Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 59–81

УДК 517.911.5

МЕТОД НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© 2015 г. **В. Г. ЗВЯГИН, С. В. КОРНЕВ**

Аннотация. Настоящая работа посвящена обзору и систематическому изложению различных обобщений метода направляющей функции в контексте его современного состояния, а также его применению к различным типам задач о нелинейных периодических колебаниях систем, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями.

Введение

Геометрические и топологические методы анализа, применяемые к задачам о нелинейных колебаниях динамических систем, восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою высокую эффективность в трудах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, А.И. Булгакова, Е.А. Ганго, Б.Д. Гельмана, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, М.И. Каменского, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Д.И. Рачинского, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, В.В. Филиппова, K. Deimling'a, L. Górniewicz'a, J. Mawhin'a, P. Nistri, N.S. Papageorgiou, P. Zecca и других исследователей.

Отметим, в частности, чрезвычайно плодотворное направление, связанное с понятием направляющей функции, основу которого заложили исследования М.А. Красносельского и А.И. Перова (см., например, [6,7]). Этот метод тесно связан с оператором Пуанкаре, или оператором сдвига по траекториям системы, и его неподвижной точкой (см. там же). Изложение основных положений метода направляющих функций для студентов математического профиля можно найти в [2,9].

Следует заметить, что направляющие функции по своим свойствам напоминают функции Ляпунова, но они используются в задачах, не связанных с устойчивостью, таких, например, как существование периодических решений.

Одними из самых существенных достижений в развитии этого направления можно считать методы многолистной векторной направляющей функции Д.И. Рачинского (см. [10,17]), интегральной направляющей функции A. Fonda [11], а также усредненной и асимптотически усредненной направляющих функций J. Mawhin'a (см. [15]), предложенные для дифференциальных уравнений. Кроме того, различным обобщениям указанных методов посвящен цикл работ Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, С.В. Корнева, N.V. Loi и P. Zecca. Отметим в этой связи распространение метода упомянутых выше классов направляющих функций на случай дифференциальных включений (см., например, [1,4,5]) и обобщение его на случай систем, описываемых дифференциальными включениями в бесконечномерных гильбертовых пространствах (см., например, [16]).

Настоящая работа посвящена обзору и систематическому изложению указанных выше обобщений в контексте их современного состояния, а также их применению к различным типам задач о нелинейных периодических колебаниях систем, описываемых дифференциальными и функционально-дифференциальными уравнениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-21-00066) и Минобрнауки России в рамках государственного задания в сфере научной деятельности на 2014-2016 (проекты № 1.1539.2014/K и № 3488).

1. Направляющая функция М.А. Красносельского и А.И. Перова

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение следующего вида:

$$x'(t) = f(t,x), \tag{1.1}$$

предполагая, что отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно по совокупности переменных и удовлетворяет указанному ниже условию:

$f_t)$ функция f по первому аргументу T-периодична ($T > 0$):

$$f(t,x) = f(t+T,x) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать отображение f заданным на $[0,T] \times \mathbb{R}^n$).

Будем предполагать также, что каждое начальное условие

$$x(s) = x_0 \tag{1.2}$$

однозначно определяет продолжимое на промежуток $[0,T]$ решение

$$x(t) = p(t;s,x_0) \tag{1.3}$$

уравнения (1.1).

Тогда, следуя [7], можно определить оператор U_T сдвига за период T по траекториям уравнения (1.1)

$$U_T x = p(T;0,x).$$

Вопрос о существовании T-периодических решений у уравнения (1.1), как известно, равносилен вопросу о существовании неподвижных точек у оператора сдвига U_T (см., например, [7]).

Для доказательства существования неподвижных точек у оператора сдвига предлагается найти такую ограниченную область Ω, на границе $\partial\Omega$ которой отображение

$$g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \quad g(x) = x - U_T x$$

не обращается в нуль, а затем вычислить (или оценить) его топологическую степень $\deg(g, \overline{\Omega}, 0)$.

Непосредственное вычисление степени отображения g затруднено тем, что, как правило, оператор сдвига U_T в явном виде неизвестен. Поэтому для вычисления топологической степени этого отображения нужны специальные приемы.

Одним из таких приемов является метод направляющих функций, основу которого заложили работы М.А. Красносельского и А.И. Перова (см., например, [6–8]). Напомним некоторые его основные положения.

Определение 1.1. Точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$ называется точкой T-невозвращаемости траекторий, если

$$x(t) = p(t;0,x_0) \neq x_0 \quad (0 < t \leqslant T), \tag{1.4}$$

где $x(t) = p(t;0,x_0)$ — решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$.

Если $p(t;0,x_0) \neq x_0$ при всех $t > 0$, то говорят просто о невозвращаемости траекторий, не упоминая период T, или о нелокальной продолжимости траекторий.

Лемма 1.1. *Пусть все точки границы $\partial\Omega$ ограниченной области Ω являются точками T-невозвращаемости траекторий и отображение*

$$\psi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n, \quad \psi(x) = -f(0,x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{1.5}$$

не обращается в нуль на границе $\partial\Omega$. Тогда определены степени $\deg(\psi, \overline{\Omega}, 0)$ и $\deg(g, \overline{\Omega}, 0)$ и имеет место равенство

$$\deg(\psi, \overline{\Omega}, 0) = \deg(g, \overline{\Omega}, 0).$$

Доказательство. Рассмотрим на $\overline{\Omega}$ семейство отображений

$$H(t,x) = x - p(t;0,x), \quad t \in (0,T].$$

В силу условия (1.4) $H(t,x) \neq 0$, $t \in (0,T]$, $x \in \partial\Omega$. Из этого и непрерывной зависимости решений $p(t;0,x)$ уравнения (1.1) от начальных данных x и от t следует, что H является гомотопией, соединяющей все отображения $H(t,\cdot) = i - p(t,0,\cdot)$, $t \in (0,T]$, i — тождественное отображение. Тогда степени $\deg(H(t,\cdot), \overline{\Omega}, 0)$ всех отображений $H(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, определены и одинаковы.

