Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 82–95

УДК 517.957

О НОВЫХ СТРУКТУРАХ В ТЕОРИИ ПОЛНОСТЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2015 г. **Н. М. ИВОЧКИНА, Н. В. ФИЛИМОНЕНКОВА**

Аннотация. В статье предлагается анализ современной ситуации в теории уравнений с m-гессиановскими стационарными и эволюционными операторами. Основная особенность этой теории — появление новых алгебраических и геометрических понятий. В работе приводится их перечень. Одним из основных является алгебраическое понятие m-положительности матриц, и мы приводим доказательство аналога классического критерия Сильвестра для них. Простым следствием этого критерия являются найденные нами необходимые и достаточные условия существования классического решения первой начально-краевой задачи для m-гессиановского эволюционного уравнения. В работе рассматривается также проблема асимптотического поведения m-гессиановских эволюций в полуограниченном цилиндре.

1. Введение

Начало развития современной теории полностью нелинейных эллиптических и параболических уравнений в частных производных второго порядка было положено классическими работами Л. Эванса [16] и Н. В. Крылова [6]. В этих работах построены локальные внутренние априорные оценки постоянной Гельдера вторых производных решений равномерно эллиптических полностью нелинейных дифференциальных уравнений с оператором, вогнутым по вторым производным. В заметке М. В. Сафонова [9] эти оценки продолжены вплоть до границы для решений задачи Дирихле.

Эти результаты свели проблему разрешимости в классическом смысле задачи Дирихле для нетотально эллиптических (параболических) уравнений к построению априорных оценок решений в $C^2(\bar{\Omega})$ с последующим применением мощного аппарата классической теории равномерно эллиптических (параболических) уравнений. Классическим примером нетотально эллиптического уравнения является уравнение Монжа—Ампера:

$$\det u_{xx} = f, \quad u \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Однако, платой за отказ от тотального сохранения типа является требование специальных алгебраических симметрий рассматриваемых дифференциальных операторов. Реализация этих симметрий для построения априорных оценок решений привела к ряду новых геометрических структурных характеристик гиперповерхностей, в частности, границ областей. Простейшими примерами операторов, обладающих требуемой алгебраической симметрией, являются m-гессиановские операторы, введенные в [1, 2] как естественные аналоги операторов Лапласа и Монжа—Ампера. Что касается новых геометрических характеристик замкнутых гиперповерхностей, то впервые они были введены авторами [13] в 1985 г. Для демонстрации процитируем теорему 3 (с. 264) из этой статьи.

Теорема 1.1 (см. [13, теорема 3, с. 264]). *Задача Дирихле*

$$\sigma^{(k)}(\lambda(u_{ij})) = \psi > 0 \quad \text{в} \quad \bar{\Omega}, \quad k > 1, \quad u = \varphi \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{1.2}$$

имеет (единственное) допустимое решение $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, *если*

$$\text{в каждой точке} \quad x \in \partial\Omega, \quad \sigma^{(k-1)}(\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}) > 0. \tag{1.3}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке грантов НШ-1771.2014.1, РФФИ № 15-01-07650а, РФФИ № 15-31-20600 и СПбГУ 6.38.670.2013.

В случае $\varphi \equiv const$ условие (1.3) *является также необходимым для существования решения в $C^2(\bar{\Omega})$.*

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\lambda(u_{ij}) = \{\lambda\}_1^n$ — набор собственных значений матрицы Гессе $u_{xx} = (u_{ij})_1^n$, $\{\kappa_i\}_1^{n-1}$ — главные кривизны гиперповерхности $\partial\Omega \in C^\infty$, $\sigma^{(k)}(.)$ — элементарная симметрическая функция порядка k, $\psi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$. В этой же статье приведены некоторые предложения из теории гиперболических многочленов Л. Гординга [15] как алгебраической основы теоремы 1.1. С точки зрения настоящей статьи особый интерес в теореме 1.1 представляет необходимость геометрического условия (1.3) для существования решения $u \in C^2(\bar{\Omega})$ задачи (1.2) с постоянным граничным условием.

Со времени написания работ [1, 2, 13] прошло более 30 лет и стало ясно, что ни в алгебре симметричных матриц, ни в дифференциальной геометрии не рассматриваются структуры, необходимые для исследования гессиановских уравнений или же их геометрических аналогов. Эти структуры стали предметом исследования в серии работ [5, 22, 27], и одной из целей нашей статьи является презентация этих структур и их свойств. Для демонстрации приведем уточненные версии утверждений из теоремы 1.1 для постоянного условия Дирихле в наших терминах.

Теорема 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^{4+\alpha}$, $f \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим, что $\partial\Omega$ — $(m-1)$-выпуклая гиперповерхность. Тогда существует решение $u \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$ задачи*

$$T_m[u] = f \geqslant \nu > 0, \quad u|_{\partial\Omega} = C = const. \tag{1.4}$$

При этом, если $C = 0$, m — четное, то существует ровно два решения в $C^2(\Omega)$: u и $v = -u$. Если же m нечетно или $C \neq 0$, то u — единственное решение в $C^2(\Omega)$.

Здесь $T_m[u]$ — след порядка m матрицы u_{xx}, $(m-1)$-выпуклость замкнутой гиперповерхности задается неравенством $\mathbf{k}_{m-1}[\partial\Omega] > 0$, где $\mathbf{k}_{m-1}$ — $(m-1)$-кривизна $\partial\Omega$. Для примера, $T_1[u] = \Delta u$, $T_n[u] = \det u_{xx}$, $\mathbf{k}_1[\partial\Omega]$ — средняя кривизна $\partial\Omega$, $\mathbf{k}_{n-1}[\partial\Omega]$ — гауссова кривизна. Отметим, что по определению $T_0[u] \equiv 1$, $\mathbf{k}_0[\partial\Omega] \equiv 1$, и поэтому любая замкнутая гиперповерхность является 0-выпуклой.

Что касается необходимости условия (1.3) в теореме 1.1, то справедлива следующая теорема несуществования.

Теорема 1.3. *Пусть $f \geqslant \nu > 0$ в $\bar{\Omega}$. Предположим, что существует точка $M_0 \in \partial\Omega$ такая, что $\mathbf{k}_{m-1}[\partial\Omega](M_0) = 0$. Тогда, как бы ни были гладки данные, не существует решений задачи* (1.4) *в $C^2(\Omega)$.*

Очевидно, что для уравнения Пуассона, соответствующего случаю $m = 1$, условия теоремы 1.3 не могут быть выполнены. Возможно, эта теорема была известна для уравнения Монжа—Ампера (случай $m = n$) и до 1985 года.

В работе [21], где исследуются вариационные свойства m-гессиановских операторов, аналог теоремы 1.3 используется для доказательства единственности в $C^2(\bar{\Omega})$ минимайзеров функционалов с гессиановским лагранжианом.

Замечание 1.1. Термин «*допустимое решение*» (*admissible solution*), который встречается в формулировке теоремы 1.1, впервые введен в статье [13], и это понятие является основным в теории классической разрешимости задачи Дирихле для гессиановских уравнений. В наших публикациях мы переводим его как m-допустимые решения для уравнения (1.4), а само уравнение (оператор) называем m-гессиановским. На самом деле все $C^{2+\alpha}$-решения из теоремы 1.2 являются m-допустимыми при $C \neq 0$ или при нечетном m. Если же $C = 0$, m четное, то m-допустимым решением будет u или $-u$.

Мы привели анализ хорошо известной теоремы 1.1 с тем, чтобы сформулировать основную цель нашей статьи: описать качественное различие известных результатов классической теории линейных уравнений и теории полностью нелинейных уравнений, не сохраняющих тип (эллиптичность, параболичность) в $C^2(\Omega)$. Отличия следующие.

