\right\}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Поскольку оператор $\sqrt{p/q}P$ унитарный, то спектр оператора P лежит на упомянутой окружности. Нам нужно показать, что для любого элемента окружности λ, $|\lambda| = \sqrt{q/p}$, оператор $P - \lambda I$ не имеет ограниченного обратного. Для этого достаточно построить последовательность $u_n \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\|u_n\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \to \infty$, в то время как последовательность $(P - \lambda I)u_n$ ограничена по норме.

Определим множества

$$S_0 := \left\{(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2 :\ x_1^2 + x_2^2 > 1,\ (qx_1)^2 + \left(\frac{x_2}{p}\right)^2 < 1,\ x_1 > 0\right\},$$

$$S_j := \left\{\left(\frac{x_1}{q^j}, p^j x_2\right),\ (x_1, x_2) \in S_0\right\}.$$

После некоторых вычислений мы получаем, что

$$mesS_j = \left(\frac{p}{q}\right)^j mesS_0 = |\lambda|^{-2j} mesS_0.$$

Положим

$$u_k(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^{j-1}, & (x_1, x_2) \in S_j,\ j = \overline{1, k}; \\ 0 & \text{для остальных } (x_1, x_2). \end{cases}$$

Тогда

$$\|u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \sum_{j=1}^{k} |\lambda|^{2(j-1)} \mathrm{mes} S_j = \sum_{j=1}^{k} |\lambda|^{2(j-1)} |\lambda|^{-2j} \mathrm{mes} S_0 =$$
$$= k|\lambda|^{-2} \mathrm{mes} S_0 \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

При этом

$$(P - \lambda I) u_k(x_1, x_2) = \begin{cases} -\lambda^k, & (x_1, x_2) \in S_k; \\ \ \ 1, & (x_1, x_2) \in S_0; \\ \ \ 0 & \text{для остальных } (x_1, x_2), \end{cases}$$

$$\|(P - \lambda I) u_k\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{2k} \mathrm{mes} S_k + \mathrm{mes} S_0 = |\lambda|^{2k} |\lambda|^{-2k} \mathrm{mes} S_0 + \mathrm{mes} S_0 =$$
$$= 2\, \mathrm{mes}\, S_0 < C < \infty \quad \text{для любого} \quad k.$$

□

4. Условия сильной эллиптичности ФДУ с ортотропными сжатиями

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ и всякой функции $u \in L_2(B_s)$, $B_s = \bigcup\limits_{l=1}^{s} B_{sl}$ построим вектор-функцию $U = (u_1, \ldots, u_s)^T \in L_2^s(B_{s1})$, где

$$u_k(x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u(q^{1-k} x_1, p^{k-1} x_2)\ (x \in B_{s1}, k = \overline{1, s}). \tag{4.1}$$

Отображение $u \to U$ унитарно, т. е. $(u, v)_{L_2(B_s)} = (U, V)_{L_2(B_{s1})}$.

Построим матрицу $\mathbf{R}_{ijs}\,(s \times s)$ с элементами

$$\rho_{kl}^{ijs} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l-k}{2}} a_{ij, l-k}, & |l - k| \leqslant 1; \\ 0, & |l - k| > 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тогда если $v = R_{ij} u$ и $V = (v_1 \ldots v_s)^T \in L_2^s\,(B_{s1})$ — соответствующая вектор-функция, то

$$v_k(x_1, x_2) = \rho_{kk}^{ijs} u_k(x_1, x_2) + \rho_{k,k+1}^{ijs} u_{k+1}(x_1, x_2) + \rho_{k,k-1}^{ijs} u_{k-1}(x_1, x_2).$$

Таким образом,

$$v = R_{ij} u\ (u, v \in L_2(B_s)) \Longleftrightarrow V = \mathbf{R}_{ijs} U\ (U, V \in L_2^s(B_{s1}))\,. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Пусть матрицы $\mathbf{R}_{ijs} + \mathbf{R}_{ijs}^*$ равномерно по s положительно определены, т. е. существует постоянная $c > 0$ такая, что*

$$\mathrm{Re}\,(\mathbf{R}_{ijs} Y, Y) \geqslant c\,\|Y\|^2 \quad (s = 1, 2, \ldots; Y \in \mathbb{C}^s)\,. \tag{4.4}$$

Тогда оператор $R_{ij} + R_{ij}^* : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ положительно определен.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ с компактным носителем, лежащим в одной четверти координатной плоскости, например в первой $\mathbb{R}^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}$. Тогда $\exists r :\ \overline{\mathrm{supp} u} \subset B_r(0)$.

