Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 128–152

УДК 517.984.52

БАЗИСНОСТЬ РИССА СО СКОБКАМИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© 2015 г. **А. М. САВЧУК, И. В. САДОВНИЧАЯ**

Аннотация. В работе изучается оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = (L_2[0,\pi])^2$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

и регулярными краевыми условиями

$$U(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = 0.$$

Элементы матрицы P предполагаются суммируемыми на $[0,\pi]$ комплекснозначными функциями. Мы покажем, что оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ имеет дискретный спектр, состоящий из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, причем $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$ при $|n| \to \infty$, где $\{\lambda_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом и теми же краевыми условиями. Если краевые условия сильно регулярны, то спектр оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ является асимптотически простым. Мы покажем, что в этом случае система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$ (при условии нормировки собственных функций). В случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны, а собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически двукратны. В этом случае мы покажем, что система, составленная из соответствующих двумерных корневых подпространств оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, образует базис Рисса из подпространств (базис Рисса со скобками) в пространстве $\mathbb{H}$.

Введение.

Спектральная теория краевых задач общего вида для обыкновенных дифференциальных операторов берет свое начало с работ Г. Биркгофа [28, 29] и Я. Д. Тамаркина [23, 40, 41]. В этих работах были введены понятия регулярных и сильно регулярных краевых условий, было исследовано асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций. Кроме того, были доказаны теоремы о полноте системы собственных и присоединенных функций и исследована поточечная сходимость спектральных разложений. Исследование свойств безусловной базисности (базисности Рисса) системы корневых векторов для обыкновенных дифференциальных операторов началось в 60-е годы с работ Н. Данфорда, В. П. Михайлова и Г. Кесельмана [8, 17, 34]. Тогда же А. С. Маркусом [14] и В. Э. Кацнельсоном [6] был предложен абстрактный метод, позволяющий доказывать базисность Рисса для возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Этот метод получил существенное развитие в работах А. С. Маркуса и В. И. Мацаева (см., например, [15]). По поводу применения этого метода к обыкновенным дифференциальным операторам следует отметить статьи А. А. Шкаликова [24–26]. В нашей работе мы также используем этот метод. Изучение спектральных свойств дифференциальных систем первого порядка

$$iBY' + v(x)Y, \qquad Y = (y_j(x))_1^d,$$

с постоянной $n \times n$ матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

и $n \times n$ матриц-функцией $v(x)$ началось с работы Г. Биркгофа и Р. Лангера [30]. Из недавних работ, посвященных таким системам, отметим работы М. М. Маламуда, Л. Л. Оридороги и А. А. Лунева [12, 36]. В них введено понятие слабо регулярных краевых условий (для случая системы Дирака оно эквивалентно обычной регулярности) и доказаны теоремы о полноте, минимальности и базисности Рисса системы корневых векторов для случая $v \in L_\infty[a, b]$. Свойствам базисности системы собственных и присоединенных функций системы Дирака посвящена обширная литература. И. Трушин и М. Ямамото [42, 43] установили базисность Рисса в случае $P \in L_2$ и разделенных краевых условий. В серии работ П. Джакова и Б. Митягина (см., например, [31, 32]) изучаются спектральные свойства оператора Дирака (в частности, подробно обсуждается случай периодических, антипериодических и общих регулярных, но не сильно регулярных краевых условий). В [33] изучен оператор Дирака с потенциалом $P \in L_2$ и произвольными регулярными краевыми условиями. Для случая сильно регулярных условий была доказана базисность Рисса, а при отсутствии сильной регулярности — базисность Рисса из подпространств. В недавней работе [39] была доказана базисность Рисса для общего случая суммируемого на $[0, \pi]$ потенциала Q и сильно регулярных краевых условий. Отметим, что в работе А. А. Лунева и М. М. Маламуда [13] также анонсирован этот результат и метод его доказательства, отличный от предложенного в [39]. Необходимо также упомянуть работы различных авторов [2, 10, 27], в которых читатель может найти близкие результаты. Заметим еще, что свойства базисности естественным образом обобщаются до результатов о равносходимости (см. по этой теме обзорную статью [16] и ссылки в ней). Вопросы о равносходимости для системы корневых функций оператора Штурма—Лиувилля с негладкими потенциалами были исследованы вторым автором в работах [21, 22, 37]. Таким образом, результаты этой статьи подготовят базу для доказательства таких теорем в случае системы Дирака.

Настоящая статья организована следующим образом. В первом разделе приведены предварительные результаты, необходимые для дальнейшего. В частности, мы покажем, что достаточно изучить случай $p_1 \equiv p_4 \equiv 0$, сформулируем определение регулярных и сильно регулярных по Биркгофу краевых условий для случая системы Дирака и приведем несколько элементарных фактов об операторе $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом. Во втором разделе мы получаем асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Отметим, что здесь мы рассматриваем только общий случай $P \in L_1$, хотя наш метод позволяет уточнить оценки остаточных членов в этих формулах для случая $P \in L_p$ (случай $p \in [1, 2]$ разобран в работе [39]) и для шкалы пространств Бесова $P \in B^\theta_{1,q}$, $q \in [1, \infty]$, $\theta \geqslant 0$ (этот случай авторы планируют рассмотреть в отдельной работе). Третий раздел посвящен изучению функции Грина оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы найдем ее явный вид в терминах фундаментальной системы решений и докажем ограниченность этой функции в полуплоскостях $|\mathrm{Im}\,\lambda| > \alpha$. Следуя работе [7], мы построим здесь систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Также здесь доказана теорема об асимптотическом поведении спектральных проекторов. Результаты о полноте и минимальности системы собственных и присоединенных векторов оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ приведены в четвертом разделе работы. Отметим, что эти результаты уже были кратко изложены в работе [39]; здесь мы снабдим их полным доказательством. В четвертом разделе приведены также результаты о базисности Рисса для случая сильно регулярных краевых условий. По сравнению с работой [39] здесь мы несколько модифицировали и упростили доказательство. Наконец, в пятом разделе работы получен основной результат работы: доказана базисность Рисса из двумерных подпространств для случая произвольного суммируемого потенциала и регулярных, но не сильно регулярных краевых условий. Этот факт был анонсирован в [39]; здесь мы приводим его полное доказательство.

1. Обозначения и предварительные результаты

Заметим, что существует два альтернативных вида записи системы Дирака. В данной работе мы будем рассматривать систему вида

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где} \tag{1.1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi] \ni \mathbf{y}$. Функции p_j, $j = 1, 2, 3, 4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0, \pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия и область определения оператора будут обсуждаться ниже. Другой формой записи (см., например, [11]) является

$$\ell_Q(\mathbf{u}) = B\mathbf{u}' + Q\mathbf{u}, \quad \text{где} \tag{1.2}$$
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix}.$$

Эти формы записи эквивалентны. Так, замена $u_1 = \dfrac{1}{2}(y_1+y_2)$, $u_2 = \dfrac{i}{2}(y_1-y_2)$ сводит систему (1.2) к виду (1.1). Далее мы покажем, что достаточно изучить случай, когда $p_4 = p_1 = 0$ (для системы, записанной в форме (1.2) это эквивалентно равенствам $q_1 = -q_4$, $q_2 = q_3$).

Через $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$ будем обозначать вектор-функции на отрезке $[0,\pi]$, а через

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^\pi (f_1(x)\overline{g_1}(x) + f_2(x)\overline{g_2}(x))\, dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}$. Чтобы не усложнять запись, мы будем писать $\mathbf{f} \in L_p$, имея в виду, что $\mathbf{f} \in L_p[0,\pi] \times L_p[0,\pi]$, или $P \in L_p$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в L_p. Норму по переменной $x \in [0,\pi]$ в пространстве L_p или в $L_p \times L_p$ будем обозначать $\|\cdot\|_p$.

Перейдем к определению оператора $\mathcal{L}_P$, который свяжем с дифференциальным выражением ℓ_P. Прежде всего определим максимальный оператор

$$\mathcal{L}_{P,M}\,\mathbf{y} := \ell_P(\mathbf{y}); \qquad \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \{\mathbf{y} \in AC[0,\pi] : \ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\}$$

и минимальный оператор $\mathcal{L}_{P,m}$, являющийся сужением оператора $\mathcal{L}_{P,M}$ на область

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,m}) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\pi) = 0\}.$$

Здесь $AC[0,\pi] = W_1^1[0,\pi]$ — пространство абсолютно непрерывных функций. Поскольку элементы матрицы P — суммируемые функции, оба слагаемых дифференциального выражения $\ell_P(\mathbf{y})$ корректно определены как функции из L_1. При этом в область определения оператора входят только те функции $\mathbf{y}$, для которых сумма этих слагаемых принадлежит $\mathbb{H}$. Через $\mathcal{L}_{P^*,M}$ и $\mathcal{L}_{P^*,m}$ будем обозначать максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным дифференциальным выражением

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y}) := B\mathbf{y}' + P^*\mathbf{y}, \qquad \text{где } P^* = \begin{pmatrix} \overline{p_1} & \overline{p_3} \\ \overline{p_2} & \overline{p_4} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 1.1 (Формула Лагранжа). *Для любых функций $\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M})$, $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P^*,M})$ справедливо тождество*

$$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,M}\mathbf{g} \rangle + [\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi, \qquad \text{где } [\mathbf{f},\mathbf{g}]_0^\pi = -i\, f_1(x)\overline{g_1}(x)|_0^\pi + i\, f_2(x)\overline{g_2}(x)|_0^\pi. \tag{1.3}$$

Доказательство. Равенство (1.3) получается интегрированием по частям. □

Из этой формулы, в частности, получаем

$$\langle \mathcal{L}_{P,M}\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathcal{L}_{P^*,m}\mathbf{g} \rangle, \qquad \mathbf{f} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}),\ \mathbf{g} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P^*,m}). \tag{1.4}$$

В дальнейшем важную роль играет следующее утверждение, которое легко следует из известного результата теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [9, Гл. III, §2]).

Теорема I. *Пусть $\mathbf{A}(x)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются функциями пространства $L_1[0,\pi]$, а $\mathbf{f} \in \big[L_1[0,\pi]\big]^n$ — вектор-функция. Тогда при любом $c \in [0,\pi]$ уравнение*

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f} \quad \text{с условием} \quad \mathbf{y}(c) = \xi \in \mathbb{C}^n$$

имеет единственное решение $\mathbf{y}(\cdot) \in AC[0,\pi]$.

Напомним, что оператор F, действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве H, называется *фредгольмовым*, если его область определения плотна в H, образ замкнут, а дефектные числа $\{\alpha,\beta\}$, равные размерностям ядра и коядра, конечны.

Из утверждения 1.1 и теоремы I сразу следует

Утверждение 1.2. *При любом $\lambda \in \mathbb{C}$ операторы $\mathcal{L}_{P,M} - \lambda I$ и $\mathcal{L}_{P^*,m} - \overline{\lambda} I$ фредгольмовы, являются взаимно сопряженными, а их дефектные числа равны $\{2,0\}$ и $\{0,2\}$ соответственно.*

Перейдем к описанию расширений $\mathcal{L}$ оператора $\mathcal{L}_{P,m}$, для которых $\mathcal{L}_{P,m} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{L}_{P,M}$. Заметим, что любой такой оператор имеет область определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U_j(\mathbf{y}) = 0, 1 \leqslant j \leqslant \nu\},$$

где U_j — линейные формы от векторов $\mathbf{y}(0)$ и $\mathbf{y}(\pi)$. Эти формы можно считать линейно независимыми, и тогда их число ν заключено между 0 и 2. Если мы хотим, чтобы оператор $\mathcal{L}$ имел непустое резольвентное множество, т. е. для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ индексы оператора $\mathcal{L} - \lambda I$ были нулевыми, то согласно утверждению 1.2 имеем $\nu = 1$. Таким образом, оператор $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{P,U}$ имеет область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,U}) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(\mathcal{L}_{P,M}) : U(\mathbf{y}) = 0\}, \quad \text{где}$$

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

причем строки матрицы

$$\mathcal{U} := (C,\, D) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 1.1. Краевое условие, определенное формой U, называется *регулярным* (по Биркгофу), если $J_{14}J_{23} \neq 0$. Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием U (т. е. оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ с областью определения (1.5)), будем называть *регулярным*.

Далее в работе мы будем рассматривать только регулярные краевые условия, так как для данной задачи регулярные операторы сохраняют классические асимптотики для собственных значений и собственных функций.

Мы уже говорили выше, что без ограничения общности можно считать функции p_1 и p_4 нулевыми. Сформулируем соответствующее утверждение. Вначале напомним, что если два оператора A_1 и A_2 в гильбертовом пространстве с плотными областями определения подобны, т. е. существует такой ограниченный и ограниченно обратимый оператор T, что $A_2 = T^{-1}A_1T$, а $\mathfrak{D}(A_2) = T^{-1}\mathfrak{D}(A_1)$, то из замкнутости одного оператора следует замкнутость другого. Подобные операторы имеют одинаковый спектр, в частности, если спектр оператора A_1 состоит из собственных значений $\sigma(A_1) = \{\lambda_n\}$, то и $\sigma(A_2) = \{\lambda_n\}$, причем кратности этих собственных значений для A_1 и A_2 совпадают. Если $\{e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_1, то $\{T^{-1}e_n\}$ — система собственных и присоединенных векторов оператора A_2. Отсюда следует, что эти системы обладают одинаковыми геометрическими свойствами (полнота, минимальность, базисность Рисса, базисность Рисса со скобками и т. д.).

