Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 96–110

УДК 517

О НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

© 2015 г. **И. КАПУЦЦО ДОЛЬЧЕТТА, Ф. ЛЕОНИ, А. ВИТОЛО**

Аннотация. Мы рассматриваем некоторые вполне нелинейные вырожденные эллиптические операторы и исследуем справедливость определенных свойств, связанных с принципом максимума. В частности, мы устанавливаем эквивалентность между свойством распространения знака и строгой положительностью подходящим образом определенного обобщенного главного собственного значения. Также мы показываем, что даже в вырожденном случае, рассмотренном в настоящей работе, хорошо известное условие на член нулевого порядка, введенное Келлером—Оссерманом, является необходимым и достаточным для существования целых слабых субрешений.

1. Введение

Нелинейные вырожденные эллиптические уравнения возникают при изучении разнообразных задач в различных областях геометрии. Укажем только работы, частично послужившие толчком для данного исследования: Харвея—Лавсона о p-выпуклости, p-субгармоничности и комплексном уравнении Монжа—Ампера (см. [30]), Амброзио—Сонера [1] и Джига [29] о движении поверхностей под действием потоков средней кривизны [1], Джига [29], Оссермана о классификации римановых поверхностей с отрицательной гауссовой кривизной [44].

Основным модельным оператором, рассматриваемым в настоящей работе, является оператор, определенный на функциях $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ из C^2 как частичная сумма упорядоченных собственных значений матрицы Гессе D^2u

$$\mathcal{P}_k^-(D^2u) = \eta_1(D^2u) + \cdots + \eta_k(D^2u), \tag{1.1}$$

где k — фиксированное целое число между 1 и n, $\eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \eta_k$. Этот оператор локально представляет среднюю частичную кривизну декартовой поверхности $x_{n+1} = u(x)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, см. [30].

Заметим, что в частном случае $k = n$ $\mathcal{P}_n^-(D^2u) = \Delta u$ является прототипом равномерно эллиптических операторов. Для меньших значений k они соответствуют промежуточным случаям между кривизной сечений $\mathcal{P}_1^-$ и кривизной Риччи $\mathcal{P}_{n-1}^-$, как указано в [47,49], и следовательно, являются вырожденными эллиптическими операторами.

Дуальный оператор

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) = \eta_{n-k+1}(D^2u) + \cdots + \eta_n(D^2u) \tag{1.2}$$

возникает при изучении некоторых геометрических потоков, см. [1, 29]. См. также в [42] подход уравнений с частными производными к проблеме выпуклых оболочек.

Целью настоящей работы является проиллюстрировать, как основные структурные свойства равномерно эллиптических операторов: принцип максимума, а также некоторые результаты об устранимых особенностях, — продолжают иметь место в вырожденном случае $k < n$. Эти вопросы будут освещены в разделах 2 и 3, опираясь соответственно на [2, 8], в разделе 4 мы сообщим о новых нелинейных случаях, рассмотренных в работах авторов, см. [19], хорошо известных результатов Келлера и Оссермана [37, 44] о целых решениях.

2. Частичный лапласиан и оператор Пуччи

Прежде всего мы введем обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем. Через $\mathcal{S}^n$ обозначим множество вещественных симметричных матриц порядка $n \times n$, через $\eta_i(X)$, $i = 1, \ldots, n$, — i-е собственное значение матрицы $X \in \mathcal{S}^n$, занумерованное в порядке неубывания, а через $\mathrm{Tr}X = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i(X)$ — след матрицы X. Линейное пространство $\mathcal{S}^n$ будет наделено стандартным отношением частичного порядка: $X \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\eta_1(X) \geqslant 0$, и $X \leqslant Y$ означает, что $Y - X \geqslant 0$. Через $I_n \in \mathcal{S}^n$ будем обозначать единичную матрицу.

Функция $F : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ является эллиптически вырожденной, если

$$F(X) \leqslant F(Y) \quad \forall\, X \in \mathcal{S}^n \quad \forall\, X, Y \in \mathcal{S}^n : \, X \leqslant Y \tag{2.1}$$

и равномерно эллиптической, если существуют положительные числа λ, Λ, такие что $\lambda \leqslant \Lambda$ и

$$\lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Y}-\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{F}(\mathrm{Y}) - \mathrm{F}(\mathrm{X}) \leqslant \Lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Y}-\mathrm{X}) \quad \forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{S}^{\mathrm{n}} : \, \mathrm{X} \leqslant \mathrm{Y}. \tag{2.2}$$

Пусть $u \in C^2(\Omega)$ — вещественнозначная функция, определенная на области (открытом связном множестве) Ω в $\mathbb{R}^n$. Будем обозначать через Du ее градиент и через $D^2u \in \mathcal{S}^n$ — ее матрицу Гессе.

Соответственно вполне нелинейный дифференциальный оператор $F(D^2u)$ будет называться вырожденным или равномерно эллиптическим.

Типичные примеры вполне нелинейных равномерно эллиптических операторов с постоянными эллиптичности $0 < \lambda \leqslant \Lambda$ строятся путем рассмотрения подмножеств $\mathcal{A} \subseteq \{A \in \mathcal{S}^n : \lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n\}$, если положить

$$F(X) = \inf_{A \in \mathcal{A}} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX}). \tag{2.3}$$

Этот класс выпуклых операторов возникает в теории оптимального управления и известен как операторы Беллмана. Семейство операторов Беллмана $\mathcal{F}$, определенных выше, определяет операторы Айзекса $G(X) = \sup\limits_{F \in \mathcal{F}} F(X)$, возникающие в дифференциальной теории игр; они не являются ни выпуклыми, ни вогнутыми.

Если в (2.3) инфимум берется по всем матрицам A, таким что $\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n$, то мы получаем минимальный оператор Пуччи

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) = \inf_{\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX}). \tag{2.4}$$

В двойственной форме максимальный оператор Пуччи определяется как

$$\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) = \sup_{\lambda I_n \leqslant A \leqslant \Lambda I_n} \mathrm{Tr}\,(\mathrm{AX}), \tag{2.5}$$

при этом выполнено соотношение двойственности

$$\mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) = -\mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(-X).$$

Через X^+ и X^- обозначим однозначное разбиение $X \in \mathcal{S}^n$, такое что $X = X^+ - X^-$ и $X^+X^- = 0$. Справедливо следующее определение экстремальных операторов Пуччи:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^+_{\lambda,\Lambda}(X) &= \Lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}^+) - \lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}^-) = \Lambda \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \eta^+_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}) - \lambda \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \eta^-_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}), \\ \mathcal{M}^-_{\lambda,\Lambda}(X) &= \lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}^+) - \Lambda \mathrm{Tr}\,(\mathrm{X}^-) = \lambda \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \eta^+_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}) - \Lambda \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \eta^-_{\mathrm{i}}(\mathrm{X}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

(см. [16]). Заметим, что в тривиальном случае $\lambda = \Lambda = 1$ максимальный и минимальный операторы Пуччи совпадают с оператором Лапласа Δ.

