Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 111–127

УДК 517.977

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПО ПРИНЦИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ СИСТЕМОЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ФАЗОВЫХ КООРДИНАТАХ

© 2015 г. **В. С. КУБЛАНОВ, В. И. МАКСИМОВ***

Аннотация. Рассматриваются две взаимно дополняющие игровые задачи на минимакс (максимин) функционала качества для нелинейной системы дифференциальных уравнений с последействием. В предположении, что в достаточно частые моменты времени измеряется (с ошибкой) часть фазовых координат системы, указываются устойчивые к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритмы решения задач. В основе предлагаемых алгоритмов лежит принцип экстремального сдвига Н. Н. Красовского.

1. Введение

Рассматривается задача управления по принципу обратной связи системой с последействием вида

$$\dot z(t) = f(t, z_t(s), u(t), v(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta].$$

$$z_t(s) = z(t+s), \quad s \in [-\tau, 0], \quad \tau = \text{const} > 0.$$

В дальнейшем полагаем, что система имеет следующую структуру

$$\begin{aligned} \dot x(t) &= F_0(x_t(s), y_t(s)) + Bu(t) - Dv(t), \\ \dot y(t) &= L(y_t(s)) + Cx(t) + f_0(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $z = \{x, y\}$, $x \in \mathbb{R}^n$; $y \in \mathbb{R}^N$; $x_t(s) : s \to x(t+s)$, $y_t(s) : s \to y(t+s)$, $s \in [-\tau, 0]$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление первого игрока; $v \in \mathbb{R}^q$ — управление второго игрока, B, D и C — постоянные матрицы размерностей $n \times m$, $n \times q$ и $N \times n$ соответственно; функция $f_0(\cdot)$ является элементом пространства $L_\infty(T; \mathbb{R}^N)$. Отображение F_0 действует из декартова произведения $X \times Y$ в $\mathbb{R}^n$ ($X = \mathbb{R}^n \times L_2([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n)$, $Y = \mathbb{R}^N \times L_2([-\tau, 0]; \mathbb{R}^N)$) и удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{aligned} |F_0(x^{(1)}(s), y^{(1)}(s)) - F_0(x^{(2)}(s), y^{(2)}(s))|_n \leqslant L\Big\{ |y_{(1)} - y_{(2)}|_N + |x_{(1)} - x_{(2)}|_n + \\ + \Big(\int_{-\tau}^{0} \{ |y_{(1)}(s) - y_{(2)}(s)|_N^2 + |x_{(1)}(s) - x_{(2)}(s)|_n^2 \} \, ds \Big)^{1/2} \Big\}, \quad L = \text{const} > 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

$\forall\, y^{(1)}(s) = (y_{(1)}, y_{(1)}(s)) \in Y$, $y^{(2)}(s) = (y_{(2)}, y_{(2)}(s)) \in Y$, $x^{(1)}(s) = (x_{(1)}, x_{(1)}(s)) \in X$, $x^{(2)}(s) = (x_{(2)}, x_{(2)}(s)) \in X$. В свою очередь, отображение L действует из пространства Y в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию Липшица

$$\begin{gathered} |L(y^{(1)}(s)) - L(y^{(2)}(s))|_N \leqslant L_1 \Big\{ |y_{(1)}(s) - y_{(2)}(s)|_N + (\int_{-\tau}^{0} |y^{(1)}(s) - y^{(2)}(s)|_N^2 \, ds)^{1/2} \Big\}, \\ L_1 = \text{const} > 0, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$\forall\, y^{(1)}(s) = (y_{(1)}, y_{(1)}(s)) \in Y$, $y^{(2)}(s) = (y_{(2)}, y_{(2)}(s)) \in Y$. Начальное состояние системы (1.1) таково:

$$x_{t_0}(s) = x_0(s) \in W_1 = W^{1,\infty}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n), \quad y_{t_0}(s) = y_0(s) \in W_2 = W^{1,\infty}([-\tau, 0], \mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

*Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда (проект 14-11-00539).

Здесь и ниже символ $|\cdot|_n$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$, а символ $W^{1,\infty}([a,b];\mathbb{R}^n)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $t\in[a,b]$, производные которых $\dot{x}(\cdot)\in L_\infty([a,b];\mathbb{R}^n)$.

Качество процесса $z(\cdot)=\{x(\cdot),y(\cdot)\}$ оценивается интегральным критерием качества

$$I(x(\cdot),y(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{\vartheta} f_*(t,x(t),y(t))\,dt.$$

Здесь вещественная функция $f_*(\cdot)$ определена на $T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$ и такова, что функция $t\mapsto f_*(t,x,y)$ измерима по Лебегу для любых $x\in\mathbb{R}^n$, $y\in\mathbb{R}^N$, а функция $(x,y)\mapsto f_*(t,x,y)$ выпукла по u, липшицева при п.в. $t\in T$ и для п.в. $t\in T$ выполняется неравенство $|f_*(t,0,0)|\leqslant c_0(t)$, где $c_0(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R})$.

Содержательно рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом. Система (1.1) подвержена управляющим воздействиям двух игроков. Оба игрока знают уравнения системы (1.1), выпуклые, ограниченные, замкнутые множества $P\subset\mathbb{R}^m$, $Q\subset\mathbb{R}^q$ и управляют ею с помощью выбора соответственно функции $u(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^m)$, принимающей значения в P и называемой *управлением первого игрока*, и функции $v(\cdot)\in L_\infty(T;\mathbb{R}^q)$, принимающей значения в Q и называемой *управлением второго игрока*. Предполагаем, что начальное состояние системы (1.1) — $z_0(s)=\{x_0(s),y_0(s)\}$ — известно неточно, т. е. вместо $z_0(s)$ известен элемент $z_0^*(s)=\{x_0^*(s),y_0^*(s)\}\in W_1\times W_2$ такой, что

$$|x_0^*(s)-x_0(s)|_{W_1}\leqslant h,\quad |y_0^*(s)-y_0(s)|_{W_2}\leqslant h. \tag{1.5}$$

Здесь символ $|\cdot|_{W_j}$ означает норму в пространстве $W_j, j=1,2$. Цель первого игрока — выбором своего управления по позиционному принципу (по принципу обратной связи) минимизировать максимально возможное значение показателя I, цель второго игрока противоположна — выбором своего управления по позиционному принципу максимизировать минимально возможное значение этого показателя.

На промежутке времени T выбрана равномерная сетка $\Delta=\{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0=t_0$, $\tau_m=\vartheta$, $\tau_{i+1}=\tau_i+\delta$ с шагом δ. В моменты времени τ_i измеряется (с ошибкой) одна из фазовых координат: $x(\tau_i)$ или $y(\tau_i)$. Результаты измерений — вектора $\xi_i^h\in\mathbb{R}^n$ или $\eta_i^h\in\mathbb{R}^N$ — удовлетворяют соответственно неравенствам

$$|\xi_i^h-x(\tau_i)|_n\leqslant h,\qquad |\eta_i^h-y(\tau_i)|_N\leqslant h, \tag{1.6}$$

где $h\in(0,1)$ — величина погрешности измерения. В дальнейшем символ $z(\cdot)=\{x(\cdot),y(\cdot)\}=\{x(\cdot;t_0,x_0(s),u(\cdot),v(\cdot)),y(\cdot;t_0,y_0(s),u(\cdot),v(\cdot))\}$ означает фазовую траекторию системы (1.1), порожденную управлением первого игрока $u(\cdot)$ и второго игрока $v(\cdot)$.

В настоящей работе, лежащей в русле екатеринбургской школы по теории гарантированного управления [4, 13–15, 17], указываются алгоритмы решения описанных задач, стоящих перед каждым из игроков, которые основаны на методе динамического обращения (методе динамической аппроксимации управлений), развитом в [12, 16], и на известном в теории позиционного управления методе стабильных дорожек [4]. В связи с неполнотой информации (а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_i),y(\tau_i)\}$, а лишь его части — $x(\tau_i)$ или $y(\tau_i)$) наряду с блоком управления (при измерении координаты y) будет использоваться дополнительный блок — блок динамического восстановления неизвестной координаты x. При этом блок динамического восстановления будет играть роль поставщика информации о текущем полном фазовом состоянии системы. Эта информация будет оперативно передаваться на блок управления, формирующий управление u (v) по закону обратной связи.

Заметим, что основы теории позиционного управления системами с последействием были заложены в [3, 9, 11] (см. также более поздние работы [2, 7, 8]). Однако в этих работах обсуждались проблемы гарантированного управления в случае измерения с ошибкой всего фазового состояния (т. е. при «полной» информации о фазовых координатах). В данной работе исследуется задача на минимакс (максимин) функционала качества при измерении лишь «части» фазового состояния (измерении «части координат»). Для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, задачи управления при измерении части координат рассматривались в работах [1, 5, 6, 10].

Допустимое управление первого игрока есть всякая измеримая функция $u(\cdot) : T \mapsto P$, *допустимое управление* второго игрока — всякая измеримая функция $v(\cdot) : T \mapsto Q$. Множества всех допустимых управлений и возмущений обозначим соответственно через $\mathcal{U}(\cdot)$ и $\mathcal{V}(\cdot)$. Движение (системы (1.1)) под действием $u(\cdot) \in \mathcal{U}(\cdot)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}(\cdot)$ есть функция $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\} = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot; t_0, y_0(s), u(\cdot), v(\cdot))\}$ — решение (1.1), понимаемое в смысле Каратеодори.