1. Одной из традиционных задач теории линейных и квазилинейных уравнений является описание максимального класса уравнений, для которых удается доказать теоремы существования

решений в выбранном пространстве. Для полностью нелинейных уравнений попытка описания максимального класса гессиановских уравнений $F[u] = F(u_{xx}) = f$ с точки зрения разрешимости в классическом смысле задачи Дирихле имеется в статье [13]. Максимальная общность усложняет восприятие идейной стороны происходящего и в этом случае едва ли оправдана. Например, в статье [30] рассматривается задача Дирихле для гессиановских уравнений $T_{m,l}[u] := T_m[u]/T_l[u] = f$, которые не входят в класс из [13] и имеют важные приложения. Более того, в этой работе найдены новые алгебраические факты, на основе которых предлагается оригинальный метод построения априорных оценок (см. также [29]), что позволяет доказать классическую разрешимость задачи Дирихле.

В нашей статье мы рассматриваем уравнения с простейшими гессиановскими операторами, акцентируя качественное различие результатов с линейными аналогами.

2. В отличие от линейной теории, классическая разрешимость краевых задач для полностью нелинейных уравнений при фиксированном знаке правой части зависит от геометрических свойств границы области. Теорема 1.3 является примером. Как это следует из теоремы 1.1, требование $(m-1)$-выпуклости границы гарантирует существование классического решения любой задачи Дирихле для уравнения (1.4) в случае достаточной гладкости граничного условия. Но это требование не является необходимым, т.е. аналога теоремы 1.2 для непостоянного граничного условия, вообще говоря, нет. В работах [8, 27] приводится пример граничного условия, для которого задача Дирихле для уравнения $T_5[u] = const > 0$ в шаре $B_1 \subset \mathbb{R}^6$ имеет по крайней мере 2 решения, причем одно из них не имеет экстремумов и не является 5-допустимым.

Первые примеры эволюционных гессиановских уравнений $E[u] = E(u_t, u_{xx}) = f$ в цилиндре $\bar{\Omega} \times [0; T]$ были рассмотрены в работах [25, 32, 33] с позиции разрешимости в допустимом смысле первой начально-краевой задачи. При этом логарифмические эволюционные уравнения из [33] были использованы для исследования вариационных свойств гессиановских функционалов. В статьях [14,31] рассматриваются более общие классы эволюционных логарифмических уравнений для вывода тех или иных интегральных неравенств. Наконец, в заметке [17] демонстрируется принцип возможных обобщений эволюционных гессиановских уравнений, допускающих разрешимость в допустимом смысле, а в книге [28] предпринята попытка включить такие уравнения в общую теорию параболических уравнений второго порядка в частных производных.

В предлагаемой работе исследуются уравнения с m-гессиановскими эволюционными операторами $E_m[u] := -u_t T_{m-1}[u] + T_m[u]$, $m = 1, \dots n$. Уравнения с такими операторами впервые были введены в работе [19], где приводятся достаточные условия существования аппроксимативных решений первой начально-краевой задачи. В более поздней статье [20] найдены достаточные условия разрешимости в классическом (m-допустимом) смысле этих уравнений.

Поскольку $T_{n+1}(S) \equiv 0$ для всех симметричных матриц $S = (s_{ij})_1^n$ по определению, формально в класс m-гессиановских эволюционных операторов входит $E_{n+1}[u] = -u_t \det u_{xx}$. Уравнение $-u_t \det u_{xx} = f > 0$ приводится в книге Н.В. Крылова [7] в качестве примера и названо там параболическим уравнением Монжа—Ампера. Именно это уравнение изучается и в работе [32] (1985 г.). Входит оно и в класс уравнений из [19, 20]. Однако, здесь мы не рассматриваем параболические уравнения Монжа—Ампера.

Основой доказательства теоремы 1.1 является алгебраическая теория Л. Гординга в сочетании с модернизацией классических методов построения априорных оценок линейной теории эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. В формулировке теорем 1.2, 1.3 использованы новые геометрические инварианты гиперповерхностей. Это означает, что теория полностью нелинейных уравнений ставит новые задачи алгебро-геометрического характера. Постановка и решение каждой из этих задач приводит к качественно новым результатам для дифференциальных уравнений. В нашей статье таким результатом является распространение известного для положительно определенных симметричных матриц критерия Сильвестра на m-положительные матрицы. Например, именно этот критерий является основой удивительных теорем несуществования m-гессиановских эволюций, аналогов которым нет в линейной теории.

Для доказательства основных результатов в статье [33] впервые было предпринято исследование асимптотического поведения допустимых решений некоторых вспомогательных первых начально-краевых задач для логарифмических эволюционных уравнений в полуограниченном цилиндре. В работах [14,31] с этой точки зрения были исследованы решения более общих эволюционных уравнений. В предлагаемой работе содержатся новые результаты, полученные в ходе асимптотического анализа m-гессиановских эволюций.

2. Симметричные m-положительные матрицы

Как известно, классическим представителем теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка является уравнение Монжа—Ампера (1.1). В 80-х годах 20 века его стали рассматривать как частный случай в классе m-гессиановских уравнений (1.4) (в зарубежной литературе k-Hessian equation (1.2)). Изначально m-гессиановский оператор определяли как элементарную симметрическую функцию порядка m от собственных чисел матрицы Гессе u_{xx}, (1.2). Этой традиции придерживаются зарубежные авторы L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck [13], N. S. Trudinger [26], X.-J. Wang [34], заложившие базу нелинейной теории, а также их последователи. Представители Санкт-Петербургской математической школы определяют m-гессиановский оператор как сумму главных миноров порядка m матрицы u_{xx} (1.4), и считают такой подход более естественным, чем обращение к собственным числам. Систематическое исследование суммы главных миноров в рамках нелинейной теории впервые предпринято в работах 80-х годов [1, 2]. В 90-е годы эта матричная операция приобрела название «след порядка m» [4, 17], и, начиная с 2006 года, этот термин регулярно используется для исследования m-гессиановских уравнений (1.4) и родственных задач (см., например, [5, 10, 18, 22, 27]).

Определение 2.1. Пусть S — квадратная матрица размера $n \times n$ и пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Главный минор порядка m матрицы S — это определитель матрицы, которая составлена из элементов матрицы S, стоящих на пересечении каких-либо m строк и m столбцов (с одинаковыми номерами). Следом порядка m, или m-следом, называем сумму всех главных миноров порядка m матрицы S. Обозначаем $T_m(S)$.

Положим $T_0(S) = 1$. Термин «m-след» включает два крайних случая. При $m = 1$ это просто след матрицы, сумма элементов на главной диагонали: $T_1(S) = trS$. При $m = n$ это определитель матрицы: $T_n(S) = \det S$.

Очевидно, матричная функция T_m непрерывна и m-однородна. Кроме того, известно, что след порядка m обладает ортогональной инвариантностью:

$$tr_m S = tr_m(B^T SB), \quad B^T B = Id.$$

Обозначим символом $Sym(n)$ пространство всех симметричных матриц размера $n \times n$. Ортогональная инвариантность m-следа позволяет в случае необходимости обращаться к диагональной форме матрицы $S \in Sym(n)$:

$$T_m(S) = T_m(\Lambda), \quad B^T SB = \Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \quad B^T B = I.$$

Именно это свойство позволяет трактовать операцию T_m как элементарную симметрическую функцию порядка m от собственных чисел матрицы $S \in Sym(n)$.

Приведенное ниже неравенство (2.1) впервые доказано в работе [2] для элементарных симметрических функций. В данной работе мы доказываем, что его можно распространить на следы любой симметричной матрицы.