Положим

$$\Omega_{j1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ : \begin{array}{rr} x_1^2 + x_2^2 < r, & (qx_1)^2 + \left(\dfrac{x_2}{p}\right)^2 > r \\ \left(\dfrac{x_1}{q^{j-1}}\right)^2 + \left(p^{j-1}x_2\right)^2 < r, & \left(\dfrac{x_1}{q^j}\right)^2 + \left(p^j x_2\right)^2 > r \end{array} \right\}, \tag{4.5}$$

$$\Omega_j = \bigcup_{k=1}^{j} \left\{ \left(\frac{x_1}{q^{k-1}}, p^{k-1}x_2\right),\ x \in \Omega_{j1} \right\}, \qquad \Omega = \bigcup_{j=1}^{s} \Omega_j. \tag{4.6}$$

Используя условие леммы и предыдущие рассуждения, получаем

$$\mathrm{Re}\,(R_{ij}u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} = \mathrm{Re}\,(v, u)_{L_2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Re}\,(v, u)_{L_2(\Omega_j)} = \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Re}\,(V, U)_{L_2^s(\Omega_{j1})} =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \mathrm{Re}\,(\mathbf{R}_{ijs}U, U)_{L_2^s(\Omega_{j1})} \geqslant \sum_{j=1}^{s} c\|U\|^2_{L_2^s(\Omega_{j1})} = \sum_{j=1}^{s} c\|u\|^2_{L_2(\Omega_j)} = c\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

причем c не зависит от s, r, u. Но при $r \to \infty$ и $s \to \infty$ функция u пробегает всюду плотное в $L_2(\mathbb{R}^2_+)$ подмножество. Поэтому неравенство $\mathrm{Re}(R_{ij}u, u)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)}$ выполняется для любых $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$. □

Заметим, что дифференциальный оператор не коммутирует с оператором сжатия и справедливы следующие отношения:

$$(u_{x_1})_k (x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u_{x_1}\left(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2\right) = \tag{4.7}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} q^{k-1}\left(u(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2)\right)_{x_1} = q^{k-1}\left(u_k(x_1, x_2)\right)_{x_1}.$$

Аналогично $(u_{x_2})_k (x) = p^{1-k}\left(u_k(x)\right)_{x_2}$.

Положим

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & q & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q^{s-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & p^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p^{1-s} \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Тогда можно переписать неравенство (1.3) для функции $u \in C_0^\infty(B_s)$

$$\mathrm{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} = \mathrm{Re}(A_R u, u)_{L_2(B_s)} = \tag{4.9}$$

$$= ((\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}^*_{11s})\,\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}^*_{12s})\,\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} +$$

$$+ ((\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}^*_{21s})\,\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}^*_{22s})\,\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant$$

$$\geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|\mathbf{Q}_s U_{x_1}|^2 + |\mathbf{P}_s U_{x_2}|^2 + |U|^2\right) dx - c_1\|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant$$

$$\geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|U_{x_1}|^2 + p^{2-2s}\,|U_{x_2}|^2 + |U|^2\right) dx - c_1\|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant c_2 p^{2-2s}\|U\|^2_{H^{1,s}(B_{s1})} - c_1\|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})}.$$

Данное неравенство выполняется для всех вектор-функций $U \in C_0^{\infty,s}(B_{s1})$ и означает сильную эллиптичность матричного дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_s = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{11s}\mathbf{Q}_s\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{P}_s\mathbf{R}_{12s}\mathbf{Q}_s\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{21s}\mathbf{P}_s\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{P}_s\mathbf{R}_{22s}\mathbf{P}_s\frac{\partial}{\partial x_2}\right). \tag{4.10}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{11sPQ} &= \mathbf{Q}\left(\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}^*_{11s}\right)\mathbf{Q}, \quad \mathbf{R}_{12sPQ} = \mathbf{P}\left(\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}^*_{12s}\right)\mathbf{Q}, \\ \mathbf{R}_{21sPQ} &= \mathbf{Q}\left(\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}^*_{21s}\right)\mathbf{P}, \quad \mathbf{R}_{22sPQ} = \mathbf{P}\left(\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}^*_{22s}\right)\mathbf{P}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Таким образом, из известных результатов по сильно эллиптическим системам [1] вытекает