Пусть $Z(\cdot) = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot; t_0, y_0(s), u(\cdot), v(\cdot)) : u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}$ — пучок всех решений системы (1.1). Нетрудно проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 1.1. *Можно указать число $\rho > 0$ такое, что*

$$\sup\{|x(\cdot)|_{C(T;\mathbb{R}^n)} + |y(\cdot)|_{C(T;\mathbb{R}^N)} + |\dot{x}(\cdot)|_{L_\infty(T;\mathbb{R}^n)} + |\dot{y}(\cdot)|_{L_\infty(T;\mathbb{R}^N)} : \{x(\cdot), y(\cdot)\} \in Z(\cdot)\} \leqslant \rho.$$

Сначала рассмотрим случай наблюдения компоненты $x(t)$, затем случай наблюдения компоненты $y(t)$; второй случай — основной.

2. Постановка задач. Случай измерения компоненты $x(\cdot)$

Следуя [4], назовем закон управления, использующий результаты наблюдения фазового состояния $x(\cdot)$, *позиционной стратегией* первого игрока и определим ее как пару $(\Delta, \mathcal{U})$, где $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$ — *разбиение* отрезка T с диаметром $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i : i \in [0 : m-1]$, а

$$\mathcal{U} : T \times \mathbb{R}^n \mapsto P$$

— *обратная связь*. *Движение*, порожденное указанной стратегией при погрешности измерения h ($h \geqslant 0$), есть функция вида

$$z_\Delta^h(\cdot) = \{x_\Delta^h(\cdot), y_\Delta^h(\cdot)\} = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u^h(\cdot), v(\cdot)), y(\cdot; t_0, y_0(s), u^h(\cdot), v(\cdot))\},$$

где $v(\cdot) \in \mathcal{V}(\cdot)$ и для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$, при некоторых $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$|\xi_i^h - x_\Delta^h(\tau_i)|_n \leqslant h, \tag{2.1}$$

выполняется равенство

$$u^h(t) = u_i^e = \mathcal{U}(\tau_i, \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{2.2}$$

Множество всех таких движений системы (1.1) обозначим символом $Z_h(\Delta, \mathcal{U})$.

Назовем закон управления, использующий результаты наблюдения фазового состояния $x(\tau_i)$, *позиционной стратегией* второго игрока и определим ее как пару $(\Delta, \mathcal{V})$, где $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$ — *разбиение* отрезка T с диаметром $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i : i \in [0 : m-1]$, а

$$\mathcal{V} : T \times \mathbb{R}^n \mapsto Q$$

— *обратная связь*. *Движение*, порожденное указанной стратегией при погрешности измерения h ($h \geqslant 0$), есть функция вида

$$z_{h,\Delta}(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\} = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u(\cdot), v^h(\cdot)), y(\cdot; t_0, y_0(s), u(\cdot), v^h(\cdot))\},$$

где $u(\cdot) \in \mathcal{U}(\cdot)$ и для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$, при некоторых $\xi_i^h \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$|\xi_i^h - x^h(\tau_i)|_n \leqslant h, \tag{2.3}$$

выполняется равенство

$$v^h(t) = v_i^e = \mathcal{V}(\tau_i, \xi_i^h), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{2.4}$$

Множество всех таких движений системы (1.1) обозначим символом $Z_h(\Delta, \mathcal{V})$.

Пусть $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$ — семейство разбиений отрезка T таких, что

$$\tau_{0,h} = t_0, \quad \tau_{m_h,h} = \vartheta, \quad \tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h). \tag{2.5}$$

Далее зафиксируем семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ разбиений отрезка T со свойством

$$\lim_{h \to 0} \delta(h) = 0 \tag{2.6}$$

и положительную функцию

$$h \mapsto \zeta(h) \tag{2.7}$$

положительного аргумента h такую, что

$$\lim_{h \to 0} \zeta(h) = 0.$$

Задача 1. Требуется указать семейство позиционных стратегий первого игрока $(\Delta_h, \mathcal{U}) : T \times \mathbb{R}^n \to P$ и семейство позиционных стратегий второго игрока $(\Delta_h, \mathcal{V}) : T \times \mathbb{R}^n \to Q$, а также число c, обладающие следующими свойствами: какова бы ни была величина $\varepsilon > 0$, найдутся числа $h_* > 0$ и $\delta_* > 0$ такие, что неравенства

$$I(z^h_\Delta(\cdot)) \leqslant c + \varepsilon \qquad \forall z^h_\Delta(\cdot) \in Z_h(\Delta_h, \mathcal{U}), \tag{2.8}$$

$$I(z_{h,\Delta}(\cdot)) \geqslant c - \varepsilon \qquad \forall z_{h,\Delta}(\cdot) \in Z_h(\Delta_h, \mathcal{V}) \tag{2.9}$$

справедливы, если $h \leqslant h_*$ и $\delta = \delta(h) \leqslant \delta_*$.

Число c в этом случае называется ценой игры.

Скажем, что семейство $(\Delta_h, \mathcal{U})_{h>0}$ позиционных стратегий является *ε-оптимальным минимаксным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $h_0 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_0]$ всякое движение $z^h_\Delta(\cdot)$ из $Z_h(\Delta_h, \mathcal{U})$ удовлетворяет неравенству (2.8).

В свою очередь, скажем, что семейство $(\Delta_h, \mathcal{V})_{h>0}$ позиционных стратегий является *ε-оптимальным максиминным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $h_1 > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h_1]$ всякое движение $z_{h,\Delta}(\cdot)$ из $Z_h(\Delta_h, \mathcal{V})$ удовлетворяет неравенству (2.9).

В дальнейшем считаем, что выполнено следующее условие:

Условие 2.1. Существует выпуклое и замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $BP = DQ + E$.

В последнем равенстве

$$BP = \{Bu : u \in P\}, \quad DQ = \{Dv : v \in Q\},$$

$$DQ + E = \{u : u = u_1 + u_2,\ \ u_1 \in DQ,\ \ u_2 \in E\}.$$

Дорожкой назовем всякую функцию $\tilde{z}(\cdot) = \{w(\cdot), p(\cdot)\}$, удовлетворяющую начальному условию $\tilde{z}_{t_0}(s) = \{w_{t_0}(s), p_{t_0}(s)\} = \{x^*_0(s), y^*_0(s)\}$ и являющуюся решением (в смысле Каратеодори) системы с последействием

$$\begin{aligned} &\dot{w}(t) = F_0(w_t(s), p_t(s)) + r(t), \\ &\dot{p}(t) = L(p_t(s)) + Cw(t) + f_0(t), \quad t \in T, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где

$$r(\cdot) \in E(\cdot) = \{u(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^n) : u(t) \in E \quad \text{при п. в. t} \in T\};$$

при этом будем говорить, что дорожка $\tilde{z}(\cdot) = \{w(\cdot), p(\cdot)\} = \{w(\cdot; t_0, w_{t_0}(s), r(\cdot)),\ p(\cdot; t_0, p_{t_0}(s), r(\cdot))\}$ *порождается* управлением $r(\cdot)$. Нетрудно видеть, что для каждой функции $r(\cdot) \in E$ существует единственная порождаемая ею дорожка.

Пусть $r_0(\cdot)$ — оптимальное программное управление, решающее следующую задачу.

Задача 2. Минимизировать функционал $I(z(\cdot))$ на множестве

$$Z(\cdot) = \{\tilde{z}(\cdot) = \{w(\cdot), p(\cdot)\} = \{w(\cdot; t_0, w_{t_0}(s), r(\cdot)), p(\cdot; t_0, p_{t_0}(s), r(\cdot))\} : \, r(\cdot) \in E(\cdot)\},$$

где символ $\{w(\cdot; t_0, w_{t_0}(s), r(\cdot)), p(\cdot; t_0, p_{t_0}(s), r(\cdot))\}$ означает решение системы (2.10), порождаемое управлением $r(\cdot)$.

Очевидно, решение задачи 2 существует. Пусть

$$c_0 = \inf_{\tilde{z}(\cdot) \in Z(\cdot)} I(\tilde{z}(\cdot))$$

— оптимальное значение критерия качества, т. е. $c_0 = I(\tilde{z}_0(\cdot))$, где $\tilde{z}_0(\cdot) = \{w^0(\cdot), p^0(\cdot)\} = \{w(\cdot; t_0, w_{t_0}(s), r_0(\cdot)), p(\cdot; t_0, p_{t_0}(s), r_0(\cdot))\}$ — оптимальная траектория (дорожка) — решение системы (2.10), отвечающее управлению $r(\cdot) = r_0(\cdot)$.

3. Алгоритм решения. Случай измерения компоненты $x(\cdot)$

В настоящем разделе мы укажем правила формирования семейств ε-оптимальных минимаксных и максиминных позиционных стратегий $(\Delta_h,\mathcal{U})_{h>0}$ и $(\Delta_h,\mathcal{V})_{h>0}$. При этом мы воспользуемся методом стабильных дорожек, развитым в [4] для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Начнем с минимаксных стратегий. Именно, опишем правило построения семейства ε-оптимальных минимаксных стратегий, т. е. опишем последовательность действий, которые необходимо выполнить первому игроку для решения стоящей перед ним задачи. Мы организуем процесс управления системой (1.1) по принципу обратной связи таким образом, чтобы при достаточно малых h и δ истинное движение системы (1.1) $z^h_\Delta(\cdot)$ оставалось при всех $t\in T$ в достаточно малой ε-окрестности дорожки $\tilde z_0(\cdot)$.