Лемма 2.1. *Для произвольной матрицы $S \in Sym(n)$ и произвольных номеров $2 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant i \leqslant n$ справедливо неравенство*

$$T_m(S)T_{m-2}(S^{\langle i \rangle}) \leqslant T_{m-1}(S)T_{m-1}(S^{\langle i \rangle}), \tag{2.1}$$

где $S^{\langle i \rangle}$ — матрица, полученная из матрицы S вычеркиванием i-й строки и i-го столбца.

Доказательство. Сначала докажем неравенство (2.1) для диагональных матриц вида $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, поскольку именно в этом случае можно использовать простое тождество:

$$T_k(\Lambda) = \lambda_i T_{k-1}(\Lambda^{\langle i \rangle}) + T_k(\Lambda^{\langle i \rangle}). \tag{2.2}$$

Кроме того, нам понадобится неравенство Ньютона

$$\frac{T_{k-1}(\Lambda)}{C_n^{k-1}} \, \frac{T_{k+1}(\Lambda)}{C_n^{k+1}} \leqslant \left(\frac{T_k(\Lambda)}{C_n^k}\right)^2, \tag{2.3}$$

описанное и доказанное в книге [12].

Воспользуемся тождеством (2.2) для следов порядка m и $m-1$:

$$T_m(\Lambda) = \lambda_i T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle}) + T_m(\Lambda^{\langle i\rangle}),$$

$$T_{m-1}(\Lambda) = \lambda_i T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle}) + T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle}).$$

Умножим обе части первого равенства на $T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle})$, второго — на $T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle})$, результаты вычитаем:

$$T_m(\Lambda)T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle}) - T_{m-1}(\Lambda)T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle}) = T_m(\Lambda^{\langle i\rangle})T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle}) - \left(T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle})\right)^2.$$

Оценим слагаемое $T_m(\Lambda^{\langle i\rangle})T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle})$ с помощью неравенства Ньютона (2.3):

$$T_m(\Lambda^{\langle i\rangle})T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle}) \leqslant \frac{m-1}{m}\frac{n-m+1}{n-m+2}\left(T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle})\right)^2.$$

Приходим к выводу

$$T_m(\Lambda)T_{m-2}(\Lambda^{\langle i\rangle}) - T_{m-1}(\Lambda)T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle}) \geqslant \left(T_{m-1}(\Lambda^{\langle i\rangle})\right)^2\left(1 - \frac{m-1}{m}\frac{n-m+1}{n-m+2}\right) \geqslant 0.$$

Таким образом, соотношение (2.1) доказано для диагональной матрицы. Теперь докажем для произвольной матрицы $S \in Sym(n)$. Пусть $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ — диагональная форма матрицы S, $\Lambda = B^T SB$, где $B = (b^i_j)^n_1$ — ортогональная матрица. Выше доказано, что для матрицы Λ справедлива серия неравенств (2.1):

$$T_m(\Lambda)T_{m-2}(\Lambda^{\langle j\rangle}) \leqslant T_{m-1}(\Lambda)T_{m-1}(\Lambda^{\langle j\rangle}), \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.4}$$

При каждом j умножаем неравенство (2.4) на $(b^i_j)^2$ и складываем:

$$T_m(\Lambda)T_{m-2}(\Lambda^{\langle j\rangle})(b^i_j)^2 \leqslant T_{m-1}(\Lambda)T_{m-1}(\Lambda^{\langle j\rangle})(b^i_j)^2. \tag{2.5}$$

Благодаря ортогональной инвариантности следов $T_m(\Lambda) = T_m(S)$, $T_{m-1}(\Lambda) = T_{m-1}(S)$.

Следы укороченной матрицы $\Lambda^{\langle j\rangle}$, разумеется, не обладают ортогональной инвариантностью относительно полной матрицы S. Тем не менее можно вывести формулу связи. Элементы матриц S и Λ связаны соотношением $\lambda_j = s_{kl}b^k_j b^l_j$, $j = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что дифференцирование m-следа по диагональному элементу матрицы S равносильно вычислению $(m-1)$-следа для укороченной матрицы. Используем ортогональную инвариантность следа и правило дифференцирования сложной функции:

$$T_{m-1}(S^{\langle i\rangle}) = \frac{\partial T_m(S)}{\partial s_{ii}} = \frac{\partial T_m(\Lambda)}{\partial s_{ii}} = \frac{\partial T_m(\Lambda)}{\partial \lambda_j}\frac{\partial \lambda_j}{\partial s_{ii}} = T_{m-1}(\Lambda^{\langle j\rangle})(b^i_j)^2.$$

Это соотношение приводит к совпадению неравенств (2.5) и (2.1). □

Изучение уравнений (1.4) поначалу развивалось по образцу уравнения Монжа—Ампера (1.1). Известно, что для разрешимости (1.1) требуется положительная определенность матрицы u_{xx}. Исследование уравнений (1.4) при $m < n$ было направлено на выявление аналогичных требований для матрицы u_{xx}. В результате были построены специальные матричные конусы, более широкие, чем конус положительно определенных матриц. Эти конусы впервые конструктивно описаны в статье [2] (1983 г.), но многообразие их алгебро-геометрических свойств не исчерпано до сих пор. Совсем недавно в работах [5,27] предложено название для матриц из этих конусов — так появилось понятие m-положительной матрицы, которое еще не успело распространиться в математической литературе.

Определение 2.2. Пусть $S \in Sym(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Симметричная матрица S называется m-положительной, если $T_k(S) > 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, m$. Введем обозначение для множества m-положительных матриц:

$$K_m = \{S \in Sym(n) :\ T_k(S) > 0,\ k = 1, 2, \dots, m\}. \tag{2.6}$$

Положим $K_0 = Sym(n)$. В пространстве симметричных матриц множество K_m является, очевидно, открытым конусом, поскольку если $S \in K_m$, то $\alpha S \in K_m$ для любого $\alpha > 0$. Справедлива цепочка вложений

$$K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n,$$

причем K_n — это в точности конус положительно определенных матриц.

Замыкание конуса K_m является максимальной областью действия для серии неравенств Маклорена (это впервые отмечено в [2]):

$$\frac{T_1(S)}{C_n^1} \geqslant \left(\frac{T_2(S)}{C_n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \ldots \geqslant \left(\frac{T_{m-1}(S)}{C_n^{m-1}}\right)^{\frac{1}{m-1}} \geqslant \left(\frac{T_m(S)}{C_n^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad S \in \bar{K}_m.$$

Отсюда можно уточнить структуру замкнутого конуса $\bar{K}_m$:

$$S \in \bar{K}_m \quad \Leftrightarrow \quad \exists \tilde{m} \leqslant m : \begin{cases} T_k(S) > 0, k = 1, 2, \ldots, \tilde{m}, \\ T_k(S) = 0, k = \tilde{m} + 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{2.7}$$

Продемонстрируем одно из альтернативных описаний конуса K_m.

Лемма 2.2. *Пусть матрица S_0 является m-положительной. Тогда конус K_m можно определить как компоненту положительности m-следа, содержащую матрицу S_0.*

Доказательство. Очевидно, что $Id \in K_m$. Покажем, что если $S \in K_m$, то $tS + (1-t)Id \in K_m$ при любом $t \in (0;1)$:

$$T_p\left(tS + (1-t)Id\right) = t^p C_n^p \sum_{k=0}^{p} \frac{C_p^k}{C_n^k} T_k(S) \left(\frac{1-t}{t}\right)^{p-k} > 0, \quad 1 \leqslant p \leqslant m.$$

Следовательно, конус K_m является связным множеством. Из описания (2.7) ясно, что на границе конуса m-след обращается в ноль. Поэтому если $S_0 \in K_m$, то компонента положительности m-следа, содержащая матрицу S_0, совпадает с конусом K_m. □

В статье [22] представлена систематизация других описаний конусов K_m, известных и новых свойств, востребованных теорией полностью нелинейных уравнений в частных производных.