Похожая, но более общая конструкция использует $k < n$ наибольших и наименьших собственных значений. В данном случае мы получаем так называемый частичный лапласиан порядка k:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^+_k(X) &= \sum_{i=n-k+1}^{n} \eta_i(X), \\ \mathcal{P}^-_k(X) &= \sum_{i=1}^{k} \eta_i(X). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Как и ранее, выполняется соотношение двойственности

$$\mathcal{P}^-_k(X) = -\mathcal{P}^+_k(-X).$$

Эти операторы также могут быть представлены в виде (2.4) и (2.5). Действительно, для заданного k-мерного линейного подпространства W в $\mathbb{R}^n$ рассмотрим сужение оператора взятия следа на W:

$$\mathrm{Tr}_{\,\mathrm{W}}(\mathrm{X}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{P_W X P_W}), \tag{2.8}$$

где P_W — матрица представления оператора ортогонального проектирования на W. Обозначим через $\mathcal{G}_k$ грассманиан k-мерного линейного подпространства в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k^+(X) &= \sup_{W\in\mathcal{G}_k} \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{W}}(\mathrm{X}), \\ \mathcal{P}_k^-(X) &= \inf_{W\in\mathcal{G}_k} \mathrm{Tr}_{\,\mathrm{W}}(\mathrm{X}). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Несложно понять из этих формул или из определения (2.7), что максимальный и минимальный частичные лапласианы являются вполне нелинейными вырожденными эллиптическими, но не равномерно эллиптическими, операторами, за исключением тривиального случая $k = n$. Приведем явный пример при $n = 2$ и $k = 1$:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, заметим, что $\mathcal{P}_1^+(Y) - \mathcal{P}_1^+(X) = 0$, но $\mathrm{Tr}\,(Y - X) = 1$.

Помимо отмеченных соотношений двойственности, пара $(\mathcal{P}_k^-, \mathcal{P}_k^+)$ обладает многими свойствами пары $(\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-, \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+)$, а именно:

1. $\mathcal{P}_k^\pm(cX) = c\mathcal{P}_k^\pm(X)$ при $c \geqslant 0$ (положительная однородность);
2. $\mathcal{P}_k^+(X) + \mathcal{P}_k^-(Y) \leqslant \mathcal{P}_k^+(X+Y) \leqslant \mathcal{P}_k^+(X) + \mathcal{P}_k^+(Y)$ (субаддитивность и двойственность);
3. $\mathcal{P}_k^-(X) + \mathcal{P}_k^-(Y) \leqslant \mathcal{P}_k^-(X+Y) \leqslant \mathcal{P}_k^+(X) + \mathcal{P}_k^-(Y)$ (супераддитивность и двойственность);
4. $k_1 \leqslant k_2$ влечет $\dfrac{\mathcal{P}_{k_1}^-(X)}{k_1} \leqslant \dfrac{\mathcal{P}_{k_2}^-(X)}{k_2} \leqslant \dfrac{\mathcal{P}_{k_2}^+(X)}{k_2} \leqslant \dfrac{\mathcal{P}_{k_1}^+(X)}{k_1}$ (монотонность).

Замечательна также следующая связь с экстремальными операторами Пуччи: если отношение Λ к λ невелико, то пара $(\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-, \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+)$ может быть оценена парой $(\mathcal{P}_k^-, \mathcal{P}_k^+)$ в следующем смысле:

Лемма 2.1. *Пусть* $\dfrac{\Lambda}{\lambda} \leqslant \dfrac{n}{k}$, *тогда*

$$\Lambda\, c^-(X)\, \mathcal{P}_k^-(X) \leqslant \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^-(X) \leqslant \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \leqslant \Lambda\, c^+(X)\, \mathcal{P}_k^+(X) \tag{2.10}$$

где

$$c^+(X) = \begin{cases} n/k & \text{при } \mathcal{P}_k^+(X) > 0, \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad c^-(X) = c^+(-X).$$

Доказательство. Предположим, что $\mathcal{P}_k^+(X) > 0$, и пусть $p > 0$ — число положительных собственных значений X. Рассмотрим вначале случай $k \leqslant p$. В силу свойства 4 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \quad &= \lambda\,(\eta_1 + \ldots \eta_{n-p}) + \Lambda\,(\eta_{n-p+1} + \ldots \eta_n) \leqslant \\ &\leqslant \Lambda\, \mathcal{P}_p^+(X) \leqslant \Lambda\, \frac{p}{k}\, \mathcal{P}_k^+(X) \leqslant \Lambda\, \frac{n}{k}\, \mathcal{P}_k^+(X). \end{aligned}$$

В случае $p < k$, используя предположение $\dfrac{\Lambda}{\lambda} \leqslant \dfrac{n}{k}$, и свойство 4, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \quad &= \lambda\,(\eta_1 + \ldots \eta_{n-p}) + \Lambda\,(\eta_{n-p+1} + \ldots \eta_n) \leqslant \\ &\leqslant \lambda\, \frac{n-p}{k-p}\,(\eta_{n-k+1} + \ldots \eta_{n-p}) + \Lambda\,(\eta_{n-p+1} + \ldots \eta_n) \leqslant \\ &\leqslant \lambda\, \frac{n}{k}\,(\eta_{n-k+1} + \ldots \eta_{n-p}) + \Lambda\,(\eta_{n-p+1} + \ldots \eta_n) \leqslant \Lambda\, \mathcal{P}_k^+(X) \leqslant \Lambda\, \frac{n}{k}\, \mathcal{P}_k^+(X). \end{aligned}$$

С другой стороны, если $\mathcal{P}_k^+(X) \leqslant 0$, то, очевидно, $k > p$ и из предыдущих соотношений мы получаем, что

$$\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \leqslant \Lambda\, \mathcal{P}_k^+(X).$$

Остальные неравенства в (2.10) следуют из двойственности. $\square$

Замечание 2.1. Отметим, что, несмотря на вырождение, в силу максимальности $\mathcal{P}_k^+$ верно неравенство $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \leqslant \Lambda\, c^+(X)\, \mathcal{P}_k^+(X)$. С другой стороны, вырождение исключает выполнение любой нижней оценки вида $\mathcal{M}_{\lambda,\Lambda}^+(X) \geqslant C\, \mathcal{P}_k^+(X)$.

Теперь обратимся к справедливости принципа максимума для частичного оператора Лапласа в случае вязкостных решений. Обозначим через $LSC(\Omega)$ и $USC(\Omega)$ пространства полунепрерывных снизу и сверху функций в Ω соответственно. Напомним, см. [21], что $u \in USC(\Omega)$ является вязкостным решением дифференциального неравенства

$$F(D^2 u) \geqslant 0 \tag{2.11}$$

(или, по аналогии с классической терминологией в случае оператора Лапласа, субрешением уравнения $F(D^2u) = 0$), если

$$F(D^2\varphi(x_0)) \geqslant 0$$

для всех $(x_0, \phi) \in \Omega \times C^2(\Omega)$, таких что $u - \varphi$ имеет локальный максимум в точке x_0.

Аналогично функция $u \in LSC(\Omega)$ является вязкостным решением $F(D^2u) \leqslant 0$, если $F(D^2\phi(x_0)) \leqslant 0$ для всех $(x_0, \phi) \in \Omega \times C^2(\Omega)$, таких что $u - \phi$ имеет локальный минимум в x_0.

Вязкостное решение уравнения $F(D^2u) = 0$ в Ω — это непрерывная в Ω функция, удовлетворяющая одновременно условиям суб- и суперрешений.

Утверждение 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Если $u \in USC(\overline{\Omega})$ — вязкостное решение неравенства $\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant 0$ в Ω, то*

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u.$$

Если $u \in LSC(\overline{\Omega})$ — вязкостное решение $\mathcal{P}_k^-(D^2u) \leqslant 0$, то

$$\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u.$$

Доказательство. Рассмотрим случай субрешений, т. к. суперрешения рассматриваются по двойственности. Предположим, что $\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant 0$ в Ω. Заметим, что в силу сформулированного выше свойства монотонности 4 достаточно доказать утверждение для вязкостного решения неравенства $\eta_n(D^2u) = \mathcal{P}_1^+(D^2u) \geqslant 0$. Заметим также, что мы можем считать без ограничения общности, что $\sup\limits_{\partial\Omega} u \leqslant 0$, возможно заменив $u(x)$ на $u(x) - \sup\limits_{\partial\Omega} u$.