До начала работы алгоритма фиксируем h и Δ_h. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ ($m=m_h$) однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i=[\tau_i,\tau_{i+1})$, $\tau_i=\tau_{i,h}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент $t=\tau_i$, по измерению ξ^h_i, удовлетворяющему (2.1), и фазовому состоянию дорожки $\tilde z_0(\tau_i)$ вычисляется вектор $u^e_i=\mathcal{U}(\tau_i,\xi^h_i)$. После этого в течение промежутка времени δ_i на вход системы (1.1) подается постоянное управление $u=u^h(t)$ (см. (2.2)). В результате под действием этого управления и неизвестного управления второго игрока $v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$ система (1.1) переходит из состояния $z^h_{\Delta\tau_i}(s)$ в состояние $z^h_{\Delta\tau_{i+1}}(s)=z^h_{\Delta\tau_{i+1}}(s;\tau_i,z^h_{\Delta\tau_i}(s),u^e_i,v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))$. Здесь и всюду ниже символ $u_{a,b}(\cdot)$ ($v_{a,b}(\cdot)$) означает функцию $t\mapsto u(t)$ ($t\mapsto v(t)$), рассматриваемую на промежутке (a,b) как единое целое. На следующем $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма заканчивается в момент $t=\vartheta$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* 2.1, $\tilde z_0(\cdot)=\{w^0(\cdot),p^0(\cdot)\}$ — *оптимальная траектория* (*дорожка*) *системы* (2.10) *и семейство позиционных стратегий первого игрока* $(\Delta_h,\mathcal{U})_{h>0}$ *таково, что* $\mathcal{U}$ *задается соотношениями*

$$\mathcal{U}(\tau_i,\xi^h_i)=\{u^e_i\in P:\Big(\xi^h_i-w^0(\tau_i),Bu^e_i\Big)_n\leqslant\inf_{u\in P}\Big(\xi^h_i-w^0(\tau_i),Bu\Big)_n+\zeta(h)\},\quad \tau_i=\tau_{i,h}. \tag{3.1}$$

Тогда

$$\lim_{h\to0}\sup\Big\{|z^h_\Delta(t)-\tilde z_0(t)|_{n+N}:t\in T,z^h_\Delta(\cdot)\in Z_h(\Delta_h,\mathcal{U})\Big\}=0.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы оценим изменение величины

$$\varepsilon(t)=|z^h_{\Delta t}(s)-\tilde z_{0t}(s)|^2_{X\times Y},\quad t\in T,$$

где $z^h_\Delta(\cdot)=\{x^h_\Delta(\cdot),y^h_\Delta(\cdot)\}$, $\tilde z_0(\cdot)=\{w^0(\cdot),p^0(\cdot)\}$. Заметим, что при $t\in T$

$$\varepsilon(t)=|x^h_\Delta(t)-w^0(t)|^2_n+\int_{-\tau}^0|x^h_\Delta(t+s)-w^0(t+s)|^2_n\,ds+|y^h_\Delta(t)-p^0(t)|^2_N+\int_{-\tau}^0|y^h_\Delta(t+s)-p^0(t+s)|^2_N\,ds.$$

Далее, нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$\varepsilon(\tau_{i+1})=\nu^{(i+1)}_1+\nu^{(i+1)}_2+\nu^{(i+1)}_3, \tag{3.2}$$

где

$$\nu^{(i+1)}_1=\Big|z^h_\Delta(\tau_i)-\tilde z_0(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\{f(t,z^h_{\Delta t}(s),u^e_i,v(t))-f_1(t,\tilde z_{0t}(s),r_0(t))\}\,dt\Big|^2_{N+n},$$

$$\nu^{(i+1)}_2=\int_{-\delta}^0\Big|z^h_{\Delta t}(\tau_i)-\tilde z_0(\tau_i)+\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s}\{f(t,z^t_\Delta(s),u^e_i,v(t))-f_1(t,\tilde z_{0t}(s),r_0(t))\}\,dt\Big|^2_{N+n}ds,$$

$$\nu^{(i+1)}_3=\int_{-\tau}^{-\delta}|x^h_\Delta(\tau_{i+1}+s)-w^0(\tau_{i+1}+s)|^2_n\,ds+\int_{-\tau}^{-\delta}|y^h_\Delta(\tau_{i+1}+s)-p^0(\tau_{i+1}+s)|^2_N\,ds,$$

$$f_1(t, \tilde{z}_{0t}(s), r_0(t)) = \left\{ \begin{array}{l} F_0(w_t^0(s), p_t^0(s)) + r_0(t) \\ L(p_t^0(s)) + Cw^0(t) + f_0(t) \end{array} \right\},$$

$\delta = \delta(h), \Delta = \Delta_h$ (см. (2.5)). Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (3.2). Имеем

$$\nu_3^{(i+1)} = \int\limits_{-\tau+\delta}^{0} |x_\Delta^h(\tau_i + s) - w^0(\tau_i + s)|_n^2\, ds + \int\limits_{-\tau+\delta}^{0} |y_\Delta^h(\tau_i + s) - p^0(\tau_i + s)|_N^2\, ds,$$

$$\nu_1^{(i+1)} = |z_\Delta^h(\tau_i) - \tilde{z}_0(\tau_i)|_{N+n}^2 + \nu_4^{(i+1)} + \tag{3.3}$$
$$+ \Big| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ f(t, z_{\Delta t}^h(s), u_i^e, v(t)) - f_1(t, \tilde{z}_{0t}(s), r_0(t)) \}\, dt \Big|_{N+n}^2.$$

Здесь

$$\nu_4^{(i+1)} = 2\Big(z_\Delta^h(\tau_i) - \tilde{z}_0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ f(t, z_{\Delta t}^h(s), u_i^e, v(t)) - f_1(t, \tilde{z}_{0t}(s), r_0(t)) \}\, dt \Big)_{N+n} = \mu_i^{(1)} + \mu_i^{(2)},$$

$$\mu_i^{(1)} = 2\Big(x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ F_0(x_{\Delta t}^h(s), y_{\Delta t}^h(s)) - F_0(w_t^0(s), p_t^0(s)) + Bu_i^e - Dv(t) - r_0(t) \}\, dt \Big)_n.$$

$$\mu_i^{(2)} = 2\Big(y_\Delta^h(\tau_i) - p^0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ L(y_{\Delta t}^h(s)) - L(p_t^0(s)) + C(x_\Delta^h(t) - w^0(t)) \}\, dt \Big)_N,$$

В силу (1.3) верно неравенство

$$|L(p_{\tau_i}^0(s)) - L(y_{\Delta\tau_i}^h(s))|_N \leqslant c_1 \Big(|p^0(\tau_i) - y_\Delta^h(\tau_i)|_N + (\int\limits_{-\tau}^{0} |p^0(\tau_i + s) - y_\Delta^h(\tau_i + s)|_N^2\, ds)^{1/2} \Big).$$

Далее, снова учитывая (1.3), а также лемму 1.1, получаем при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big| L(y_{\Delta t}^h(s) - L(p_t^0(s)) - L(y_{\Delta\tau_i}^h(s)) - L(p_{\tau_i}^0(s)) \Big|_N\, dt \leqslant c_2\delta^2,$$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big| C(x_\Delta^h(t) - w^0(t)) - C(x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i)) \Big|_n\, dt \leqslant c_3\delta^2.$$

Таким образом

$$\mu_i^{(2)} \leqslant \delta c_4 |y_\Delta^h(\tau_i) - p^0(\tau_i)|_N \{ |x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i)|_n + |y_\Delta^h(\tau_i) - p^0(\tau_i)|_N + \tag{3.4}$$
$$+ |y_{\Delta\tau_i}^h(s) - p_{\tau_i}^0(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^N)} \} + c_5\delta^2.$$

Аналогично, учитывая липшицевость отображения F_0 (см. (1.2)) и лемму 1.1, устанавливаем оценку

$$\mu_i^{(1)} \leqslant 2\delta c_6 |x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i)|_n \{ |x_{\Delta\tau_i}^h(s) - w_{\tau_i}^0(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^n)} + |x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i)|_n + \tag{3.5}$$
$$+ |y_{\Delta\tau_i}^h(s) - p_{\tau_i}^0(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^N)} + |y_\Delta^h(\tau_i) - p^0(\tau_i)|_N \} + c_7\delta^2 + \mu_i^{(3)},$$

где

$$\mu_i^{(3)} = 2\Big(x_\Delta^h(\tau_i) - w^0(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu_i^e - Dv(t) - r_0(t))\, dt \Big)_n.$$

Легко видеть

$$\nu_2^{(i+1)} \leqslant \delta |z_\Delta^h(\tau_i) - \tilde{z}_0(\tau_i)|_{N+n}^2 + c_8\delta^2.$$

Объединив (3.2)–(3.5) и последнее неравенство, будем иметь

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c_9\delta)\varepsilon(\tau_i) + c_{10}\delta^2 + \mu_i^{(3)}. \tag{3.6}$$

Рассмотрим величину $\mu_i^{(3)}$. Справедливо неравенство

$$\mu_i^{(3)} \leqslant \mu_i^{(4)} + c_{11}h\delta. \tag{3.7}$$

Здесь

$$\mu_i^{(4)} = 2\Big(\xi_i^h - w^{(0}(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu_i^e - Dv(t) - r_0(t))\,dt\Big)_n,$$

Учитывая правило выбора векторов u_i^e(3.1), заключаем в силу условия 2.1

$$\mu_i^{(4)} \leqslant \zeta(h)\delta.$$

В таком случае из (3.7) выводим

$$\mu_i^{(3)} \leqslant c_{11}h\delta + \zeta(h)\delta.$$

Отсюда и из (3.6) следует

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c_9\delta)\varepsilon(\tau_i) + c_{13}\delta(h + \delta + \zeta(h)).$$

Учитывая последнее неравенство, а также (1.5), стандартным образом (см., например, [4, с. 62–65]) получим

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant c_{13}\Big(\varepsilon(t_0) + h + \delta + \zeta(h)\Big) \leqslant c_{14}(h + \delta(h) + \zeta(h)), \quad i \in [0 : m-1]. \tag{3.8}$$