Лемма 4.2. *Пусть уравнение* (1.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{B}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mathbf{R}_{ijsPQ}\xi_i\xi_j \tag{4.12}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$ *и* $s = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим частный случай уравнения (1.1), не содержащего смешанные производные:

$$A_R u \equiv -\sum_{i=1}^{2} (R_{iiB} u_{x_i})_{x_i} = f(x), \quad x \in B. \tag{4.13}$$

Оказывается, для данного уравнения необходимое условие и достаточное условие выполнения неравенства типа Гординга (1.3) совпадают и формулируются следующим образом:

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.13) *является сильно эллиптическим в области* $\overline{B}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Re}\, a_R(\lambda, \xi) = -\sum_{i=1}^{2} \left(\xi_i^2 \mathrm{Re}\left(a_{ii0} + a_{ii1}\lambda + a_{ii,-1}\frac{1}{\lambda}\right)\right) > 0 \quad \left(|\lambda| = \sqrt{\frac{q}{p}}, |\xi| = 1\right). \tag{4.14}$$

Доказательство. Сначала докажем достаточность. После интегрирования по частям левой части неравенства Гординга (1.3) с учетом условия $\mathrm{supp} u \subset B$ получим

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}\sum_{i=1}^{2} \left(R_{ii}u_{x_i}, u_{x_i}\right)_{L_2(B)} &= \sum_{i=1}^{2} \left((R_{ii} + R^*_{ii})u_{x_i}, u_{x_i}\right)_{L_2(\mathbb{R}^2)} \geqslant \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{2} c\|u_{x_i}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^2)} = c\|u\|'^2_{H^1(\mathbb{R}^2)} \geqslant \tilde{c}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^2)}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

где $\|\cdot\|'_{H^1(\mathbb{R}^2)}$— эквивалентная норма в $\mathring{H}^1(\mathbb{R}^2)$.

Последнее верно в силу теоремы об эквивалентных нормах в $\mathring{H}^1(\mathbb{R}^2)$ и того, что положительность действительной части символа уравнения на спектре (4.14) означает положительность действительных частей символов операторов R_{ii}, $i = 1$, 2:

$$\mathrm{Re}\, a_R(\lambda, \xi) = \xi_1^2 \mathrm{Re}\, r_1(\lambda) + \xi_2^2 \mathrm{Re}\, r_2(\lambda) > 0 \quad \left(|\lambda| = \sqrt{\frac{q}{p}}, |\xi| = 1\right), \tag{4.16}$$

где $r_i(\lambda) = a_{ii0} + a_{ii1}\lambda + a_{ii,-1}\dfrac{1}{\lambda}$. Это легко проверяется при помощи подстановки $\xi = (1, 0)$ и $\xi = (0, 1)$.

Из (4.15) и (4.16) следует (1.3).

Перейдем к доказательству необходимости. Проинтегрировав по частям неравенство (1.3) для уравнения (4.13), мы имеем

$$\sum_{i=1}^{2} 2\mathrm{Re}\left(R_{ii}u_{x_i}, u_{x_i}\right)_{L_2(B)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} - c_2\|u\|^2_{L_2(B)} \quad \left(\forall u \in C_0^\infty(B)\right). \tag{4.17}$$

Будем рассматривать функции $u \in C_0^\infty(B_s) \subset C_0^\infty(B)$. Определим вектор-функции H и F при помощи матриц P и Q.

$$\begin{aligned} H &= (h_1, \ldots, h_s)^T \in C_0^{\infty, s}\left(B_{s1}\right), \ H = \mathbf{Q}U, \\ F &= (f_1, \ldots, f_s)^T \in C_0^{\infty, s}\left(B_{s1}\right), \ F = \mathbf{P}U. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Для введенных таким образом вектор-функций будут справедливы следующие соотношения:

$$(u_{x_1})_k(x_1,x_2) = (h_k(x_1,x_2))_{x_1}, \quad (u_{x_2})_k(x_1,x_2) = (f_k(x_1,x_2))_{x_2}, \tag{4.19}$$

т. е. в области B_{s1} функции u_{x_1} отвечает вектор-функция H_{x_1}, а функции u_{x_2} — вектор-функция F_{x_2}.