Утверждение 1.3. *Пусть $P(x)$ — произвольная матрица размера 2×2 с элементами $p_j \in L_1[0, \pi]$, $j = 1, 2, 3, 4$, а матрица $\mathcal{U}$ задает регулярные краевые условия. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ подобен оператору $\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}} + \gamma I$, где*

$$\widetilde{P}(x) = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{p}_2(x) \\ \widetilde{p}_3(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{p}_2(x) = p_2(x)e^{i(\varphi(x)-\psi(x))}, \qquad \widetilde{p}_3(x) = p_3(x)e^{i(\psi(x)-\varphi(x))}, \tag{1.6}$$

$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \qquad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x, \qquad \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt,$$

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D}), \quad \widetilde{C} = C, \quad \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D.$$

Доказательство. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{H}$ оператор умножения на матрицу $W(x)$

$$W : \mathbf{y} \mapsto \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что этот оператор ограничен, поскольку функции φ и ψ абсолютно непрерывны, и ограниченно обратим. Тогда

$$W^{-1}\ell_P(W\mathbf{f}) = W^{-1}BW\mathbf{f}' + \left(W^{-1}PW + W^{-1}BW'\right)\mathbf{f} =$$
$$= \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\mathbf{f}' + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 e^{i(\psi-\varphi)} \\ p_3 e^{i(\varphi-\psi)} & p_4 \end{pmatrix}\mathbf{f} + \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & -\psi' \end{pmatrix}\mathbf{f} = \ell_{\widetilde{P}}(\mathbf{f}) + \gamma\mathbf{f}.$$

Остается найти область определения оператора $W^{-1}\mathcal{L}_{P,U}W$. Заметим, что если $\mathbf{y} \in AC[0,\pi]$, то и $W^{-1}\mathbf{y} \in AC[0,\pi]$; если $\ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}$, то и $\ell_{\widetilde{P}}(W^{-1}\mathbf{y}) = W^{-1}\ell_P(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}$, так что для максимального оператора $W^{-1}\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,M}) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},M})$. Легко видеть, что

$$W(0) = I, \quad \text{а} \quad W(\pi) = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))dt\right) I.$$

Если $\mathbf{z} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{\widetilde{P},\widetilde{U}})$, то $\mathbf{z} = W^{-1}\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$. Тогда краевые условия принимают вид

$$C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = 0 \iff CW(0)\mathbf{z}(0) + DW(\pi)\mathbf{z}(\pi) = 0 \iff$$
$$\iff C\mathbf{z}(0) + \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D\mathbf{z}(\pi) = 0,$$

т. е.

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C}, \widetilde{D}), \quad \text{где} \quad \widetilde{C} = C, \text{ а } \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_1(t) - p_4(t))dt\right) D.$$

□

Всюду далее в работе мы будем считать, что преобразования уже проведены (при этом спектральный параметр λ мы заменяем на $\lambda + \gamma$). Таким образом, мы будем рассматривать оператор, порожденный дифференциальным выражением (1.1), где матрица $P(x)$ имеет вид

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad p_2(x),\ p_3(x) \in L_1[0,\pi], \tag{1.7}$$

и регулярными краевыми условиями (1.5).

Определение 1.2. Оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ называется *сильно регулярным*, если он регулярен и к тому же $(J_{12} + J_{34})^2 + 4J_{14}J_{23} \neq 0$.

Мы будем сравнивать асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{0,U}$, порожденный дифференциальным выражением $\ell_0(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}'$ и регулярным краевым условием $U(\mathbf{y}) = 0$ вида (1.5).

Утверждение 1.4. *Спектр оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ состоит из собственных значений, которые можно записать двумя сериями $-\frac{i}{\pi}\ln z_0 + 2n$ и $-\frac{i}{\pi}\ln z_1 + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, где z_0 и z_1 — корни квадратного уравнения*

$$J_{23}z^2 - [J_{12} + J_{34}]z - J_{14} = 0, \tag{1.8}$$

а значения ветви логарифма фиксируются в полосе $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$.

В дальнейшем мы будем нумеровать эти собственные значения одним индексом $n \in \mathbb{Z}$, объединяя две серии в одну:

$$\lambda_n^0 = \begin{cases} \varkappa_0 + n, & \text{для четных } n, \\ \varkappa_1 + n & \text{для нечетных } n, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \varkappa_0 = -\frac{i}{\pi}\ln z_0 \quad \varkappa_1 = -\frac{i}{\pi}\ln z_1 - 1, \tag{1.9}$$

причем $-1 < \operatorname{Re}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1 \leqslant 1$. В случае $\operatorname{Re}\varkappa_0 = \operatorname{Re}\varkappa_1 + 1$ для определенности будем считать, что $\operatorname{Im}\varkappa_0 \leqslant \operatorname{Im}\varkappa_1$.

Доказательство этого утверждения, так же как и другие сведения об операторе $\mathcal{L}_{0,U}$, можно найти в работе П. Джакова и Б. Митягина [32]. Мы, однако, приведем их здесь для удобства читателя.

Доказательство. Решениями уравнения $\ell_0(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальными условиями $(1,\,0)^t$ и $(0,\,1)^t$ являются функции $\mathbf{e}_1^0(x,\lambda) = (e^{i\lambda x},\,0)^t$ и $\mathbf{e}_2^0(x,\lambda) = (0,\,e^{-i\lambda x})^t$ соответственно, а общее решение имеет вид $\mathbf{y} = \omega_1^0\mathbf{e}_1^0 + \omega_2^0\mathbf{e}_2^0$. Подставляя это выражение в краевые условия, получаем систему

$$\begin{cases}[u_{11} + u_{13}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{12} + u_{14}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0,\\ [u_{21} + u_{23}e^{i\pi\lambda}]\omega_1^0 + [u_{22} + u_{24}e^{-i\pi\lambda}]\omega_2^0 = 0.\end{cases} \tag{1.10}$$

Обозначим матрицу этой системы через $M_0(\lambda)$. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ является собственным значением оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ тогда и только тогда, когда определитель $\Delta_0(\lambda) := \det M_0(\lambda)$ обращается в ноль. Непосредственными вычислениями получаем

$$\Delta_0(\lambda) = [J_{12} + J_{34}] - J_{23}e^{i\pi\lambda} + J_{14}e^{-i\pi\lambda}. \tag{1.11}$$

Остается сделать в этом уравнении подстановку $e^{i\pi\lambda} = z$. □

Утверждение 1.5. *Нормированные собственные функции $\mathbf{y}_n^0$, $n \in \mathbb{Z}$, сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ имеют вид*

$$\mathbf{y}_n^0 = \omega_{1,j}^0\big(e^{i\lambda_n^0 x},\,0\big)^t + \omega_{2,j}^0\big(0,\,e^{-i\lambda_n^0 x}\big)^t, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.12}$$

где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Числа $\omega_{i,j}^0$, где $i = 1,\,2$, а $j = 0,\,1$, определяются матрицей $\mathcal{U}$.

Доказательство. Собственные функции, введенные в доказательстве предыдущего утверждения, имеют вид $\omega_{1,n}^0\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)$. При этом числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ суть решения системы (1.10), в которой $\lambda = \lambda_n^0$. Поскольку матрица этой системы 2-периодична по параметру λ, а $\lambda_{n+2}^0 - \lambda_n^0 = 2$, то числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ зависят лишь от четности индекса n. Обозначим их $\omega_{1,j}^0$ и $\omega_{2,j}^0$, где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Остается нормировать собственные функции. Так как $\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0) = (e^{i\lambda_n^0 x}, 0)^t$ и $\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0) = (0, e^{-i\lambda_n^0 x})^t$, то

$$\big\|\omega_{1,j}^0\mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n^0) + \omega_{2,j}^0\mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n^0)\big\|_{\mathbb{H}}^2 = |\omega_{1,j}^0|^2\int_0^\pi |e^{i\lambda_n^0 x}|^2\,dx + |\omega_{2,j}^0|^2\int_0^\pi |e^{-i\lambda_n^0 x}|^2\,dx =$$

$$= |\omega_{1,j}^0|^2\int_0^\pi |e^{i\varkappa_j^0 x}|^2\,dx + |\omega_{2,j}^0|^2\int_0^\pi |e^{-i\varkappa_j^0 x}|^2\,dx.$$

Последнее выражение зависит только от четности n, а значит, после нормировки получим (1.12) с некоторыми новыми $\omega_{i,j}^0$, $i = 1,\,2$, которые по-прежнему зависят только от четности n. □

Замечание 1.1. Если оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то дискриминант квадратного уравнения (1.8) отличен от нуля и корни z_0, z_1 различны. Корневые подпространства регулярного, но не сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие каждому собственному значению, двумерны. При этом возможны два случая — либо в каждом подпространстве есть базис из двух собственных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, либо каждое подпространство содержит ровно один (с точностью до множителя) собственный вектор.

2. Асимптотические формулы

Обозначим через

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda) & e_{12}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda) & e_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{11}(x,\lambda)\\ e_{21}(x,\lambda)\end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e_{12}(x,\lambda)\\ e_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

матрицу фундаментальной системы решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ с начальными условиями $E(0,\lambda) = I$. Для исследования регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы воспользуемся результатами об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений (2.1) в комплексной λ-плоскости внутри полос $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\lambda| < \alpha\}$, полученными авторами в [20]. В этой работе рассматривался оператор $\mathcal{L}_{Q,U}$, записанный в форме (1.2), а оценки остаточных членов в асимптотических формулах были получены для потенциала Q из пространств L_p, $p \in [1,\infty]$. Здесь нам потребуются только результаты для случая $p=1$, причем мы переформулируем их для системы Дирака, записанной в форме (1.1) с матрицей (1.7).

Положим

$$\begin{aligned} &e_{11}(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \rho_{11}(x,\lambda), && e_{21}(x,\lambda) = \rho_{21}(x,\lambda),\\ &e_{12}(x,\lambda) = \rho_{12}(x,\lambda), && e_{22}(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \rho_{22}(x,\lambda). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Заметим сразу, что $\rho_{j,k}(0,\lambda) = 0$, $j,\,k \in \{1,2\}$.

Теорема II. *Пусть $P(x)$ имеет вид* (1.7)*, а $\alpha > 0$ — произвольное фиксированное число. Тогда*

$$\rho_{j,k}(x,\lambda) \to 0, \quad j,\,k \in \{1,\,2\}, \quad \text{при } \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty \tag{2.3}$$

равномерно по $x \in [0,\pi]$. Более того, найдется такое число $\beta = \beta(P,\alpha) > 0$, что для всех $\lambda \in \Pi_{\alpha,\beta} := \{\lambda \in \Pi_\alpha : |\operatorname{Re}\lambda| > \beta\}$

$$\rho_{1k}(x,\lambda) = \eta_{1k}(x,\lambda)e^{i\lambda x}, \qquad \rho_{2k}(x,\lambda) = \eta_{2k}(x,\lambda)e^{-i\lambda x}, \quad k = 1,\,2, \tag{2.4}$$

причем почти всюду на $[0,\pi]$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} &\sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \bigl|(\eta_{11}(x,\lambda))'_x\bigr| \leqslant M|p_2(x)|, && \sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \bigl|(\eta_{12}(x,\lambda))'_x\bigr| \leqslant M|p_2(x)|,\\ &\sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \bigl|(\eta_{21}(x,\lambda))'_x\bigr| \leqslant M|p_3(x)|, && \sup_{\lambda\in\Pi_{\alpha,\beta}} \bigl|(\eta_{22}(x,\lambda))'_x\bigr| \leqslant M|p_3(x)| \end{aligned} \tag{2.5}$$

для некоторого $M = M(P,\alpha)$.

Асимптотическое поведение функций $\mathbf{e}_j(x,\lambda)$ вне полос Π_α в работе [20] не изучалось. Применяя метод, аналогичный методу, использованному в этой работе, несложно получить асимптотические представления для $\mathbf{e}_j(x,\lambda)$, $j=1,\,2$, в секторах

$$S_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varepsilon < \arg\lambda < \pi - \varepsilon\} \quad \text{и} \quad S_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\pi + \varepsilon < \arg\lambda < -\varepsilon\},$$

где $\varepsilon \in (0,\pi/2)$ произвольно. Более того, можно получить квалифицированную оценку остаточных членов в этих представлениях в зависимости от индекса p пространства $L_p[0,\pi] \ni p_j$, $j = 2,\,3$. Здесь, однако, нас интересует только случай $p = 1$, и потому мы воспользуемся результатом работы [36]. В ней изучался случай общей системы $B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}$ в пространстве $(L_2[0,\pi])^n$. Мы сформулируем здесь теорему 2.2 этой работы для случая системы Дирака.

Теорема III. *Пусть матрица $P(x)$ имеет вид* (1.7)*. Существует матрица $Y(x,\lambda)$ фундаментальной системы решений уравнения $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$, элементы которой $y_{jk}(x,\lambda)$ являются целыми функциями параметра λ с ограничением на рост $|y_{jk}(x,\lambda)| \leqslant Me^{x|\lambda|}$, где M не зависит от x и λ. Кроме того, $Y(x,\lambda)$ имеет асимптотическое представление*

$$Y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x}(1+o(1)) & e^{-i\lambda x}\,o(1)\\ e^{i\lambda x}\,o(1) & e^{-i\lambda x}(1+o(1)) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

при $\lambda \to \infty$ в секторах S_1 и S_2 равномерно по $x \in [0,\pi]$.

Нам необходимо выяснить асимптотическое поведение функций $\mathbf{e}_1(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x,\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ во всей комплексной плоскости. Для этого мы воспользуемся теоремами II и III, а также фактом из теории целых функций, сформулированным ниже. Этот факт хорошо известен специалистам, но для полноты изложения мы приведем его с доказательством, опираясь на следующее утверждение (см. [35]).