Для положительно определенных, или n-положительных, матриц широко известен критерий Сильвестра: матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны. Оказалось, что на основе леммы 2.1 можно получить аналог критерия Сильвестра для m-положительных матриц.

Обозначим символом $S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle}$ матрицу, полученную из матрицы S вычеркиванием k строк и k столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$.

Теорема 2.1 (критерий Сильвестра)**.** *Пусть $S \in Sym(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$.*

1. *Для произвольного номера $1 \leqslant i \leqslant n$ верно следующее*:

$$S \in K_m \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_{m-1},\ tr_m S > 0.$$

В левой части данного утверждения K_m — это конус в пространстве $Sym(n)$, а в правой части K_{m-1} — конус в пространстве $Sym(n-1)$.

2. *Пусть $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \leqslant n$ — произвольный набор различных номеров. Для того чтобы матрица S была m-положительной, необходимо и достаточно выполнения следующих условий*:

$$T_m(S) > 0,\ T_{m-1}(S^{\langle i_1 \rangle}) > 0,\ T_{m-2}(S^{\langle i_1, i_2 \rangle}) > 0, \ldots, T_1(S^{\langle i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \rangle}) > 0.$$

Доказательство. Для доказательства пункта 1 используем метод математической индукции. При $m = 1$ утверждение 1 очевидно:

$$S \in K_1 \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_0,\ T_1(S) > 0.$$

Предположим, что

$$S \in K_{m-1} \quad \Leftrightarrow \quad S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2},\ T_{m-1}(S) > 0.$$

Проведем цепочку равносильных переходов:

$$S \in K_m \Leftrightarrow \begin{cases} S \in K_{m-1}, \\ T_m(S) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2}, \\ T_{m-1}(S) > 0, \\ T_m(S) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-2}, \\ T_{m-1}(S^{\langle i \rangle}) > 0, \\ T_m(S) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^{\langle i \rangle} \in K_{m-1}, \\ T_m(S) > 0. \end{cases}$$

Первый и последний равносильные переходы в этой цепочке вытекают из определения 2.2, второй — из индукционного предположения, а третий — из леммы 2.1.

Для доказательства пункта 2 достаточно несколько раз воспользоваться утверждением 1. □

В результате доказательства теоремы 2.1 получен, кроме прочего, и альтернативный путь обоснования классического критерия Сильвестра: частный случай пункта 2 при $m = n$, $i_1 = n$, $i_2 = n-1, \ldots, i_{n-1} = 2$.

Теорема 2.1 вместе с леммой 2.1, на которую она опирается, является новым фактом в алгебре симметричных матриц. Точнее, новым фактом является достаточность предложенных условий в пунктах 1, 2, тогда как необходимость впервые установлена в статье [2] в терминах элементарных симметрических функций, затем доказана альтернативным способом в работе [27] для произвольных m-положительных матриц. Критерий Сильвестра для m-положительных матриц впервые анонсирован в [11]. Одним из следствий критерия является то, что любая m-положительная матрица имеет хотя бы m положительных собственных чисел. Обратное утверждение верно только для случая $m = n$.

3. О p-КРИВИЗНАХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ В $\mathbb{R}^n$

Развитие современной теории полностью нелинейных уравнений в частных производных второго порядка привело к появлению принципиально новых дифференциально-геометрических характеристик границ областей, т. е. замкнутых гиперповерхностей, и первым примером является условие (1.3) в теореме 1.1. При этом желательно, чтобы эти характеристики очевидным образом были гладкими для достаточно гладких гиперповерхностей, чего нельзя сказать об условии (1.3). Последнее мотивировало пересмотр классических представлений. Одна из промежуточных стадий такого пересмотра содержится в работе [5]. Здесь мы предлагаем перечень и некоторые свойства новых геометрических структур.

Рассмотрим ограниченную поверхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ размерности $\tilde{n}$, $1 < \tilde{n} < n$, класса C^2. Это означает, что имеется $0 < r < 1$ такое, что для любой точки $M \in \Gamma$ в шаре $B_r(M)$ существует множество эквивалентных параметризаций $\{\theta^i\}_1^{\tilde{n}}$, задающих поверхность $\Gamma_r = \Gamma \cap B_r(M)$ ее радиусом-вектором $X[\Gamma_r] = X(\theta) \in C^2$.

Введем метрический тензор $g[\Gamma_r] = (g_{ij})_1^{\tilde{n}}$, $g_{ij} = (X_i, X_j)$, $X_i = \partial X / \partial \theta^i$ и представим его в виде

$$g[\Gamma_r] = \eta^T \eta, \quad g^{-1}[\Gamma_r] = \tau \tau^T, \quad \tau = \eta^{-1}. \tag{3.1}$$

Здесь η — квадратная матрица размера $\tilde{n} \times \tilde{n}$. Представление (3.1) не единственно и матрицу η можно заменить на $B\eta$, а τ на τB с произвольной ортогональной матрицей B, $BB^T = Id$. С помощью матриц τ мы вводим новый тип дифференцирования:

$$X_{(i)}(\theta) = X_k(\theta) \tau_i^k(\theta), \quad X_{(ij)} = X_{kl} \tau_i^k \tau_j^l, \quad i, j = 1, \ldots, \tilde{n}. \tag{3.2}$$

Прямым следствием (3.1) является тождество $(X_{(i)}, X_{(j)}) = \delta_{ij}$, и мы имеем сопровождающий, касательный к поверхности Γ_r, евклидов базис $\{X_{(i)}(\theta)\}_1^{\tilde{n}}$. Произвол в выборе матриц τ позволяет поворачивать этот базис на любой угол.

Пусть теперь $\tilde{n} = n - 1$. Тогда Γ является гиперповерхностью и базис $\{e_i[\Gamma](M)\}_1^n = \{X_{(1)}[\Gamma](M), \ldots, X_{(n-1)}[\Gamma](M), \mathbf{n}[\Gamma](M)\}$, где $\mathbf{n}[\Gamma](M)$ — орт нормали к Γ в точке M, является сопровождающим евклидовым базисом в $\mathbb{R}^n$. Если Γ ограничивает область в $\mathbb{R}^n$, мы всегда направляем орт $\mathbf{n}[\Gamma](M)$ в эту область. Если Γ — гиперповерхность с краем, необходима дополнительная информация для выбора $\mathbf{n}[\Gamma](M)$. Далее мы считаем, что такой выбор сделан.

Введем обозначение

$$X_{(\theta\theta)}[\Gamma] = \left((X^1_{(ij)})_1^{n-1}, \ldots, (X^n_{(ij)})_1^{n-1} \right) [\Gamma].$$

Определение 3.1. Симметричная матрица $\mathcal{K} = (X_{(\theta\theta)}, \mathbf{n})[\Gamma]$ размера $(n-1)\times(n-1)$ называется матрицей кривизны гиперповерхности Γ. Функция $\mathbf{k}_p = T_p(\mathcal{K}[\Gamma])(M)$, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, называется p-кривизной гиперповерхности Γ.

Отметим, что $\mathbf{k}_1[\Gamma]$ — средняя кривизна гиперповерхности, $\mathbf{k}_{n-1}[\Gamma]$ — гауссова кривизна. Кроме того, $\mathbf{k}_0[\Gamma] \equiv 1$ для любой C^2-гиперповерхности по определению.

Приведем основные свойства матриц кривизны и p-кривизн гиперповерхности Γ.