Используя введенные обозначения, мы получаем

$$\begin{gathered}((R_{11}+R_{11}^*)\,u_{x_1},u_{x_1})_{L_2(B_s)} + ((R_{22}+R_{22}^*)\,u_{x_2},u_{x_2})_{L_2(B_s)} = \\ = ((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,H_{x_1},H_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{22s}+\mathbf{R}_{22s}^*)\,F_{x_2},F_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})}.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Перепишем также нормы из правой части неравенства (4.17):

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{H^1(B)} \sim \|u_{x_1}\|^2_{L_2(B)} + \|u_{x_2}\|^2_{L_2(B)} = \|u_{x_1}\|^2_{L_2(B_s)} + \|u_{x_2}\|^2_{L_2(B_s)} = \\ = \sum_{k=1}^{s}\left[\|\,(u_{x_1})_k\,\|^2_{L_2(B_{s1})} + \|\,(u_{x_2})_k\,\|^2_{L_2(B_{s1})}\right] = \sum_{k=1}^{s}\left[\|\,(h_k)_{x_1}\,\|^2_{L_2(B_{s1})} + \|\,(f_k)_{x_2}\,\|^2_{L_2(B_{s1})}\right] = \\ = \|H_{x_1}\|^2_{L_2^s(B_{s1})} + \|F_{x_2}\|^2_{L_2^s(B_{s1})},\end{gathered} \tag{4.21}$$

$$\|u\|^2_{L_2(B)} = \|u\|^2_{L_2(B_s)} = \sum_{k=1}^{s}\|u_k\|^2_{L_2(B_{s1})} = \sum_{k=1}^{s} q^{2(1-k)}\|h_k\|^2_{L_2(B_{s1})} \leqslant \|H\|^2_{L_2^s(B_{s1})}. \tag{4.22}$$

Теперь мы можем переписать неравенство (4.17) в виде

$$\begin{gathered}((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,H_{x_1},H_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{22s}+\mathbf{R}_{22s}^*)\,F_{x_2},F_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant \\ \geqslant \widetilde{c}_1\left[\|H_{x_1}\|^2_{L_2^s(B_{s1})} + \|F_{x_2}\|^2_{L_2^s(B_{s1})}\right] - \widetilde{c}_2\|H\|^2_{L_2^s(B_{s1})},\end{gathered} \tag{4.23}$$

где $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2$ не зависят от H, F и s.

Пусть функция u такая, что $u_k(x) = z_k u_0(x)$, где $u_0(x) \in C_0^\infty(B_{s1})$— произвольная скалярная функция, $z_k \in \mathbb{C}$. Тогда

$$h_k(x) = q^{k-1}z_k u_0(x), \quad f_k(x) = p^{1-k}z_k u_0(x).$$

Обозначим через Z, Z', Z'' векторы

$$(z_1,\dots,z_k,\dots,z_s), \quad (z_1,\dots,q^{k-1}z_k,\dots,q^{s-1}z_s), \quad (z_1,\dots,p^{1-k}z_k,\dots,p^{1-s}z_s),$$

соответственно. Применим к неравенству преобразование Фурье:

$$\begin{gathered}\big((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,\xi_1^2|\widetilde{u}_0(\xi)|Z',|\widetilde{u}_0(\xi)|Z'\big)_{L_2^s(\mathbb{R}^2)} + \big((\mathbf{R}_{22s}+\mathbf{R}_{22s}^*)\,\xi_2^2|\widetilde{u}_0(\xi)|Z'',|\widetilde{u}_0(\xi)|Z''\big)_{L_2^s(\mathbb{R}^2)} \geqslant \\ \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^2}\left(\widetilde{c}_1\xi_1^2 - \widetilde{c}_2\right)\left|Z'\right|^2|\widetilde{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}^2}\widetilde{c}_1\xi_2^2\left|Z''\right|^2|\widetilde{u}_0(\xi)|^2 d\xi.\end{gathered} \tag{4.24}$$

В силу плотности образов Фурье $\widetilde{u}(\xi)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $L_2(\mathbb{R}^2, d\mu)$, где $d\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)d\xi$, выводим из последнего неравенства, что

$$\begin{gathered}\xi_1^2\left((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,Z',\,Z'\right)_{\mathbb{C}^s} + \xi_2^2\left((\mathbf{R}_{22s}+\mathbf{R}_{22s}^*)\,Z'',\,Z''\right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \\ \geqslant \left(\widetilde{c}_1\xi_1^2 - \widetilde{c}_2\right)\left|Z'\right|^2_{\mathbb{C}^s} + \widetilde{c}_1\xi_2^2\left|Z''\right|^2_{\mathbb{C}^s}.\end{gathered} \tag{4.25}$$