Простое вязкостное вычисление показывает, что $u^+ = \max\{u, 0\}$ удовлетворяет $\eta_n(D^2u^+) \geqslant 0$ в вязкостном смысле, и нам остается доказать, что $u^+ = 0$ на $\partial\Omega$ влечет $u^+ = 0$ в Ω.

Для этого предположим противное: $M := \sup\limits_{\Omega} u^+ > 0$. Мы можем считать, что $\Omega \subset B_R(0)$ при некотором $R > 0$ и что $u^+(0) = M$.

Если рассмотреть параболоид $\phi(x) = M\left(1 - \dfrac{|x|^2}{2R^2}\right)$, то

$$u^+(x) - \varphi(x) \leqslant -\frac{M}{2} \quad \text{на } \partial\Omega, \quad u^+(0) - \varphi(0) = 0,$$

так что $u^+ - \varphi$ имеет неотрицательный максимум в некоторой точке $x_0 \in \Omega$. Мы можем использовать ϕ в определении вязкостного субрешения, чтобы получить, что

$$\eta_n(D^2\phi(x_0)) \geqslant 0.$$

С другой стороны, прямое вычисление показывает, что $\eta_n(D^2\varphi(x_0)) = -\dfrac{M}{R^2} < 0$. Это противоречит предыдущему неравенству, следовательно, $M = 0$, что завершает доказательство. □

Замечание 2.2. Из утверждения 2.1 следует, что если гладкая функция $u \in C^2(\Omega)$ неположительна на границе Ω и положительна в некоторой внутренней точке Ω, то существует точка $x_1 \in \Omega$ со строго отрицательной $\eta_n(D^2u(x_1))$.

Замечание 2.3. Прямым следствием утверждения 2.1 является следующее свойство распространения знака в ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant 0 \text{ в } \Omega,\ u \leqslant 0 \text{ на } \partial\Omega \ \text{ влечет } u \leqslant 0 \text{ в } \Omega$$

и

$$\mathcal{P}_k^-(D^2u) \leqslant 0 \text{ в } \Omega,\ u \geqslant 0 \text{ на } \partial\Omega \ \text{ влечет } u \geqslant 0 \text{ в } \Omega.$$

В следующем разделе мы вернемся к этому свойству с более общей точки зрения.

Замечание 2.4. Предыдущее утверждение неверно для оператора Пуччи в вырожденном случае $\lambda = 0$, а именно,

$$\mathcal{M}_{0,\Lambda}^+(X) = \Lambda \mathrm{Tr}\,(X^+).$$

Действительно, неравенство $\mathcal{M}_{0,\Lambda}^+(D^2u) \geqslant 0$ выполняется для любой функции u.

Однако, если неравенство $\mathcal{M}_{0,\Lambda}^+(D^2u) \geqslant 0$ заменить строгим неравенством $\mathcal{M}_{0,\Lambda}^+(D^2u) > 0$, то $\eta_n(D^2u) > 0$ и в силу утверждения 2.1 $u \leqslant 0$ на $\partial\Omega$ влечет $u \leqslant 0$ в Ω.

Также заметим, что утверждение 2.1 имеет силу, если значения u известны на значительной части границы, например, на $\partial\Omega \setminus K$, где размер компактного множества K достаточно мал.

Классический способ определения подходящего размера множества K дается α-емкостью $C_\alpha(K)$ в смысле теории потенциала Рисса (логарифмическая емкость в случае $\alpha = 0$); точные определения и свойства см. в [38]. Хорошо известно, см. например, [33], что в случае оператора Лапласа Δ, который может рассматриваться как частный случай $\mathcal{P}_n^\pm(D^2u)$, справедлив следующий обобщенный принцип максимума в ограниченной области Ω в $\mathbb{R}^n$: если $K \subset \partial\Omega$ имеет ньютоновскую емкость $C_{n-2}(K) = 0$, то

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega\setminus K} u$$

для любой ограниченной сверху субгармонической функции u.

Аналогично $\inf\limits_\Omega u \geqslant \inf\limits_{\partial\Omega\setminus K} u$ для любой ограниченной снизу супергармонической функции.

В [2] это утверждение было обобщено на операторы частичного лапласиана $\mathcal{P}_k^+$ и $\mathcal{P}_k^-$ в следующем смысле:

Утверждение 2.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ такое, что $2 \leqslant k \leqslant n$, и K — компактное подмножество $\partial\Omega$, такое что $C_{k-2}(K) = 0$. Тогда*

$$\sup_\Omega u \leqslant \sup_{\partial\Omega\setminus K} u$$

для любого ограниченного сверху вязкостного решения $u \in USC(\Omega)$ неравенства $\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant 0$ в Ω. Неравенство

$$\inf_\Omega u \geqslant \inf_{\partial\Omega\setminus K} u$$

выполнено для любого ограниченного снизу вязкостного решения $u \in LSC(\Omega)$ неравенства $\mathcal{P}_k^-(D^2u) \leqslant 0$ в Ω.

Как отмечено в [2], приведенное выше утверждение представляет альтернативное доказательство теоремы об устранимой особенности, первоначально доказанной Харвеем и Лавсоном в [31]. В самом деле, справедлива

Теорема 2.1. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, K — компактное подмножество Ω с емкостью $C_{k-2}(K) = 0$.*

Тогда любая ограниченная функция $u \in C(\Omega \backslash K)$, удовлетворяющая равенству $\mathcal{P}_k^+(D^2u) = 0$ в $\Omega\backslash K$ в вязкостном смысле, может быть продолжена до вязкостного решения $\tilde{u} \in C(\Omega)$ уравнения $\mathcal{P}_k^+(D^2\tilde{u}) = 0$, такого что $\tilde{u} = u$ на $\Omega\backslash K$.

3. Распространение знака и обобщенное главное собственное значение

В этом разделе мы обсуждаем новый более общий критерий характеризации вырожденных эллиптических операторов $F(x, D^2u)$, зависящих от x, для которых выполнено следующее свойство распространения знака с границы во внутрь области:

$$F(x, D^2u) \geqslant 0 \text{ в } \Omega,\ u \leqslant 0 \text{ в } \partial\Omega \ \text{ влечет } \ u \leqslant 0 \text{ в } \Omega, \tag{3.1}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы будем использовать сокращенную запись $F[u]$ вместо $F(x, D^2u)$.

Хорошо известно, см., например, [45], что в линейном самосопряженном случае равномерно эллиптического оператора

$$F(x, D^2u) = \operatorname{div}(A(x)Du),$$

где $A(x) \in \mathcal{S}^n$, $\lambda I_n \leqslant A(x) \leqslant \Lambda I_n$ для некоторого положительного $\lambda \leqslant \Lambda$ и всех $x \in \Omega$, свойство (3.1) выполнено, и также хорошо известно, что главное собственное значение $\lambda_1(F, \Omega)$ задачи Дирихле в Ω положительно.

Для таких операторов главное собственное значение определяется естественным образом классической вариационной формулой Рэлея—Ритца:

$$\lambda_1(F, \Omega) = \inf \left\{ \frac{\int\limits_\Omega A(x)\, D\phi \cdot D\phi \, dx}{\int\limits_\Omega \phi^2 \, dx}; \quad \phi \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

Для равномерно эллиптических линейных операторов в недивергентной форме

$$F[u] = \operatorname{Tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot Du + c(x)u$$

Берестики, Ниренберг и Варадхан в [9] ввели следующее выражение для обобщенного главного собственного значения, не требующее вариационной структуры оператора:

$$\lambda_1(F, \Omega) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \ \exists \phi > 0, \ \operatorname{Tr}(A(x)D^2\phi) + b(x) \cdot D\phi + c(x)\phi + \lambda\phi \leqslant 0\}, \tag{3.2}$$

где $\phi \in W^{2,N}_{loc}(\Omega)$, а неравенства выполняются почти всюду.