1. Пусть B — произвольная ортогональная матрица. Тогда, если $\mathcal{K}$ — матрица кривизны, то и $B^T\mathcal{K}B$ — матрица кривизны этой гиперповерхности. Действительно, заменим матрицу τ в (3.1), (3.2) на $\hat{\tau} = \tau B$. Тогда по определению $\hat{\mathcal{K}} = (\hat{\tau}^T X_{\theta\theta}\hat{\tau}, \mathbf{n})$ — тоже матрица кривизны, но

$$\hat{\mathcal{K}} = B^T(\tau^T X_{\theta\theta}\tau, \mathbf{n})B = B^T\mathcal{K}B.$$

2. Собственные значения матрицы кривизны совпадают с главными кривизнами гиперповерхности Γ. В классическом определении главные кривизны гиперповерхности Γ — это скаляры λ_i, $i = 1,\dots,n-1$, для которых однородная система $(X_{\theta\theta}, \mathbf{n})[\Gamma]\xi = \lambda g[\Gamma]\xi$ имеет нетривиальные решения. Ввиду (3.1), (3.2) эта система равносильна $\mathcal{K}[\Gamma]\zeta = (X_{(\theta\theta)}, \mathbf{n})[\Gamma]\zeta = \lambda\zeta$.

3. Из свойств 1, 2 и ортогональной инвариантности следов следует, что p-кривизны гиперповерхности Γ являются ее абсолютными геометрическими инвариантами с естественной глобальной нумерацией. При этом функции $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_p(M)$, $M \in \Gamma$, являются C^l-гладкими функциями точки для C^{l+2}-гладких гиперповерхностей, $l \geqslant 2$.

Заметим, что в условии (1.3) фигурирует $(k-1)$-кривизна границы области. В самом деле, из свойств 1–3 следует, что $(k-1)$-кривизну $\partial\Omega$ в любой фиксированной точке можно представить в виде элементарной симметрической функции главных кривизн.

Определение 3.2. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — гиперповерхность, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Гиперповерхность Γ называется p-выпуклой, если матрицы $\mathcal{K}[\Gamma](M)$ являются p-положительными для всех $M \in \Gamma$. В соответствии с определением 2.2 p-положительных матриц множество всех p-выпуклых гиперповерхностей можно описать следующим образом:

$$\mathcal{K}_p = \{\Gamma \subset \mathbb{R}^n : T_k(\mathcal{K}[\Gamma])(M) > 0,\ k = 1, 2, \dots, p,\ M \in \Gamma\}.$$

Все гладкие гиперповерхности считаются 0-выпуклыми по определению и образуют множество $\mathcal{K}_0$. Любая p-выпуклая гиперповерхность является k-выпуклой для всех $k \leqslant p$. В частности, $(n-1)$-выпуклые гиперповерхности являются p-выпуклыми при любом $p = 1, 2, \dots, n-1$. Поскольку конус $K_{n-1} \subset Sym(n-1)$, состоящий из $(n-1)$-положительных матриц, в точности совпадает с конусом положительно определенных матриц, то $(n-1)$-выпуклая гиперповерхность является строго выпуклой в классическом смысле. Обратное может быть неверно, поскольку C^2-гладкая строго выпуклая в классическом смысле гиперповерхность может иметь изолированные точки с нулевой гауссовой кривизной. В этих точках матрица кривизны попадет в замыкание конуса K_{n-1}.

Лемма 2.2 позволяет ввести конструктивный критерий p-выпуклости для замкнутой гиперповерхности.

Лемма 3.1. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутая C^2-гиперповерхность, $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Для того чтобы гиперповерхность Γ была p-выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы ее p-кривизна $\mathbf{k}_p(M)$ была положительна для всех $M \in \Gamma$.*

Доказательство. Необходимость следует из определения 3.2. Для доказательства достаточности заметим, что замкнутая гиперповерхность обязательно содержит точку M_0 строгой выпуклости, в которой можно утверждать $\mathcal{K}[\Gamma](M_0) \in \bar{K}_{n-1}$. Учитывая структуру замкнутого конуса (2.7) и условие $\mathbf{k}_p = T_p(\mathcal{K}[\Gamma]) > 0$, приходим к выводу, что матрица $\mathcal{K}[\Gamma](M_0)$ p-положительна. Несомненно также, что множество матриц $\{\mathcal{K}[\Gamma](M)\}$ можно считать связным. Тогда из леммы 2.2 следует, что неравенство $\mathbf{k}_p[\Gamma](M) > 0$ возможно лишь для p-положительных матриц кривизны, что и завершает доказательство. □

Из леммы 3.1 следует, что геометрическое условие (1.3) в теореме 1.1 совпадет с требованием $(m-1)$-выпуклости границы в теореме 1.2 с точностью до замены буквы k на m.

Распространить представленную систему понятий на гиперповерхности с краем можно, например, следующим способом. Сузим рассматриваемый класс гиперповерхностей требованием

$$T_1((X_{(\theta\theta)}, \mathbf{n})[\Gamma]) > 0, \quad M \in \Gamma, \tag{3.3}$$

фиксируя тем самым направление $\mathbf{n}[\Gamma]$. Неравенство (3.3) означает, что в этом случае мы априори рассматриваем только гиперповерхности положительной средней кривизны.

Предложенные геометрические структуры появилась в недрах современной теории полностью нелинейных уравнений в частных производных второго порядка, где традиционно $\tilde{n} = n - 1$, $\Gamma = \partial\Omega$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Матрица кривизны по существу введена в работе [3], она используется в построении барьеров, необходимых для вывода априорных оценок решения вблизи $\partial\Omega$. В работах [10, 23] это продемонстрировано на примере стационарных и эволюционных m-гессиановских уравнений.

Для аналитического представления геометрических характеристик обратимся к простейшей локальной параметризации, впервые введенной с этой целью в [3]. Именно, пусть $M = \mathbf{0} \in \partial\Omega$, $\{e_i\}_1^n$ — декартов базис, причем $e_n = \mathbf{n}[\partial\Omega](\mathbf{0})$. Положим $\theta^i = x^i$, $i = 1, \dots, n-1$, и обозначим $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^{n-1})$. Поскольку $\partial\Omega \in C^2$, найдутся число $0 < r < 1$ и функция $\omega = \omega(\tilde{x})$ такие, что $\omega(\mathbf{0}) = 0$, $\omega_{\tilde{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, а $\partial\Omega_r = \partial\Omega \cap B_r(\mathbf{0})$ — график этой функции, т. е.

$$X[\partial\Omega_r] = (x^1, \dots, x^{n-1}, \omega(\tilde{x})). \tag{3.4}$$

Вычисляем

$$g[\partial\Omega_r] = (\delta_{ij} + \omega_i\omega_j)_1^{n-1}, \quad \mathbf{n}[\partial\Omega_r] = \frac{(-\omega_1, \dots, -\omega_{n-1}, 1)}{\sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}}$$

и т. д. В настоящей статье мы не строим барьеры и априорные оценки, а для демонстрации определения 3.1 достаточно ограничиться рассмотрениями в $\mathbf{0}$, имея в виду (3.4) и выбор функции $\omega = \omega(\tilde{x})$:

$$\mathcal{K}[\partial\Omega_r](M) = \omega_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}), \quad \mathbf{k}_p[\partial\Omega_r](M) = T_p[\omega](\mathbf{0}), \quad 1 \leqslant p \leqslant n-1. \tag{3.5}$$

Из леммы 3.1 и равенств (3.5) следует также, что $(m-1)$-выпуклость поверхности $\partial\Omega_r$ в M равносильна $(m-1)$-положительности матрицы $\omega_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0})$.