Поскольку это неравенство выполняется для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, тогда, если $\widetilde{c}_2 \neq 0$, возьмем $\xi_1^2 = \dfrac{2\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1}$, $\xi_2 = 0$ и получим

$$\frac{2\widetilde{c}_2}{\widetilde{c}_1}\left((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,Z',\,Z'\right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \widetilde{c}_2\left|Z'\right|^2_{\mathbb{C}^s},$$

$$\left((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,Z',\,Z'\right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \frac{\widetilde{c}_1}{2}\left|Z'\right|^2_{\mathbb{C}^s}.$$

Если же $\widetilde{c}_2 = 0$, положим $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 0$ и получим

$$\left((\mathbf{R}_{11s}+\mathbf{R}_{11s}^*)\,Z',\,Z'\right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \widetilde{c}_1\left|Z'\right|^2_{\mathbb{C}^s}.$$

В обоих случаях, применив лемму 4.1, получаем положительно определенность оператора $R_{11} + R_{11}^*$.

Теперь положим в неравенстве (4.25) $\xi_1 = 0$. Тогда оно примет следующий вид:

$$\xi_2^2 \left(\left(\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*\right) Z'',\, Z'' \right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \widetilde{c}_1 \xi_2^2 \left| Z'' \right|_{\mathbb{C}^s}^2 - \widetilde{c}_2 \left| Z' \right|_{\mathbb{C}^s}^2$$

Разделив предыдущее неравенство на ξ_2^2 и устремив его к бесконечности, будем иметь

$$\left(\left(\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*\right) Z'',\, Z'' \right)_{\mathbb{C}^s} \geqslant \widetilde{c}_1 \left| Z'' \right|_{\mathbb{C}^s}^2 .$$

По лемме 4.1 оператор $R_{22} + R_{22}^*$ является положительно определенным. Таким образом, мы получаем, что неравенство (4.14) выполнено и необходимость доказана. □

5. Гладкость обобщенных решений в подобластях

Теорема 5.1. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* $f \in L_2(B) \cap H^k_{loc}(B_{sl})$ $(s \in \mathbb{N},\, l = \overline{1, s})$. *Тогда* $u \in H^{k+2}_{loc}(B_{sl})$ *для всех* s, l.

Доказательство. В интегральном тождестве возьмем в качестве пробной функции функцию $v \in C_0^\infty(B_s)$ и перепишем его:

$$\begin{gathered}
\left(\mathbf{R}_{11s}\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{Q}_s V_{x_1}\right)_{L_2^s(B_{s1})} + \left(\mathbf{R}_{12s}\mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{P}_s V_{x_2}\right)_{L_2^s(B_{s1})} + \left(\mathbf{R}_{21s}\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{Q}_s V_{x_1}\right)_{L_2^s(B_{s1})} + \\
+ \left(\mathbf{R}_{22s}\mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{P}_s V_{x_2}\right)_{L_2^s(B_{s1})} = (F, V)_{L_2^s(B_{s1})} .
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Поскольку V — произвольная функция из $C_0^{\infty,s}(B_{s1})$, получается, что вектор-функция $U \in H^{1,s}(B_{s1})$ есть обобщенное решение системы

$$\mathbf{A}_s U = F \quad (x \in B_{s1}), \tag{5.2}$$

где $F \in H^{k,s}(B_{s1})$. Из (4.9) получаем, что эта система — сильно эллиптическая. Согласно результатам о гладкости решений для сильно эллиптических систем вектор-функция $U \in H^{k+2,s}_{loc}(B_{s1})$, а тогда $u \in H^{k+2}_{loc}(B_{sl})$ для всех s, l (см. [2,20]). □

6. Гладкость обобщенных решений вблизи границ подобластей

Теперь мы изучим гладкость обобщенных решений вблизи множества $\partial B_{sl} \setminus \mathcal{K}$. Доказательство базируется на известном подходе, связанным с аппроксимацией дифференциальных операторов разностными операторами [3, глава XIV, пункт 3, лемма 50], [5, глава III, §3, теорема 4]. Однако, рассматриваемый класс операторов отличается от эллиптических операторов нелокальностью.