Теорема IV. *Пусть $D \Subset \mathbb{C}$ — ограниченная область, а функция $f(z)$ голоморфна в D и непрерывна в $\overline{D}$. Пусть далее $\zeta \in D$, $U_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-\zeta| \leqslant \rho\}$, причем на окружности $|z-\zeta| = \rho$ имеется дуга, не принадлежащая D, длина которой $l \geqslant 2\pi\rho/n$ для некоторого натурального числа n. Пусть $|f(z)| \leqslant M_0$ для всех $z \in \partial D \cap \overline{U_\rho}$ и $|f(z)| \leqslant M$ для всех остальных точек $z \in \partial D$. Тогда $|f(\zeta)| \leqslant M_0^{1/n}M^{1-1/n}$.*

Лемма 2.1. *Пусть f — целая функция, а $S = \{z \in \mathbb{C} : \arg z \in (0, \pi/2)\}$. Обозначим*

$$M_0(r) = \sup\{|f(z)| : \arg z = 0,\ |z| \geqslant r\},$$
$$M_1(r) = \sup\{|f(z)| : \arg z \in [0, \pi/6],\ |z| \geqslant r\},$$
$$M = \sup\{|f(z)| : z \in \overline{S}\}.$$

Тогда $M_1(r) \leqslant M_0(r/4)^{1/4} M^{3/4}$.

Доказательство. Возьмем точку $\zeta = re^{i\alpha}$, где $\alpha \in [0, \pi/6]$. Случай $\alpha = 0$ тривиален, поскольку $M_0(r) \leqslant M_1(r)$, так что далее считаем $\alpha > 0$. Рассмотрим окружность радиуса $\rho = r\sqrt{2}\sin\alpha$ с центром в точке ζ. Легко видеть, что эта окружность лежит в правой полуплоскости, пересекает вещественную ось в точках $x_\pm = r(\cos\alpha \pm \sin\alpha)$, причем отрезок $[x_-, x_+]$ виден из точки ζ под прямым углом. Применим теорему IV к функции $f(z)$ и области $D = \{z : |z - \zeta| < \rho\} \cap S$. Тогда

$$|f(\zeta)| \leqslant \left(\max_{z \in [x_-, x_+]} |f(z)| \right)^{1/4} M^{3/4}.$$

Учитывая, что $\alpha \leqslant \pi/6$, получаем, что $x_- > r/4$, откуда следует утверждение леммы. □

Теорема 2.1. *Функции $e_{ij}(x, \lambda)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости и*

$$E(x, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x}(1 + o(1)) + e^{-i\lambda x}\, o(1) & e^{i\lambda x}\, o(1) + e^{-i\lambda x}\, o(1) \\ e^{i\lambda x}\, o(1) + e^{-i\lambda x}\, o(1) & e^{i\lambda x}\, o(1) + e^{-i\lambda x}(1 + o(1)) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

при $\mathbb{C} \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$.

Доказательство. Из теоремы III следует, что функции $e_{jk}(x, \lambda)$ являются целыми функциями с ограничением на рост $|e_{jk}(x, \lambda)| \leqslant Me^{x|\lambda|}$. Матрица $E(x, \lambda)$, определенная в (2.1), имеет вид

$$E(x, \lambda) = Y^{-1}(0, \lambda) Y(x, \lambda).$$

Тогда из (2.6) следует (2.7) при $S_j \ni \lambda \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. В то же время представление (2.3) влечет (2.7) на лучах $\arg\lambda = 0$ и $\arg\lambda = \pi$. Для завершения доказательства теоремы нам достаточно показать, что представление (2.7) справедливо также в секторах

$$S_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda \in [0, \pi/6]\}, \quad S_4 = \{\arg\lambda \in [5\pi/6, \pi]\},$$
$$S_5 = \{\arg\lambda \in [-\pi, -5\pi/6]\}, \quad \text{и} \quad S_6 = \{\arg\lambda \in [-\pi/6, 0]\}.$$

Рассмотрим сектор S_3 (остальные три случая разбираются аналогично). Пусть $\rho_{jk}(x, \lambda)$, $j, k = 1, 2,$ — функции, введенные в (2.3). Зафиксируем произвольную пару индексов j, k и точку $x \in [0, \pi]$ и обозначим $f(z) = \rho_{jk}(x, z)e^{ixz}$. Тогда $f(z)$ является целой функцией, причем $|f(z)| \leqslant M$ в секторе S_3, а на положительном луче вещественной оси $f(z) = o(1)$ при $z \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. Согласно лемме 2.1, $f(z) = o(1)$ в секторе S_3 при $|z| \to \infty$ равномерно по $x \in [0, \pi]$. □

Теорема II и теорема 2.1 позволяют получить асимптотические формулы для характеристического определителя оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом вида (1.7) и регулярными краевыми условиями.

Определение 2.1. Пусть потенциал $P \in L_1$, краевые условия заданы матрицей $\mathcal{U}$, а функции $\mathbf{e}_1(x, \lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x, \lambda)$ определены в (2.1). *Характеристическим определителем* $\Delta(\lambda)$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ называется детерминант матрицы

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11} + u_{13}e_{11}(\pi, \lambda) + u_{14}e_{21}(\pi, \lambda) & u_{12} + u_{13}e_{12}(\pi, \lambda) + u_{14}e_{22}(\pi, \lambda) \\ u_{21} + u_{23}e_{11}(\pi, \lambda) + u_{24}e_{21}(\pi, \lambda) & u_{22} + u_{23}e_{12}(\pi, \lambda) + u_{24}e_{22}(\pi, \lambda) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Утверждение 2.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7)*, а краевые условия U регулярны. Пусть $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, а $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Тогда при $\lambda \to \infty$ в произвольной полосе Π_α справедливо асимптотическое представление*

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + o(1).$$

Кроме того, найдется такая полоса Π_{α_0}, что при $\lambda \to \infty$ вне этой полосы справедливо асимптотическое представление

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + o(1)).$$

Доказательство. Определитель матрицы $M(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{13}e_{12}(\pi,\lambda) + J_{14}e_{22}(\pi,\lambda) + J_{32}e_{11}(\pi,\lambda) + J_{42}e_{21}(\pi,\lambda) + \\ + J_{34}(e_{11}(\pi,\lambda)e_{22}(\pi,\lambda) - e_{12}(\pi,\lambda)e_{21}(\pi,\lambda)) \quad (2.9)$$

(напомним, что через $J_{\alpha\beta}$ мы обозначаем определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$). Заметим, что выражение $e_{11}(x,\lambda)e_{22}(x,\lambda) - e_{12}(x,\lambda)e_{21}(x,\lambda)$ является определителем матрицы фундаментальной системы решений в точке $x \in [0,\pi]$. Поскольку след матрицы $B^{-1}(\lambda I - P(x))$ равен нулю, то, согласно теореме Лиувилля (см., например, [9, Гл. III, §1]), это выражение не зависит от x, а при $x = 0$ оно равно единице по определению функций $\mathbf{e}_1(x,\lambda)$ и $\mathbf{e}_2(x,\lambda)$. Подставляя асимптотические формулы (2.7) в соотношение (2.9), получим

$$\Delta(\lambda) = J_{12} + J_{34} + J_{14}e^{-i\pi\lambda} + J_{32}e^{i\pi\lambda} + o(1)\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) = \Delta_0(\lambda) + o(1)\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right).$$

Остаточный член в этом равенстве есть $o(1)$ при $\Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, и первое утверждение теоремы доказано. Докажем второе утверждение. Разберем случай $\operatorname{Im}\lambda > 0$. Подберем $\alpha_0 > 0$ так, что

$$|J_{12}| + |J_{34}| + |J_{32}|e^{-\pi\alpha_0} \leqslant |J_{14}|\frac{e^{\pi\alpha_0}}{2}.$$

Тогда при $\operatorname{Im}\lambda > \alpha_0$

$$|\Delta_0(\lambda)| \geqslant |J_{14}e^{-i\pi\lambda}| - |J_{12} + J_{34} + J_{32}e^{i\pi\lambda}| \geqslant \frac{1}{2}|J_{14}e^{-i\pi\lambda}|, \quad (2.10)$$

а значит,

$$|\Delta_0(\lambda)|^{-1}\left(|e^{i\pi\lambda}| + |e^{-i\pi\lambda}|\right) \leqslant 2|J_{14}|^{-1}\left(1 + |e^{-2\pi\alpha_0}|\right) \leqslant 4|J_{14}|^{-1}.$$

Итак, при $\operatorname{Im}\lambda > \alpha_0$

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda)(1 + o(1)).$$

Случай $\operatorname{Im}\lambda < 0$ разбирается аналогично. □

Теперь мы покажем, что собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ асимптотически сближаются с собственными значениями невозмущенного оператора.

Теорема 2.2. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7) *и $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака. Обозначим через $\{\lambda_n^0\}$ собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ и через λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с учетом алгебраической кратности. Тогда при подходящей нумерации последовательности $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (и такая нумерация возможна)*

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1) \quad \textit{при} \quad |n| \to \infty.$$

В частности, $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Pi_{\alpha_0}$ для некоторого $\alpha_0 > 0$.

Доказательство. Обозначим $f(\lambda) := \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)$. В силу утверждения 2.1, найдется α_0 такое, что

$$\frac{|f(\lambda)|}{|\Delta_0(\lambda)|} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty,\ \lambda \notin \Pi_{\alpha_0}.$$

Выберем число $\alpha > \alpha_0$ так, чтобы на прямых $|\operatorname{Im}\lambda| = \alpha$ было выполнено неравенство $|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|$. Далее зафиксируем произвольное число $\mu \in (0,2)$, для которого на прямой $\operatorname{Re}\lambda = \mu$ нет нулей функции $\Delta_0(\lambda)$, и обозначим

$$m = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : \operatorname{Re}\lambda = \mu\}.$$

Вновь обращаясь к утверждению 2.1, видим, что $|f(\lambda)| \to 0$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_α. Тогда найдется такое натуральное N_1, что при всех $\lambda \in \overline{\Pi}_\alpha$, $|\operatorname{Re}\lambda| \geqslant \mu + 2N_1$, выполнено $|f(\lambda)| < m$. Заметим, что функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична с периодом 2, а значит, на вертикальных отрезках $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, $n > N_1$, внутри полосы Π_α выполнено $\min|\Delta_0(\lambda)| = m > |f(\lambda)|$. Применим теорему Руше к прямоугольнику, ограниченному прямыми $\operatorname{Im}\lambda = \pm\alpha$, $\operatorname{Re}\lambda = \mu \pm 2n$, где $n > N_1$ и получим, что функции $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ имеют одинаковое (с учетом кратности) число нулей в любом таком прямоугольнике.

Перейдем к изучению нулей функции $\Delta(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ внутри полосы Π_α. Зафиксируем число r так, чтобы круги $U_r(\lambda_n^0) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n^0| \leqslant r\}$, $n \in \mathbb{Z}$, не пересекались и лежали в полосе Π_α. Обозначим

$$m_n = \min\{|\Delta_0(\lambda)| : |\lambda - \lambda_n^0| = r\}.$$

Поскольку функция $\Delta_0(\lambda)$ периодична, то $m_n \geqslant M$ для некоторого $M > 0$. Тогда существует такое натуральное N_2, что при $|\mathrm{Re}\,\lambda| > \mu + 2N_2$ на окружностях $|\lambda - \lambda_n^0| = r$ выполнено $|f(\lambda)| < |\Delta_0(\lambda)|$. По теореме Руше количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ в каждом круге $U_r(\lambda_n^0)$, $|n| \geqslant 2N_2 + 2$, совпадает. Теперь мы занумеруем нули функции $\Delta(\lambda)$ в каждом таком круге так, чтобы их номера совпадали с номерами нулей функции $\Delta_0(\lambda)$ в этом же круге. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что количество нулей функций $\Delta(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$, не попавших в объединение этих кругов, конечно и одинаково. Проведем нумерацию оставшихся нулей функции $\Delta(\lambda)$ в произвольном порядке. Нули функции $\Delta(\lambda)$ — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ — мы обозначим $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Остается заметить, что число r мы можем уменьшать и выбирать сколь угодно малым. Для любого такого r найдется номер $N(r)$, что при всех $|n| > N(r)$ выполнено $|\lambda_n - \lambda_n^0| < r$. Иными словами, $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$. □

Теперь докажем теорему об асимптотике собственных функций сильно регулярного оператора. В случае регулярного, но не сильно регулярного оператора собственные значения асимптотически двукратны. В этом случае мы изучим асимптотическое поведение соответствующих двумерных спектральных проекторов (см. теорему 3.2 ниже).

Теорема 2.3. *Пусть потенциал $P(x)$ имеет вид* (1.7)*, а оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ сильно регулярен. Обозначим через $\{\mathbf{y}_n(x)\}$ нормированные собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n\}$, а через $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_n^0\}$. Тогда*

$$\mathbf{y}_n(x) = \mathbf{y}_n^0(x) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где } \|\mathbf{r}_n\|_C \to 0. \tag{2.11}$$

Более того, справедливо представление

$$y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x), \qquad y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x), \tag{2.12}$$

причем $|\tau_{j,n}(0)| \leqslant C$, $j = 1, 2$, а производные функций $\tau_{j,n}(x)$ подчинены оценке

$$|\tau_{j,n}'(x)| \leqslant C(|p_2(x)| + |p_3(x)|) \tag{2.13}$$

почти всюду на $[0, \pi] \ni x$, где постоянная C не зависит ни от n, ни от x.