Из этого неравенства следует справедливость теоремы. Теорема доказана. □

Перейдем к построению ε-оптимального максиминного семейства $(\Delta_h, \mathcal{V})_{h>0}$. Снова начнем с описания алгоритма, т. е. последовательности действий, которые необходимо выполнить второму игроку для решения стоящей перед ним задачи. Фиксируем величину погрешности измерения $h \in (0,1)$. Вместе с h мы фиксируем разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$ отрезка T. В момент $t = t_0$ определим элементы $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ и v_0 согласно правилам

$$(w(\tau_0) - \xi_0^h, Bu^{(0)})_n \leqslant \min\{(w(\tau_0) - \xi_0^h, Bu)_n : u \in P\} + \zeta(h), \quad |\xi_0^h - x^h(\tau_0)|_n \leqslant h, \tag{3.9}$$

$v^{(0)}$ — произвольный элемент из множества Q со свойствами $Bu^{(0)} - Dv^{(0)} \in E$,

$$v_0^e \in \mathcal{V}(t, \xi_0^h, w(\tau_0)), \tag{3.10}$$

$$\mathcal{V}(\tau_0, x, w(\tau_0)) = \{v \in Q : (w(\tau_0) - x, Dv)_n \leqslant \min\{(w(\tau_0) - x, Dv)_n : v \in Q\} + \zeta(h). \tag{3.11}$$

После этого в (2.10) полагаем

$$r(t) = Bu^{(0)} - Dv^{(0)}, \quad t \in [t_0, \tau_1). \tag{3.12}$$

Затем вычисляем траекторию $\tilde{z}(t) = \{w(t), p(t)\}$ дорожки (2.10) на интервале $[t_0, \tau_1]$: $\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t; t_0, z_{t_0}(s), r(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$. Аналогично, управление

$$v^h(t) = v_0^e, \quad t \in [\tau_0, \tau_1) \tag{3.13}$$

подается на вход системы (1.1). В результате действия этого управления, а также (неизвестного) управления первого игрока $u_{\tau_0,\tau_1}(\cdot)$ реализуется траектория системы (1.1) $\{z_{h,\Delta}(\cdot;\ \tau_0,\ z_{h,\Delta,\tau_0}(s),$ $u_{\tau_0,\tau_1}(\cdot),\ v_0^e)\}_{\tau_0,\tau_1}$ на промежутке $[t_0, \tau_1]$. Пусть траектории $z_{h,\Delta}(\cdot)$ и $\tilde{z}(\cdot)$ определены на интервале $[t_0, \tau_i]$. Для формирования кусков траекторий $\{z_{h,\Delta}(\cdot)\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}$ и $\{\tilde{z}(\cdot)\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}$ поступим следующим образом. В момент $t = \tau_i$ зададим $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ и v_i^e согласно правилу

$$(w(\tau_i) - \xi_i^h, Bu^{(i)}) \leqslant \min\{(w(\tau_i) - \xi_i^h, Bu)_n : u \in P\} + \zeta(h), \quad |\xi_i^h - x^h(\tau_i)|_n \leqslant h, \tag{3.14}$$

$v^{(i)}$ — произвольный элемент множества Q со свойством: $Bu^{(i)} - Dv^{(i)} \in E$,

$$v_i^e \in \mathcal{V}(t, \xi_i^h, w(\tau_i)), \tag{3.15}$$

$$\mathcal{V}(\tau_i, x, w(\tau_i)) = \{v \in Q : (w(\tau_i) - x, Dv)_n \leqslant \min\{(w(\tau_i) - x, Dv)_n : v \in Q\} + \zeta(h). \tag{3.16}$$

После этого в (2.10) полагаем

$$r(t) = Bu^{(i)} - Dv^{(i)}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{3.17}$$

Затем вычисляем траекторию $\tilde{z}(\cdot)$ системы (2.10) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$: $\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t; \tau_i, \tilde{z}_{\tau_i}(s), r(t))$, $\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}$. Аналогично, управление

$$v^h(t) = v_i^e, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \tag{3.18}$$

подается на вход системы (1.1). В результате действия этого управления, а также (неизвестного) управления первого игрока $u_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$, реализуется траектория

$$\{z_{h,\Delta}(\cdot; \tau_i, z_{h,\Delta\tau_i}(s), u_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot), v_i^e)\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}$$

системы (1.1) на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Процедура заканчивается в момент ϑ.

Теорема 3.2. *Пусть выполнено условие* 2.1. *Пусть* $Z_h(\Delta_h, \mathcal{V})$, $h \in (0,1)$ — *пучок решений системы* (1.1), *порожденный позиционной стратегией* $(\Delta_h, \mathcal{V})_{h>0}$ *вида* (3.11), (3.16). *Тогда*

$$\lim_{h\to 0} \sup \Big\{ \big| z_{h,\Delta}(t) - \tilde{z}(t)|_{n+N} : t \in T, z_{h,\Delta}(\cdot) \in Z_h(\Delta_h, \mathcal{V}) \Big\} = 0.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы оценим изменение величины

$$\varepsilon_1(t) = |z_{h,\Delta t}(s) - \tilde{z}_t(s)|^2_{X\times Y} =$$

$$= |x^h(t) - w(t)|_n^2 + \int_{-\tau}^{0} |x^h(t+s) - w(t+s)|_n^2\, ds + |y^h(t) - p(t)|_N^2 + \int_{-\tau}^{0} |y^h(t+s) - p(t+s)|_N^2\, ds.$$

Здесь $z_{h,\Delta}(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\}$ — решение системы (1.1), отвечающее управлениям $u = u(\cdot)$ и $v = v^h(\cdot)$, $u(\cdot)$ — неизвестное реализующееся управление первого игрока, $v^h(\cdot)$ находится согласно (3.10), (3.11), (3.13), (3.16), (3.15), (3.18), $\tilde{z}(\cdot) = \tilde{z}(\cdot; t_0, \tilde{z}_{t_0}(s), r(\cdot))$ — решение системы (2.10), порожденное управлением $r(\cdot)$ вида (3.12), (3.17), где вектора $u^{(i)} (i \in [0 : m-1])$ находятся согласно (3.9), (3.14), а вектора $v^{(i)} \in Q$ таковы, что

$$Bu^{(i)} - Dv^{(i)} \in E.$$

Аналогично (3.2) получаем

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) = \nu_4^{(i+1)} + \nu_5^{(i+1)} + \nu_6^{(i+1)}, \tag{3.19}$$

$$\nu_4^{(i+1)} = \Big| z_{h,\Delta}(\tau_i) - \tilde{z}(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ f(t, z_{h,\Delta t}(s), u(t), v_i^e) - f_1(t, \tilde{z}_t(s), r(t))\}\, dt \Big|^2_{N+n},$$

$$\nu_5^{(i+1)} = \int_{-\delta}^{0} \Big| z_{h,\Delta}(\tau_i) - \tilde{z}(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}+s} \{ f(t, z_{h,\Delta t}(s), u(t), v_i^e) - f_1(t, \tilde{z}_t(s), r(t))\}\, dt \Big|^2_{N+n} ds,$$

$$\nu_6^{(i+1)} = \int_{-\tau}^{-\delta} |x^h(\tau_{i+1}+s) - w(\tau_{i+1}+s)|_n^2\, ds + \int_{-\tau}^{-\delta} |y^h(\tau_{i+1}+s) - p(\tau_{i+1}+s)|_N^2\, ds,$$

$\tau_i = \tau_{i,h}, \Delta = \Delta_h, \delta = \delta(h)$ (см. (2.5)). Оценим каждое слагаемое в правой части равенства (3.19). Имеем

$$\nu_6^{(i+1)} = \int_{-\tau+\delta}^{0} |x^h(\tau_i+s) - w(\tau_i+s)|_n^2\, ds + \int_{-\tau+\delta}^{0} |y^h(\tau_i+s) - p(\tau_i+s)|_N^2\, ds,$$

$$\nu_4^{(i+1)} = |z_{h,\Delta}(\tau_i) - \tilde{z}(\tau_i)|^2_{N+n} + \nu_7^{(i+1)} + \tag{3.20}$$

$$+ \Big| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{ f(t, z_{h,\Delta t}(s), u(t), v_i^e) - f_1(t, \tilde{z}_t(s), r(t))\}\, dt \Big|^2_{N+n},$$

где

$$\nu_7^{(i+1)} = 2\Big(z_{h,\Delta}(\tau_i) - \tilde{z}(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{f(t, z_{h,\Delta t}(s), u(t), v_i^e) -$$
$$- f_1(t, \tilde{z}_t(s), r(t))\}\, dt\Big)_{N+n} = \tilde{\mu}_i^{(1)} + \tilde{\mu}_i^{(2)},$$

$$\tilde{\mu}_i^{(1)} = 2\Big(x^h(\tau_i) - w(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{F_0(x_t^h(s), y_t^h(s)) - F_0(w_t(s), p_t(s)) + Bu(t) - Dv_i^e - Bu^{(i)} + Dv^{(i)}\}\, dt\Big)_n.$$

$$\tilde{\mu}_i^{(2)} = 2\Big(y^h(\tau_i) - p(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \{L(y_t^h(s)) - L(p_t(s)) + C(x^h(t) - w(t))\}\, dt\Big)_N,$$

В силу (1.3) верно неравенство

$$|L(y_{\tau_i}^h(s)) - L(p_{\tau_i}(s))|_N \leqslant c^{(1)}\Big(|y^h(\tau_i) - p(\tau_i)|_N + (\int\limits_{-\tau}^{0} |y^h(\tau_i + s) - p(\tau_i + s)|_N^2\, ds)^{1/2}\Big).$$

Кроме того, при $y \in [\tau_i, \tau_{i+1})$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big|L(y_t^h(s)) - L(p_t(s)) - L(y_{\tau_i}^h(s)) - L(p_{\tau_i}(s))\Big|_N\, dt \leqslant c^{(2)}\delta^2,$$