Теорема 6.1. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* $f \in L_2(B) \cap H^k(B_{sl})$ $(s \in \mathbb{N}, l = \overline{1, s})$. *Тогда* $u \in H^{k+2}(B_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для всех* $\varepsilon > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ l = \overline{1, s})$, *где* $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

Доказательство. В силу теоремы 5.1 нам достаточно показать, что для произвольной фиксированной точки $y = (y_1, y_2) \in \partial B_{sl} \setminus \mathcal{K}$ найдется окрестность $S_\delta(y)$ такая, что $u \in H^{k+2}\left(B_{sl} \cap S_\delta(y)\right)$. Без ограничения общности $y \in \Gamma_{rl} \subset \partial B_{sl} \cap \partial B_{s+1,l}$ и $\partial B_{s+1,s+1} \cap \partial B \neq \varnothing$.

Построим последовательность $\{y^k\} :\ y^k = (q^{l-k} y_1, p^{k-l} y_2),\ k = \overline{1, s+1}$. Тогда $y^l = y$, $y^{s+1} \in \partial B$, $y^i \in B\ \forall i = \overline{1, s}$.

Мы можем выбрать $\delta > 0$ такое, что $4\delta < \min\limits_k \rho(y^k, \mathcal{K})$, а множества $\partial B_{sk} \cap S_{4\delta}(y^k)$ являются связными и принадлежат классу C^∞ $(k = \overline{1, s})$. Также верно, что

$$S_{4\delta}(y^{s+1}) \cap B_{s+1,s+1} = S_{4\delta}(y^{s+1}) \cap B, \quad S_{4\delta}(y^k) \subset \overline{B_{sk} \cup B_{s+1,k}} \quad (k = \overline{1, s}).$$

В качестве пробной функции в интегральном равенстве (1.6) возьмем функцию $v = \xi v^0$, где $v^0 \in \mathring{H}^1(B)$,

$$\xi(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{k-1}{2}} \eta(q^{k-1} x_1, p^{1-k} x_2),$$

функция $\eta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ $\left(x \in S_{2\delta}(y^1)\right)$, $\eta(x) = 1$ $\left(x \in S_\delta(y^1)\right)$, $\eta(x) = 0$ $\left(x \notin S_{2\delta}(y^1)\right)$.

Используя формулу Лейбница, мы получим

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i,j=1}^{2}\left(R_{ijB}u_{x_i},\xi v^0_{x_j}\right)_{L_2(B^\delta_{mk})}=\sum_{k=1}^{m}\left(\left[f-\sum_{i,j=1}^{2}R_{ijB}u_{x_i}\xi_{x_i}\right],v^0\right)_{L_2(B^\delta_{mk})}. \tag{6.1}$$

Здесь и далее $B^\delta_{pk}=B_{pk}\cap S_{4\delta}(y^k)$; суммирование идет по $m=s,s+1$.

Используем отображение (4.1). В силу того, что оператор перехода к вектор-функциям коммутирует с оператором умножения на функцию ξ, мы получаем следующую формулу:

$$\begin{gathered}\left(\eta\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\eta\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}=\\=\left(\eta F_m,V^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{Q}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{P}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\\-\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{Q}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{P}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}.\end{gathered} \tag{6.2}$$

Воспользуемся формулой Лейбница еще раз и получим

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_m\left(\eta U_m\right)_{x_1},\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_m\left(\eta U_m\right)_{x_1},\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_m\left(\eta U_m\right)_{x_2},\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_m\left(\eta U_m\right)_{x_2},\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}=\left(\eta F_m,V^0_m\right)-\\-\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{Q}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{P}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\\-\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_mU_{x_2},\mathbf{Q}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}-\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{P}_mV^0_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_mU_m,\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_mU_m,\mathbf{P}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_mU_m,\mathbf{Q}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_mU_m,\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Подходящей заменой координат мы можем получить, что $y^1=0$ и уравнение части границы $\partial B_{s1}\cap S_{4\delta}(0)$ имеет вид $x_2=0$. Через $\mathring{W}^1_\delta$ обозначим пространство векторнозначных функций $V=(V_s,V_{s+1})\in W^{1,s}(B^\delta_{s1})\times W^{1,s+1}(B^\delta_{s+1,1})$ таких, что $\mathrm{supp}V_m\subset\overline{B^\delta_{m1}}\cap\overline{S_{2\delta}(0)}$, $SV\in\mathring{W}^1B$, где $(SV)(x_1,x_2)=V_{ml}(q^{l-1}x_1,p^{1-l}x_2)$ для $x\in B^\delta_{ml}$, $(SV)(x)=0$ для $x\notin\bigcup\limits_{m,l}B^\delta_{ml}$ $(l=\overline{1,m},\,m=s,s+1)$.