Поэтому достаточно показать, что одинаковы степени $\deg(H(t,\cdot),\overline{\Omega},0)$ и $\deg(\psi,\overline{\Omega},0)$ при малых положительных t.

Для установления этого факта покажем, что при малых положительных t отображения ψ и $H(t,\cdot)$ направлены непротивоположно на $\partial\Omega$. В противном случае можно указать такие последовательности $x_n \in \partial\Omega$ и $t_n \to 0$, что

$$x_n - p(t_n; 0, x_n) = \alpha_n f(0, x_n), \quad \alpha_n > 0,$$

откуда

$$\frac{p(t_n; 0, x_n) - x_n}{t_n} = -\frac{\alpha_n}{t_n} f(0, x_n).$$

При этом без ограничения общности можно считать, что последовательность x_n сходится к некоторой точке $x_0 \in \partial\Omega$. В пределе получаем противоречивое равенство

$$f(0, x_0) = -\alpha f(0, x_0), \quad \alpha > 0.$$

□

Теорема 1.1. *Пусть все решения уравнения* (1.1) *нелокально продолжимы. Пусть все точки границы* $\partial\Omega$ *ограниченной области* Ω *являются точками* T*-невозвращаемости траекторий. Пусть топологическая степень* $\deg(\psi,\overline{\Omega},0)$ *отлична от нуля. Тогда уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Определение 1.2. Будем говорить, что $V(x)$ невырождена, если ее градиент не обращается в нуль вне некоторого шара радиуса $r_0 > 0$:

$$\mathrm{grad} V(x) = \Big(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial V(x)}{\partial x_n}\Big) \neq 0, \quad \|x\| \geqslant r_0.$$

Определение 1.3. Индексом $\mathrm{ind}\, V$ невырожденной функции $V(x)$ называется топологическая степень $\deg(\mathrm{grad}\, V, \overline{B(0,r)}, 0)$, где $r \geqslant r_0$, $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$.

Отметим, что значение этой степени одинаково для всех $r \geqslant r_0$.

1.1. Строгая и обобщенная направляющие функции.

Определение 1.4. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется строгой направляющей функцией для уравнения (1.1), если для некоторого $r_0 > 0$ выполняется следующее соотношение:

$$(\mathrm{grad} V(x), f(t,x)) > 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad \|x\| \geqslant r_0. \tag{1.6}$$

Из условия (1.6) следует, что в понятие направляющей функции включено предположение, что она невырождена.

Замечание 1.1. Если для уравнения (1.1) может быть указана строгая направляющая функция $V(x)$ индекса $\mathrm{ind}\, V$, то

$$\deg(\psi, \overline{B(0,r)}, 0) = (-1)^n \mathrm{ind}\, V. \tag{1.7}$$

Приведем схему доказательства следующего принципа существования периодического решения (полное доказательство см. в [7]).

Теорема 1.2. *Пусть для уравнения* (1.1) *можно указать строгую направляющую функцию, для которой выполнено одно из следующих условий*:

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = +\infty \tag{1.8}$$

или

$$\lim_{\|x\| \to \infty} V(x) = -\infty. \tag{1.9}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

Доказательство. Пусть выполнено условие (1.9). Тогда, как нетрудно видеть, в силу условия (1.6) функция $V_1(x) = -V(x)$ строго убывает при всех значениях t, при которых $\|x(t)\| \geqslant r_0$. Следовательно, каждое решение ограничено и поэтому нелокально продолжимо.

В силу (1.9) и замечания 1.1 топологическая степень $\deg(\psi, \overline{B(0,r_1)}, 0)$ отлична от нуля для достаточно большого $r_1 > r_0$.

Положим $M = \max\limits_{\|x\| \leqslant r_0} V_1(x)$. Тогда условие (1.6) позволяет обосновать свойство T-невозвращаемости точек границы шара $B(0, r_1)$, если выбрать достаточно большое $r_1 > r_0$ так, что $V_1(x) \geqslant M$ при $\|x\| \geqslant r_1$.

Все условия теоремы 1.1 выполнены и уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение. □

Замечание 1.2. В случае, когда выполнено условие (1.8), достаточно искать периодические решения $x(t)$ в виде $x(t) = y(-t)$ и заменить уравнение (1.1) следующим уравнением:

$$y'(t) = -f(-t, y).$$

Некоторое усиление условия (1.6) также позволяет получить принцип существования T-периодического решения.

Определение 1.5. Невырожденная функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется обобщенной направляющей функцией для уравнения (1.1), если для некоторого $r_0 > 0$ выполняется следующее соотношение:

$$(\mathrm{grad} V(x), f(t,x)) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \quad \|x\| \geqslant r_0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Пусть для уравнения* (1.1) *можно указать обобщенную направляющую функцию, для которой выполнено одно из условий* (1.8) *или* (1.9). *Тогда уравнение* (1.1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

1.2. Набор направляющих функций. Как было показано выше, уже по одной направляющей функции можно выделить области, состоящие полностью из точек, обладающих свойством T-невозвращаемости. Поэтому наличие нескольких направляющих функций, связанных определенными соотношениями, может помочь в доказательстве теоремы о существовании периодических решений.

Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — строгая направляющая функция в смысле определения 1.4. Положим

$$m = \min_{\|x\| \leqslant r_0} V(x), \quad M = \max_{\|x\| \leqslant r_0} V(x).$$

Через Ω и Ω^* обозначим множества $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geqslant r_0$, удовлетворяющих соответственно следующим условиям:

$$V(x) \leqslant m, \quad V(x) \geqslant M.$$

Тогда справедливо следующее утверждение (см. [7]).

Лемма 1.2. *Если $x_0 \in \Omega \cup \Omega^*$, то x_0 является точкой невозвращаемости траекторий.*

Лемма 1.2 имеет простой геометрический смысл: при движении по траекториям поверхности уровня функции $V(x)$ в областях Ω и Ω^* пересекаются в одном направлении.