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Big|C(x^h(t) - w(t)) - C(x^h(\tau_i) - p(\tau_i))\Big|_n\, dt \leqslant c^{(3)}\delta^2.$$

Таким образом

$$\tilde{\mu}_i^{(2)} \leqslant \delta c^{(4)} |y^h(\tau_i) - p(\tau_i)|_N \{|x^h(\tau_i) - w(\tau_i)|_n + |y^h(\tau_i) - p(\tau_i)|_N +$$
$$+ |y_{\tau_i}^h(s) - p_{\tau_i}(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^N)}\} + c^{(5)}\delta^2. \tag{3.21}$$

Далее имеем

$$\tilde{\mu}_i^{(1)} \leqslant 2\delta c^{(6)} |x^h(\tau_i) - w(\tau_i)|_n \{|x_{\tau_i}^h(s) - w_{\tau_i}(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^n)} + |x^h(\tau_i) - w(\tau_i)|_n +$$
$$+ |y_{\tau_i}^h(s) - p_{\tau_i}(s)|_{L_2([-\tau,0];\mathbb{R}^N)} + |y^h(\tau_i) - p(\tau_i)|_N\} + c^{(7)}\delta^2 + \tilde{\mu}_i^{(3)}, \tag{3.22}$$

где

$$\tilde{\mu}_i^{(3)} = 2\Big(x^h(\tau_i) - w(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu(t) - Dv_i^e - Bu^{(i)} + Dv^{(i)})\, dt\Big)_n.$$

Легко видеть

$$\nu_5^{(i+1)} \leqslant c^{(8)}\delta^2 + \delta |z_{h,\Delta}(\tau_i) - \tilde{z}(\tau_i)|_{N+n}^2. \tag{3.23}$$

Объединив (3.19)–(3.23), будем иметь

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(9)}\delta)\varepsilon_1(\tau_i) + c^{(10)}\delta^2 + \tilde{\mu}_i^{(3)}. \tag{3.24}$$

Рассмотрим величину $\tilde{\mu}_i^{(3)}$. В силу (1.6) справедливо неравенство

$$\tilde{\mu}_i^{(3)} \leqslant \tilde{\mu}_i^{(4)} + c^{(11)} h\delta. \tag{3.25}$$

Здесь

$$\tilde{\mu}_i^{(4)} = 2\Big(\xi_i^h - w(\tau_i),\ \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu(t) - Dv_i^e - Bu^{(i)} + Dv^{(i)})\, dt\Big)_n,$$

Учитывая правило выбора векторов $u^{(i)}$, v_i^e, $v^{(i)}$ (см. (3.9)–(3.18)), заключаем

$$\tilde{\mu}_i^{(4)} \leqslant c^{(12)}\zeta(h)\delta. \tag{3.26}$$

Из (3.25), (3.26) выводим
$$\tilde{\mu}_i^{(3)} \leqslant c^{(11)} h\delta + c^{(12)}\zeta(h)\delta.$$
Отсюда и из (3.24) следует
$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(9)}\delta)\varepsilon_1(\tau_i) + c^{(13)}\delta(h + \delta + \zeta(h)). \qquad (3.27)$$
Таким образом, учитывая (3.27), а также (1.5), получим
$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leqslant c^{(13)}\Big(\varepsilon_1(t_0) + h + \delta + \zeta(h)\Big) \leqslant c^{(14)}(h + \delta(h) + \zeta(h)), \quad i \in [0 : m-1].$$
Из этого неравенства следует справедливость теоремы. Теорема доказана. □

Из теорем 3.1 и 3.2 в силу липшицевости критерия качества I следует

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* 2.1. *Тогда цена игры равна* c_0. *Семейство позиционных стратегий* $(\Delta_h, \mathcal{U})_{h>0}$, *где* $\mathcal{U}$ *задается согласно* (3.1), *является* ε*-оптимальным минимаксным. В свою очередь, семейство позиционных стратегий* $(\Delta_h, \mathcal{V})_{h>0}$, *где* $\mathcal{V}$ *задается согласно* (3.11), (3.16), *является* ε*-оптимальным максиминным.*

4. Постановка задач. Случай измерения компоненты $y(\cdot)$

Перейдем к описанию законов формирования управлений первого и второго игроков при наблюдении компоненты $y(\cdot)$ состояния $z(\cdot) = \{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы (1.1). Для простоты выкладок ниже считаем $t_0 = 0$. Фиксируем две системы (назовем их в дальнейшем моделями). Первая — дорожка с динамикой (2.10). Динамика второй модели описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\dot{w}^h(t) = L(\eta^h_{\tau_i}(s)) + Cs^h(t) + f_0(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \qquad (4.1)$$
$i \in [0 : m-1]$, $m = m_h$, с начальным условием
$$w^h(0) = y_0^*(0).$$
Здесь $\eta^h(t)$ — кусочно-постоянная функция ($\eta^h(t) = \eta^h_i$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$) — результат измерения компоненты $y(\cdot)$ (см. (1.6)), $s^h(t) \in \mathbb{R}^n$ — управляющее воздействие. Всякую кусочно-постоянную функцию $\eta^h(\cdot) : T \mapsto \mathbb{R}^N$ назовем *сигнальным входом модели*, а всякую кусочно-постоянную функцию $s^h(\cdot) : T \mapsto \mathbb{R}^n$ — *управляющим* s*-входом модели*. *Движением модели*, порожденным сигнальным входом $\eta^h(\cdot)$ и управляющим s-входом $s^h(\cdot)$, назовем тройку функций $\{w(\cdot), p(\cdot), w^h(\cdot)\}$. Такое движение, которое существует и единственно, будем обозначать следующим образом:
$$\{w(\cdot; t_0, x_0^*(s), r(\cdot)), p(\cdot; t_0, y_0^*(s), r(\cdot)), w^h(\cdot; t_0, y_0^*(0), s^h(\cdot))\}.$$
Позиционной стратегией первого игрока назовем тройку $(\Delta, S, \mathcal{U})$, где
$$\begin{aligned} \Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m \quad &— \quad \text{\textit{разбиение отрезка} } T, \\ S : (t, \eta, w^h) \mapsto S(t, \eta, w^h) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^n \quad &— \quad \text{\textit{обратная связь в модели} (4.1)}, \\ \mathcal{U} : (t, s, w) \mapsto \mathcal{U}(t, s, w) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto P \quad &— \quad \text{\textit{обратная связь в системе} (1.1)}. \end{aligned}$$
Расширенное движение, порожденное указанной позиционной стратегией $(\Delta, S, \mathcal{U})$ при погрешности измерения h, есть четверка функций $\{z^h_\Delta(\cdot), w(\cdot), p(\cdot), w^h(\cdot)\}$ следующего вида:
$$z^h_\Delta(\cdot) = \{x^h_\Delta(\cdot), y^h_\Delta(\cdot)\} = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u^h(\cdot), v(\cdot)),$$
$$y(\cdot; t_0, y_0(s), u^h(\cdot), v(\cdot))\} — \text{\textit{траектория системы} (1.1)},$$
$$\{w(\cdot), p(\cdot)\} = \{w(\cdot; t_0, x_0^*(s), r(\cdot)), p(\cdot; t_0, y_0^*(s), r(\cdot))\} — \text{\textit{траектория дорожки} (2.10)},$$
$$w^h(\cdot) = w^h(\cdot; t_0, y_0^*(0), s^h(\cdot)) — \text{\textit{траектория модели} (4.1)},$$
где $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, и для всех $i \in [0, \ldots, m-1]$ и всех $\eta^h_i \in \mathbb{R}^N$ таких, что
$$|\eta^h_i - y^h_\Delta(\tau_i)|_N \leqslant h, \qquad (4.2)$$
функции $s^h(\cdot)$ и $u^h(\cdot)$ вычисляются по правилу
$$s^h(t) = s^h_i = S(\tau_i, \eta^h_i, w^h(\tau_i)), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \qquad (4.3)$$

$$u^h(t) = u_i^h = \mathcal{U}(\tau_i, s^h(\tau_i), w(\tau_i)); \tag{4.4}$$

Множество всех таких движений обозначим символом $Z_h(\Delta, S, \mathcal{U})$. Позиционной стратегией второго игрока назовем тройку $(\Delta, S, \mathcal{V})$, где

$$\begin{aligned} \Delta = \{\tau_i\}_{i=1}^m \quad &— \quad \textit{разбиение отрезка } T, \\ S : (t, \eta, w^h) \mapsto S(t, \eta, w^h) : T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}^n \quad &— \quad \textit{обратная связь в модели } (4.1), \\ \mathcal{V} : (t, s, w) \mapsto \mathcal{V}(t, s, w) : T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto Q \quad &— \quad \textit{обратная связь в системе } (1.1). \end{aligned}$$

Расширенное движение, порожденное позиционной стратегией $(\Delta, S, \mathcal{V})$ при погрешности измерения h, есть функция $\{z_{h,\Delta}(\cdot), w(\cdot), p(\cdot), w^h(\cdot)\}$ вида

$$z_{h,\Delta}(\cdot) = \{x^h(\cdot), y^h(\cdot)\} = \{x(\cdot; t_0, x_0(s), u(\cdot), v^h(\cdot)), y(\cdot; t_0, y_0(s), u(\cdot), v^h(\cdot))\},$$

$$\{w(\cdot), p(\cdot)\} = \{w(\cdot; t_0, x_0^*(s), r(\cdot)), p(\cdot; t_0, y_0^*(s), r(\cdot))\},$$

$$w^h(\cdot) = w^h(\cdot; t_0, y_0^*(0), s^h(\cdot)),$$

где $u(\cdot) \in \mathcal{V}(\cdot)$, и для всех $i \in [0 : m-1]$ и всех $\eta_i^h \in \mathbb{R}^N$ таких, что

$$|\eta_i^h - y^h(\tau_i)|_N \leqslant h, \tag{4.5}$$

функции $s^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$ вычисляются по правилу

$$s^h(t) = s_i^h = S(\tau_i, \eta_i^h, w^h(\tau_i)), \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{4.6}$$

$$v^h(t) = v_i^h = \mathcal{V}(\tau_i, s^h(\tau_i), w(\tau_i)). \tag{4.7}$$

Множество всех таких движений обозначим символом $Z_h(\Delta, S, \mathcal{V})$.