Доказательство. Поскольку оператор $\mathcal{L}_{0,U}$ сильно регулярен, то все его собственные значения просты. Обозначим $\delta = \min\limits_{n\neq m} |\lambda_n^0 - \lambda_m^0|/2$. Тогда в силу теоремы 2.2 существует номер N такой, что для всех $|n| > N$ в δ-окрестности точки λ_n^0 лежит ровно одно собственное значение λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Из определения собственных значений следует, что $\Delta_0(\lambda_n^0) = 0$, где $\Delta_0(\lambda) = \det M_0(\lambda)$,

$$M_0(\lambda) = \begin{pmatrix} M_{11}^0(\lambda) & M_{12}^0(\lambda) \\ M_{21}^0(\lambda) & M_{22}^0(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}^0(\pi,\lambda) & e_{12}^0(\pi,\lambda) \\ e_{21}^0(\pi,\lambda) & e_{22}^0(\pi,\lambda) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\omega_n^0 = (M_{12}^0(\lambda_n^0), -M_{11}^0(\lambda_n^0))^t$. Тогда функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x) = \omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)$$

является собственной (ненормированной) функцией для оператора $\mathcal{L}_{0,U}$. Для $|n| > N$ аналогично определим вектор $\omega_n = (M_{12}(\lambda_n), -M_{11}(\lambda_n))^t$, так что функция

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) = \omega_{1,n}\mathbf{e}_1(x, \lambda_n) + \omega_{2,n}\mathbf{e}_2(x, \lambda_n)$$

является собственной для оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Из (2.3) следует, что

$$\|\mathbf{e}_1(x, \lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n)\|_C + \|\mathbf{e}_2(x, \lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n)\|_C \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty,$$

а из теоремы 2.2 и явного вида функций $\mathbf{e}_1^0(x, \lambda)$ и $\mathbf{e}_2^0(x, \lambda)$ —

$$\|\mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n) - \mathbf{e}_1^0(x, \lambda_n^0)\|_C + \|\mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n) - \mathbf{e}_2^0(x, \lambda_n^0)\|_C \to 0.$$

Тогда $\|\omega_n - \omega_n^0\| \longrightarrow 0$, а значит,

$$\widetilde{\mathbf{y}}_n(x) = \omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2(x,\lambda_n) + (\omega_{1,n} - \omega_{1,n}^0)\mathbf{e}_1(x,\lambda_n) + (w_{2,n} - \omega_{2,n}^0)\mathbf{e}_2(x,\lambda_n) = \\ = \omega_{1,n}^0 \mathbf{e}_1^0(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}^0 \mathbf{e}_2^0(x,\lambda_n) + \mathbf{r}_n(x), \qquad \text{где} \quad \|\mathbf{r}_n(x)\|_C \to 0.$$

Остается нормировать функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n$ и $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$. Заметим, что $\big|\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}\big| \leqslant C\|\mathbf{r}_n\|_C = o(1)$. Далее, функции $\widetilde{\mathbf{y}}_n^0$ зависят только от четности номера n, а значит, последовательность норм $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ (и в пространстве C, и в пространстве $\mathbb{H}$) отделена от нуля и от бесконечности. Тогда тем же свойством обладает и последовательность $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|\}_{\mathbb{N}}$, откуда

$$\left\| \frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}} - \frac{\widetilde{\mathbf{y}}_n^0(x)}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}} \right\|_C \leqslant \frac{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}\,\|\widetilde{\mathbf{y}}_n - \widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C + \|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_C\,\big|\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}} - \|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\big|}{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\,\|\widetilde{\mathbf{y}}_n^0\|_{\mathbb{H}}} = o(1),$$

и представление (2.11) доказано. Для доказательства представления (2.12) воспользуемся соотношениями (2.2) и (2.3). Получим

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\left(\omega_{1,n} + \omega_{1,n}\eta_{11}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{12}(x,\lambda_n)\right), \\ \widetilde{y}_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\left(\omega_{2,n} + \omega_{1,n}\eta_{21}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta_{22}(x,\lambda_n)\right), \end{cases} \qquad |n| > N.$$

Введем обозначения

$$\widetilde{\tau}_{1,n}(x) = \widetilde{y}_{1,n}(x)e^{-i\lambda_n x} \quad \text{и} \quad \widetilde{\tau}_{2,n}(x) = \widetilde{y}_{2,n}(x)e^{i\lambda_n x}.$$

Тогда $\widetilde{\tau}_{j,n}(0) = \omega_{j,n} = \omega_{j,n}^0 + o(1)$ при $|n| \to \infty$, $j = 1, 2$. Поскольку числа $\omega_{1,n}^0$ и $\omega_{2,n}^0$ зависят только от четности номера n, то последовательности $\{\widetilde{\tau}_{1,n}(0)\}_{|n|>N}$ и $\{\widetilde{\tau}_{2,n}(0)\}_{|n|>N}$ ограничены. Остается оценить производные:

$$\widetilde{\tau}'_{j,n}(x) = \omega_{1,n}\eta'_{j1}(x,\lambda_n) + \omega_{2,n}\eta'_{j2}(x,\lambda_n),$$

а значит, согласно (2.4),

$$|\widetilde{\tau}'_{1,n}(x)| \leqslant M|p_2(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|), \qquad |\widetilde{\tau}'_{2,n}(x)| \leqslant M|p_3(x)|(|\omega_{1,n}| + |\omega_{2,n}|).$$

Отсюда сразу следует оценка (2.13) для ненормированных функций $\widetilde{\mathbf{y}}_n$. Так как нормы $\{\|\widetilde{\mathbf{y}}_n\|_{\mathbb{H}}\}_{|n|>N}$ отделены от нуля, то эта оценка сохранится и после нормировки. □

3. Функция Грина

Мы покажем, что резольвента оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ компактна, и изучим асимптотическое поведение производящей функции $G(t,x,\lambda)$ этого компактного оператора (функции Грина) при $\lambda \to \infty$.

Утверждение 3.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7). *Резольвента $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ определена при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, где λ_n — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, и является интегральным оператором в $\mathbb{H}$*

$$\mathfrak{R}(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt. \tag{3.1}$$

Функция $G(t,x,\lambda)$ непрерывна на квадрате $(t,x) \in [0,\pi]^2$, за исключением диагонали $x = t$.

Доказательство. Матрица $E(x,\lambda)$, определенная в (2.1), удовлетворяет уравнению

$$BE'(x,\lambda) + P(x)E(x,\lambda) = \lambda E(x,\lambda),$$

причем $E(0,\lambda) = I$. Применим метод вариации постоянных к уравнению $\ell_P(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}$. Тогда решение этого уравнения примет вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda) = \omega_1\mathbf{e}_1(x,\lambda) + \omega_2\mathbf{e}_2(x,\lambda) - \int_x^\pi E(x,\lambda)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \tag{3.2}$$

где ω_1 и ω_2 — произвольные числа. Легко видеть, что

$$\mathbf{y}(0,\lambda) = \omega - \int_0^\pi E^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt, \quad \mathbf{y}(\pi,\lambda) = E(\pi,\lambda)\omega, \quad \text{где } \omega = (\omega_1,\omega_2)^t.$$

Для определения вектора ω воспользуемся краевыми условиями $C\mathbf{y}(0)+D\mathbf{y}(\pi)=0$, введенными в (1.5). Тогда

$$\omega=\int\limits_0^\pi M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где $M(\lambda)=C+DE(\pi,\lambda)$. Матрица $M^{-1}(\lambda)$ определена тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda)=\det M(\lambda)\neq 0$, т. е. для всех $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Функция $\mathbf{y}(x,\lambda)$ теперь принимает вид

$$\mathbf{y}(x,\lambda)=\int\limits_0^\pi G(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)\,dt,$$

где

$$G(t,x,\lambda)=\begin{cases}E(x,\lambda)M^{-1}(\lambda)CE^{-1}(t,\lambda)B^{-1} & \text{при } t<x,\\ E(x,\lambda)(M^{-1}(\lambda)C-I)E^{-1}(t,\lambda)B^{-1} & \text{при } t>x,\end{cases}\tag{3.3}$$

что доказывает требуемое утверждение. □

Определение 3.1. Функция $G(t,x,\lambda)$ называется *функцией Грина* оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Через $G_0(t,x,\lambda)$ будем обозначать функцию Грина невозмущенного оператора $\mathcal{L}_{0,U}$.

Отметим, что из доказанного утверждения следует компактность в пространстве $\mathbb{H}$ оператора $\mathfrak{R}(\lambda)$ при любом $\lambda\notin\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (отсюда, в частности, следует замкнутость оператора $\mathcal{L}_{P,U}$).

Наша ближайшая цель — получить оценки для функции $G(t,x,\lambda)$. Эти оценки являются ключевыми для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Для упрощения дальнейших выкладок обозначим матрицу $E(x,\lambda)E^{-1}(a,\lambda)$ через $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$, где $0\leqslant a,\ x\leqslant\pi$, $\lambda\in\mathbb{C}$, и найдем ее в явном виде. Мы уже отмечали в доказательстве утверждения 2.1, что $\det E(x,\lambda)\equiv 1$. Тогда

$$E^{-1}(a,\lambda)=\begin{pmatrix}e_{22}(a,\lambda) & -e_{12}(a,\lambda)\\ -e_{21}(a,\lambda) & e_{11}(a,\lambda)\end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda)=\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{12}(a,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(a,x,\lambda) & \mathcal{E}_{22}(a,x,\lambda)\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_{j1}(a,x,\lambda)=e_{j1}(x,\lambda)e_{22}(a,\lambda)-e_{j2}(x,\lambda)e_{21}(a,\lambda),\\ \mathcal{E}_{j2}(a,x,\lambda)=e_{j2}(x,\lambda)e_{11}(a,\lambda)-e_{j1}(x,\lambda)e_{12}(a,\lambda),\quad j=1,\,2.\end{gathered}\tag{3.4}$$

В случае $P(x)\equiv 0$ будем использовать обозначения $\mathcal{E}^0(a,x,\lambda)=(\mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda))$, $j,\,k=1,\,2$.

Лемма 3.1. *Матрица $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению*

$$B\mathcal{E}'(x)+P(x)\mathcal{E}(x)=\lambda\mathcal{E}(x),\quad x\in[0,\pi]\tag{3.5}$$

и начальному условию $\mathcal{E}(a,a,\lambda)=I$. Функции $\mathcal{E}_{ij}(a,x,\lambda)$ аналитичны по λ во всей комплексной плоскости, и при $\lambda\to\infty$ верно представление

$$\mathcal{E}(a,x,\lambda)=\begin{pmatrix}e^{i\lambda\xi}(1+o(1))+e^{-i\lambda\xi}\,o(1) & e^{i\lambda\xi}\,o(1)+e^{-i\lambda\xi}\,o(1)\\ e^{i\lambda\xi}\,o(1)+e^{-i\lambda\xi}\,o(1) & e^{i\lambda\xi}\,o(1)+e^{-i\lambda\xi}(1+o(1))\end{pmatrix},\ \xi=x-a,\tag{3.6}$$

при $\mathbb{C}\ni\lambda\to\infty$ равномерно по $0\leqslant a,\ x\leqslant\pi$.

Доказательство. То, что матрица $\mathcal{E}(a,x,\lambda)$ удовлетворяет уравнению (3.5), сразу следует из (3.4). Равенство $\mathcal{E}(a,a,\lambda)=I$ очевидно. Асимптотическое представление (3.6) следует из (2.7). □

Для дальнейшего нам необходимы сведения об операторе $(\mathcal{L}_{P,U})^*$.

Утверждение 3.2. *Сопряженным к регулярному оператору $\mathcal{L}_{P,U}$ является оператор, который задается сопряженным дифференциальным выражением*

$$\ell_{P^*}(\mathbf{y})=B\mathbf{y}'+P^*(x)\mathbf{y},\qquad \text{где } P^*(x)=\begin{pmatrix}0 & \overline{p_3}(x)\\ \overline{p_2}(x) & 0\end{pmatrix},$$

и сопряженными краевыми условиями. Сопряженные краевые условия выписываются неоднозначно, в частности, матрицу краевых условий можно взять равной

$$\mathcal{U}^* = \begin{pmatrix} \overline{J_{23}} & \overline{J_{13}} & -\overline{J_{12}} & 0 \\ 0 & -\overline{J_{34}} & \overline{J_{24}} & \overline{J_{23}} \end{pmatrix}.$$

Для любого регулярного (сильно регулярного) оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ его сопряженный оператор $(\mathcal{L}_{P,U})^* = \mathcal{L}_{P^*,U^*}$ также является регулярным (сильно регулярным). Собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$ совпадают (с учетом кратности) с числами $\overline{\lambda}_n$, где λ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$.

Для всякого $\lambda \notin \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ определена резольвента $\mathfrak{R}^*(\lambda) = (\mathcal{L}_{P^*,U^*} - \lambda I)^{-1}$, которая имеет вид

$$\mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G^*(t,x,\lambda)\mathbf{f}(t)dt.$$

Матрица $G^*(t,x,\lambda) = (g^*_{jk}(t,x,\lambda))$ связана с функцией $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$, введенной в (3.1), соотношениями

$$g^*_{jk}(t,x,\lambda) = \overline{g_{kj}}(x,t,\overline{\lambda}), \qquad j,\, k = 1,\, 2, \quad x,\, t \in [0,\pi],\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Вид сопряженного дифференциального выражения следует из леммы 1.1. Вид сопряженных краевых условий и их регулярность проверяются непосредственными вычислениями с использованием тождества (1.3) и определения 1.1. Соотношения (3.7) общеизвестны. □

Для сокращения записи далее будем обозначать

$$U_\delta(\lambda_n) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\}, \qquad \Omega_\delta = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\lambda_n),$$

$$\Omega_{\alpha,\delta} = \Pi_\alpha \cap \Omega_\delta, \qquad \Omega_{\alpha,\delta,R} = \{z \in \Omega_{\alpha,\delta} : |\mathrm{Re}\, z| > R\}.$$