Используя данное выражение, они смогли доказать следующее замечательное обобщение классической характеристики выполнения принципа распространения знака для сильных субрешений задачи Дирихле в терминах положительности главного собственного значения $\lambda_1(F, \Omega)$ для более широкого класса необязательно самосопряженных линейных равномерно эллиптических операторов, даже в негладких областях.

Для случая неограниченных областей мы отсылаем читателя к недавним результатам в [10].

О проблеме собственных значений вполне нелинейных уравнений впервые говорилось в [41] для уравнений типа Беллмана. Наиболее поздние работы принадлежат Биринделли и Деманжель [11, 12], см. также [4, 34, 46]. В этих работах рассматривались равномерно эллиптические уравнения, за исключением [11], где рассматривались некоторые сингулярные операторы. В этой работе предложено немного измененное определение (3.2) для работы с классом F положительно однородных операторов порядка $\alpha > 0$, включая некоторые операторы, вырождение которых моделировалось на примере p-лапласиана. В [11] использовалось следующее определение главного собственного значения:

$$\lambda_1(F, \Omega) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \ \exists \phi \in LSC(\Omega), \ \inf_\Omega \phi > 0 \text{ и } F[\phi] + \lambda\phi^\alpha \leqslant 0 \text{ в } \Omega\},$$

где дифференциальные неравенства понимаются в вязкостном смысле. Используя данное определение, авторам удалось получить замечательное обобщение на нелинейный случай результатов [9] о характеризации.

Вопрос о том, как обобщить справедливость этих результатов на случай вполне нелинейных вырожденных эллиптических операторов F и как определить подходящим образом главное собственное значение, остался открытым.

К этим вопросам мы обратимся ниже, ограничиваясь для простоты обозначений случаем $F[u] = F(x, D^2u)$. На самом деле бóльшая часть результатов в [8] применима в общем случае $F[u] = F(x, u(x), Du(x), D^2u(x))$.

Хорошо известно, что задача Дирихле для вырожденного уравнения

$$\operatorname{Tr}(A(x)D^2u) + b(x) \cdot Du + c(x)u = 0$$

с $A(x) \geqslant 0$ не является корректной, см. [25, 43]. По этой причине, а также в силу полной нелинейности операторов, которые мы планируем рассматривать, подходящим определением решения, предложенным в [8], является субрешение задачи Дирихле

$$F(x, D^2u) = 0 \ \text{ в } \Omega, \ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega$$

в ослабленном вязкостном смысле.

Под этим мы подразумеваем следующее: функция $u \in USC(\Omega)$ называется субрешением в ослабленном вязкостном смысле задачи Дирихле, если для любой пробной функции $\phi \in C^2(\Omega)$ и точки локального максимума $x_0 \in \Omega$ функции $u - \phi$ выполняется следующая пара условий:

$$F(x_0, D^2\phi(x_0)) \geqslant 0, \quad \text{если} \quad x_0 \in \Omega,$$

$$\min\{u(x_0); -F(x_0, D^2\phi(x_0))\} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

Подходящим определением обобщенного главного собственного значения в нашем общем случае является следующее, введенное в [8]:

Определение 3.1. Пусть заданы область Ω в $\mathbb{R}^n$, открытое множество $\mathcal{O}$, такое что $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$, и положительно однородный оператор F степени $\alpha > 0$, положим

$$\mu_1(F, \Omega) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \mathcal{O} \supset \Omega' \supset \overline{\Omega},\ \exists \phi \in LSC(\Omega'),\ \phi > 0, F[\phi] + \lambda\phi^\alpha \leqslant 0 \text{ в } \Omega'\}.$$

Условие положительной однородности выглядит следующим образом:

$$\exists\, \alpha > 0 \text{ такое что } F(x, cX) = c^\alpha F(x, X) \text{ для всех } c \geqslant 0.$$

Заметим, что наше определение числа μ_1 в области Ω требует априори оператор, определенный в более широкой области $\mathcal{O}$. Однако, наш следующий характеристический результат гарантирует, что определение $\mu_1(F, \Omega)$ не зависит на самом деле от выбранного расширения.

Заметим также, что можно доказать, что для гладкой области Ω и равномерно эллиптической F равенство $\mu_1(F, \Omega) = \lambda_1(F, \Omega)$ верно, когда $\mu_1(F, \Omega) \leqslant \lambda_1(F, \Omega)$ в общем невырожденном случае.

Вот наш основной результат характеристики справедливости принципа распространения знака:

Теорема 3.1. *Пусть Ω — ограниченная, не обязательно гладкая, область в $\mathbb{R}^n$ и $\mathcal{O}$ — открытое множество, такое что $\Omega \subset \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что функция F непрерывная, вырожденная эллиптическая, положительно однородная степени $\alpha > 0$, и что существует $\omega \in C([0, +\infty))$ $\omega(0) = 0$ такая, что если $X, Y \in \mathcal{S}^n$ удовлетворяют условию*

$$\exists \sigma > 0: \quad -3\sigma \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leqslant 3\sigma \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix},$$

то верно следующее неравенство:

$$F(x, X) - F(y, Y) \leqslant \omega(\sigma|x - y|^2 + |x - y|)$$

для всех $x, y \in \mathcal{O}$.

При этих условиях F удовлетворяет условию распространения знака (3.1) *в Ω тогда и только тогда, когда $\mu_1(F, \Omega) > 0$.*

Замечание 3.1. Структурное условие в предположении теоремы было введено в [21] для усиления справедливости принципа сравнения между суб- и суперрешениями в вязкостном смысле, что важно для нашего доказательства. Например, в случае $F[u] = \operatorname{Tr}(A(x)D^2u)$ с положительно полуопределенной $A(x)$ достаточно, чтобы $A(x) = \Sigma(x)^t\Sigma(x)$ с $\Sigma \in W^{1,\infty}(\mathcal{O})$.

Замечание 3.2. Насколько нам известно, приведенная выше характеризация является новой даже для линейных операторов вида $F[u] = \operatorname{Tr}(A(x)D^2u)$ с положительно полуопределенной $A(x)$. Более того, этот результат применим к вполне нелинейным операторам $\mathcal{P}_k^\pm$ раздела 2.

Замечание 3.3. Другой важный класс, к которому применяется данная характеризация, составляют однородные операторы, которые являются глобально вырожденными эллиптическими операторами, за исключением некоторого направления ξ, т. е.

$$F(x, X + \xi \otimes \xi) - F(x, X) \geqslant \beta > 0.$$

В этом случае $\mu_1(F, \Omega) > 0$, что видно при $\phi(x) = 1 - \delta\, e^{\sigma\, \xi \cdot x}$, с большим σ и малым δ. Приведенное выше условие выполнено, например, для двумерного оператора Келдыша—Грушина $\partial_{xx} + |x|^k\partial_{yy}$ с некоторым четным k. Подробнее о данном классе операторов см. [26].