Определение 1.6. Непрерывно дифференцируемые функции

$$V_0(x), V_1(x), \ldots, V_k(x), \quad k \geqslant 1, \tag{1.10}$$

обладающие свойством

$$\lim_{\|x\| \to \infty} [|V_0(x)| + |V_1(x)| + \ldots + |V_k(x)|] = \infty, \tag{1.11}$$

образуют полный набор строгих направляющих функций для уравнения (1.1), если выполнены следующие условия:

$$(\mathrm{grad} V_i(x), f(t,x)) > 0, \quad i = 0, 1, \ldots, k; \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \|x\| \geqslant r_0. \tag{1.12}$$

Теорема 1.4. *Пусть для уравнения* (1.1) *имеется полный набор* $\{V_0(x), V_1(x), \ldots, V_k(x)\}$ *строгих направляющих функций. Пусть топологический индекс* $\operatorname{ind} V_0$ *функции* $V_0(x)$ *отличен от нуля*:

$$\operatorname{ind} V_0 \neq 0. \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

Замечание 1.3. Из условий (1.12) следует, что отображения $\mathrm{grad} V_i(x)\,(i = 0, 1, \ldots, k)$ гомотопны $f(0, x)$ при $\|x\| \geqslant r_0$. Поэтому они гомотопны друг другу, и их топологические степени совпадают. Следовательно, топологические индексы всех направляющих функций (1.10) одинаковы.

Доказательство теоремы 1.4.

1. Предположим вначале, что решения уравнения (1.1) нелокально продолжимы. Пусть

$$m_i = \min_{\|x\| \leqslant r_0} V_i(x), \quad M_i = \max_{\|x\| \leqslant r_0} V_i(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, k)$$

и

$$M^* = \sum_{i=0}^{k} (|m_i| + |M_i|).$$

В силу (1.11) можно найти такое r^*, что

$$|V_0(x)| + |V_1(x)| + \ldots + |V_k(x)| > M^* \quad (\|x\| \geqslant r^*). \tag{1.14}$$

Через Ω_i и Ω_i^* $(i = 0, 1, \ldots, k)$ обозначим множества $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geqslant r_0$, удовлетворяющих соответственно следующим условиям:

$$V_i(x) \leqslant m_i, \quad V_i(x) \geqslant M_i.$$

Если допустить, что $\|x\| \geqslant r^*$, то из (1.14) следует, что найдется такое $i = i(x)$, что $x \in \Omega_i \cup \Omega_i^*$. Из леммы 1.2 тогда вытекает, что x — точка невозвращаемости траекторий.

В силу замечания 1.1 и условия (1.13) топологическая степень отображения (1.5) отлична от нуля. Таким образом, выполнены все условия теоремы 1.1 и уравнение (1.1) имеет T-периодическое решение.

2. Перейдем к общему случаю, когда некоторым начальным условиям могут соответствовать решения, «уходящие в бесконечность» за малые промежутки времени, то есть решения, которые нельзя продолжить на промежуток $[0, T]$.

Заметим, что T-периодические решения $x(\cdot)$ всех систем, удовлетворяющих условиям (1.12), удовлетворяют неравенству

$$\|x(t)\| < r^* \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{1.15}$$

так как в противном случае нашлась бы точка x, принадлежащая одному из множеств $\Omega_i \cup \Omega_i^*$, которая не была бы точкой невозвращаемости траекторий.

Наличие априорной оценки (1.15) указывает путь доказательства теоремы в общем случае. Нужно построить вспомогательное уравнение

$$x'(t) = f^*(t, x), \tag{1.16}$$

правая часть которого удовлетворяет следующим условиям:

1^0. $f^*(t, x) = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| \leqslant r^*$.

2^0. $f^*(t, x)$ удовлетворяет условиям (1.12).

3^0. Все решения уравнения (1.16) продолжимы на $[0, T]$.

В силу 2^0 и 3^0 вспомогательное уравнение (1.16), по уже доказанному, имеет по крайней мере одно T-периодическое решение. Для этого T-периодического решения справедлива оценка (1.15), и поэтому оно является одновременно решением первоначального уравнения (1.1). □

Некоторое усиление условия (1.12) также позволяет получить принцип существования T-периодического решения.

Определение 1.7. Невырожденные функции (1.10), обладающие свойством (1.11), образуют полный и острый набор обобщенных направляющих функций для уравнения (1.1), если выполнено следующее условие:

$$(\mathrm{grad} V_i(x), f(t,x)) \geqslant 0, \quad i = 0,1,\ldots,k; \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad \|x\| \geqslant r_0,$$

и для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geqslant r_0$, множество

$$K(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : y = \sum_{i=0}^{k} \gamma_i \mathrm{grad} V_i(x),\ \gamma_0,\ldots,\gamma_k \geqslant 0 \right\}$$

является конусом в смысле Крейна (то есть из $y, -y \in K(x)$ следует, что $y = 0$).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть для уравнения* (1.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_0(x), V_1(x), \ldots, V_k(x)\}$ *обобщенных направляющих функций. Пусть топологический индекс* $\mathrm{ind}\, V_0$ *функции* $V_0(x)$ *отличен от нуля*:

$$\mathrm{ind}\, V_0 \neq 0.$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

Определение 1.8. Невырожденную функцию $V(x)$ назовем правильной направляющей функцией для уравнения (1.1), если выполнено условие:

$$(\mathrm{grad} V(x), f(t,x)) \geqslant \alpha_0 \|\mathrm{grad} V(x)\| \, \|f(t,x)\|,$$

где $\alpha_0 > 0$, $0 \leqslant t \leqslant T, \|x\| \geqslant r_0$, и если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $V_1(x)$, что

$$\|\mathrm{grad} V(x)\| \geqslant \|\mathrm{grad} V_1(x)\| \quad (\|x\| \geqslant r_0)$$

и

$$\lim_{\|x\| \to \infty} |V_1(x)| = \infty.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть для уравнения* (1.1) *можно указать правильную направляющую функцию $V(x)$. Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V,\infty)$ *функции $V(x)$ отличен от нуля*:

$$\mathrm{ind}\,(V,\infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение.*