4. О функциях с положительным m-следом

Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^2$, и функцию $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Определим m-гессиановский оператор как след порядка m от матрицы Гессе u_{xx} функции $u(x)$:

$$T_m[u] = T_m(u_{xx}), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 4.1. Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Функция u называется m-допустимой в области $\bar{\Omega}$, если матрицы $u_{xx}(x)$ являются m-положительными для всех $x \in \bar{\Omega}$. В соответствии с определением 2.2 m-положительных матриц множество всех m-допустимых функций тоже образует конус

$$\mathbb{K}_m(\bar{\Omega}) = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) : T_k[u](x) > 0,\ k = 1, 2, \dots, m,\ x \in \bar{\Omega}\}.$$

Все C^2-гладкие функции считаются 0-допустимыми по определению и образуют конус $\mathbb{K}_0(\bar{\Omega})$. Любая m-допустимая функция будет k-допустимой для всех $k \leqslant m$. В частности, n-допустимые функции являются k-допустимыми при любом $k = 1, 2, \dots, n$. Поскольку конус $K_n \subset Sym(n)$, состоящий из n-положительных матриц, в точности совпадает с конусом положительно определенных матриц, то n-допустимая функция является строго выпуклой в классическом смысле. Обратное может быть неверно, поскольку C^2-гладкая строго выпуклая в классическом смысле функция может иметь точки вырождения матрицы Гессе. В этих точках матрица Гессе попадет в замыкание конуса K_n.

Сформулируем простое следствие леммы 2.2.

Лемма 4.1. *Пусть $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Если $T_m[u] > 0$ в $\bar{\Omega}$ и существует точка $x_0 \in \Omega$, в которой $u_{xx}(x_0) \in K_m$, то функция u является m-допустимой в $\bar{\Omega}$.*

Теорема 4.1. *Пусть* $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. *Предположим, что*

$$T_m[u] > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u|_{\partial\Omega} = const. \tag{4.1}$$

Тогда

$$u_x|_{\partial\Omega} \neq \mathbf{0}, \quad \partial\Omega \in \mathcal{K}_{m-1}. \tag{4.2}$$

Доказательство. При $m = 1$ справедливость теоремы 4.1 вытекает из леммы Хопфа для оператора Лапласа. Далее считаем $2 \leqslant m \leqslant n$.

Пусть $M \in \partial\Omega$. Рассмотрим декартов базис с началом в точке $M = \mathbf{0}$, параметризуем поверхность $\partial\Omega \cap B_r(\mathbf{0})$ радиусом-вектором (3.4). По второму условию (4.1) $u(\tilde{x}, \omega(\tilde{x})) = const$. Продифференцируем это тождество дважды по компонентам $\tilde{x}$ и рассмотрим получившийся результат в точке $\mathbf{0}$:

$$u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) = -u_n(\mathbf{0})\omega_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}). \tag{4.3}$$

Предположим, что первое из утверждений (4.2) неверно и имеется точка $M \in \partial\Omega$, в которой градиент равен нулю. Тогда из формулы (4.3) вытекает, что матрица $u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) = u_{xx}^{\langle n \rangle}(\mathbf{0})$, полученная вычеркиванием из матрицы Гессе последних строки и столбца, является нулевой матрицей. Тогда неравенство $T_m(u_{xx}) > 0$ не выполнимо в данной точке M, что противоречит первому условию в (4.1). Таким образом, утверждение $u_x|_{\partial\Omega} \neq \mathbf{0}$ доказано.

Заметим, что условие (4.1) гарантирует существование хотя бы одной точки $x_0 \in \Omega$ экстремума функции u. Для нечетных m — это минимум, а для четных может быть и максимум. В последнем случае мы заменим u на $-u$ и далее, не ограничивая общности, будем считать x_0 точкой минимума. Тогда $u_{xx}(x_0) \in \bar{K}_n$. Структура замкнутого конуса $\bar{K}_n$, описанная в (2.7), и неравенство (4.1) гарантируют $u_{xx}(x_0) \in K_m$. По лемме 4.1 получаем, что функция u является m-допустимой в $\bar{\Omega}$. В частности, отсюда следует, что функция u не может иметь максимумов в Ω и $u_n|_{\partial\Omega} < 0$.

В любой точке $M \in \partial\Omega$ матрица кривизны может быть выражена по формулам (3.5), (4.3):

$$\mathcal{K}[\partial\Omega_r](M) = -\frac{u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0})}{u_n(\mathbf{0})}.$$

Поскольку $u_{xx}(\mathbf{0}) \in K_m$, то по критерию Сильвестра (теорема 2.1) $u_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) = u_{xx}^{\langle n \rangle}(\mathbf{0}) \in K_{m-1}$, отсюда $\mathcal{K}[\partial\Omega_r](M) \in K_{m-1}$. Таким образом, второе утверждение (4.2) доказано. □

По ходу доказательства теоремы 4.1 отмечено, что множество функций, описанных условиями (4.1), состоит из m-допустимых функций. Теорема 4.1 утверждает $(m-1)$-выпуклость их поверхностей уровня. В неявной форме это утверждение присутствует уже в теореме 1.1 с точностью до замены буквы m на k. В статье [22] проводится подробный анализ этого свойства. В данной работе это свойство усилено леммой 4.1 и упрощена его аргументация.

Второе утверждение теоремы 1.2 и теорема 1.3 являются простыми следствиями теоремы 4.1.

Перейдем к эволюционным m-гессиановским операторам. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0; T)$. Следуя классическим образцам, мы зададим параболическую границу цилиндра Q_T и его замыкание равенствами

$$\partial' Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0; T]), \quad \bar{Q}_T = Q_T \cup \partial' Q_T \cup (\Omega \times \{T\}).$$

Далее мы будем называть функции $u(x,t)$ из $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ эволюциями и работать с их эволюционными матрицами

$$S^{ev}[u] = (s_{ij})_0^n, \quad s_{00} = -u_t, \ s_{0i} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n, \ (s_{ij})_1^n = u_{xx}.$$

В каждой точке $(x,t) \in Q_T$ матрица $S^{ev}[u]$ принадлежит пространству $Sym(n+1)$. Определим эволюционный m-гессиановский оператор как m-след этой матрицы:

$$E_m[u] = T_m(S^{ev}[u]) = -u_t T_{m-1}(u_{xx}) + T_m(u_{xx}), \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Определение 4.1 и свойства m-допустимых в $\bar{\Omega}$ функций естественным образом распространяются на эволюции. В частности, m-допустимые в $\bar{Q}_T$ эволюции заполняют функциональный конус

$$\mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T) = \{u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T) : E_k[u](x,t) > 0, \ k = 1, \ldots, m, \ (x,t) \in \bar{Q}_T\}, \tag{4.5}$$

Прямым следствием критерия Сильвестра (теорема 2.1) и леммы 4.1 является следующая лемма.

Лемма 4.2. *Пусть* $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$. *Если* $E_m[u] > 0$ *в* $\bar{Q}_T$ *и существует точка* $x_0 \in \Omega$, *в которой* $u_{xx}(x_0, 0) \in K_{m-1}$, *то функция* u *является* m*-допустимой в* $\bar{Q}_T$.

Доказательство. Рассмотрим для функции u эволюционную матрицу $S^{ev}[u] = (s_{ij})_0^n$ в точке $(x_0, 0)$: $s_{00} = -u_t(x_0, 0)$, $(s_{ij})_1^n = u_{xx}(x_0, 0)$. По критерию Сильвестра (теорема 2.1) из условий $T_m(S^{ev}[u])(x_0, 0) > 0$ и $u_{xx}(x_0, 0) \in K_{m-1}$ вытекает $S^{ev}[u](x_0, 0) \in K_m$. Тогда согласно лемме 4.1 условие $E_m[u] > 0$ в $\bar{Q}_T$ возможно лишь для m-допустимых функций. □

Заметим, что при $m = 1$ лемма 4.2 является тривиальной, поскольку $T_0(S) \equiv 1$, $S \in Sym(n)$, и оператор (4.4) является классическим оператором теплопроводности.