Доказательство теоремы 3.1 весьма длинное и сложное, оно требует построения подходящих пробных функций, использует сравнительные свойства и вязкостную версию (см. [35]) классического метода Перрона. Мы приведем краткую схему доказательства ниже, полное доказательство см. в [8]. Начнем с утверждения

$$\mu_1(F,\Omega) > 0 \text{ влечет справедливость (3.1) в } \Omega. \tag{A}$$

Действительно, если $\mu_1(F,\Omega) > 0$, то в силу определения $\mu_1(F,\Omega)$ существуют $\lambda > 0$, $\Omega' \supset \overline{\Omega}$ и $\phi \in LSC(\Omega') \cap L^\infty(\Omega')$, такие что

$$\phi > 0, \quad F[\phi] + \lambda\phi^\alpha \leqslant 0 \quad \text{в } \Omega'.$$

Предположим противное: (3.1) не выполнено; тогда должно существовать решение u, положительное в некоторой подобласти $\overline{\Omega}$.

На первом шаге, пользуясь вязкостным анализом, покажем, что

$$\tilde{u} = \max[u,0]\,\chi_{\overline{\Omega}},$$

где $\chi \equiv 1$ в $\overline{\Omega}$ и $\chi \equiv 0$ вне $\overline{\Omega}$, удовлетворяет неравенству $F[\tilde{u}] \leqslant 0$ в Ω'. Затем используем метод удвоения переменной, типичный для вязкостной теории, и рассмотрим максимумы вспомогательной функции

$$\Phi(x,y) = \tilde{u}(x) - \phi(y) - \frac{n}{2}\,|x-y|^2,\ n = 1,2,3\ldots$$

Применяя принцип сравнения Крандалла—Ишии—Лионса, после некоторых вычислений можно показать, что $\phi(z) \leqslant 0$ при некотором z. Это противоречит предположению, что $\phi > 0$, следовательно, (A) доказано.

Доказательство импликации

$$\text{если (3.1) выполнено в } \Omega, \text{ то } \mu_1(F,\Omega) > 0, \tag{B}$$

более тонкое. Основной идеей является доказательство существования функции $U \in USC(\overline{\Omega})$, такой что $U \not\equiv 0$, $U \geqslant 0$ и

$$\begin{cases} F[U] + \mu_1(F,\Omega)\,U^\alpha \geqslant 0 & \text{в } \Omega,\\ U \leqslant 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases}$$

в ослабленном вязкостном смысле.

Для этого мы адаптируем метод внешней аппроксимации Ω, предложенный в [11, 12], принимая во внимание типичные трудности, возникающие в случае вырождения (заметим, что мы не предполагаем ни регулярности $\partial\Omega$, ни существования барьерной функции). Кратко говоря, опуская многочисленные детали, пусть $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — гладкие области, такие что

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\Omega}_n = \overline{\Omega}, \quad \overline{\Omega} \subset \Omega_{n+1} \subset \Omega_n \subset \mathcal{O},$$

и ищутся субрешения u_n уравнений

$$F[u_n] + \left(\mu_1(F,\Omega) - \frac{1}{n}\right) u_n^\alpha = -1 \text{ в } \mathcal{O}, \quad \operatorname{supp} u_n \subseteq \overline{\Omega}_n.$$

Используя метод Перрона—Ишии, рассуждения о компактности и свойства стабилизации вязкостных субрешений, построим функцию U, такую что

$$F[U] + \mu_1(F,\Omega)\,U^\alpha \geqslant 0,\ U \geqslant 0 \text{ в } \mathcal{O},\ U \equiv 0 \text{ в } \mathcal{O}\setminus\overline{\Omega},\ \max_{\overline{\Omega}} U = 1.$$

Дальнейшие нетривиальные вычисления показывают, что U удовлетворяет граничным условиям в ослабленном вязкостном смысле. Как следствие мы получаем, что $\mu_1(F,\Omega) > 0$, и (B) доказано.

Замечание 3.4. Функция U, построенная выше, может показаться подходящим кандидатом на главную собственную функцию, соответствующую главному собственному значению $\mu_1(F,\Omega) > 0$, и являющуюся положительным решением уравнения

$$F[U] + \mu_1(F,\Omega)\,U^\alpha = 0,\ U = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Вообще говоря, это не верно. Существуют вырожденные операторы, у которых нет главной собственной функции, например, когда $\mu_1(F,\Omega) = +\infty$, см. другие примеры в [8].

Насколько нам известно, определение класса вырожденных эллиптических операторов, для которых можно доказать существование обобщенной главной собственной функции, является нерешенной проблемой.

В целом открытой проблемой является также понимание того, при каких условиях наше новое определение обобщенного главного собственного значения $\mu_1(F,\Omega)$ совпадает с классическим $\lambda_1(F,\Omega)$.

В оставшейся части этого раздела мы кратко сформулируем результаты [8]. Укажем, что в случае гладкой области Ω они верны по крайней мере в двух важных случаях:

1. оператор допускает барьеры в каждой точке границы,
2. F — линейный оператор и условие Фикеры либо выполнено, либо нарушается в каждой точка $\partial\Omega$.

Важную роль в данном направлении имеет определение барьеров. Подходящее для нашего случая определение таково: точка $\xi \in \partial\Omega$ допускает барьер, если существует шар B с центром в ξ и неотрицательная функция $w \in C(\Omega \cap B)$, такая что $w(\xi) = 0$ и $F[w] \leqslant -1$ в $\Omega \cap B$.

Можно показать, что в первом случае, если $\partial\Omega$ класса C^2 при некоторых дополнительных условиях к предположениям теоремы 3.1, включая ограничение степени однородности $\alpha \leqslant 1$, $\mu_1(F,\Omega) = \lambda_1(F,\Omega)$. Заметим, что для областей с достаточно гладкой границей барьеры могут быть построены в каждой точке $\partial\Omega$, используя функцию расстояния до $\partial\Omega$ со знаком.

Теперь рассмотрим второй случай, а именно: $F[u] = \operatorname{Tr}(A(x)D^2u)$ с $A(x) = \Sigma^t(x)\Sigma(x)$, где $\Sigma : \Omega \to \mathcal{S}^n$ непрерывна по Липшицу. Известно, см. [21], что это условие является в точности структурным условием в теореме 3.1. Мы явно увидим это, если предположим, что $A(x)\,p \cdot p \geqslant 0$ при всех $p \in \mathbb{R}^n$ и, следовательно, F — вырожденная эллиптическая функция, возможно, не равномерно эллиптическая.

Следующее условие на граничное поведение $A(x)$ в немного другой форме было введено Фикерой в [25] при изучении задачи Дирихле для вырожденных эллиптических уравнений, см. также [43, 48] и [7] для обсуждения в терминах вязкостных решений.

Определение 3.2. Говорят, что условие Фикеры выполнено в точке $\xi \in \partial\Omega$, если справедлив один из двух случаев:

$$\text{either} \quad A(\xi)Dd(\xi)\cdot Dd(\xi) > 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} A(\xi)Dd(\xi)\cdot Dd(\xi) = 0, \\ \operatorname{Tr}(A(\xi)D^2d(\xi)) > 0, \end{cases}$$

где d — функция расстояния со знаком до $\partial\Omega$, положительная внутри Ω и отрицательная снаружи.

При выполнении данных условий справедлив следующий результат:

Утверждение 3.1. *Если Ω класса C^2 со связной границей и условий Фикеры либо выполнено, либо нарушается во всех точках $\partial\Omega$, то $\mu_1(F,\Omega) = \lambda_1(F,\Omega)$.*

Замечание 3.5. Этот результат, доказательство которого можно найти в [8], применим к важному классу областей Ω, инвариантных относительно соответствующей стохастической динамики $dX_t = \Sigma(X_t)\,dW_t$. Действительно, хорошо известно, что Ω инвариантна тогда и только тогда, когда условие Фикеры нарушается на всей границе, см. подробное обсуждение данного факта даже в случае негладких областей, например, [27] и [18].