Лемма 3.2. *Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_\delta}$ характеристический определитель регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке $|\Delta(\lambda)| \geqslant M e^{\pi|\mathrm{Im}\,\lambda|}$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2 и утверждению 2.1 найдется такое число $\alpha_0 > 0$, что все круги $U_\delta(\lambda_n)$ лежат в полосе Π_{α_0} и при $\lambda \to \infty$ вне Π_{α_0} справедливо равенство $\Delta(\lambda)/\Delta_0(\lambda) = 1 + o(1)$. Увеличивая, если нужно, число α_0, можно считать, что $|\Delta(\lambda)| \geqslant |\Delta_0(\lambda)|/2$ для всех $\lambda \notin \Pi_{\alpha_0}$. Тогда из неравенства (2.10) следует доказываемое неравенство при $\mathrm{Im}\,\lambda > \alpha_0$. Случай $\mathrm{Im}\,\lambda < -\alpha_0$ аналогичен. Для завершения доказательства остается показать, что для всех точек $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha_0,\delta}}$ справедлива оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant M$ при некотором $M > 0$. Согласно теореме 2.2 найдется такое число R, что для всех собственных значений λ_n, $|\lambda_n| > R$, справедливы неравенства $|\lambda_n - \lambda_n^0| < \delta/2$. В силу периодичности функции $\Delta_0(\lambda)$ существует такое $m > 0$, что $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant m$ в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$. Поскольку $\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + o(1)$ при $\lambda \to \infty$ в полосе $\lambda \in \Pi_{\alpha_0}$ (см. утверждение 2.1), то, увеличивая, если необходимо, число R, можно считать, что при $|\mathrm{Re}\,\lambda| > R$ выполнена оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$ в Π_{α_0} вне кругов $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$. Так как при $|\mathrm{Re}\,\lambda| > R$ круг $U_{\delta/2}(\lambda_n^0)$ содержится в круге $U_\delta(\lambda_n)$, то оценка $|\Delta(\lambda)| \geqslant m/2$ выполнена при всех $\lambda \in \overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta,R}$. Наконец, на компакте

$$\{\lambda : |\mathrm{Im}\,\lambda| \leqslant \alpha_0,\ |\mathrm{Re}\,\lambda| \leqslant R,\ |\lambda - \lambda_n| \geqslant \delta,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

функция $\Delta(\lambda)$ не обращается в ноль, а значит, отделена от нуля. □

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный оператор Дирака с потенциалом вида (1.7) и регулярными краевыми условиями U. Для любого $\delta > 0$ существует такое число $M = M(P,U,\delta)$, что в $\overline{\Omega_\delta}$ функция $G(t,x,\lambda) = (g_{jk}(t,x,\lambda))$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ удовлетворяет оценке*

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M.$$

Кроме того, для любых положительных чисел α, δ и ε найдется такое $R > 0$, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ и всех $t, x \in [0,\pi]$ выполнено

$$|g_{jk}(t,x,\lambda) - g^0_{jk}(t,x,\lambda)| < \varepsilon,$$

где $G_0(t,x,\lambda) = (g^0_{jk}(t,x,\lambda))$ — *функция Грина оператора* $\mathcal{L}_{0,U}$.

Доказательство. Матрицы $E(x,\lambda)$, $M(\lambda)$, C и $E^{-1}(t,\lambda)$ явно выписаны в (2.1), (2.8), (1.5) и (3.4) соответственно. Тогда из (3.3) непосредственными вычислениями получаем, что

$$G(t,x,\lambda) = i\left(\frac{J_{12}}{\Delta(\lambda)} - \chi_{t>x}(t,x)\right)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(t,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(t,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(t,x,\lambda)\end{pmatrix} + \\ + \frac{i}{\Delta(\lambda)}\begin{pmatrix}\mathcal{E}_{11}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{12}(\pi,x,\lambda)\\ \mathcal{E}_{21}(\pi,x,\lambda) & -\mathcal{E}_{22}(\pi,x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{14} & J_{24}\\ J_{13} & J_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_{22}(t,\lambda) & e_{12}(t,\lambda)\\ -e_{21}(t,\lambda) & -e_{11}(t,\lambda)\end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $\chi_{t>x}$ — характеристическая функция треугольника $t>x$, а $\Delta(\lambda)$ — определитель, введенный в определении 2.1. Пусть $\alpha_0 > 0$ таково, что полоса Π_{α_0} содержит все круги $U_\delta(\lambda_n)$. Пусть вначале $|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant \alpha_0$. Проведем оценку функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant t < x \leqslant \pi$. В силу представлений (3.6) функции $\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)$ удовлетворяют оценкам

$$|\mathcal{E}_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t)}.$$

Аналогично

$$|\mathcal{E}_{jk}(\pi,x,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda|(\pi-x)}, \qquad \text{а} \quad |e_{jk}(t,\lambda)| \leqslant Me^{|\operatorname{Im}\lambda| t},$$

где M не зависит от t, x и λ. Применяя лемму 3.2, видим, что вне полосы Π_{α_0},

$$|g_{jk}(t,x,\lambda)| \leqslant M\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-t-\pi)} + e^{|\operatorname{Im}\lambda|(t-x)}\right) \leqslant 2M,$$

поскольку оба числа $x-t-\pi$ и $t-x$ неположительны. Для оценки функции $G(t,x,\lambda)$ на треугольнике $0 \leqslant x < t \leqslant \pi$ воспользуемся соотношением (3.7), согласно которому $|g_{jk}(t,x,\lambda)| = |g^*_{kj}(x,t,\overline{\lambda})|$. Поскольку координаты точки x и t поменялись местами, а $\overline{\lambda}$ по-прежнему лежит вне полосы Π_{α_0}, то мы можем применить рассуждения, приведенные выше, к функциям g^*_{kj}, и вне полосы Π_{α_0} оценка функции G получена. Согласно асимптотическим представлениям (2.3) и (3.6) функции e_{jk} и $\mathcal{E}_{jk}$ ограничены в произвольной полосе Π_α. Отсюда и из леммы 3.2 следует ограниченность функции $G(t,x,\lambda)$ в $\overline{\Omega}_{\alpha_0,\delta}$.

Докажем второе утверждение теоремы. Зафиксируем числа α и δ. Из теоремы II следует, что

$$e_{jk}(x,\lambda) = e^0_{jk}(x,\lambda) + o(1) \quad \text{при} \quad \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$$

равномерно по x, а из (3.6) следует, что и

$$\mathcal{E}_{jk}(a,x,\lambda) = \mathcal{E}^0_{jk}(a,x,\lambda) + o(1) \quad \text{при} \quad \Pi_\alpha \ni \lambda \to \infty$$

равномерно по x и a. Согласно лемме 3.2 найдутся такие положительные числа R и M, что при всех $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$ выполнены неравенства $|\Delta(\lambda)| \geqslant M$ и $|\Delta_0(\lambda)| \geqslant M$. Тогда из утверждения 2.1 следует

$$\Delta^{-1}(\lambda) = \Delta_0^{-1}(\lambda) + o(1) \quad \text{при} \quad \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}} \ni \lambda \to \infty.$$

Подставляя эти асимптотические представления в равенство (3.8) (записанное для $G(t,x,\lambda)$ и $G_0(t,x,\lambda)$) и учитывая равномерную ограниченность функций $\Delta^{-1}(\lambda)$, $e^0_{jk}(x,\lambda)$ и $\mathcal{E}^0_{jk}(t,x,\lambda)$ на множестве $\lambda \in \overline{\Omega_{\alpha,\delta,R}}$, x, $t \in [0,\pi]$, получаем необходимую оценку. □

Факты, которые мы сформулируем ниже, хорошо известны и основаны на канонической работе [7] (см. также [18, гл. 1]).

Определение 3.2. Система функций $\mathbf{y}^{j,1}$, $\mathbf{y}^{j,2}$, …, $\mathbf{y}^{j,m}$ называется *цепочкой функций, присоединенных к собственной функции* $\mathbf{y}^j$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с собственным значением λ_0, если все они лежат в области определения $\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$ и удовлетворяют системе уравнений $\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y}^{j,q} = \lambda_0\mathbf{y}^{j,q} + \mathbf{y}^{j,q-1}$, $q = 1, \ldots, m$ (здесь и далее $\mathbf{y}^{j,0} = \mathbf{y}^j$ — собственные функции). Будем говорить, что собственная функция $\mathbf{y}^j$ *имеет кратность* m_0, если существует цепочка из присоединенных к ней функций длины $m_0 - 1$, но не существует такой цепочки длины m_0. Пусть p — размерность собственного подпространства $\mathcal{H}_0$, отвечающего собственному значению λ_0. Обозначим через $\mathbf{y}^1 \in \mathcal{H}_0$ собственную функцию, имеющую максимальную кратность, через $\mathbf{y}^2 \in \mathcal{H}_0$ — собственную функцию максимальной кратности, линейно независимую с $\mathbf{y}^1$ и т. д. Пусть m_j — кратность собственной функции $\mathbf{y}^j$, а $\mathbf{y}^{j,k}$, $k = 1, \ldots, m_j - 1$ — соответствующие присоединенные функции. Система $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$, где $1 \leqslant j \leqslant p$, а $0 \leqslant k \leqslant m_j - 1$, называется *канонической системой* собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, отвечающей собственному значению λ_0.

Легко видеть, что любая каноническая система $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ образуют базис в собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_0. Следуя работе [7], обозначим через $\mathbf{yz}$ оператор в пространстве $\mathbb{H}$, действующий по правилу $\mathbf{f} \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y}$.

Теорема V. *Для любого собственного значения λ_0 регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ размерность p собственного подпространства не превосходит 2. Кратность нуля функции $\Delta(\lambda)$ в точке λ_0 совпадает с суммой $m_1 + m_2$ (в случае $p = 1$ полагаем $m_2 = 0$). При этом функция $G(t, x, \lambda)$ имеет полюс порядка m_1 в точке λ_0. Пусть $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ — произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, отвечающая собственному значению λ_0. Тогда найдется такая каноническая система $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций сопряженного оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, отвечающая собственному значению $\overline{\lambda_0}$, что главная часть ряда Лорана резольвенты $\mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}$ в точке λ_0 будет иметь вид*

$$\frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1}} + \frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,1}} + \mathbf{y}^{1,1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_1-1}} + \dots + \frac{\mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}} + \dots + \mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}}}{\lambda-\lambda_0} +$$
$$+ \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2}} + \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,1}} + \mathbf{y}^{2,1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{(\lambda-\lambda_0)^{m_2-1}} + \dots + \frac{\mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}} + \dots + \mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}}{\lambda-\lambda_0}. \tag{3.9}$$

Определение 3.3. Для каждого собственного значения λ_0 регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ выберем произвольную каноническую систему $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ собственных и присоединенных функций с тем лишь условием, что собственные функции этой системы имеют единичную норму. В силу теоремы V количество векторов в системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ совпадает с порядком нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$. Занумеруем векторы этой системы (в порядке $\mathbf{y}^1$, $\mathbf{y}^{1,1}$, $\dots$, $\mathbf{y}^{1,m_1-1}$, $\mathbf{y}^2$, $\mathbf{y}^{2,1}$, $\dots$, $\mathbf{y}^{2,m_2-1}$) индексами $n \in \mathbb{Z}$ в соответствии с нумерацией собственных значений. *Системой собственных и присоединенных функций* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ мы будем называть объединение всех канонических систем. Оператор

$$\mathcal{P}_{\lambda_0} = \mathbf{y}^{1,0}\overline{\mathbf{z}^{1,m_1-1}} + \dots + \mathbf{y}^{1,m_1-1}\overline{\mathbf{z}^{1,0}} + \mathbf{y}^{2,0}\overline{\mathbf{z}^{2,m_2-1}} + \dots + \mathbf{y}^{2,m_2-1}\overline{\mathbf{z}^{2,0}}$$

называется *спектральным проектором на корневое подпространство*, отвечающее собственному значению λ_0.

Полученное в теореме 3.1 асимптотическое представление для функции Грина позволяет нам получить асимптотические формулы для спектральных проекторов в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий. В этом случае все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ двукратны (см. утверждение 1.4), а именно $\lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n+1}^0$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку $\lambda_n = \lambda_n^0 + o(1)$, то $|\lambda_{2n} - \lambda_{2n+1}| \to 0$ при $n \to \pm\infty$.

Определение 3.4. Выберем число N_0 так, что для всех n, $|n| \geqslant N_0$ выполнено $|\lambda_{2n} - \lambda_{2n}^0| < 1/8$ и $|\lambda_{2n+1} - \lambda_{2n}^0| < 1/8$. Обозначим

$$\mathcal{P}_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \mathfrak{R}(\lambda) d\lambda, \quad n = \pm N_0, \pm(N_0+1), \dots, \quad \text{где } \mathfrak{R}(\lambda) = (\mathcal{L}_{P,U} - \lambda I)^{-1}. \tag{3.10}$$

Из представления (3.9) следует, что $\mathcal{P}_n$ является спектральным проектором на корневое подпространство, отвечающее собственным значениям λ_{2n} и λ_{2n+1}, которое мы обозначим $\mathcal{H}_n$. Определим также операторы

$$\mathcal{P}_n^0 := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \mathfrak{R}_0(\lambda) d\lambda, \quad n = \pm N_0, \pm(N_0+1), \dots, \quad \text{где } \mathfrak{R}_0(\lambda) = (\mathcal{L}_{0,U} - \lambda I)^{-1}$$

— спектральные проекторы на корневые подпространства оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, отвечающие собственным значениям $\lambda_{2n}^0 = \lambda_{2n+1}^0$.

Заметим, что оператор $\mathfrak{R}(\lambda) : \mathbf{f} \mapsto \int\limits_0^\pi G(t, x, \lambda)\mathbf{f}(t)dt$ корректно определен при $\lambda \neq \lambda_n$ не только как оператор в пространстве $\mathbb{H}$, но и как оператор из $L_1[0, \pi]$ в $C[0, \pi]$. То же справедливо и для операторов $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_n^0$. В следующей теореме мы оценим норму их разности именно как операторов из $L_1[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$.

Теорема 3.2. *Для любого регулярного, но не сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$

$$\|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad |n| \to \infty.$$

Доказательство. Легко видеть, что при $|n| \geqslant N_0$

$$\|\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_n^0\|_{L_1\to C} \leqslant \frac{1}{4} \max_{|\lambda-\lambda_{2n}^0|=1/4} \max_{j,k\in\{1,2\}} \sup_{t,x\in[0,\pi]} |g_{jk}(t,x,\lambda) - g_{jk}^0(t,x,\lambda)|.$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 3.1. □

4. Минимальность, полнота и базисность Рисса

Нашей следующей задачей является доказательство полноты и минимальности системы собственных и присоединенных функций регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Мы проведем это доказательство классическим способом, причем ключевую роль будет играть оценка, полученная в теореме 3.1. Напомним, что система $\{x_n\}$ векторов банахова пространства H называется *полной*, если ее линейная оболочка плотна в H. Система называется *минимальной*, если при удалении произвольного вектора x_k из системы свойство полноты теряется.