Обозначим $\partial'' Q_T = \partial\Omega \times [0; T)$ и поставим в цилиндре $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ первую начально-краевую задачу для уравнений с оператором (4.4):

$$E_m[u] = f, \quad u(x, 0) = \psi, \quad u|_{\partial'' Q_T} = \varphi. \tag{4.6}$$

Следующая теорема несуществования есть простое следствие леммы 4.2 и критерия Сильвестра.

Теорема 4.2. *Пусть* $f \geqslant \nu > 0$ *в* $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$. *Предположим, что имеется точка* $x_0 \in \Omega$ *такая, что* $\psi_{xx}(x_0) \in K_{m-1}$ *и, кроме того, найдется точка* $x_1 \in \Omega$, *в которой* $T_{m-1}(\psi_{xx})(x_1) = 0$. *Тогда первая начально-краевая задача* (4.6) *не имеет решений в* $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, *каковы бы ни были* ν, Ω, $T > 0$, ψ, φ.

Мы завершим нашу краткую презентацию m-гессиановских эволюций уточненной версией теоремы существования из публикации [20, теорема 1.2].

Теорема 4.3. *Предположим, что* $\partial\Omega \in C^{4+\alpha}$, $\mathbf{k}_{m-1}[\partial\Omega] > 0$, $f \geqslant \nu > 0$, $f \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T)$, $\psi \in \mathbb{K}_{m-1}(\bar{\Omega}) \cap C^{4+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\varphi \in C^{4+\alpha, 2+\alpha}(\partial'' Q_T)$ *и для* f, ψ, φ *выполнены условия совместности*:

$$\psi(x) = \varphi(x, 0), \quad -\varphi_t(x, 0) T_{m-1}(\psi_{xx}(x)) + T_m(\psi_{xx}(x)) - f(x, 0) = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{4.7}$$

и вторые производные функций ψ, $\varphi(\cdot, 0)$ *по касательным к* $\partial\Omega$ *направлениям совпадают.*

Тогда существует единственное в $C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ *решение* u *задачи* (4.6), *причем выполнено* $u \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\bar{Q}_T) \cap \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T)$.

Для доказательства теоремы используется весь набор методов, разработанных в рамках теории гессиановских уравнений, где самая трудоемкая часть — построение априорных оценок вторых производных решений. При этом практически всегда речь идет о существовании допустимых решений, т. е. решений из конуса. В частности, и для решения из теоремы 4.3 справедливо включение $u \in \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}_T)$. Как это следует из леммы 4.2, других $C^{2,1}$-решений и не может быть.

5. Асимптотическое поведение m-гессиановских эволюций

Исследование асимптотического поведения m-гессиановских эволюций, доставляющих положительное значение оператору (4.4), было предпринято нами недавно в работе [24] и мотивировано теоремой 2.1 из статьи Н. Трудингера и Шю-Джиа Ванга [31]. Сформулируем ее, используя нашу терминологию.

Теорема 5.1. *Пусть* Ω — *ограниченная область в* $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $T_{m,l}(S) = T_m(S)/T_l(S)$, $0 \leqslant l \leqslant m-1$. *Предположим, что* $\partial\Omega$ — $(m-1)$*-выпуклая поверхность класса* C^4, $g \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, $\Phi \in C^{4,2}(\partial' Q)$. *Предположим еще, что* $\Phi(x, 0) \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega})$ *и выполнены условия совместности*

$$\Phi_t(x, 0) - \log T_{m,l}(\Phi_{xx})(x, 0) = g(x, 0), \quad x \in \partial\Omega. \tag{5.1}$$

Тогда существует единственное m*-допустимое по пространственным переменным решение* $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$ *задачи*

$$P_{m,l}[u] = u_t - \log T_{m,l}[u] = g, \quad u|_{\partial' Q} = \Phi. \tag{5.2}$$

Более того, если $T = \infty$ *и* $g(\cdot, t)$, $\Phi(\cdot, t)$ *сходятся равномерно при* $t \to \infty$ *к функциям* g_∞, Φ_∞, *решение* $u(\cdot, t)$ *сходится равномерно к единственному* m*-допустимому решению задачи Дирихле*

$$T_{m,l}[u] = \exp(-g_\infty), \quad u|_{\partial\Omega} = \Phi_\infty. \tag{5.3}$$

Отметим, что оператор $P_{m,l}$ в (5.2) порождает иной конус допустимых функций. Именно,

$$\mathbb{K}_m^t(\bar{Q}) = \{u \in C^{2,1}(\bar{Q}) : u(\cdot, t) \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega})\}, \quad Q = \Omega \times (0; \infty). \tag{5.4}$$

Более или менее традиционным аналогом утверждения о существовании решения задачи (5.2), (5.1) из теоремы 5.1 является наша теорема 4.3. Вторая же часть теоремы 5.1 по существу содержит информацию об асимптотическом поведении решений. Далее мы предлагаем анализ асимптотического поведения m-гессиановских эволюций.

В работе [31] теорема 5.1, вообще говоря, является вспомогательной, и, возможно, поэтому авторы указали лишь идею ее доказательства, которую нам не удалось реализовать для задачи (5.2). Однако, именно эту идею мы использовали для описания асимптотического поведения m-гессиановских эволюций в недавней работе [24]. Следующее предложение является одной из возможных формулировок полученного в ней результата.

Теорема 5.2. *Пусть $u = u(x,t)$ — эволюция, для которой выполнены условия леммы* 4.2 *при всех $T > 0$. Предположим, что существуют функции $\bar{f} \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{f} > 0$, $\bar{\varphi} \in C^2(\partial\Omega)$ такие, что*

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sup_{\Omega} \left| E_m[u](x,t) - \bar{f}(x) \right| + \sup_{\partial\Omega} |u(x,t) - \bar{\varphi}(x)| \right) = 0 \tag{5.5}$$

и задача Дирихле

$$T_m[v] = \bar{f}, \quad v|_{\partial\Omega} = \bar{\varphi} \tag{5.6}$$

имеет решение $v \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega})$. Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Omega} |u(x,t) - v(x)| = 0. \tag{5.7}$$

Заметим, что задача (5.6) может иметь не более одного m-допустимого решения, и поэтому формулировка теоремы 5.2 корректна.

Перенесем утверждение теоремы 5.2 на эволюции из теоремы 4.3, конкретизируя условия (5.5) и утверждение (5.7).

Теорема 5.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 4.3 *при всех $T > 0$ и, кроме того, существуют функции $\bar{f} \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, $\bar{f} \geqslant \bar{\nu} > 0$, $\bar{\varphi} \in C^{4+\alpha}(\partial\Omega)$ такие, что*

$$\lim_{t\to\infty} \left(\sup_{\Omega} \left| f(x,t) - \bar{f}(x) \right| + \sup_{\partial\Omega} |\varphi(x,t) - \bar{\varphi}(x)| \right) = 0. \tag{5.8}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{\Omega} |u(x,t) - v(x)| = 0, \tag{5.9}$$

где $u = u(x,t)$ — единственное в $C^{2,1}(\bar{Q})$ решение задачи (4.6), *а v — m-допустимое решение задачи* (5.6).

Заметим, что условия теоремы 5.3 гарантируют существование функций u, v.