Пусть фиксировано семейство $(\Delta_h)_{h>0}$ разбиений (2.5) отрезка T со свойством (2.6) и функция $\xi \to \zeta(h)$ (см. (2.7)).

Задача 3. Требуется указать семейство позиционных стратегий первого игрока $(\Delta_h, S, \mathcal{U})$ и семейство позиционных стратегий второго игрока $(\Delta_h, S, \mathcal{V})$, а также цену игры c, обладающие следующими свойствами: какова бы ни была величина $\varepsilon > 0$, найдутся числа $h^* > 0$ и $\delta^* > 0$ такие, что неравенства

$$I(z_\Delta^h(\cdot)) \leqslant c + \varepsilon \qquad \forall z_\Delta^h(\cdot) \in Z_h(\Delta_h, S, \mathcal{U}), \tag{4.8}$$

$$I(z_{h,\Delta}(\cdot)) \geqslant c - \varepsilon \qquad \forall z_{h,\Delta}(\cdot) \in Z_h(\Delta_h, S, \mathcal{V}) \tag{4.9}$$

справедливы, если $h \leqslant h^*$ и $\delta = \delta(h) \leqslant \delta^*$.

Скажем, что семейство $(\Delta_h, S, \mathcal{U})_{h>0}$ позиционных стратегий является *ε-оптимальным минимаксным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $h^{(0)} > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h^{(0)}]$ всякое движение $z_\Delta^h(\cdot)$ из $Z_h(\Delta_h, S, \mathcal{U})$ удовлетворяет неравенству (4.8).

В свою очередь, скажем, что семейство $(\Delta_h, S, \mathcal{V})_{h>0}$ позиционных стратегий является *ε-оптимальным максиминным*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать число $h^{(1)} > 0$ такое, что при каждом $h \in (0, h^{(1)}]$ всякое движение $z_{h,\Delta}(\cdot)$ из $Z_h(\Delta_h, S, \mathcal{V})$ удовлетворяет неравенству (4.9).

5. Алгоритм решения. Случай измерения компоненты $y(\cdot)$

В настоящем разделе мы укажем правила формирования семейств ε-оптимальных минимаксных и максиминных позиционных стратегий $(\Delta_h, S, \mathcal{U})_{h>0}$ и $(\Delta_h, S, \mathcal{V})_{h>0}$. При этом мы, как и выше, воспользуемся методом стабильных дорожек. Начнем с минимаксных стратегий. Критерий существования семейства стратегий первого игрока, решающих стоящую перед ним задачу (ε-оптимального минимаксного семейства $(\Delta_h, S, \mathcal{U})$), — тот же, что и для стратегий $(\Delta_h, \mathcal{U})$ (см. теорему 3.1). В обосновании этого результата — основного для настоящей заметки— ключевую роль играет тот факт, что обратную связь S в модели (4.1) можно подобрать таким образом, что вход $s^h(\cdot)$ модели реконструирует ненаблюдаемую компоненту $x_\Delta^h(\cdot)$ $(x^h(\cdot))$ состояния системы (1.1) сколь угодно точно (в равномерной метрике) при достаточной точности наблюдений h.

Дадим точную формулировку. Ввиду леммы 1.1

$$|x(t; 0, x_0(s), u(\cdot), v(\cdot))|_n \leqslant \rho, \quad |y(t; 0, y_0(s), u(\cdot), v(\cdot))|_N \leqslant \rho \tag{5.1}$$

для всех $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, $t \in T$. В свою очередь, в силу (5.1), липшицевости отображения L, а также свойств функций $x_0(s)$ и $y_0(s)$ можно задать число $M > 0$, для которого равномерно по всем $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in Z(\cdot)$ выполняются неравенства

$$|\dot{y}(t)|_N \leqslant M, \quad |\dot{x}(t)|_n \leqslant M \quad \text{при п.в.} \quad t \in T, \tag{5.2}$$

$$|L(y_t(s)) - L(\eta^h_{\tau_i}(s))|_N \leqslant M(\delta + h) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1]. \tag{5.3}$$

Здесь $\tau_i = \tau_{h,i}, m = m_h$. В дальнейшем нам понадобится следующее

Условие 5.1. $N = n$ и $\operatorname{rank} C = n$.

Зафиксируем функцию $\alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$. Закон формирования управления $s^h(\cdot)$ в модели (4.1) зададим следующим образом:

$$s^h(t) = S_1(t, \eta^h_i, w^h(\tau_i)) = s^h_i = -\frac{1}{\alpha} C'[w^h(\tau_i) - \eta^h_i] \ \text{ при п.в.} \ \ t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{5.4}$$

где $\alpha = \alpha(h)$, штрих означает транспонирование. Если управление $s^h(\cdot)$ определяется по формуле (5.4), то система (4.1) примет следующий вид:

$$\dot{w}^h(t) = L(\eta^h_{\tau_i}(s)) - \frac{1}{\alpha} CC'[w^h(\tau_i) - \eta^h_i] \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i. \tag{5.5}$$

Лемма 5.1. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$\alpha(h) \to 0, \quad \delta(h) \to 0, \quad \delta(h)\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad h\alpha^{-1}(h) \to 0, \quad \textit{при} \quad h \to 0. \tag{5.6}$$

Пусть также выполнено условие 5.1 *и семейство позиционных стратегий* $(\Delta_h, S_1, \mathcal{U})_{h>0}$ *таково, что обратная связь в модели* (4.1) S_1 *задается согласно* (5.4) *при* $t = \tau_i \equiv \tau_{i,h}$; $\mathcal{U}$ — *произвольное* (*возможно, многозначное*) *отображение декартова произведения* $T \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *в* P.

Тогда можно указать такое $h_{**} \in (0,1)$, *что при всех* $h \in (0, h_{**})$ *имеет место неравенство*

$$\sup\{|s^h(t) - x^h_\Delta(t)|_n : t \in T\} \leqslant \tilde{c}_1\alpha(h) + \tilde{c}_2(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'}Cx^h_\Delta(0)|_N. \tag{5.7}$$

Доказательство. Воспользовавшись (5.5), будем иметь

$$\frac{d}{dt}[w^h(t) - y^h_\Delta(t)] = L(\eta^h_{\tau_i}(s)) - \frac{1}{\alpha}C'C[w^h(\tau_i) - \eta^h_i] - L(y^h_{\Delta t}(s)) - Cx^h_\Delta(t) =$$

$$-\frac{1}{\alpha}C'C[w^h(t) - y^h_\Delta(t)] + \Psi^{(1)}_h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i$$

и

$$|w^h(0) - y^h_\Delta(0)|_N \leqslant h.$$

Здесь

$$\Psi^{(1)}_h(t) = \Psi_h(t) + \frac{1}{\alpha}CC'[w^h(t) - w^h(\tau_i)],$$

$$\Psi_h(t) = -\frac{1}{\alpha}CC'[y^h_\Delta(t) - \eta^h_i] + [L(\eta^h_{\tau_i}(s)) - L(y^h_{\Delta t}(s))] - Cx^h_\Delta(t), \quad t \in \delta_i.$$

Заметим, что в силу (5.1)–(5.3), (5.6) семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ ограничено

$$|\Psi_h(t)|_N \leqslant M^{(1)} \quad \text{при п.в.} \quad t \in T \quad \text{и всех} \quad h \in (0,1) \tag{5.8}$$

равномерно по $h \in (0,1)$. Далее имеем

$$w^h(t) - y^h_\Delta(t) = w^h(0) - y^h_\Delta(0) + \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\Psi^{(1)}_h(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{5.9}$$

Обозначим

$$\mu(t) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant 1} |w^h(\tau) - y^h_\Delta(\tau)|_N, \quad f_h(t) = L(\eta^h_{\tau_i}(s)) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i.$$

Справедливы следующие оценки:

$$\frac{1}{\alpha}\|CC'\| \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_N\,ds \leqslant \frac{K_0}{\alpha} \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |f_h(s) - \frac{1}{\alpha}CC'[w^h(\tau_i) - \eta^h_i]|_N\,ds \leqslant \tag{5.10}$$

$$\leqslant K_1\frac{\delta}{\alpha}+K_2\frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i)+h), \quad \mu(\tau_i)\leqslant\mu(\tau_{i+1}).$$

Символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму матрицы. Кроме того,

$$|\Psi_h^{(1)}(t)|_N\leqslant|\Psi_h(t)|_N+\frac{1}{\alpha}\|CC'\|\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\dot w^h(s)|_N\,ds, \quad t\in\delta_i. \tag{5.11}$$

Следовательно, из (5.8)–(5.11) выводим

$$\mu(t)\leqslant h+K_3\Big(\frac{\delta}{\alpha}+\frac{\delta}{\alpha^2}(\mu(\tau_i)+\frac{\delta h}{\alpha^2})\Big)\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\|\,ds+\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\|\,|\Psi_h(s)|_N\,ds, \quad t\in\delta_i. \tag{5.12}$$

Учитывая (5.8), получаем

$$\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\|\,|\Psi_h(s)|_N\,ds\leqslant K_4\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\|\,ds. \tag{5.13}$$