2. Многолистная векторная направляющая функция

Мы будем рассматривать периодическую задачу для дифференциального уравнения в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n > 2)$:

$$z'(t) = f(t,z), \tag{2.1}$$

предполагая, что функция $f(t,z)$ непрерывна по совокупности переменных, непрерывно дифференцируема по второму аргументу и T-периодична по первому аргументу $(T > 0)$.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделена двумерная плоскость $\mathbb{R}^2$ и дополнительное к ней подпространство $\mathbb{R}^{n-2}$. Пусть q — оператор проектирования на плоскость $\mathbb{R}^2$ вдоль подпространства $\mathbb{R}^{n-2}$, а $p = I - q$. Ниже элементы $\mathbb{R}^2$ обозначаются через ξ, элементы $\mathbb{R}^{n-2}$ — через ζ. Таким образом, каждый элемент $z \in \mathbb{R}^n$ единственным образом представим в виде $z = \xi + \zeta$, где $\xi = qz, \zeta = pz$.

Пусть φ, ρ — полярные координаты в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим многолистную риманову поверхность

$$\Pi = \{(\varphi,\rho) : \varphi \in (-\infty,\infty), \rho \in (0,\infty)\}.$$

Пусть на Π задана скалярная непрерывно дифференцируемая функция $W(\varphi,\rho)$, для которой

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} W(\varphi,\rho) > 0, \quad (\varphi,\rho) \in \Pi, \tag{2.2}$$

$$W(\varphi + 2\pi, \rho) = W(\varphi,\rho) + 2\pi, \quad (\varphi,\rho) \in \Pi, \tag{2.3}$$

Из последнего равенства вытекает тождество $\mathrm{grad}W(\varphi+2\pi,\rho)\equiv\mathrm{grad}W(\varphi,\rho)$. Поэтому векторное поле градиентов $\mathrm{grad}W(\varphi,\rho)$ определено на $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

На подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ пусть задана гладкая скалярная функция $V(\zeta)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} V(\zeta)=\infty. \tag{2.4}$$

В силу (2.4), области $\{\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}: V(\zeta)<\vartheta\}$ непусты и ограничены при $\vartheta>\vartheta_0=\min V(\zeta)$.

Для $\rho_2>\rho_1\geqslant 0$ и $\vartheta>\vartheta_0$ выделим область

$$\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)=\left\{z\in\mathbb{R}^n: V(pz)<\vartheta,\ \rho_1<\|qz\|<\rho_2\right\}.$$

Будем предполагать, что на $[0,T]$ заданы непрерывные функции $\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ и $\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\cdot)$ такие, что

$$\sup_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}(\mathrm{grad}W(qz),qf(t,z))=\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t), \tag{2.5}$$

$$\inf_{z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2)}(\mathrm{grad}W(qz),qf(t,z))=\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t). \tag{2.6}$$

2.1. Строгая и обобщенная многолистные векторные направляющие функции.

Определение 2.1. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (2.2)–(2.4), назовем строгой многолистной векторной направляющей функцией (МВНФ) для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t\in[0,T]}\frac{|(qf(t,z),qz)|}{\|qz\|}<\frac{\rho_2-\rho_1}{2T},\quad z\in\Omega(\vartheta,\rho_1,\rho_2); \tag{2.7}$$

$$(\mathrm{grad}V(pz),pf(t,z))<0,\quad V(pz)\geqslant\vartheta,\ \|qz\|\leqslant\rho_2; \tag{2.8}$$

$$2\pi(N-1)<\int\limits_0^T\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau,\quad \int\limits_0^T\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(\tau)d\tau<2\pi N, \tag{2.9}$$

где N — целое число; $\alpha_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t)$, $\beta_{\vartheta,\rho_1,\rho_2}(t)$ — функции из (2.5)-(2.6).

Положим $G(\vartheta,\rho)=\{z\in\mathbb{R}^n: V(pz)<\vartheta,\|qz\|<\rho\}$. Область $G(\vartheta,\rho)$ представима в виде $G(\vartheta,\rho)=G_\zeta(\vartheta)\times G_\xi(\rho)$, где $G_\zeta(\vartheta)=\left\{\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}: V(\zeta)<\vartheta\right\}$ и $G_\xi(\rho)=\left\{\xi\in\mathbb{R}^2:\|\xi\|<\rho\right\}$.

Приведем схему доказательства следующего принципа существования периодического решения (полное доказательство см. в [17]).

Теорема 2.1. *Пусть для уравнения* (2.1) *можно указать строгую МВНФ относительно области* $\Omega\left(\vartheta,\rho_1,\rho_2\right)$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что*

$$z_*(t)\in G(\vartheta,\rho_0),\ \ t\in[0,T],\rho_0=\left(\rho_1+\rho_2\right)/2.$$

Доказательство. Вначале покажем, что непрерывный оператор сдвига U_T по траекториям уравнения (2.1) определен на множестве $\overline{G\left(\vartheta,\rho_0\right)}$, невырожден на границе $\partial G\left(\vartheta,\rho_0\right)$, и, следовательно, определена топологическая степень $\deg(i-U_T,\overline{G\left(\vartheta,\rho_0\right)},0)$.

Для этого необходимо установить, что всякое решение уравнения (2.1) с начальным условием $z_0\in\overline{G\left(\vartheta,\rho_0\right)}$ продолжимо на промежуток $[0,T]$ и обладает свойством T-невозвращаемости.

Покажем, что всякое решение уравнения (2.1) с начальным условием $z_0\in\overline{G\left(\vartheta,\rho_0\right)}$ продолжимо на промежуток $[0,T]$, причем

$$z(t)\in G\left(\vartheta,\rho_2\right),\quad t\in(0,T]. \tag{2.10}$$

Вначале докажем включение $z(t)\in G\left(\vartheta,\rho_2\right)$ для малых $t>0$.