Предположим, что $v^0=SV^0$, $V^0=\delta^1_{-t}V^1=\left(\delta^1_{-t}V_s,\delta^1_{-t}V_{s+1}\right)$, где $V^1\in\mathring{W}^1_{3\delta}/2$, $0<t<\delta$. Оператор $\delta^1_{\pm t}$ определяется по формулам:

$$\mathcal{D}(\delta^1_{\pm t})=\{W\in L_2^m(B^\delta_{m1}):\mathrm{supp}W\subset\overline{B^\delta_{m1}\cap S_{3\delta}(0)}\},$$
$$\delta^1_{\pm t}=\frac{W(x_1\pm t,x_2)-W(x_1,x_2)}{\pm t}.$$

По построению $v^0\in\mathring{W}^1(B)$ и в уравнении (6.3) $V^0_m=\delta_{\pm t}V^1_m$. Поскольку операторы δ_t и δ_{-t} — формально сопряженные, из (6.3) мы имеем

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_m\delta_t\left(\eta U_m\right)_{x_1},\mathbf{Q}_mV^1_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_m\delta_t\left(\eta U_m\right)_{x_1},\mathbf{P}_mV^1_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_m\delta_t\left(\eta U_m\right)_{x_2},\mathbf{Q}_mV^1_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_m\delta_t\left(\eta U_m\right)_{x_2},\mathbf{P}_mV^1_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}=I\end{gathered} \tag{6.4}$$

$$\begin{gathered}I=-\left(\eta F_m,\delta_{-t}V^1_m\right)+\\+\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{Q}_m\delta_{-t}V^1_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_mU_{mx_1},\mathbf{P}_m\delta_{-t}V^1_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\eta_{x_1}\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_mU_{x_2},\mathbf{Q}_m\delta_{-t}V^1_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\eta_{x_2}\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_mU_{mx_2},\mathbf{P}_m\delta_{-t}V^1_m\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\mathbf{R}_{11m}\mathbf{Q}_m\delta_t(\eta_{x_1}U_m),\mathbf{Q}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{12m}\mathbf{Q}_m\delta_t(\eta_{x_2}U_m),\mathbf{P}_mV^0_{mx_1}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\\+\left(\mathbf{R}_{21m}\mathbf{P}_m\delta_t(\eta_{x_1}U_m),\mathbf{Q}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}+\left(\mathbf{R}_{22m}\mathbf{P}_m\delta_t(\eta_{x_2}U_m),\mathbf{P}_mV^0_{mx_2}\right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})}.\end{gathered} \tag{6.5}$$

Положим $V^1_m=\delta_{t_1}\left(\eta U_m\right)$ $(0<t_1<\delta)$. Очевидно, что $V^1=(V^1_s,V^1_{s+1})\in\mathring{W}^1_{3\delta/2}$.

В силу неравенства Шварца и теоремы об аппроксимации дифференциальных операторов разностными

$$|I| \leqslant k_1 \left(\sum_m \|V_m^1\|_{1,m}^2 \right)^{1/2} \sum_m \left(\|U_m\|_{1,m} + \|F_m\|_{0,m} \right), \tag{6.6}$$

где $\|V_m^1\|_{k,m} = \{\sum\limits_{l=1}^{m} \|V_{ml}^1\|^2_{W^k(B^\delta_{m1})}\}^{1/2}$, $k = 0, 1$.