В силу условия 5.1 матрица CC' — положительно определенная. В таком случае все собственные числа этой матрицы действительные, и наименьшее из них (обозначим его символом ν) положительно. Тогда справедливо соотношение

$$\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\|\,ds\leqslant K_5\int\limits_0^t e^{-\frac{\nu}{\alpha}(t-s)}\,ds=K_5\frac{\alpha}{\nu}e^{-\frac{\nu}{\alpha}(t-s)}\Big|_0^t=K_5\frac{\alpha}{\nu}(1-e^{-\frac{\nu}{\alpha}t})\leqslant K_6\alpha. \tag{5.14}$$

Из (5.13) и (5.14) вытекает оценка

$$\int\limits_0^t\|e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}\||\Psi_h(t)|_N\,ds\leqslant K_7\alpha. \tag{5.15}$$

Полагая $t=\tau_i$ в (5.15) и учитывая (5.12), получаем

$$(1-\frac{K_3K_6\delta}{\alpha})\mu(\tau_i)\leqslant h+K_8(\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha}).$$

В таком случае, для достаточно малых h (например, таких, что $\frac{K_3K_6\delta}{\alpha}\leqslant\frac{1}{2}$) имеем

$$\mu(\tau_i)\leqslant K_9(h+\alpha+\delta+\frac{\delta h}{\alpha})\leqslant K_{10}(h+\alpha+\delta)$$

(см. (5.6)). Аналогично оценке (5.10) получаем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\dot w^h(s)|_N\,ds\leqslant K_{11}\{\delta+\frac{\delta}{\alpha}(h+\alpha+\delta)\leqslant K_{12}\delta.$$

Следовательно

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\dot w^h(s)|_N\,ds\leqslant K_{13}\delta. \tag{5.16}$$

Далее нетрудно видеть (см. (5.9)), что справедливо равенство

$$\frac{1}{\alpha}CC'[w^h(t)-y_\Delta^h(t)-w^h(0)+y_\Delta^h(0)]=\int\limits_0^t(\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)})\,\Psi_h^{(1)}(s)\,ds= \tag{5.17}$$

$$=-\int\limits_0^t(\frac{d}{ds}e^{\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)})Cx_\Delta^h(s)\,ds+\sum_{j=1}^3\int\limits_0^t(\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)})\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds.$$

Здесь

$$\gamma_\delta^{(1)}(s) = \frac{1}{\alpha} CC'[w^h(s) - w^h(\tau_i)],$$

$$\gamma_\delta^{(2)}(s) = -\frac{1}{\alpha} CC'[y_\Delta^h(s) - \eta_i^h],$$

$$\gamma_\delta^{(3)}(s) = L(\eta_{\tau_i}^h(s)) - L(y_{\Delta t}^h(s)) \quad \text{при п.в.} \quad s \in \delta_i.$$

Из (5.16) вытекает оценка

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)|_N \leqslant K_{14}\frac{\delta}{\alpha}, \quad s \in T. \tag{5.18}$$

Принимая во внимание (1.6) и (5.2), заключаем

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)|_N \leqslant K_{15}\frac{\delta + h}{\alpha}, \quad s \in T. \tag{5.19}$$

Кроме того (см. (5.3))

$$|\gamma_\delta^{(3)}(s)|_N \leqslant M(\delta + h), \quad s \in T. \tag{5.20}$$

В таком случае, из (5.18)–(5.20), учитывая (5.14), (5.15), выводим

$$\Big|\sum_{j=1}^{3}\int_0^t (\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)})\gamma_\delta^{(j)}(s)\,ds\Big|_N \leqslant \varrho(h,\alpha,\delta) = K_{16}(\delta + h + \frac{\delta + h}{\alpha}). \tag{5.21}$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (5.17), получаем

$$-\int_0^t (\frac{d}{ds}e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)})Cx_\Delta^h(s)\,ds = e^{-\frac{1}{\alpha}CC'}Cx_\Delta^h(0) - Cx_\Delta^h(t) + \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha}CC'(t-s)}C\dot{x}_\Delta^h(s)\,ds. \tag{5.22}$$

Учитывая ограниченность $\dot{x}_\Delta^h(\cdot)$ (см. лемму 1.1), заключаем, что последнее слагаемое в правой части (5.22) не превосходит $K_{17}\alpha$ (см. вывод (5.15)). Кроме того, воспользовавшись (1.6), (5.2), (5.6), для всех $t \in \delta_i$ выводим оценку

$$\Big|\frac{1}{\alpha}CC'\{w^h(t) - y_\Delta^h(t) - [w^h(\tau_i) - \eta_i^h]\}\Big|_N \leqslant \frac{K_{18}}{\alpha}\Big\{\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_N\,ds + h + \delta\Big\} \leqslant K_{19}\frac{\delta + h}{\alpha}. \tag{5.23}$$

В свою очередь, объединив (5.17), (5.21)–(5.23) и учитывая (5.6), получаем неравенство

$$\Big|-\frac{1}{\alpha}CC'[w^h(\tau_i) - y_\Delta^h(\tau_i)] - Cx_\Delta^h(t)\Big|_N \leqslant \varrho(h,\alpha,\delta) + K_{19}\frac{\delta + h}{\alpha} + K_{17}\alpha + |e^{-\frac{1}{\alpha}CC't}Cx_\Delta^h(0)|_N,$$

$$t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1].$$

Справедливость леммы следует из последнего неравенства. Лемма доказана. □

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1, *а семейство стратегий* $(\Delta_h, S, \mathcal{U})_{h>0}$ *таково, что*

$$S(t, \eta_i^h, w^h(\tau_i)) = \begin{cases} S_1(t, \eta_i^h, w^h(\tau_i)) & \text{при} \quad t \in [\delta^{\beta(h)}, \vartheta], \\ x_\Delta^h(0) & \text{при} \quad t \in [0, \delta^{\beta(h)}), \end{cases} \tag{5.24}$$

где $\beta = \text{const} \in (0,1)$. *Пусть также* $s^h(\cdot)$ *задается по формуле* (4.3). *Тогда верно неравенство*

$$\sup\{|s^h(t) - x_\Delta^h(t)|_n : t \in T\} \leqslant \phi(h) = \tilde{C}_1\alpha(h) + \tilde{C}_2(h + \delta(h))\alpha^{-1}(h) + \tilde{C}_3\alpha(h)\delta^{-\beta}(h) + \tilde{C}_4\delta^\beta(h).$$

Утверждение леммы является следствием леммы 5.1, а также неравенства $e^{-\nu\delta^\beta\alpha^{-1}} \leqslant C\dfrac{\alpha}{\nu\delta^\beta}$, $C = \text{const} > 0$.

Как было отмечено выше, для решения рассматриваемых задач управления необходимо сконструировать блок динамического обращения, позволяющий восстанавливать в темпе «реального времени» неизвестные координаты $x^h(\cdot)$. Один из вариантов построения такого блока, состоящего из пары: модель (4.1) и обратная связь (5.24), указан выше.

Наличие приближения $s^h(\cdot)$ ненаблюдаемой компоненты $x^h_\Delta(\cdot)$ позволяет использовать обратные связи, опирающиеся на приближенную информацию о полном состоянии системы (1.1). В частности, модифицированные обратные связи (3.1) обеспечивают свойство аппроксимации дорожки, аналогичное (3.27). Именно, верна следующая

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия* 2.1, 5.1, *соотношения* (5.6), *а также имеет место сходимость* $\alpha(h)\delta^{-\beta}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$ $(\beta = \mathrm{const} \in (0,1))$. *Пусть дорожка* $\{w^0(\cdot), z^0(\cdot)\}$ *порождается управлением* $r^0(\cdot) \in E(\cdot)$, *а позиционная стратегия первого игрока* $(\Delta_h, S, \mathcal{U})_{h>0}$ *определена условиями*: S *находится согласно* (5.24) *и отображение* $\mathcal{U}$ *таково, что*

$$\mathcal{U}(\tau_i, s^h_i, w^0(\tau_i)) = \{u^h_i \in P : (s^h_i - w^0(\tau_i), Bu^h_i)_n \leqslant \\ \leqslant \min_{u\in P}(s^h_i - w^0(\tau_i), Bu)_n + \zeta(h)\}. \tag{5.25}$$

Тогда

$$\lim_{h\to 0} \sup\Big\{\Big|\{x^h_\Delta(t), y^h_\Delta(t)\} - \{w^0(t), z^0(t)\}\Big|_{N+n} : t \in T,\ \{x^h_\Delta(\cdot), y^h_\Delta(\cdot)\} \in Z_h(\Delta_h, S, \mathcal{U})\Big\} = 0.$$

Доказательство. Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 3.1. Действительно, оценив изменение величины

$$\varepsilon(t) = |z^h_{\Delta t}(s) - \tilde{z}_{0t}(s)|^2_{X\times Y}, \quad t \in T, \tag{5.26}$$

где $z^h_\Delta(\cdot) = \{x^h_\Delta(\cdot), y^h_\Delta(\cdot)\}$, $\tilde{z}_0(\cdot) = \{w^0(\cdot), p^0(\cdot)\}$, будем иметь неравенство (3.6). Далее, справедливо неравенство

$$\mu^{(3)}_i \leqslant \mu^{(4)}_i + d_1 h\delta + d_2\delta|s^h_i - x^h_\Delta(\tau_i)|_n, \quad \tau_i = \tau_{i,h}. \tag{5.27}$$

Здесь

$$\mu^{(4)}_i = 2\Big(s^h_i - w^{(0}(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu^h_i - Dv(t) - r_0(t))\,dt\Big)_n.$$