Рассмотрим компоненту $\zeta(t)$. Если $\zeta(0)$ — внутренняя точка области $G_\zeta(\vartheta)$, то можно указать число $\varepsilon_1>0$, при котором

$$\zeta(t)\in G_\zeta(\vartheta),\quad t\in(0,\varepsilon_1). \tag{2.11}$$

Пусть теперь $\zeta(0)\in\partial G_\zeta(\vartheta)$ и, следовательно, $V(\zeta(0))=\vartheta$. Так как $\|\xi(0)\|\leqslant\rho_0<\rho_2$, то из (2.8) вытекает оценка

$$(\mathrm{grad}V(\zeta(0)),pf(0,\zeta(0),\xi(0)))<0.$$

Отсюда и из равенства $V(\zeta(0)) = \vartheta$ следует, что при малых $t > 0$ верны соотношения $V(\zeta(t)) < \vartheta$. Поэтому при некотором $\varepsilon_1 > 0$ справедливо включение (2.11).

Для компоненты $\xi(t)$, очевидно, при некотором $\varepsilon_2 > 0$ выполняется

$$\xi(t) \in G_\xi(\rho_2), \quad t \in (0, \varepsilon_2). \tag{2.12}$$

В силу (2.11) и (2.12) $z(t) \in G(\vartheta, \rho_2)$, $0 < t < \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Поэтому определено положительное число

$$t_* = \sup\left\{t > 0 : \quad z(t) \in G(\vartheta, \rho_2)\right\}.$$

Включение (2.10) эквивалентно оценке $t_* > T$.

Используя соотношение (2.7), нетрудно показать, что $t_* > T$. Поэтому всякое решение $z(\cdot)$ уравнения (2.1) с начальным условием на $G\,(\vartheta, \rho_0)$ при $t \in (0, T]$ удовлетворяет включению (2.10).

Покажем теперь, что эти траектории обладают свойством T-невозвращаемости.

Так как $G(\vartheta, \rho_0) = G_\zeta(\vartheta) \times G_\xi(\rho_0)$, то

$$\partial G\,(\vartheta, \rho_0) = \left(\partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)}\right) \cup \left(\overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)\right).$$

Предположим вначале, что $z(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta) \times \overline{G_\xi(\rho_0)}$, тогда $\zeta(0) \in \partial G_\zeta(\vartheta)$. Но в силу (2.10) $\zeta(t) \in G_\zeta(\vartheta),\ \ t \in (0, T]$. Поэтому $\zeta(t) \neq \zeta(0),\ \ t \in (0, T]$, или, что то же самое,

$$pz(t) \neq pz(0), \quad t \in (0, T]. \tag{2.13}$$

Пусть теперь $z(0) \in \overline{G_\zeta(\vartheta)} \times \partial G_\xi(\rho_0)$. Тогда

$$z(t) \in \Omega(\vartheta, \rho_1, \rho_2), \quad t \in (0, T].$$

Воспользовавшись теперь оценками (2.9), можно показать, что $\xi(T) \neq \xi(0)$. Поэтому, учитывая (2.13), соотношение

$$z(t) \neq z(0)$$

верно для любой траектории $z(\cdot)$, начальное значение которой удовлетворяет включению $z(0) \in G(\vartheta, \rho_0)$.

Далее, используя (2.8), устанавливается, что

$$\deg(i - U_T, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, 0) = \deg(\mathrm{grad} V(pz) + qz, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, 0).$$

Отсюда, применяя теорему о произведении степеней, свойство нормализации топологической степени и учитывая условие (2.4), получаем

$$\deg(i - U_T, \overline{G(\vartheta, \rho_0)}, 0) \neq 0.$$

В силу принципа ненулевой степени поле $z - U_T z$ имеет в области $G(\vartheta, \rho_0)$ хотя бы одну особую точку z_0 и, следовательно, решение $z(t, z_0)$ уравнения (2.1) T-периодично. Нетрудно видеть, что траектория этого решения не пересекает границу области $G(\vartheta, \rho_0)$ и поэтому

$$z(t, z_0) \in G(\vartheta, \rho_0), \quad t \in [0, T].$$

□

Некоторое усиление условия (2.8) также позволяет получить принцип существования T-периодического решения.

Определение 2.2. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi, \rho)\}$, обладающих свойствами (2.2)–(2.6), назовем обобщенной МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденной и, кроме условий (2.7) и (2.9), выполнено следующее условие:

$$(\mathrm{grad} V(pz), pf(t, z)) \leqslant 0, \quad V(pz) \geqslant \vartheta,\ \|qz\| \leqslant \rho_2. \tag{2.14}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть для уравнения* (2.1) *можно указать обобщенную МВНФ относительно области* $\Omega\,(\vartheta, \rho_1, \rho_2)$. *Тогда уравнение* (2.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что*

$$z_*(t) \in G\,(\vartheta, \rho_0)\,, \ \ t \in [0, T].$$

2.2. Набор многолистных векторных направляющих функций. Далее, в развитие идей работ [7, 12, 17], в работе [4] определяется полный набор строгих МВНФ, полный и острый набор обобщенных МВНФ, правильная МВНФ для дифференциального уравнения (2.1). Приведем эти определения.

Пусть на подпространстве $\mathbb{R}^{n-2}$ заданы скалярные непрерывно дифференцируемые функции

$$V_1(\zeta), V_2(\zeta), \ldots, V_k(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2}, \ k \geqslant 1. \tag{2.15}$$

Для заданного $r_0 > 0$ положим

$$m_i = \min_{\|\zeta\| \leqslant r_0} V_i(\zeta), \ \ M_i = \max_{\|\zeta\| \leqslant r_0} V_i(\zeta), \ \ i = 1, \ldots, k,$$

и

$$M^* = \sum_{i=1}^{k} (|m_i| + |M_i|).$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что для функций (2.15) выполнено условие невырожденности

$$\mathrm{grad} V_i(\zeta) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geqslant r_0, \ \ i = 1, \ldots, k.$$

Пусть функции (2.15) удовлетворяют условию

$$\lim_{\|\zeta\| \to \infty} [|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + \ldots + |V_k(\zeta)|] = \infty, \quad k \geqslant 1. \tag{2.16}$$

В силу условия (2.16) можно найти такое r^*, что

$$|V_1(\zeta)| + |V_2(\zeta)| + \ldots + |V_k(\zeta)| > M^*, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-2} : \|\zeta\| \geqslant r^*, \ k \geqslant 1. \tag{2.17}$$

Для $\rho_2 > \rho_1 \geqslant 0$ выделим в $\mathbb{R}^n$ область

$$\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*, \rho_1 < \|qz\| < \rho_2\right\}.$$

Положим

$$\alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) = \sup_{z \in \Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} (\mathrm{grad} W(qz), qf(t,z)), \tag{2.18}$$

$$\beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t) = \inf_{z \in \Omega(r^*,\rho_1,\rho_2)} (\mathrm{grad} W(qz), qf(t,z)). \tag{2.19}$$

Введем понятие полного набора строгих МВНФ.