4. Целые субрешения

В этом разделе мы по-прежнему работаем с оператором $\mathcal{P}_k^+$, см. раздел 2, и мы рассматриваем проблему существования во всем пространстве вязкостного решения неравенства в частных производных

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Будем предполагать, что член нулевого порядка $f(u)$ удовлетворяет структурному условию

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ непрерывна, строго положительная и неубывающая.} \tag{4.2}$$

Заметим, что при $k = n$ последнее неравенство сводится к полулинейному дифференциальному неравенству

$$\Delta u \geqslant f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^n$$

и хорошо известные результаты Келлера [37] и Оссермана [44] гарантируют существование решения в том и только том случае, когда

$$\int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(s) ds \right)^{-\frac{1}{2}} dt = +\infty. \tag{4.3}$$

Этот результат имеет много следствий и приложений, множество результатов, связанных с ним, может быть найдено в старой и современной литературе. В частности, условие (4.3) использовал Брезис в [15] для изучения существования целого решения полулинейного уравнения

$$\Delta u = f(u) - g(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n,$$

где g — локально интегрируемая функция и f — нелинейный поглощающий член, т. е. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — нечетная, непрерывная, возрастающая и выпуклая на $(0, +\infty)$ функция.

Аналогичный результат для более общего уравнения с линейной главной частью в дивергентной форме был позже получен Боккардо—Галуэ—Васкесом [13, 14], Леони [39] и Леони—Пеллаччи [40], Д'Амброзио—Митидиери [22].

Во вполне нелинейном случае аналогичный результат был недавно доказан Эстебаном—Фелмером—Куассом [24], Гализе—Витоло [28], Диасом [23], Амендола—Гализе—Витоло [3] и Бао—Джи [5], Бао—Джи—Ли [6], Джином—Ли—Ксу [36] для уравнений на гессиан, включающих k-ю элементарную симметричную функцию собственных значений $\eta_1(D^2u), \ldots, \eta_n(D^2u)$.

Наш основной результат утверждает, что условие (4.3) необходимо и достаточно в рассматриваемом вполне нелинейном вырожденном случае.

Теорема 4.1. *Пусть* $1 \leqslant k \leqslant n$ *и* f *удовлетворяет* (4.2). *Тогда неравенство* (4.1) *имеет целое вязкостное решение* $u \in C(\mathbb{R}^n)$ *тогда и только тогда, когда* f *удовлетворяет условию Келлера—Оссермана* (4.3).

С другой стороны, если f *удовлетворяет* (4.2), *но не удовлетворяет* (4.3), *то для любой функции* u, *удовлетворяющей* (4.1) *в вязкостном смысле в собственном открытом подмножестве* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *справедлива следующая оценка*:

$$u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x)) \quad \textit{для всех } x \in \Omega,$$

где $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ *и* $\mathcal{R}(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \left(\frac{2\int_a^t f(s) ds}{k} \right)^{-1/2} dt.$

Схема доказательства теоремы 4.1.

Шаг 1: построение локальных радиальных решений.

Пусть $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ — радиальная функция в шаре $B_R = B_R(0)$ с $\varphi : [0, R) \to \mathbb{R}$ класса $C^2([0, R))$, удовлетворяющая условию $\varphi'(0) = 0$. Так как собственные значения матрицы Гессе $D^2\Phi(x)$ суть $\varphi''(|x|)$ — простое собственное значение и $\varphi'(|x|)/|x|$ порядка $n - 1$, получаем, что $\Phi(x)$ будет классическим решением уравнения

$$\mathcal{P}_k^+(D^2\Phi) = f(\Phi) \quad \text{в } B_R \tag{4.4}$$

тогда и только тогда, когда $\varphi(r)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{k-1}{r}\varphi' = f(\varphi) & \text{в } [0, R), \\ \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'' \geqslant \varphi'/r. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши при $a \in \mathbb{R}$ и $c > 0$

$$\begin{cases} \varphi''(r) + \dfrac{c-1}{r}\,\varphi'(r) = f(\varphi(r)), \quad r \geqslant 0, \\ \varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Классическая теория обыкновенных дифференциальных уравнений гарантирует существование локальных решений задачи (4.5), которыми являются, в частности, функции φ, определенные в некотором интервале $[0, R)$ при $0 < R \leqslant +\infty$, непрерывные в $[0, R)$, дважды дифференцируемые в $(0, R)$ и такие, что

$$0 = \varphi'(0) = \lim_{r\to 0^+} \varphi'(r),\ \varphi''(0) = \lim_{r\to 0^+} \varphi''(r) = \lim_{r\to 0^+} \frac{\varphi'(r)}{r} \neq \infty.$$

Более того, для любых $c > 0$ и f, удовлетворяющей (4.2), следует, что локальные решения (4.5) возрастают, выпуклы и таковы, что

$$\varphi''(r) \geqslant \frac{\varphi'(r)}{r}.$$

Шаг 2: существование целых решений соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения.

Если $c \geqslant 1$, то каждое максимальное решение (4.5) глобально определено на $[0, +\infty)$ тогда и только тогда, когда f удовлетворяет (4.3), см. [37, 44]. Из шага 1 следует, что если (4.3) выполнено, то решения (4.1) существуют (а именно, радиальные решения).

Более того, если (4.3) не выполнено, и φ является максимальным решением задачи Коши (4.5), определенным на ограниченном интервале $[0, R)$, то необходимо получаем, что

$$R = R(a) \leqslant \mathcal{R}(a) = \int\limits_a^{+\infty} \sqrt{\frac{c}{2\int\limits_a^t f(s)ds}}dt. \tag{4.6}$$

Шаг 3: существование целого субрешения (4.1).

В силу шага 2, если выполнено условие (4.3), то неравенство (4.1) имеет целые решения.

Обратно, предположим, что $u \in C(\mathbb{R}^n)$ является решением неравенства (4.1) в вязкостном смысле, и пусть $\varphi \in C^2([0, R))$ — максимальное решение задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (4.5) при некотором $a \in \mathbb{R}$, таком что $a < u(0)$.

Мы утверждаем, что $R = +\infty$. Если от противного $R < +\infty$, то в силу максимальности $\varphi(r) \to +\infty$ при $r \to R^-$, тогда в силу шага 1, $\Phi(x) = \varphi(|x|)$ — радиальное решение (4.4), разрушающееся на границе ∂B_R.

Как и в доказательстве утверждения 2.1, принцип сравнения влечет $u(x) \leqslant \Phi(x)$ в B_R, что противоречит условию $u(0) > a = \Phi(0)$. Таким образом, максимальным интервалом существования φ является $[0, +\infty)$, и в силу шага 2 условие (4.3) должно выполняться.

Шаг 4: верхняя оценка для локальных субрешений (4.1).

Предположим, что (4.3) не выполнено. Тогда принцип сравнения, примененный на шаге 3, и неравенство (4.6) говорят, что если u — вязкостное субрешение в Ω, то $u(x) \leqslant a$ для всех $x \in \Omega$ и $a \in \mathbb{R}$, таких что $\mathcal{R}(a) \leqslant d(x)$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{R}(a)$ — невозрастающая функция, стремящаяся к нулю при $a \to +\infty$. Отсюда следует, что $u(x) \leqslant a$ при всех $a \geqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x))$. □

Замечание 4.1. Если опустить условие строгой положительности f и ослабить его до $f \geqslant 0$, где f не равна тождественно нулю, то неравенство (4.1), так же как и задача (4.5), имеет целые постоянные решения $u \equiv c$ для любых c, таких что $f(c) = 0$, независимо от роста f на бесконечности.