Теорема 4.1. *Пусть потенциал P имеет вид* (1.7)*, а краевые условия* (1.5) *регулярны. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (см. определение* 3.3) *полна и минимальна в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Вначале докажем полноту системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Пусть функция $\mathbf{f}\in\mathbb{H}$ ортогональна всем векторам этой системы. Зафиксируем произвольный вектор $\mathbf{g}\in\mathbb{H}$ и рассмотрим функцию $\Phi(\lambda) := \langle \mathfrak{R}^*(\lambda)\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle$, определенную в области $\mathbb{C}\setminus\{\overline{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Согласно (3.9) эта функция имеет устранимые особенности в точках $\overline{\lambda_n}$, т. е. после доопределения в них является целой. В силу теоремы 3.1 для любого $\delta>0$ в области $\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} U_\delta(\overline{\lambda_n})$ справедлива оценка

$$|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}},$$

где M не зависит от λ. Заметим, что для случая сильно регулярных краевых условий

$$\inf_{n\neq m} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0$$

(см. утверждение 1.4). В регулярном, но не сильно регулярном случае

$$\inf_{|n-m|\geqslant 2} |\overline{\lambda_n^0} - \overline{\lambda_m^0}| = d > 0.$$

Выберем число δ равным $d/4$ — тогда круги $U_\delta(\overline{\lambda_n^0})$ либо не пересекаются, либо разбиваются на пары, не пересекающиеся между собой. Этим же свойством, очевидно, обладают и круги $U_\delta(\overline{\lambda_n})$ для всех n таких, что $|\overline{\lambda_n} - \overline{\lambda_n^0}| < d/4$. В силу теоремы 2.2 последнее неравенство выполнено при $|n|\geqslant N$ для некоторого N. Таким образом, вне некоторого круга $\{|z|\leqslant R\}$ множество точек λ, для которых неравенство $|\Phi(\lambda)| \leqslant M\|\mathbf{f}\|_{\mathbb{H}}\|\mathbf{g}\|_{\mathbb{H}}$ еще не доказано, представляет собой счетное объединение ограниченных непересекающихся областей. По принципу максимума это неравенство будет справедливо в каждой из данных областей, значит, и всюду в области $\{|z|>R\}$, а следовательно, и во всей комплексной плоскости. Из теоремы Лиувилля следует, что функция $\Phi(\lambda)$ является постоянной. Тогда функция

$$\Phi'(\lambda) = \langle(\mathfrak{R}^*(\lambda))'\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle = \langle(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f}, \mathbf{g}\rangle \equiv 0.$$

Поскольку функция $\mathbf{g}$ выбиралась произвольной, то $(\mathfrak{R}^*(\lambda))^2\mathbf{f}\equiv 0$, откуда $\mathbf{f}=0$. Полнота системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана.

Для доказательства минимальности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ достаточно доказать существование биортогональной системы. Мы построим ее на базе системы $\{\mathbf{z}_n\}$, полученной объединением всех канонических систем $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенных в разложении (3.9) (т. е. системы собственных и присоединенных функций оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$). Рассмотрим некоторое фиксированное собственное значение λ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ алгебраической кратности p и обозначим соответствующее корневое подпространство через $\mathcal{H}_\lambda$. Корневое подпространство, отвечающее собственному значению $\overline{\lambda}$ оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$, обозначим $\mathcal{H}^*_\lambda$. Прежде всего заметим, что если $\mathcal{L}_{P,U}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$, $(\mathcal{L}_{P,U})^*\,\mathbf{z} = \mu\mathbf{z}$ и $\mu \neq \overline{\lambda}$, то $\mathbf{y} \perp \mathbf{z}$, т. е. $\mathcal{H}_\lambda \perp \mathcal{H}^*_\mu$ при $\lambda \neq \overline{\mu}$. Таким образом, для построения биортогональной системы достаточно в каждом пространстве $\mathcal{H}^*_\lambda$ построить базис $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$, биортогональный системе $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$. Нам не потребуется явное представление векторов $\mathbf{w}^{j,k}$, так что мы ограничимся доказательством существования такого базиса. Представим этот базис в виде линейных комбинаций системы $\{\mathbf{z}^{j,k}\}$, определенной в (3.9). Записав условия биортогональности, получим систему линейных уравнений с матрицей Грама $\big(\langle\mathbf{y}^{j,k}, \mathbf{z}^{l,m}\rangle\big)$. Разрешимость системы равносильна невырожденности данной матрицы. Если же матрица вырождена, то найдется ненулевой вектор $\sum c_{j,k}\mathbf{z}^{j,k}$, ортогональный всем функциям $\mathbf{y}^{j,k}$, а значит, и вообще всей системе собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Это противоречит полноте данной системы. Минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ доказана. □

Определение 4.1. Объединение всех систем $\{\mathbf{w}^{j,k}\}$ будем называть *биортогональной системой* и обозначать $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. При этом нумерацию мы ведем так, что $\langle\mathbf{y}_n, \mathbf{w}_m\rangle = \delta_{nm}$.

Мы переходим к доказательству базисности системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$. Напомним (см. [5, гл. 6]), что система $\{y_n\}_1^\infty$ в гильбертовом пространстве H называется *базисом Рисса*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор A такой, что система $\{Ay_n\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом в H. Напомним еще, что система $\{x_n\}_1^\infty$ элементов гильбертова пространства H называется *бесселевой*, если существует $c > 0$ такое, что для любого $x \in H$: $\sum\limits_n |(x, x_n)|^2 \leqslant c\|x\|^2$. Мы докажем, что для любого сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ является базисом Рисса в $\mathbb{H}$. Отметим, что этот факт не является простым. Так, например, он не следует из асимптотических формул (2.11). Краткое доказательство базисности Рисса для этого случая было приведено в недавней работе [39]. Мы проведем здесь подробное доказательство, основываясь на теореме Бари, причем основную роль будут играть представление (2.12) и лемма 4.1, приведенная ниже.

Теорема VI (Н. К. Бари). *Пусть система $\{\mathbf{y}_n\}$ гильбертова пространства H полна и минимальна, равно как и биортогональная к ней система $\{\mathbf{z}_n\}$. Если обе эти системы обладают свойством бесселевости, то они являются базисами Рисса в H.*

Напомним, что *пространством Харди* $H_2(\mathbb{C}_+)$ называется пространство аналитических в верхней полуплоскости функций, для которых норма

$$\|F\|_{H_2} = \sup_{y>0}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |F(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Для доказательства следующей леммы нам потребуется теорема Карлесона (см., например, [4, теорема II.3.9]).

Теорема VII (Л. Карлесон). *Пусть σ — мера Карлесона в верхней полуплоскости, т. е. для любого квадрата $Q_{a,h} = \{z : \operatorname{Re} z \in (a, a+h),\ \operatorname{Im} z \in (0,h)\}$ мера $\sigma(Q_{a,h})$ конечна и $\sigma(Q_{a,h}) \leqslant \gamma h$ для некоторого $\gamma > 0$. Тогда*

$$\forall f \in H_2(\mathbb{C}_+): \quad \int |f|^2\, d\sigma \leqslant C\|f\|^2_{H_2}, \quad \text{где} \ \ C = C(\gamma).$$

Лемма 4.1. *Пусть $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — последовательность собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом $P(\cdot) \in L_1[0,\pi]$ и регулярными краевыми условиями U. Тогда для всех $f \in L_2[0,\pi]$*

справедлива оценка

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx\right|^2 \leqslant C\|f\|_{L_2}^2, \quad \text{где} \;\; C = C(P,U).$$

Доказательство. Напомним, что все собственные значения оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ лежат в полосе Π_α для некоторого $\alpha = \alpha(P,U) > 0$. Рассмотрим целую функцию

$$F(z) = \int_0^\pi f(x)e^{(iz+\alpha+1)x}\,dx.$$

Из теоремы Пэли—Винера следует, что функция F принадлежит пространству Харди $H_2(\mathbb{C}_+)$ в верхней полуплоскости, причем $\|F\|_{H_2} \leqslant C\|f\|_{L_2}$. Положим $z_n = \lambda_n + i\alpha + i$ и заметим, что

$$F(z_n) = \int_0^\pi f(x)e^{i\lambda_n x}\,dx.$$

Пусть теперь $\mu(Q_{a,h})$ — количество точек z_n (с учетом кратности), лежащих внутри квадрата

$$Q_{a,h} = \{z : \operatorname{Re} z \in (a, a+h),\ \operatorname{Im} z \in (0,h)\}.$$

Легко видеть, что $\mu(Q_{a,h}) = 0$ при $h < 1$. Поскольку $\lambda_n = n + \varkappa_n + o(1)$, где $\varkappa_n$ зависят только от четности номера n, то функция $s(h) = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \mu(Q_{a,h})$ конечна для любого h и $s(h) \sim h$ при $h \to \infty$. Тогда найдется число $\gamma > 0$ такое, что $s(h) \leqslant \gamma h$ при всех $h > 0$. Применив теорему VII с мерой $\sigma = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{z_n}$, получим оценку

$$\|\{F(z_n)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{l_2} \leqslant C(\gamma)\|F\|_{H_2},$$

что и влечет утверждение леммы. □

Напомним, что все собственные векторы системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ нормированы. Поскольку все собственные значения сильно регулярного оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты, начиная с некоторого номера N, то при всех $|n| > N$ $\|\mathbf{y}_n\| = 1$. Спектр оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$ совпадает с множеством $\{\overline{\lambda}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ с совпадением кратностей, а значит, при $|n| > N$ все векторы $\mathbf{w}_n$ биортогональной системы также являются собственными для оператора $(\mathcal{L}_{P,U})^*$. Однако, в отличие от $\mathbf{y}_n$, они уже могут иметь неединичную норму.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — произвольный сильно регулярный оператор Дирака, а $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система, биортогональная к $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (см. определение* 4.1). *Тогда последовательность $\{\|\mathbf{w}_n\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ограничена.*

Доказательство. Обозначим $\widetilde{\mathbf{w}}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$ и заметим, что $1 = \langle \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_n\rangle = \|\mathbf{w}_n\|\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle$, а значит $\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{w}_n\rangle \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, неравенство $\|\mathbf{w}_n\| < C$ равносильно неравенству $\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle > 1/C$. Пусть $\mathbf{y}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, а $\mathbf{w}_n^0$ — нормированные собственные функции оператора $\mathcal{L}_{0,U^*}$. Используя (1.12), получим

$$\mathbf{y}_n^0 = \big(\omega_{1,j}\, e^{i\lambda_n^0 x},\, \omega_{2,j}\, e^{-i\lambda_n^0 x}\big)^t, \qquad \mathbf{w}_n^0 = \big(\omega_{1,j}^*\, e^{i\overline{\lambda_n^0} x},\, \omega_{2,j}^*\, e^{-i\overline{\lambda_n^0} x}\big)^t,$$

где $j = 0$ при четном n и $j = 1$ при нечетном n. Тогда

$$\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle = \pi(\omega_{1,j}\overline{\omega_{1,j}^*} + \omega_{2,j}\overline{\omega_{2,j}^*}),$$

т. е. скалярные произведения $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle$ зависят только от четности индекса n. Поскольку по определению $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle \neq 0$, то $|\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle| \geqslant C > 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Все векторы $\mathbf{y}_n$ и $\mathbf{w}_n$ при достаточно больших $|n|$ являются собственными. Из теоремы 2.3 имеем $\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle = \langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{w}_n^0\rangle + o(1)$, т. е. числа $|\langle \mathbf{y}_n, \widetilde{\mathbf{w}}_n\rangle|$ отделены от нуля при достаточно больших (а значит и при всех) n. □

Нам потребуется еще одно несложное утверждение. Оно, однако, является ключевым для доказательства теоремы 4.2.

Лемма 4.3. *Пусть система* $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$, *а* $\{\tau_n(x)\}_1^\infty$ *— абсолютно непрерывные на* $[a,b]$ *функции, причем*

$$|\tau_n(a)| \leqslant T, \qquad |\tau_n'(x)| \leqslant \tau(x) \in L_1[a,b], \quad n = 1, 2, \dots, \tag{4.1}$$

где число T *и функция* τ *не зависят от* n. *Тогда система* $\{\varphi_n(x)\tau_n(x)\}_1^\infty$ *также является бесселевой в пространстве* $L_2[a,b]$.