Определение 2.3. Функции $\{V_1(\zeta), \ldots, V_k(\zeta), W(\varphi, \rho)\}$, обладающие свойствами (2.2), (2.3) и (2.16), образуют полный набор строгих МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(r^*, \rho_1, \rho_2\right)$, если выполнены следующие условия:

$$\sup_{t \in [0,T]} \frac{|(qf(t,z), qz)|}{\|qz\|} < \frac{\rho_2 - \rho_1}{2T}, \quad z \in \Omega(r^*, \rho_1, \rho_2); \tag{2.20}$$

$$(\mathrm{grad} V_i(pz), pf(t,z)) < 0, \quad \|pz\| \geqslant r_0, \ \|qz\| \leqslant \rho_2, \ i = 1, \ldots, k; \tag{2.21}$$

$$2\pi(N-1) < \int_0^T \alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau) d\tau, \int_0^T \beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(\tau) d\tau < 2\pi N, \tag{2.22}$$

где N — целое число; $\alpha_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t)$, $\beta_{r^*,\rho_1,\rho_2}(t)$ — функции из (2.18)-(2.19).

Для $\rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ пусть

$$G(r^*, \rho_0) = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \|pz\| < r^*, \ \|qz\| < \rho_0\right\}.$$

Применяя методы работ [7, 17] и теорию топологической степени отображений, приведем схему доказательства следующего принципа существования периодического решения (полное доказательство см. [4]).

Теорема 2.3. *Пусть для уравнения* (2.1) *можно указать полный набор* $\{V_1(\zeta),\ldots,V_k(\zeta),$ $W(\varphi,\rho)\}$ *строгих МВНФ относительно области* $\Omega\,(r^*,\rho_1,\rho_2)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\,(V_1,\infty)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля*:

$$\mathrm{ind}\,(V_1,\infty)\neq 0.$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in G\,(r^*,\rho_0)\,,\ t\in[0,T]$.

Замечание 2.1. Отметим, что из условий (2.21) вытекает гомотопность векторных полей $\mathrm{grad}V_i(pz)$, $i=1,\ldots,k$, и $-pf(0,z)$, $z\in\mathbb{R}^n:\|pz\|\geqslant r_0$, $\|qz\|\leqslant\rho_2$. Поэтому все поля $\mathrm{grad}V_i(\zeta)$, $i=1,\ldots,k$, гомотопны друг другу и имеют одинаковую топологическую степень. Следовательно,

$$\mathrm{ind}\,(V_i,\infty)\neq 0,\quad i=1,\ldots,k.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ через Q_i и Q_i^*, $i=1,\ldots,k$, обозначим множества точек $z:\|pz\|\geqslant r_0$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$V_i(pz)\leqslant m_i,\quad V_i(pz)\geqslant M_i,\quad i=1,\ldots,k.$$

Сформулируем утверждения, результаты которых будут использованы при доказательстве теоремы 2.3.

Лемма 2.1. *Все точки множества* $\{z\in\mathbb{R}^n:\|pz\|=r^*\}$ *являются точками невозвращаемости траекторий уравнения* (2.1).

Доказательство. Допустим, что $\|pz\|=r^*$. Из (2.17) вытекает, что найдется такое $i=i(pz)$, что $z\in Q_i\cup Q_i^*$. Тогда, следуя [7, лемма 6.7], мы приходим к выводу, что z — точка невозвращаемости траекторий уравнения (2.1). □

Пусть $G_\zeta(r^*)=\left\{\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}:\|\zeta\|<r^*\right\}$ и $G_\xi(\rho_0)=\left\{\xi\in\mathbb{R}^2:\|\xi\|<\rho_0\right\}$.

Лемма 2.2. *Для всякой траектории* $z(\cdot)$ *уравнения* (2.1) *с начальным условием* $z(0)\in\overline{G_\zeta(r^*)}\times\partial G_\xi(\rho_0)$ *справедливо соотношение*

$$qz(T)\neq qz(0).$$

Доказательство теоремы 2.3.

1. Предположим вначале, что решения уравнения (2.1) продолжимы на $[0,T]$. В силу условий, наложенных на функцию $f(t,z)$, задача Коши для уравнения (2.1) однозначно разрешима при любом начальном условии $z_0\in\mathbb{R}^n$. Обозначим через $z(t,z_0)$ решение, для которого $z(0)=z_0$.