Теперь оценим левую часть уравнения (6.4). Положим $t_1 = t$, т. е. $V_m^1 = \delta_t(\eta U_m)$. В силу определения сильной эллиптичности, уравнения (4.9) и теоремы об аппроксимации дифференциальных операторов разностными

$$\begin{gathered} \sum_m \operatorname{Re}\{ \left(\mathbf{R}_{11m} \mathbf{Q}_m V^1_{mx_1}, \mathbf{Q}_m V^1_{mx_1} \right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})} + \left(\mathbf{R}_{12m} \mathbf{Q}_m V^1_{mx_1}, \mathbf{P}_m V^1_{mx_2} \right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})} \} + \\ + \sum_m \operatorname{Re}\{ \left(\mathbf{R}_{21m} \mathbf{P}_m V^1_{mx_2}, \mathbf{Q}_m V^1_{mx_1} \right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})} + \left(\mathbf{R}_{22m} \mathbf{P}_m V^1_{mx_2}, \mathbf{P}_m V^1_{mx_2} \right)_{L_2^m(B^\delta_{m1})} \} \geqslant \\ \geqslant \sum_m c_2 \left(p^{2-2s} \|V_m^1\|^2_{1,m} - c_1 \|V_m^1\|^2_{0,m} \right) \geqslant \\ \geqslant c_2 \sum_m p^{2-2s} \|V_m^1\|^2_{1,m} - k_2 \left(\sum_m \|V_m^1\|^2_{1,m} \right)^{1/2} \sum_m \|U_m\|_{1,m}. \end{gathered} \tag{6.7}$$

Таким образом, из (6.4)-(6.7) следует

$$\left(\sum_m \|V_m^1\|^2_{1,m} \right)^{1/2} \leqslant k_3 \sum_m \left(\|U_m\|_{1,m} + \|F_m\|_{0,m} \right). \tag{6.8}$$

Из этого неравенства и теоремы об аппроксимации дифференциальных операторов разностными мы получим, что $(\eta U_m)_{x_i x_1} \in L_2^m(B^\delta_{m1})$ для $i = 1, 2$, откуда $U_{sx_i x_1} \in L_2^s(B_{s1} \cap S_\delta(0))$.

Теперь покажем, что $U_{sx_2x_2} \in L_2^s(B_{s1} \cap S_\delta(0))$. Предположим, что в (6.3) $V_s^0 \in \dot{C}^{\infty,s}(B_{s1} \cap S_\delta(0))$ является произвольной векторнозначной функцией, $V^0_{s+1} = 0$. Тогда мы получаем, что векторнозначная функция U_s является обобщенным решением системы дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}_R U_s = F_s, \tag{6.9}$$

где $F_s \in L_2^s(B_{s1} \cap S_\delta(0))$. По лемме 4.2 матрица $\mathbf{R}_{22sPQ}$ положительно определенная. Тогда существует обратная матрица R^{-1}_{22s}. Поэтому $U_{sx_2x_2} = R^{-1}_{22s}(F_s - \sum\limits_{i+j<4} R_{ijs} U_{sx_ix_j})$. Выше мы доказали, что $U_{sx_ix_j} \in L_2^s(B_{s1} \cap S_\delta(0))$ $(i + j < 4)$. Таким образом, $U_{sx_2x_2} \in L_2^s(B_{s1} \cap S_\delta(0))$.

Отсюда $u \in W^2(B_{sl} \cap S_\delta(y))$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.
2. *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 6. — С. 1069–1072.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Том 2. — М.: Мир, 1966.
4. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
5. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
6. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
7. *Россовский Л. Е.* К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 122–131.
8. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргумертов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
9. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.

10. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
11. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
12. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
13. *Шамин Р. В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 141–156.
14. *Auscher C., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian C.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$// J. Evol. Equ. — 2001. — *1*, № 4. — С. 361–385.
15. *Axelsson A., Keith S., McIntosh A.* The Kato square root problem for mixed boundary value problems// J. Lond. Math. Soc. — 2006. — *74*. — С. 113–130.
16. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations// Math. Scand. — 1953. — *1*. — С. 55–72.
17. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
18. *Lions J.-L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionnaires d'opérateurs// J. Math. Soc. Jpn. — 1962. — *14*, № 2. — С. 233–241.
19. *McIntosh A.* On the comparability of $A^{1/2}$ and $A*^{1/2}$// Proc. Am. Math. Soc. — 1972. — *32*, № 2. — С. 430–434.
20. *Morrey C. B.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1966.
21. *Neverova D. A., Skubachevskii A. L.* On smoothness of generalized solutions to boundary value problems for strongly elliptic differential-difference equations on a boundary of neighboring domains// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — Принято в печать.
22. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*. — С. 332–361.
23. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Л. Тасевич
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: atasevich@gmail.com