Естественно предположить, что в этом случае неравенство (4.1) имеет непостоянное решение в том и только том случае, когда f удовлетворяет (4.3). Взглянув на доказательство теоремы 4.1, можно понять, что если f удовлетворяет (4.3), то существуют целые решения (4.1), отличные от константы, которые являются радиальными решениями. С другой стороны, если неравенство (4.1) имеет непостоянное целое решение u, такое что $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} u > \sup\{c \in \mathbb{R} : f(c) = 0\}$, то так же, как выше, можно получить, что f должна удовлетворять (4.3). Таким образом, остался единственный случай существования непостоянного ограниченного сверху решения однородного неравенства

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \tag{4.7}$$

Если $k = n = 2$, то применима классическая теорема Лиувилля для ограниченных сверху субгармонических функций во всем пространстве, и мы получаем, что неравенство

$$\Delta u \geqslant f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^2$$

имеет решения, отличные от константы, тогда и только тогда, когда f удовлетворяет (4.3). Обратно, если либо $k < n$, либо $k = n \geqslant 3$, неравенство (4.7), как легко видеть, имеет ограниченные решения, отличные от константы, таким образом, в этом случае неравенство (4.3) является достаточным, но не обязательно необходимым для существования непостоянного решения (4.1).

Замечание 4.2. Если усилить условие (4.2) требованием, что f — строго возрастающая, то можно провести такое же доказательство теоремы 4.1 для существования целых решений неравенства

$$\mathcal{M}_{0,1}^+(D^2u) \geqslant f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \tag{4.8}$$

где $\mathcal{M}_{0,1}^+$ — вырожденный максимальный оператор Пуччи. Как говорилось в замечании 2.4 в разделе 2, принцип максимума не применим к $\mathcal{M}_{0,1}^+$. Более сильное условие на f требуется, чтобы компенсировать сильное вырождение $\mathcal{M}_{0,1}^+$, тогда принцип сравнения может быть применен к $\mathcal{M}_{0,1}^+ - f$.

Заметим также, что

$$\mathcal{M}_{0,1}^+(X) \geqslant F(X)$$

для любого оператора $F : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$, такого что $F(O) = 0$ и

$$0 \leqslant F(X + P) - F(X) \leqslant \mathrm{Tr}\,(P), \quad \forall\, X,\ P \in \mathcal{S}^n,\ P \geqslant 0.$$

Таким образом, условие (4.3) является необходимым для существования вязкостных решений $u \in C(\mathbb{R}^n)$ любого вполне нелинейного дифференциального неравенства вида

$$F(D^2u) \geqslant f(u) \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Результат, аналогичный теореме 4.1, может быть получен для более общего вполне нелинейного вырожденного эллиптического дифференциального неравенства, содержащего члены первого порядка:

$$F(D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q,$$

где в качестве F, как и ранее, может быть $\mathcal{P}_k^+$ или $\mathcal{M}_{0,1}^+$, q — показатель степени в интервале $(0, 2]$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная монотонная неубывающая функция.

Заметим, что соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение в этом случае имеет вид

$$\varphi'' + \frac{c-1}{r}\,\varphi' = f(\varphi) + g(\varphi)|\varphi'|^q,$$

где либо $c = k$, либо $c = n$. Похожее, но более сложное качественное исследование задачи Коши для этого уравнения приводит к характеристике существования целых решений через условие обобщающее (4.3), которое использует одновременно f, g и q.

В частности, для оператора $\mathcal{P}_k^+$ мы имеем следующий результат, доказательство которого содержится в [20].

Теорема 4.2. *Предположим, что f удовлетворяет* (4.2) *и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, неотрицательная неубывающая функция. Тогда существует целое вязкостное решение $u \in USC(\mathbb{R}^n)$ неравенства*

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q \quad \text{в } \mathbb{R}^n$$

в том и только том случае, когда

$$q \leqslant 1 \quad \textit{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t f(s)\,ds\right)^{1/2}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(\int\limits_0^t g(s)\,ds\right)^{1/(2-q)}} = +\infty. \tag{4.9}$$

Заметим, что в случае $q > 1$ целых решений не существует вне зависимости от малости роста f и g. С другой стороны, если $q \leqslant 1$, то необходимы ограничения роста как f, так и g. В частности, если $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) < +\infty$, интеграл, содержащий g, сходится, т. к. $q \leqslant 1$, и, следовательно, (4.9) превращается в обычное условие Келлера—Оссермана (4.3). Обратно, если g растет на бесконечности, как, например, $g(t) \simeq t^\alpha$ при $t \to +\infty$, то в (4.9) нужно потребовать $\alpha \leqslant 1 - q$, а при $q = 1$ допустим не более чем логарифмический рост: $g(t) \simeq (\ln t)^\alpha$ с $\alpha \leqslant 1$.

Заметим также, что если условие (4.9) нарушается и u — вязкостное субрешение в открытом собственном подмножестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то u удовлетворяет универсальной поточечной оценке сверху вида

$$u(x) \leqslant \mathcal{R}^{-1}(d(x)),$$

где $d(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ и $\mathcal{R}$ может быть явно определена через $n,\ k,\ q,\ f$ и g.

В заключение отметим, что теорема 4.1 с предыдущим результатом о существовании решений для уравнений, имеющих строго растущие нулевые члены поглощающего типа (см., в частности, [23]), дает следующий результат о существовании/несуществовании решений уравнения

$$\mathcal{P}_k^+(D^2u) = f(u) - h(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \tag{4.10}$$

Следствие 4.1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная, строго возрастающая, выпуклая и ограниченная снизу функция и $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — ограниченная непрерывная функция. Предположим, что*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\int\limits_0^t \left(f(s) - \inf\limits_{\mathbb{R}} f\right) ds}} < +\infty.$$

Тогда:

1. *Если* $\sup\limits_{\mathbb{R}^n} h \leqslant \inf\limits_{\mathbb{R}} f$, *то* (4.10) *не имеет вязких решений.*
2. *Если* $\inf\limits_{\mathbb{R}^n} h > \inf\limits_{\mathbb{R}} f$, *то* (4.10) *имеет единственное ограниченное вязкое решение.*

Благодарности. Работа частично поддержана GNAMPA-INdAM 2014, проект «Вполне нелинейные дифференциальные уравнения эллиптического типа с вырождением: принцип максимума и приложения».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ambrosio L., Soner H. M.* Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension// J. Differ. Geom. — 1996. — *43*. — C. 693–737.
2. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* Riesz capacity, maximum principle and removable sets of fully nonlinear second order elliptic operators// Differ. Integr. Equ. — 2013. — *26*. — C. 845–866.
3. *Amendola M. E., Galise G., Vitolo A.* On the uniqueness of blow-up solutions of fully nonlinear elliptic equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2013. — *2013*, Suppl. — C. 771–780.
4. *Armstrong S. N.* Principal eigenvalues and an anti-maximum principle for homogeneous fully nonlinear elliptic equations// J. Differ. Equ. — 2009. — *246*, № 7. — C. 2958–2987.
5. *Bao J., Ji X.* Necessary and sufficient conditions on solvability for Hessian inequalities// Proc. Am. Math. Soc. — 2010. — *138*. — C. 175–188.
6. *Bao J., Ji X.* Existence and nonexistence theorem for entire subsolutions of k-Yamabe type equations// J. Differ. Equ. — 2012. — *253*. — C. 2140–2160.
7. *Barles G., Burdeau J.* The Dirichlet problem for semilinear second-order degenerate elliptic equatiions and applications to stochastic exit time control problems// Commun. Part. Differ. Equ. — 1995. — *20*, № 1-2. — C. 129–178.