При сделанных предположениях непрерывный оператор сдвига $U_Tz_0=z(T;z_0)$ определен на множестве $\overline{G(r^*,\rho_0)}$ и в силу лемм 2.1 и 2.2 невырожден на $\partial G(r^*,\rho_0)$. Следовательно, определена топологическая степень $\deg(i-U_T,\overline{G(r^*,\rho_0)},0)$. Как известно (см., например, [7]), доказательство существования T-периодических решений уравнения (2.1) в этом случае сводится к доказательству соотношения

$$\deg(i-U_T,\overline{G(r^*,\rho_0)},0)\neq 0.$$

Следуя [17], устанавливается, что указанная топологическая степень удовлетворяет условию

$$\deg(i-U_T,\overline{G(r^*,\rho_0)},0)=\deg(\mathrm{grad}V_i(pz)+qz,\overline{G(r^*,\rho_0)},0),\quad i=1,\ldots,k. \tag{2.23}$$

Каждое поле $\mathrm{grad}V_i(pz)+qz$, $z\in G(r^*,\rho_0)$, $i=1,\ldots,k$, является прямой суммой векторных полей $\mathrm{grad}V_i(\zeta)\in\mathbb{R}^{n-2}$, $\zeta\in G_\zeta(r^*)$, $i=1,\ldots,k$, и $\xi\in\mathbb{R}^2$, $\xi\in G_\xi(\rho_0)$. Поэтому в силу свойства произведения степеней имеем

$$\deg(\mathrm{grad}V_i(pz)+qz,\overline{G(r^*,\rho_0)},0)=\deg(\mathrm{grad}V_i(\zeta),\overline{G_\zeta(r^*)},0)\deg(\xi,\overline{G_\xi(\rho_0)},0),$$

где $i=1,\ldots,k$. Так как точка $\xi=0$ лежит в области $G_\xi(\rho_0)$, то по свойству нормализации топологической степени

$$\deg(\xi,\overline{G_\xi(\rho_0)},0)=1.$$

Учитывая замечание 2.1, получим

$$\deg(\mathrm{grad}V_i(pz)+qz,\overline{G(r^*,\rho_0)},0)\neq 0$$

и в силу (2.23)

$$\deg(i - U_T, \overline{G(r^*, \rho_0)}, 0) \neq 0.$$

В силу принципа ненулевой степени поле $z - U_T z$ имеет в области $G(r^*, \rho_0)$ хотя бы одну особую точку z_0. Решение $z(t, z_0)$ уравнения (2.1) T-периодично. Нетрудно видеть, что траектория этого решения не пересекает границу области $G(r^*, \rho_0)$, и поэтому

$$z(t, z_0) \in G(r^*, \rho_0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Общий случай, когда некоторым начальным условиям могут соответствовать решения, «уходящие в бесконечность» за малые промежутки времени, т. е. решения, которые нельзя продолжить на промежуток $[0, T]$, может быть рассмотрен по схеме М. А. Красносельского (см., например, [7]).

Отметим априорную оценку для T-периодических решений $z(\cdot)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего условиям (2.20)-(2.21). Ясно, что такие периодические решения по p-проекции удовлетворяют неравенству

$$\|pz(t)\| < r^*, \ t \in [0, T], \tag{2.24}$$

так как в противном случае нашлась бы точка z, принадлежащая одному из множеств $Q_i \cup Q_i^*$, $i = 1, \ldots, k$, которая не была бы точкой невозвращаемости траекторий.

Покажем, что $\|qz(t)\| < \rho_2, \ t \in [0, T]$, если $\|qz(0)\| \leqslant \rho_0$. Так как $\rho_0 < \rho_2$, то

$$\|qz(t)\| < \rho_2, \quad t \in [0, \varepsilon).$$

Поэтому определено положительное число

$$t_* = \sup\{t > 0 : \|qz(t)\| < \rho_2\}.$$

Покажем, что $t_* > T$.

Поскольку $\|qz(t_*)\| = \rho_2$ и $\|qz(0)\| = \rho_0$, то

$$\|qz(t_*)\| - \|qz(0)\| \geqslant \rho_2 - \rho_0 = (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\rho(t_*) = \rho(0) \geqslant (\rho_2 - \rho_1)/2.$$

Поэтому

$$\max_{t \in [0, t_*]} \left|\rho'(t)\right| \geqslant (\rho_2 - \rho_1)/2t_*. \tag{2.25}$$

С другой стороны, так как $\rho'(t) = \dfrac{(qf(t, \zeta(t), \xi(t)), \xi(t))}{\|\xi(t)\|}$ и $z(t) \in G(r^*, \rho_2)$ при $t \in (0, t_*)$, то из (2.20) вытекает оценка

$$\max_{t \in [0, t_*]} \left|\rho'(t)\right| < (\rho_2 - \rho_1)/2T. \tag{2.26}$$

Сравнивая (2.25) и (2.26), убеждаемся, что $t_* > T$. Поэтому

$$\|qz(t)\| < \rho_2, \quad t \in [0, T]. \tag{2.27}$$

Наличие априорных оценок (2.24) и (2.27) указывает путь доказательства теоремы 2.3 в общем случае. Нужно построить вспомогательное уравнение

$$z'(t) = f^*(t, z(t)), \tag{2.28}$$

правая часть которого удовлетворяет трем требованиям:

1^0. $f^*(t, z) = f(t, z), \quad z \in \overline{\Omega(r^*, \rho_1, \rho_2)}$.

2^0. $f^*(t, z)$ удовлетворяет условиям (2.21).

3^0. Все решения уравнения (2.28) продолжимы на $[0, T]$.

Тогда уравнение (2.28), по уже доказанному, имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z(\cdot)$. Для этого решения справедливы оценки (2.24) и (2.27), и поэтому оно является одновременно решением уравнения (2.1). □

Определение 2.4. Функции $\{V_1(\zeta),\dots,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающие свойствами (2.2), (2.3) и (2.16), образуют полный и острый набор обобщенных МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если функции $V_i(\zeta)$ являются невырожденными и, кроме условий (2.20) и (2.22), выполнено условие:

$$(\mathrm{grad} V_i(pz), pf(t,z)) \leqslant 0, \quad \|pz\|\geqslant r_0,\ \|qz\|\leqslant\rho_2,\ i=1,\dots,k, \tag{2.29}$$

и для каждого фиксированного $\zeta\in\mathbb{R}^{n-2}$, $\|\zeta\|\geqslant r_0$ множество

$$K(\zeta)=\left\{\eta\in\mathbb{R}^{n-2}:\eta=\sum_{i=1}^{k}\gamma_i \mathrm{grad} V_i(\zeta),\ \gamma_1,\dots,\gamma_k\geqslant 0\right\}$$

является конусом в смысле Крейна.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Пусть для уравнения* (2.1) *можно указать полный и острый набор* $\{V_1(\zeta),\dots,V_k(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$ *обобщенных МВНФ относительно области* $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\mathrm{ind}\left(V_1,\infty\right)$ *функции* $V_1(\zeta)$ *отличен от нуля*:

$$\mathrm{ind}\left(V_1,\infty\right)\neq 0.$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t)\in G\left(r^*,\rho_0\right),\ t\in[0,T]$.