Доказательство. Поскольку

$$\varphi_n(x)\tau_n(x) = \varphi_n(x)\tau_n(a) + \varphi_n(x)(\tau_n(x) - \tau_n(a)),$$

а из оценки $|\tau_n(a)| \leqslant T$ следует бесселевость системы $\{\varphi_n(x)\tau_n(a)\}$, то далее, заменив $\tau_n(x)$ на $\tau_n(x) - \tau_n(a)$, можно считать, что $\tau_n(a) = 0$. Тогда

$$\sum_{n=1}^N |(f, \varphi_n\tau_n)|^2 = \sum_{n=1}^N \left| \int_a^b f(x)\overline{\varphi}_n(x) \int_a^x \overline{\tau}_n'(\xi)\, d\xi\, dx \int_a^b \overline{f}(y)\varphi_n(y) \int_a^y \tau_n'(\zeta)\, d\zeta\, dy \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^N \left| \int_a^b \int_a^b \overline{\tau}_n'(\xi)\tau_n'(\zeta) \left(\int_\xi^b f(x)\overline{\varphi}_n(x)\, dx \int_\zeta^b \overline{f}(y)\varphi_n(y)\, dy \right) d\xi\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \sum_{n=1}^N \left|(f\chi_{[\xi,b]}, \varphi_n)\right| \left|(\varphi_n, f\chi_{[\zeta,b]})\right| d\xi\, d\zeta \leqslant$$

$$\leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta) \|f\chi_{[\xi,b]}\| \, \|f\chi_{[\zeta,b]}\|\, d\xi\, d\zeta \leqslant c^2 \int_a^b \int_a^b \tau(\xi)\tau(\zeta)\, d\xi\, d\zeta\, \|f\|^2.$$

Устремив $N \to \infty$, получаем утверждение леммы. □

Теорема 4.2. *Для любого сильно регулярного оператора* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с потенциалом* $P \in L_1[0,\pi]$ *вида* (1.7) *система* $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *собственных и присоединенных функций, введенная в определении* 3.3, *образует базис Рисса в пространстве* $\mathbb{H}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой VI. Полнота и минимальность системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ уже доказаны в теореме 4.1, так что остается проверить бесселевость систем $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Вначале мы докажем бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Поскольку краевые условия сильно регулярны, то все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ просты при $|n| > N$ для некоторого N. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$ состоит только из нормированных собственных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, и мы можем воспользоваться асимптотическим представлением (2.12) $y_{1,n}(x) = e^{i\lambda_n x}\tau_{1,n}(x)$, $y_{2,n}(x) = e^{-i\lambda_n x}\tau_{2,n}(x)$. Тогда из леммы 4.1 и леммы 4.3 следует бесселевость систем $\{y_{1,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_{2,n}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $L_2[0,\pi]$, что и означает бесселевость системы $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{H}$. Перейдем к биортогональной системе $\{\mathbf{w}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Поскольку функции $\mathbf{w}_n$ при $|n| > N$ являются собственными функциями сопряженного оператора $\mathcal{L}_{P^*,U^*}$, то к системе $\{\mathbf{w}_n/\|\mathbf{w}_n\|\}_{|n|>N}$ применимы те же рассуждения, что и к системе $\{\mathbf{y}_n\}_{|n|>N}$. Для завершения доказательства достаточно вспомнить (лемма 4.2), что $\|\mathbf{w}_n\| < C$ $\forall n \in \mathbb{N}$ для некоторой константы C. □

5. Базисность Рисса из подпространств

Напомним (см. [5, гл. 6]), что система подпространств $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом* в гильбертовом пространстве H, если любой вектор $x \in H$ разлагается единственным образом в виде ряда $x = \sum\limits_{n=1}^\infty x_n$, где $x_n \in \mathcal{H}_n$. Базис $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ из подпространств является *ортогональным*, если $\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ при $n \neq m$. Система $\{\mathcal{H}_n\}_1^\infty$ называется *базисом Рисса из подпространств*, если существует ограниченный и ограниченно обратимый оператор A такой, что система $\{A(\mathcal{H}_n)\}_1^\infty$ является ортогональным базисом из подпространств в H. В случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ уже не обязана образовывать базис Рисса (см., например, [3,33]). Можно, однако, показать, что в этом случае всегда имеется базисность Рисса из подпространств, причем все подпространства двумерны. Идея доказательства этого факта содержится в статье [39]. Мы проведем здесь подробное доказательство, следуя классическим работам [6, 14]. Оно опирается на два замечательных факта — теорему фон Неймана и теорему Карлесона (см. [4, гл. VII, теорема 2.2 и лемма 5.4]). Мы начнем с доказательства следующего полезного утверждения.

Лемма 5.1. *Любой (не обязательно сильно) регулярный оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ с потенциалом вида* (1.7) *представим в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$, ограниченного в $\mathbb{H}$ оператора V и неограниченного замкнутого оператора A с плотной областью определения $\mathfrak{D}(A) \subset \mathbb{H}$ и компактной резольвентой. При этом спектр $\sigma(A)$ расположен в некоторой полосе Π_α и состоит из собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Нумерацию этих собственных значений (с учетом их алгебраической кратности) можно провести так, чтобы выполнялись асимптотические равенства $\lambda_n = n + \varkappa_j + o(1)$ при $|n| \to \infty$, где $j = 0$, если n четно, и $j = 1$, если n нечетно, причем геометрическая и алгебраическая кратности каждого собственного значения совпадают, т. е. оператор A не имеет присоединенных функций. Система нормированных собственных функций оператора A образует базис Рисса в $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$, где $V_0 : (y_1, y_2) \mapsto (\kappa y_1, -\kappa y_2)$. Если краевые условия, задаваемые матрицей $\mathcal{U} = (C, D)$, сильно регулярны, то положим $\kappa = 0$. В противном случае подберем κ следующим образом. Поскольку $\mathcal{L}_{P,U} + V_0$ есть оператор Дирака вида (1.1) с потенциалом $\begin{pmatrix} \kappa & p_2(x) \\ p_3(x) & -\kappa \end{pmatrix}$, то к нему применимо утверждение 1.3. Из (1.6) следует, что $\gamma = 0$, $\widetilde{p}_2 = p_2$, $\widetilde{p}_3 = p_3$, т. е. $\mathcal{L}_{P,U} + V_0 = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1}$. При этом краевые условия $\widetilde{U}$ задаются матрицей $\widetilde{\mathcal{U}} = (C, e^{i\pi\kappa}D)$. По определению 1.2 краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны, если

$$(J_{12} + e^{2i\pi\kappa}J_{34})^2 + 4e^{2i\pi\kappa}J_{14}J_{23} \neq 0.$$

Таким образом, достаточно выбрать κ так, чтобы точка $\mu = e^{2i\pi\kappa}$ не являлась нулем функции

$$\mu^2 J_{34}^2 + 2\mu(J_{12}J_{34} + 2J_{14}J_{23}) + J_{12}^2,$$

что возможно, поскольку эта функция не равна нулю тождественно (это следует из регулярности краевых условий U). Итак, мы представили оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде

$$\mathcal{L}_{P,U} = W\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}W^{-1} - V_0,$$

где краевые условия $\widetilde{U}$ сильно регулярны. Тогда лишь конечное число собственных значений оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ могут иметь алгебраическую кратность, большую единицы. Пусть λ_0 — одно из таких собственных значений, $\mathcal{H}_0$ — соответствующее корневое подпространство, $\{\mathbf{y}^{j,k}\}$ — произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций в $\mathcal{H}_0$, построенная в определении 3.3, а $\mathcal{P}_0$ — спектральный проектор на H_0 (см. определение 3.3). Определим оператор K_0 на подпространстве $\mathcal{H}_0$ равенствами

$$K_0\mathbf{y}^{j,0} = 0, \qquad K_0\mathbf{y}^{j,k} = -\mathbf{y}^{j,k-1}$$

для всех $k \neq 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K_0\mathcal{P}_0$ диагонален на подпространстве $\mathcal{H}_0$. Пусть оператор K равен сумме операторов $K_0\mathcal{P}_0$ по всем корневым подпространствам, отвечающим кратным собственным значениям оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ (число слагаемых в этой сумме конечно, так что оператор K ограничен). Операторы $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ и $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}}$ имеют одинаковый спектр и одинаковую систему собственных и присоединенных функций, причем все эти функции являются для оператора $\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K$ собственными. Остается положить

$$A := W(\mathcal{L}_{P,\widetilde{U}} + K)W^{-1} \qquad \text{и} \qquad V := -WKW^{-1} - V_0.$$

$\square$

Следующее утверждение известно в теории пространств Харди. Мы, однако, затрудняемся дать точную ссылку и потому приведем его с полным доказательством. Напомним, что *пространством Харди* H_∞ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ называется пространство голоморфных и ограниченных в $\mathbb{C}_+$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}_+} |f(z)|$.

Утверждение 5.1. *Пусть последовательность* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *лежит в полосе* $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$, *причем*

$$z_{2n} = 2n + \varkappa + o(1) \qquad и \qquad z_{2n+1} = 2n + \varkappa + o(1)$$

при $|n| \to \infty$. *Тогда существуют такой номер* $N \in \mathbb{N}$ *и такое число* μ, *что для всякого конечного подмножества* $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ *и всякого номера* $K \geqslant \max\{|n| : n \in J\}$ *найдется рациональная функция* $f_K \in H_\infty$, $\|f_K\|_\infty \leqslant \mu$, *такая, что при всех* n, $N \leqslant |n| \leqslant K$,

$$f_K(z_{2n}) = f_K(z_{2n+1}) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in J, \\ 0, & \text{если } n \notin J, \end{cases} \quad \text{а если } z_{2n} = z_{2n+1}, \text{ то } f_K'(z_{2n}) = 0. \tag{5.1}$$

Определение 5.1. (см. [4, гл. VII]) Последовательность точек $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{C}_+$ называется *интерполяционной*, если

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} \frac{|z_k - z_n|}{|z_k - \overline{z}_n|} \geqslant \delta > 0. \tag{5.2}$$

Теорема VIII (Л. Карлесон). *Пусть* $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — *интерполяционная последовательность точек верхней полуплоскости. Тогда для любого* $K \in \mathbb{N}$ *существуют рациональные функции* $f_{j,K} \in H_\infty$, $1 \leqslant j \leqslant K$, *такие, что*

$$f_{j,K}(z_l) = \delta_{j\,l}, \ 1 \leqslant j,\, l \leqslant K,$$

причем

$$\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \sum_{j=1}^{K} |f_{j,K}(z)| \leqslant M, \quad \text{где} \ \ M = \frac{9(3-\delta^2)^2}{4\delta^4}.$$

Лемма 5.2. *Пусть точки* z_1 *и* z_2, $z_2 \neq z_1$, *лежат в полосе* $\{z : 1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h\}$, *а числа* w_1 *и* w_2 *произвольны. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$, *что* $\varphi(z_1) = w_1$, $\varphi(z_2) = w_2$, *причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 8h \left| \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \right| + 2|w_1| + 2|w_2|. \tag{5.3}$$

Пусть точка z_0 *лежит в той же полосе, а* $w_0 \in \mathbb{C}$ *произвольно. Тогда существует такая рациональная функция* $\varphi \in H_\infty$, *что* $\varphi(z_0) = 1$, $\varphi'(z_0) = w_0$, *причем*

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant 1 + 4h|w_0|. \tag{5.4}$$

Доказательство. В первом случае возьмем $\varphi(z) = k\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$, где числа $z_0 \in \mathbb{C}_+$ и $k \in \mathbb{C}$ находятся из условий $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$. Во втором случае положим $\varphi(z) = 1 + k\frac{z-z_0}{z-\overline{z}_0}$, где число k находится из условия $\varphi'(z_0) = w_0$. Легко видеть, что в первом случае $\|\varphi\|_\infty = |k|$, а во втором случае $\|\varphi\|_\infty = |k| + 1$. Оценки (5.3) и (5.4) получаются теперь прямыми вычислениями, которые мы здесь опускаем. □

Лемма 5.3. *Если точки* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *лежат в полосе* $\{z : 1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h\}$ *и* $\inf\limits_{n\neq k} |z_n - z_k| \geqslant 1$, *то из условия*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\neq n} \frac{\operatorname{Im} z_n \operatorname{Im} z_k}{|\overline{z}_n - z_k|^2} \leqslant m < \infty$$

следует (5.2) *с* $\delta = e^{-32mh}$.

Доказательство. Зафиксируем номер n и обозначим $p_k = |z_k - z_n|/|z_k - \overline{z}_n|$. Заметим, что

$$\frac{1}{1+4h} \leqslant p_k \leqslant 1, \quad \text{откуда} -\ln p_k \leqslant 8h(1 - p_k^2).$$

Тогда

$$-\ln \prod_{k\neq n} \frac{|z_k - z_n|}{|z_k - \overline{z}_n|} \leqslant 8h \sum_{k\neq n} (1 - p_k^2) = 32h \sum_{k\neq n} \frac{\operatorname{Im} z_k \operatorname{Im} z_n}{|z_k - \overline{z}_n|^2} \leqslant 32mh.$$

Отсюда

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{k\neq n} p_k \geqslant e^{-32mh}.$$

□

Доказательство утверждения 5.1. Найдем номер N_0, такой, что $|z_{2n}-(2n+\varkappa)|<1/8$ и $|z_{2n+1}-(2n+\varkappa)|<1/8$ при всех $|n|>N_0$. Отсюда следует, что

$$|z_{2n}-\overline{z}_{2k}|\geqslant 2|k-n|-1,\qquad |n|>N_0,\ |k|>N_0,$$

а значит

$$\sum_{n\neq k,\,|n|\geqslant N_0}\frac{\operatorname{Im}z_n\operatorname{Im}z_k}{|z_n-\overline{z}_k|^2}\leqslant 4h^2\sum_{n\neq k,\,|n|\geqslant N_0}\frac{1}{(2|n-k|-1)^2}\leqslant 8h^2\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l-1)^2}=\pi^2h^2.$$

Та же оценка справедлива и для последовательности $\{z_{2n+1}\}_{|n|>N_0}$. Положим $m=\pi^2h^2$. Из леммы 5.3 следует, что обе последовательности являются интерполяционными, причем число δ из оценки (5.2) можно взять равным $e^{-32\pi^2h^3}$. Положим $M=9(3e^{64\pi^2h^3}-1)^2/4$ (см. теорему VIII) и найдем номер $N\geqslant N_0$ такой, что

$$M|z_{2n}-z_{2n+1}|<1/4\qquad\text{для всех}\ \ |n|>N.$$

Пусть J — произвольное конечное подмножество $\{n : |n|\geqslant N\}$, а $K\geqslant\max\{|n| : n\in J\}$ — произвольный номер. Обозначим $\{g_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}$ и $\{h_{j,K}\}_{|j|=N}^{K}$ рациональные функции из теоремы VIII, построенные по последовательностям $\{z_{2j}\}_{|j|=N}^{K}$ и $\{z_{2j+1}\}_{|j|=N}^{K}$ соответственно, т. е.