Сравним эволюции из теорем 5.1, 5.3. Во-первых, конусы (5.4) и (4.5) имеют непустое пересечение:

$$\mathbb{K}_m^t(\bar{Q}) \cap \mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q}) = \{u \in C^{2,1}(\bar{Q}) : u(x,0) \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega}),\ E_m[u](x,t) > 0,\ (x,t) \in \bar{Q}\}.$$

Во-вторых, они различны. Именно, если принадлежность $u \in \mathbb{K}_m^t(\bar{Q})$ контролируется лишь требованием $u(x,0) \in \mathbb{K}_m(\bar{\Omega})$, то для эволюций из $\mathbb{K}_m^{ev}(\bar{Q})$ должно быть выполнено два требования: $u(x,0) \in \mathbb{K}_{m-1}(\bar{\Omega})$, $E_m[u](x,t) > 0$ в $\bar{Q}$. Из асимптотического утверждения теоремы 5.1 следует, что, стартуя с m-допустимой функции, мы приходим на финише к функции того же класса, тогда как теорема 5.3 гарантирует повышение на единицу порядка допустимости начальной функции, т. е. эволюционный оператор E_m трансформирует конус $\mathbb{K}_{m-1}(\bar{\Omega})$ в $\mathbb{K}_m(\bar{\Omega})$.

В теореме 5.3 предполагается, что $f, \bar{f} > 0$. Однако, для $m = 1$ (уравнение теплопроводности) это требование излишне, и справедлива следующая теорема.

Теорема 5.4. *Пусть $\partial\Omega \in C^2$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\bar{\varphi} \in C^2(\partial\Omega)$, $\varphi \in C^{2,1}(\partial''\Omega)$, $f \in C(\bar{Q})$, $\bar{f} \in C(\bar{\Omega})$. Предположим, что выполнены условия совместности*

$$\psi(x) = \varphi(x,0), \quad -\varphi_t(x,0) + \Delta(\psi_{xx}(x)) - f(x,0) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{5.10}$$

Предположим еще, что

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup_{\Omega}\left|f(x,t)-\bar{f}(x)\right|+\sup_{\partial\Omega}\left|\varphi(x,t)-\bar{\varphi}(x)\right|\right)=0. \tag{5.11}$$

Тогда для решения $u = u(x,t)$ первой начально-краевой задачи

$$-u_t+\Delta u=f,\quad u(x,0)=\psi(x),\quad x\in\bar{\Omega},\quad u|_{\partial''Q}=\varphi(x,t)$$

справедливо равенство

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{\Omega}|u(x,t)-v(x)|=0, \tag{5.12}$$

где v — решение уравнения Пуассона

$$\Delta v=\bar{f},\quad v|_{\partial\Omega}=\bar{\varphi}.$$

Вероятно, теорема 5.4 известна, однако мы не нашли ее в литературе. Доказательство теоремы 5.4, как и теоремы 5.3, представлено нами в статье [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивочкина Н. М.* Интегральный метод барьерных функций и задача Дирихле для уравнений с операторами типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1980. — *112*, № 2. — С. 193–206.
2. *Ивочкина Н. М.* Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа—Ампера// Мат. сб. — 1983. — *22*. — С. 265–275.
3. *Ивочкина Н. М.* Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка m// Алгебра и анализ. — 1990. — *2*, № 3. — С. 192–217.
4. *Ивочкина Н. М.* Мини-обзор основных понятий в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 1997. — *249*. — С. 199–211.
5. *Ивочкина Н. М.* От конусов Гординга к p-выпуклым гиперболоповерхностям// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 94–104.
6. *Крылов Н. В.* Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1983. — *47*, № 1. — С. 75–108.
7. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — Наука, 1985.
8. *Прокофьева С. И., Якунина Г. В.* О понятии эллиптичности для полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Диффер. уравн. и проц. управ. — 2012. — № 1. — С. 142–145.
9. *Сафонов М. В.* О гладкости вблизи границы решений эллиптических уравнений Беллмана// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1985. — *147*, № 17. — С. 150–154.
10. *Филимоненкова Н. В.* О классической разрешимости задачи Дирихле для невырожденных m-гессиановских уравнений// Пробл. мат. анализа. — 2011. — *60*. — С. 89–111.
11. *Филимоненкова Н. В.* Критерий Сильвестра для m-положительных матриц// Препринт СПб. мат. об-ва. — 2014. — *7*.
12. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: Гос. изд. иностр. лит., 1948.
13. *Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J.* The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations, III. Functions of the eigenvalues of the Hessian// Acta Math. — 1985. — *155*. — P. 261–301.
14. *Chou K.-S., Wang X.-J.* A variational theory of the Hessian equations// Commun. Pure Appl. Math. — 2001. — *54*. — C. 1029–1064.
15. *Gårding L.* An inequality for hyperbolic polynomials// J. Math. Mech. — 1959. — *8*. — C. 957-965.
16. *Evans L. C.* Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1982. — *25*. — C. 333–363.
17. *Ivochkina N. M.* On the Dirichlet problem for fully nonlinear parabolic equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 1999. — *93*, № 5. — C. 689–696.
18. *Ivochkina N. M.* Weakly first-order interior estimates and Hessian equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2007. — *143*, № 2. — C. 2875–2882.
19. *Ivochkina N. M.* On approximate solutions to the first initial boundary value problem for the m-Hessian evolution equations// J. Fixed Point Theory Appl. — 2008. — *4*, № 1. — C. 47–56.
20. *Ivochkina N. M.* On classic solvability of the m-Hessian evolution equation// Am. Math. Soc. Transl. — 2010. — *229*. — C. 119–129.
21. *Ivochkina N. M.* On some properties of the positive m-Hessian operators in $C^2(\Omega)$// J. Fixed Point Theory Appl. — 2014. — *14*, № 1. — C. 79–90.

22. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations// Commun. Pure Appl. Anal. — 2013. — *12*. — № 4. — С. 1687–1703.
23. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations// J. Fixed Point Theory Appl. — 2014. — *16*, № 1-2. — С. 11–25.
24. *Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V.* On attractors of m-Hessian evolutions// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2015. — *207*, № 2. — С. 226–235.
25. *Ivochkina N. M., Ladyzhenskaya O. A.* On parabolic problems generated by some symmetric functions of the Hessian// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1994. — *4*. — С. 19–29.
26. *Ivochkina N. M., Trudinger N., Wang X.-J.* The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations// Commun. Part. Differ. Equ. — 2004. — *29*. — С. 219–235.
27. *Ivochkina N. M., Yakunina G. V., Prokof'eva S. I.* The Gårding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2012. — *184*, № 3. — С. 295–315.
28. *Lieberman G. M.* Second order parabolic differential equations. — World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2005.
29. *Lin M., Trudinger N. S.* On some inequalities for elementary symmetric functions// Bull. Aust. Math. Soc. — 1994. — *50*. — С. 317–326.
30. *Trudinger N. S.* On the Dirichlet problem for Hessian equations// Acta. Math. — 1995. — *175*. — С. 151–164.
31. *Trudinger N. S., Wang X.-J.* A Poincaré type inequality for Hessian integrals// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 1998. — *6*. — С. 315–328.
32. *Tso K.* On an Aleksandrov—Bakel'man type maximum principle for second-order parabolic equations// Commun. Part. Differ. Equ. — 1985. — *10*. — С. 543–553.
33. *Wang X.-J.* A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals// Indiana Univ. Math. J. — 1994. — *43*. — С. 25–54.
34. *Wang X.-J.* The k-Hessian equation// In: «Lecture Notes in Mathematics». — 2009. — *1977*. — С. 177–252.

Н. М. Ивочкина
Санкт-Петербургский государственный университет,
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7–9
E-mail: `ninaiv@NI1570.spb.edu`

Н. В. Филимоненкова
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,
190005, Санкт-Петербург, 2-ая Красноармейская ул., 4
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29
E-mail: `nf33@yandex.ru`