Воспользовавшись правилом определения векторов u^h_i(5.25), заключаем

$$\mu^{(4)}_i \leqslant \zeta(h)\delta.$$

В таком случае в силу леммы 5.2

$$\mu^{(3)}_i \leqslant d_1 h\delta + \zeta(h)\delta + d_2\delta\phi(h).$$

Отсюда и из (3.6) следует

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c_9\delta)\varepsilon(\tau_i) + d_3\delta(h + \delta + \phi(h) + \zeta(h)).$$

Учитывая последнее неравенство, аналогично (3.8) получим

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \leqslant d_4\Big(\varepsilon(t_0) + h + \phi(h) + \delta + \zeta(h)\Big) \leqslant d_5(h + \delta(h) + \phi(h) + \zeta(h)), \quad i \in [0 : m-1], \quad m = m_h.$$

Из этого неравенства следует справедливость теоремы. Лемма доказана. □

Опишем содержательно последовательность действий, которые необходимо выполнить первому игроку для решения стоящей перед ним задачи управления. Фиксируем величину $h \in (0,1)$, а вместе с ней число $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$. Работу алгоритма разобьем на $m_h - 1$ однотипных шагов. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, выполним следующие действия. В момент τ_i, зная вектор η^h_i ($|\eta^h_i - y^h_\Delta(\tau_i)|_N \leqslant h$), а также состояние $w^h(\tau_i)$ модели (4.1) согласно обратной связи S вида (4.3), (5.24) вычислим вектор s^h_i, а также, согласно обратной связи $\mathcal{U}$ вида (4.4), (5.25) (в (4.4) при этом вместо $w(\tau_i)$ следует писать $w^0(\tau_i)$) — вектор u^h_i. Затем, при $t \in \delta_i$, на вход модели подадим управление вида (4.3), а на вход системы (1.1) — управление вида (4.4). В результате под действием этих управлений, а также неизвестного управления второго игрока $v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$ сформируются фазовая траектория $w^h(t)$, $t \in \delta_i$, модели, а также фазовая траектория $z^h_\Delta(t)$, $t \in \delta_i$ системы (1.1). На следующем, $(i+1)$-м шаге аналогичные действия повторим. Работа алгоритма заканчивается в момент $t = \vartheta$.

Перейдем к построению ε-оптимального максиминного семейства $(\Delta_h, S, \mathcal{V})_{h>0}$.

Снова начнем с описания алгоритма, т. е. последовательности действий, которые необходимо выполнить второму игроку для решения стоящей перед ним задачи. Фиксируем величину погрешности измерения $h \in (0,1)$. Вместе с h мы фиксируем разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$ отрезка T. После этого организуем процесс синхронного управления системой (1.1) и моделью (4.1). Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. В течение i-го шага, выполняемого на промежутке $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \tau_i = \tau_{i,h}$, осуществляются следующие действия второго игрока. В момент $t = \tau_i$ второму игроку известны: фазовое состояние дорожки (2.10) — $\tilde{z}(\tau_i) = \{w(\tau_i), p(\tau_i)\}$, фазовое состояние модели (4.1) — $w^h(\tau_i)$, а также вектор η_i^h результат измерения состояния $z_{h,\Delta}(\tau_i) = \{x^h(\tau_i), y^h(\tau_i)\}$ (см., (4.5)). Сначала согласно обратной связи S вида (4.6), (5.24) вычисляется вектор s_i^h. Затем задаются вектора $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ и v_i^h по правилам

$$(w(\tau_i) - s_i^h, Bu^{(i)}) \leqslant \min\{(w(\tau_i) - s_i^h, Bu)_n : u \in P\} + \zeta(h), \tag{5.28}$$

$v^{(i)}$ — произвольный элемент множества Q со свойством: $Bu^{(i)} - Dv^{(i)} \in E$,

$$v_i^h \in \mathcal{V}(t, s_i^h, w(\tau_i)), \tag{5.29}$$

$$\mathcal{V}(\tau_i, x, w(\tau_i)) = \{v \in Q : (w(\tau_i) - x, Dv)_n \leqslant \min\{(w(\tau_i) - x, Dv)_n : v \in Q\} + \eta(h). \tag{5.30}$$

После этого в (2.10) полагается

$$r(t) = Bu^{(i)} - Dv^{(i)}, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}). \tag{5.31}$$

Затем вычисляется траектория $\tilde{z}(\cdot)$ дорожки (2.10) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$:

$$\tilde{z}(t) = \tilde{z}(t; \tau_i, \tilde{z}_{\tau_i}(s), r(t)), \quad \tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}.$$

Аналогично, управление

$$v^h(t) = v_i^h, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$$

подается на вход системы (1.1), а управление $s^h(t)$ вида (4.6) — на вход модели (4.1). В результате действия этих управлений, а также (неизвестного) управления первого игрока $u_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$, реализуются траектория

$$\{z_{h,\Delta}(\cdot; \tau_i, z_{h,\Delta\tau_i}(s), u_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot), v_i^h)\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}$$

системы (1.1) на интервале $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, а также траектория модели (4.1)

$$\{w^h(\cdot; \tau_i, w^h(\tau_i), s^h_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot))\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}.$$

Процедура заканчивается в момент ϑ.

Лемма 5.4. *Пусть выполнены условия леммы* 5.3. *Пусть семейство стратегий второго игрока* $(\Delta_h, S, \mathcal{V})_{h>0}$ *таково, что отображение* S *задается согласно* (5.24), *а отображение* $\mathcal{V}$ — *согласно* (5.30). *Тогда справедливо утверждение теоремы* 3.2.

Доказательство. Доказательство леммы проводится по схеме доказательства теоремы 3.2. При этом оценивается изменение величины

$$\varepsilon_1(t) = |z_{h,\Delta t}(s) - \tilde{z}_t(s)|^2_{X\times Y}$$

и устанавливаются оценки (3.24), где

$$\tilde{\mu}_i^{(3)} = 2\Big(x^h(\tau_i) - w(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (Bu(t) - Dv_i^h - r(t))\, dt\Big)_n.$$

Учитывая правило выбора векторов u_i (5.28), v_i^h (5.29), (5.30) и функции $r(\cdot)$(5.31), а также лемму 5.1, заключаем

$$\mu_i^{(3)} \leqslant d^{(1)}\{h + \phi(h) + \zeta(h)\}\delta.$$

Отсюда и из (3.24) следует неравенство

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leqslant (1 + c^{(9)}\delta)\varepsilon_1(\tau_i) + d^{(2)}\delta(h + \phi(h) + \delta + \zeta(h)).$$

В таком случае

$$\varepsilon_1(\tau_{i+1}) \leqslant d^{(3)}\Big(\varepsilon_1(0) + h + \phi(h) + \delta + \zeta(h)\Big) \leqslant d^{(4)}(h + \phi(h) + \delta(h) + \zeta(h)), \quad i \in [0 : m-1].$$

Из этого неравенства следует справедливость леммы. Лемма доказана. □

Из лемм 5.3, 5.4 вытекает основной результат работы:

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 5.3. *Тогда цена игры равна* c_0. *Семейство позиционных стратегий* $(\Delta_h, S, \mathcal{U})_{h>0}$, *где отображение* S *задается согласно* (5.24), *а отображение* $\mathcal{U}$ *— согласно* (5.25), *является* ε*-оптимальным минимаксным. В свою очередь, семейство позиционных стратегий* $(\Delta_h, S, \mathcal{V})_{h>0}$, *где отображение* S *задается соотношением* (5.24), *а отображение* $\mathcal{V}$ *— согласно* (5.30), *является* ε*-оптимальным максиминным.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Близорукова М. С., Максимов В. И.* Об одной задаче управления при неполной информации// Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 3. — С. 131–142.
2. *Красовский Н. Н., Котельникова А. Н.* Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре// Тр. Ин-та матем. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 2. — С. 97–104.
3. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциально-разностные игры// Докл. АН СССР. — 1971. — *197*, № 4. — С. 777–780.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
5. *Кряжимский А. В.* Числовая кодировка дискретизованных управлений и аппроксимационный метрический критерий разрешимости игровой задачи наведения// Тр. Ин-та матем. мех. УрО РАН. — 2011. — *17*, № 2. — С. 105–124.
6. *Кряжимский А. В., Максимов В. И.* О сочетании процессов реконструкции и гарантирующего управления// Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 8. — С. 13–25.
7. *Кряжимский А. В., Максимов В. И.* Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр// Прикл. мат. мех. — 1979. — *42*, № 2. — С. 202–209.
8. *Лукоянов Н. Ю.* Функциональные уравнения Гамильтона—Якоби и задачи управления с наследственной информацией. — Екатеринбург: УрФУ, 2011.
9. *Осипов Ю. С.* Дифференциальные игры систем с последействием// Докл. АН СССР. — 1971. — *196*, № 4. — С. 779–782.
10. *Осипов Ю. С.* Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией// Усп. мат. наук. — 2006. — *61*, № 4. — С. 25–76.
11. *Осипов Ю. С.* Избранные труды. — М.: МГУ, 2009.
12. *Осипов Ю. С., Кряжимский А. В., Максимов В. И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. — Екатеринбург: УрО РАН, 2011.
13. *Пацко В. С.* Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх. — Препринт Ин-та математики и механики УрО РАН, 2004.
14. *Субботин А. И., Ченцов А. Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981.
15. *Ушаков В. Н.* К задаче построения стабильных мостов в дифференцированной игре сближения-уклонения// Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1980. — № 4. — С. 29–36.
16. *Osipov Yu. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. — Basel: Gordon and Breach, 1995.
17. *Subbotina N. N.* The method of characteristics for Hamilton—Jacobi equation and its applications in dynamical opimization// Modern Math. Appl. — 2004. — *20*. — С. 2955–3091.

В. С. Кубланов
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: kublanov@mail.ru

В. И. Максимов
Институт математики и механики УрО РАН
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, Екатеринбург
E-mail: maksimov@imm.uran.ru