$$g_{j,K}(z_{2l})=h_{j,K}(z_{2l+1})=\delta_{jl}.$$

Далее для каждого j, $N\leqslant|j|\leqslant K$, построим, пользуясь леммой 5.2, функцию $\varphi_{j,K}$ следующим образом. Если $z_{2j}\neq z_{2j+1}$, то потребуем, чтобы

$$\varphi_{j,K}(z_{2j})=w_1=\frac{1}{h_{j,K}(z_{2j})},\qquad \varphi_{j,K}(z_{2j+1})=w_2=\frac{1}{g_{j,K}(z_{2j+1})}.$$

Заметим, что для любой функции $f\in H_\infty$ из интегральной формулы Коши следует оценка $\sup\limits_{\operatorname{Im}z\geqslant 1}|f'(z)|\leqslant\|f\|_\infty$. Поскольку

$$|h_{j,K}(z_{2j})-1|=|h_{j,K}(z_{2j})-h_{j,K}(z_{2j+1})|\leqslant\sup_{\operatorname{Im}z\geqslant 1}|h'_{j,K}(z)||z_{2j}-z_{2j+1}|\leqslant M|z_{2j}-z_{2j+1}|\leqslant 1/4,$$

то числа $|1-w_1|$ и $|1-w_2|$ не превосходят $\min\{4/3M|z_{2j}-z_{2j+1}|,\,1/3\}$. Тогда из (5.3) следует, что $\|\varphi_{j,K}\|_\infty\leqslant 24hM+6$. Если $z_{2j}=z_{2j+1}$, то потребуем

$$\varphi_{j,K}(z_{2j})=1,\qquad \varphi'_{j,K}(z_{2j})=-(g_{j,K}h_{j,K})'(z_{2j})=-g'_{j,K}(z_{2j})-h'_{j,K}(z_{2j}).$$

Тогда из (5.4) следует, что $\|\varphi_{j,K}\|_\infty\leqslant 8hM+1$. Таким образом, для каждого j, $N\leqslant|j|\leqslant K$, определена рациональная функция

$$f_{j,K}(z):=g_{j,K}(z)h_{j,K}(z)\varphi_{j,K}(z)\in H_\infty,$$

для которой

$$f_{j,K}(z_{2l})=f_{j,K}(z_{2l+1})=\delta_{j\,l},\quad l\neq j,\ N\leqslant|j|,\ l|\leqslant K,$$

причем

$$f'_{j,K}(z_{2l})=0,\ \text{если}\ z_{2l}=z_{2l+1}.$$

Искомую функцию $f_K(z)$ определим суммой $f_K(z)=\sum\limits_{j\in J}f_{j,K}(z)$. Тогда равенства (5.1) выполнены и $\forall z\in\mathbb{C}_+$

$$|f_K(z)|\leqslant\sum_{j\in J}|f_{j,K}(z)|\leqslant(24hM+6)\sum_{|j|=N}^{K}|g_{j,K}(z)||h_{j,K}(z)|\leqslant(24hM+6)M^2=\mu.$$

□

Приступим к доказательству базисности Рисса из подпространств. Вначале мы сформулируем две теоремы, которые будут использоваться в доказательстве: теорему Гельфанда (см. [5, Гл. VI, §5]) и теорему фон Неймана (см. [19, Гл. XI]).

Теорема IX (И. М. Гельфанд). *Система $\{\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n\}$ является базисом Рисса из подпространств в замыкании своей линейной оболочки тогда и только тогда, когда*

$$\sup_J \|\sum_{n\in J} \mathcal{P}_n\| < \infty, \tag{5.5}$$

где супремум берется по всем конечным подмножествам индексов.

Теорема X (Дж. фон Нейман). *Пусть T — произвольное сжатие в гильбертовом пространстве, т. е. $\|T\| \leqslant 1$, а функция f голоморфна в круге $|z| < r$, $r > 1$, и ограничена в круге $|z| \leqslant 1$ константой μ. Тогда $\|f(T)\| \leqslant \mu$.*

Пусть оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ регулярен, но не сильно регулярен. Пусть $\mathcal{H}_n = \operatorname{Rn}\mathcal{P}_n$, $|n| \geqslant N_0$, — корневые подпространства этого оператора, введенные в определении 3.4. Определим дополнительно подпространство $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Rn}\mathcal{S}_{N_0}$, где $\mathcal{S}_{N_0} := 1/(2\pi i)\int\limits_\gamma \mathfrak{R}(\lambda)\, d\lambda$, а замкнутый кусочно-гладкий жорданов контур γ охватывает все собственные значения λ_n оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ с номерами $n : |n| < 2N_0$ и только их.

Теорема 5.1. *Система $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ образует базис Рисса из подпространств в пространстве $\mathbb{H}$.*

Доказательство. Применим теорему IX. Из теоремы 4.1 следует, что замыкание линейной оболочки системы $\{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_n\}_{|n|\geqslant N_0}$ совпадает со всем пространством $\mathbb{H}$, так что остается доказать выполнение свойства (5.5). Пользуясь леммой 5.1, представим оператор $\mathcal{L}_{P,U}$ в виде суммы $\mathcal{L}_{P,U} = A + V$. Поскольку система собственных функций оператора A образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}$, то найдется такое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, топологически эквивалентное исходному (т. е. $c_1\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\| \leqslant c_2\|\cdot\|_1$ для некоторых c_1 и c_2), относительно которого эта система является ортонормированным базисом (см. [5, гл. VI, §2]). В силу оценки на нормы свойство базисности системы подпространств $\{\mathcal{H}_n\}$ не изменится при переходе к новому скалярному произведению. В новом скалярном произведении оператор A диагонален в ортонормированном базисе из своих собственных векторов, т. е. нормален. Тогда числовой образ $\{\langle A\mathbf{f}, \mathbf{f}\rangle_1 : \ \|\mathbf{f}\|_1 = 1\}$ оператора A равен замыканию выпуклой оболочки спектра $\sigma(A)$, а значит, лежит в некоторой горизонтальной полосе. Следовательно, числовой образ оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ (относительно нового скалярного произведения) также лежит в некоторой полосе Π_α. Поскольку сдвиг не меняет свойств базисности, то далее можно работать с оператором $B = \mathcal{L}_{P,U} + i(\alpha+1)$, числовой образ и спектр которого лежат в полосе $1 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2h$, где $h = \alpha + 1$. Точки $\{\lambda_n + i(\alpha+1)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ спектра оператора B удовлетворяют условиям утверждения 5.1. Пусть числа N и μ определены в формулировке этого утверждения (они зависят только от оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ и по построению $N \geqslant N_0$), а

$$\nu := \|\mathcal{S}_{N_0}\|_1 + \sum_{|n|=N_0}^{N-1} \|\mathcal{P}_n\|_1.$$

Пусть $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N\}$ — произвольное конечное подмножество, K — произвольный номер такой, что $K > \max\{|n| : n \in J\}$, а f_K — рациональная функция, построенная в утверждении. Из общей теории функционального исчисления операторов (см., например, [19, гл. IX, §151]) и представления (3.9) следует, что $f_K(B) = \sum\limits_{n\in J} \mathcal{P}_n$. Пусть $T := (B-i)(B+i)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора B. Легко видеть, что

$$\forall x \in \mathfrak{D}(B) : \ \|(B+i)x\|_1^2 - \|(B-i)x\|_1^2 = 4\operatorname{Im}(Bx, x)_1 > 0,$$

откуда

$$\|(B-i)(B+i)^{-1}x\|_1 \leqslant \|x\|_1.$$

Так как подпространство $\mathfrak{D}(B) = \mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})$ плотно в $\mathbb{H}$, то оператор T продолжается на все пространство и $\|T\|_1 \leqslant 1$. Обозначим $g_K(z) = f_K\left(\dfrac{iz+i}{1-z}\right)$. Тогда согласно теореме X $\|g_K(T)\|_1 \leqslant \mu$. Далее $\forall x \in H_n$, $|n| > N$, выполнено $g_K(T)x = f_K(B)x$ при $K \geqslant n$. Переходя к пределу при

$K \to \infty$, получим, что $\|\sum\limits_{n\in J}\mathcal{P}_n\|_1 \leqslant \mu\|x\|_1$ на подпространстве $\overline{\cup_{|n|\geqslant N} H_n}$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{H}$

$$\left\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n x\right\|_1 = \left\|\sum_{n\in J}\mathcal{P}_n\left(x - \left(\sum_{|k|=N_0}^{N-1}\mathcal{P}_k + \mathcal{S}_{N_0}\right)x\right)\right\|_1 \leqslant \mu(1+\nu)\|x\|_1.$$

Если теперь $J \subset \{n \in \mathbb{Z} : |n| \geqslant N_0\} \cup \{0\}$ — конечное подмножество, то нормы $\|\sum\limits_{n\in J}\mathcal{P}_n\|_1$ ограничены числом $\mu + \nu + \mu\nu$, не зависящим от J. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амиров Р. Х., Гусейнов И. М.* Некоторые классы операторов Дирака с сингулярными потенциалами// Дифф. уравн. — 2004. — *40*, № 7. — С. 999–1001.
2. *Баскаков А. Г., Дербушев А. В., Щербаков А. О.* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2011. — *75*, № 3. — С. 3–28.
3. *Велиев О. А., Шкаликов А. А.* О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма—Лиувилля// Мат. заметки. — 2009. — *85*, № 5. — С. 671–686.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. — М.: Мир, 1984.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
6. *Кацнельсон В. Э.* Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов// Функц. анализ и его прилож. — 1967. — *1*, № 2.— С. 39–51.
7. *Келдыш М. В.* О полноте собственых функций некоторых классов несамосопряженных уравнений// Усп. мат. наук. — 1971. — *27*, № 4. — С. 15–47.
8. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям конкретных дифференциальных операторов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1964. — *39*, № 2.— С. 82–93.
9. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория Обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд. Иностранной Лит., 1958.
10. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и антипериодическими краевыми условиями// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Информ. — 2013. — *13*, № 3. — С. 28–35.
11. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма—Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988.
12. *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О полноте системы корневых векторов для систем первого порядка. Применение к задаче Редже// Докл. РАН. — 2013. — *453*, № 3. — С. 256–261.
13. *Лунев А. А., Маламуд М. М.* О базисности Рисса системы корневых векторов для 2×2-системы типа Дирака// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 3. — С. 1–6.
14. *Маркус А. С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора// Докл. АН СССР. — 1962. — *142*, № 3. — С. 538–541.
15. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1982. — *45*. — С. 133–181.
16. *Минкин А. М.* Теоремы равносходимости для дифференциальных операторов// Итоги науки и техн. Совр. матем. и ее прилож. — 1997. — *49*. — С. 3631–3715.
17. *Михайлов В. П.* О базисности Рисса в $L_2(0,1)$// Докл. АН СССР. — 1962. — *144*. — С. 981–984.
18. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
19. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
20. *Савчук А. М., Садовничая И. В.* Асимптотические формулы для фундаментальных решений системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 5. — С. 573–584.
21. *Садовничая И. В.* О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Мат. сб. — 2010. — *201*, № 9. — С. 61–76.
22. *Садовничая И. В.* Равносходимость в пространствах Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма—Лиувилля с потенциалами-распределениями// Дифф. уравн. — 2012. — *48*, № 5. — С. 674–685.
23. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольной функции в ряды. — Петроград, 1917.
24. *Шкаликов А. А.* О свойстве базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 5. — С. 235-236.

25. *Шкаликов А. А.* Граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в краевых условиях// Тр. сем. им. И. Г. Петровского — 1983. — *9*. — С. 190–229.
26. *Шкаликов А. А.* Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков// Усп. мат. наук — 1983. — *38*, № 3. — С. 189-190.
27. *Albeverio S., Hryniv R. O., Mykytyuk Ya.* Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 406–423.
28. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — С. 21–231.
29. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion ploblems of ordinary linear differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1908. — *9*. — С. 373–395.
30. *Birkhoff G. D., Langer R. E.* The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order// Proc. Am. Acad. Arts Sci. — 1923. — *58*. — С. 49–128.
31. *Djakov P., Mityagin B.* Bari—Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators// Math. Nachr. — 2010. — *283*, № 3. — С. 443–462.
32. *Djakov P., Mityagin B.* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*. — С. 2300–2332.
33. *Djakov P., Mityagin B.* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions// Indiana Univ. Math. J. — 2012. — *61*, № 1. — С. 359–398.
34. *Dunford N.* A survey of the theory of spectral operators// Bull. Am. Math. Soc. — 1958. — *64*. — С. 217–274.
35. *Lindelöf E.* Sur un principe général de l'analyse et ses applications á la théorie de la représentation conforme// Acta. Soc. Sc. Fennicae. — 1915. — *46*, № 4. — С. 6.
36. *Malamud M. M., Oridoroga L. L.* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations// J. Funct. Anal. — 2012. — *263*. — С. 1939–1980.
37. *Sadovnichaya I. V.* Equiconvergence theorems for Sturm—Liouville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ-norm)// Eurasian Math. J. — 2010. — *1*, № 1. — С. 137–146.
38. *Savchuk A. M.* Spectral Properties of Dirac Operators on $(0, 1)$ with summable potentials// The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts, Moscow. — 2011. — С. 63.
39. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential// Math. Notes. — 2014. — *96*, № 5. — С. 777–810.
40. *Tamarkin J. D.* Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier// Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1912. — *34*, № 2.— С. 345–382.
41. *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions// Math. Z. — 1928. — *27*, № 1. — С. 1–54.
42. *Trooshin I., Yamamoto M.* Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems// Appl. Anal. — 2001. — *80*. — С. 19–51.
43. *Trooshin I., Yamamoto M.* Spectral properites and an inverse eigenvalue problem for nonsymmetric systems of ordinary differential equations// J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2002. — *10*, № 6. — С. 643–658.

А. М. Савчук
Россия, Москва, Ленинские горы, д.1
E-mail: `artem_savchuk@mail.ru`

И. В. Садовничая
Россия, Москва, Ленинские горы, д.1
E-mail: `ivsad@yandex.ru`