8. *Berestycki H., Capuzzo Dolcetta I., Porretta A., Rossi L.* Maximum principle and generalized principal eigenvalue for degenerate elliptic operators// J. Math. Pures Appl. — 2015. — *103*, № 5. — C. 1276–1293.
9. *Berestycki H., Nirenberg L., Varadhan S. R. S.* The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains// Commun. Pure Appl. Math. — 1994. — *47*, № 1. — C. 47–92.
10. *Berestycki H., Rossi L.* Generalizations and properties of the principal eigenvalue of elliptic operators in unbounded domains// Commun. Pure Appl. Math. — 2015. — *68*, № 6. — C. 1014–1065.
11. *Birindelli I., Demengel F.* First eigenvalue and Maximum principle for fully nonlinear singular operators// Adv. Differ. Equ. — 2006. — *11*, № 1. — C. 91–119.
12. *Birindelli I., Demengel F.* Eigenvalue, maximum principle and regularity for fully non linear homogeneous operators// Commun. Pure Appl. Anal. — 2007. — *6*, № 2. — C. 335–366.
13. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ without growth restriction on the data// J. Differ. Equ. — 1993. — *105*, № 2. — C. 334–363.
14. *Boccardo L., Gallouet T., Vazquez J. L.* Solutions of nonlinear parabolic equations without growth restrictions on the data// Electron. J. Differ. Equ. — 2001. — *2001*, № 60. — C. 1–20.
15. *Brezis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ without conditions at infinity// Appl. Math. Optim. — 1984. — *12*. — C. 271–282.
16. *Caffarelli L. A., Cabré X.* Fully nonlinear elliptic equations. — Providence: Am. Math. Soc., 1995.
17. *Caffarelli L. A., Li Y. Y., Nirenberg L.* Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. III: Viscosity solutions, including parabolic operators// Commun. Pure Appl. Math. — 2013. — *66*. — C. 109–143.
18. *Cannarsa P., Da Prato G., Frankowska H.* Invariant measures associated to degenerate elliptic operators// Indiana Univ. Math. J. — 2010. — *59*, № 1. — C. 53–78.
19. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* Entire subsolutions of fully nonlinear degenerate elliptic equations// Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.) — 2014. — *9*. — C. 147–161.
20. *Capuzzo Dolcetta I., Leoni F., Vitolo A.* On the inequality $F(x, D^2u) \geqslant f(u) + g(u)|Du|^q$. — arXiv:1501.06836 [math.AP], 2014.
21. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations// Bull. Am. Math. Soc. (N.S.) — 1992. — *27*, № 1. — C. 1–67.
22. *D'Ambrosio L., Mitidieri E.* A priori estimates, positivity results, and nonexistence theorems for quasilinear degenerate elliptic inequalities// Adv. Math. — 2010. — *224*. — C. 967–1020.
23. *Diaz G.* A note on the Liouville method applied to elliptic eventually degenerate fully nonlinear equations governed by the Pucci operators and the Keller–Osserman condition// Math. Ann. — 2012. — *353*. — C. 145–159.
24. *Esteban M. J., Felmer P. L., Quaas A.* Superlinear elliptic equations for fully nonlinear operators without growth restrictions for the data// Proc. Edinb. Math. Soc. (2) — 2010. — *53*, № 1. — C. 125–141.
25. *Fichera G.* Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine// Atti Accad. Naz. Lincei. Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I. (8). — 1956. — *5*. — C. 1–30.
26. *Franchi B., Lanconelli E.* Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés// Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1983. — Proc. Conf. on Linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). — C. 105–114.
27. *Friedman A., Pinsky M. A.* Asymptotic stability and spiraling properties for solutions of stochastic equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1973. — *186*. — C. 331–358.
28. *Galise G., Vitolo A.* Viscosity solutions of uniformly elliptic equations without boundary and growth conditions at infinity// Int. J. Differ. Equ. — 2011. — *2011*. — 453727.
29. *Giga Y.* Surface evolution equations. A level set approach. — Basel: Birkhäuser, 2006.
30. *Harvey F. R., Lawson H. B. мл.* Existence, uniqueness and removable singularities for nonlinear partial differential equations in geometry// В сб. *Surveys in Differential Geometry*, *18*. — Somerville: International Press, 2013. — C. 102–156.
31. *Harvey F. R., Lawson H. B. мл.* Removable singularities for nonlinear subequations// Indiana Univ. Math. J. — 2014. — *63*. — C. 1525–1552.
32. *Harvey F. R., Lawson H. B. мл.* Characterizing the strong maximum principle. — 2014, препринт. — http://arxiv-web3.library.cornell.edu/abs/1309.1738.
33. *Hayman N. K., Kennedy P. B.* Subharmonic functions. Vol. I. — London: Academic Press, 1976.
34. *Ikoma N., Ishii H.* Eigenvalue problem for fully nonlinear second-order elliptic PDE on balls// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire — 2012. — *29*. — C. 783–812.
35. *Ishii H.* Perron's method for Hamilton—Jacobi equations// Duke Math. J. — 1987. — *55*, № 2. — C. 369–384.

36. *Jin Q., Li Y. Y., Xu H.* Nonexistence of positive solutions for some fully nonlinear elliptic equations// Methods Appl. Anal. — 2005. — *12.* — С. 441–449.
37. *Keller J. B.* On solutions of $\Delta u = f(u)$// Commun. Pure Appl. Math. — 1957. — *10.* — С. 503–510.
38. *Landkof N. S.* Foundations of modern potential theory. — Heidelberg—New York: Springer, 1972.
39. *Leoni F.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with “absorbing zero order terms// Adv. Differ. Equ. — 2000. — *5.* — С. 681–722.
40. *Leoni F., Pellacci B.* Local estimates and global existence for strongly nonlinear parabolic equations with locally integrable data// J. Evol. Equ. — 2006. — *6.* — С. 113–144.
41. *Lions P. L.* Bifurcation and optimal stochastic control// Nonlinear Anal. — 1983. — *7*, № 2. — С. 177–207.
42. *Oberman A., Silvestre L.* The Dirichlet problem for the convex envelope// Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — *363*, № 11. — С. 5871–5886.
43. *Oleĭnik O. A., Radkevič E. V.* Second order equations with nonnegative characteristic form. — New York: Plenum Press, 1973.
44. *Osserman R.* On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$// Pacific J. Math. — 1957. — *7.* — С. 1141–1147.
45. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1967.
46. *Quaas A., Sirakov B.* Principal eigenvalues and the Dirichlet problem for fully nonlinear elliptic operators// Adv. Math. — 2008. — *218*, № 1. — С. 105–135.
47. *Sha J.-P.* p-convex Riemannian manifolds// Invent. Math. — 1986. — *83.* — С. 437–447.
48. *Suzuki K.* The first boundary value and eigenvalue problems for degenerate elliptic equations// Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. Ser. A. — 1968. — *4*, № 1. — С. 179–200.
49. *Wu H.* Manifolds of partially positive curvature// Indiana Univ. Math. J. — 1987. — *36.* — С. 525–548.

I. Capuzzo Dolcetta
Кафедра математики, Университет Сапиенца, Италия, г. Рим
E-mail: capuzzo@mat.uniroma1.it

F. Leoni
Кафедра математики, Университет Сапиенца, Италия, г. Рим
E-mail: leoni@mat.uniroma1.it

A. Vitolo
Кафедра математики, Университет г. Салерно, Италия, г. Салерно
E-mail: vitolo@unisa.it