Для ее доказательства понадобится следующее утверждение (см., например, [12]).

Лемма 2.3. *Пусть набор функций* $V_1(\zeta),V_2(\zeta),\dots,V_k(\zeta),\zeta\in\mathbb{R}^{n-2},\ k\geqslant 1$ *является острым. Тогда существует локально липшицева функция* $g:\mathbb{R}^{n-2}\to\mathbb{R}^{n-2}$ *такая, что*

$$(\mathrm{grad} V_i(\zeta), g(\zeta))<0, \quad i=1,\dots,k;\ \|\zeta\|\geqslant r_0. \tag{2.30}$$

Доказательство теоремы 2.4. В силу леммы 2.3 существует функция $g:\mathbb{R}^{n-2}\to\mathbb{R}^{n-2}$, удовлетворяющая условию (2.30). Рассмотрим семейство вспомогательных дифференциальных уравнений

$$z'(t)=f(t,z(t))+\varepsilon g(pz(t)), \quad \varepsilon>0. \tag{2.31}$$

Нетрудно видеть, что полный и острый набор $\{V_1(\zeta),..,V_k(\zeta),W(\varphi,\rho)\}$ обобщенных МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$ будет являться для уравнения (2.31) при достаточно малом $\varepsilon>0$ полным набором строгих МВНФ относительно той же области. Тогда в силу теоремы 2.3 уравнение (2.31) для каждого достаточно малого $\varepsilon=\varepsilon_m,\ m\geqslant 1$, имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_m(\cdot)$. Устремляя ε_m к нулю, получаем искомое решение $z(\cdot)$ уравнения (2.1) как предельную точку последовательности $z_m(\cdot)$. □

Пусть $\{V(\zeta),W(\varphi,\rho)\}$ — строгая МВНФ для уравнения (2.1), то есть

$$(\mathrm{grad} V(pz), pf(t,z))<0, \quad \|pz\|\geqslant r_0,\ \|qz\|\leqslant\rho_2.$$

Следуя [7], покажем, что по функции $V(\zeta)$ может быть построена вторая функция $\widetilde{V}(\zeta)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty}\left\{|V(\zeta)|+\left|\widetilde{V}(\zeta)\right|\right\}=\infty, \tag{2.32}$$

если угол между $\mathrm{grad} V(\zeta)$ и $-pf(t,z)$ не только острый, но и ограничен сверху некоторым числом, меньшим $\pi/2$.

Определение 2.5. Пару функций $\{V(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\}$, обладающих свойствами (2.2) и (2.3), назовем правильной МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$, если функция $V(\zeta)$ является невырожденной и, кроме условий (2.7) и (2.9), выполнено условие:

$$(\mathrm{grad} V(pz), pf(t,z))\leqslant\delta_0\left\|\mathrm{grad} V(pz)\right\|\left\|pf(t,z)\right\|, \tag{2.33}$$

где $\delta_0<0,\ 0\leqslant t\leqslant T,\|pz\|\geqslant r_0,\ \|qz\|\leqslant\rho_2$, и если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $V_1(\zeta)$, что

$$\|\mathrm{grad} V(\zeta)\|\geqslant\|\mathrm{grad} V_1(\zeta)\| \quad (\|\zeta\|\geqslant r_0) \tag{2.34}$$

и

$$\lim_{\|\zeta\|\to\infty} |V_1(\zeta)| = \infty. \tag{2.35}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть для уравнения* (2.1) *имеется правильная МВНФ* $\{V(\zeta), W(\varphi,\rho)\}$ *относительно области* $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. *Пусть топологический индекс на бесконечности* $\operatorname{ind}(V,\infty)$ *функции* $V(\zeta)$ *отличен от нуля*:

$$\operatorname{ind}(V,\infty) \neq 0.$$

Тогда уравнение (2.1) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение* $z_*(\cdot)$ *такое, что* $z_*(t) \in G\left(r^*,\rho_0\right),\ t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть функция $V_1(\zeta)$ удовлетворяет условиям (2.34)-(2.35). Положим $\widetilde{V}(\zeta) = V(\zeta) + \dfrac{\delta_0}{2}V_1(\zeta)$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{V}(\zeta)$ является строгой МВНФ для уравнения (2.1).

Из (2.35) вытекает, что выполнено условие (2.32). Таким образом, набор $\left\{V(\zeta), \widetilde{V}(\zeta),\ W(\varphi,\rho)\right\}$ является полным набором строгих МВНФ для уравнения (2.1) относительно области $\Omega\left(r^*,\rho_1,\rho_2\right)$. Следовательно, согласно теореме 2.3 уравнение (2.1) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $z_*(\cdot)$ такое, что

$$z_*(t) \in G\left(r^*,\rho_0\right),\ t\in[0,T].$$

□

Замечание 2.2. Следуя методу М. А. Красносельского сглаживания правой части, можно показать, что теоремы 2.1–2.5 справедливы и для уравнения (2.1) с непрерывной по совокупности переменных правой частью $f(t,z)$.

3. Интегральная направляющая функция

Для $\tau>0$ обозначим символом $\mathcal{C}$ пространство $\mathcal{C}([-\tau,0];\mathbb{R}^n)$. Для функции $x(\cdot)\in\mathcal{C}([-\tau,T];\mathbb{R}^n)$, $T>0$, символом $x_t\in\mathcal{C}$ обозначается функция, заданная как $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $\theta\in[-\tau,0]$.

Мы будем рассматривать периодическую задачу для функционально-дифференциального уравнения следующего вида:

$$x'(t) = f(t,x_t), \tag{3.1}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.2}$$

предполагая, что отображение $f:\mathbb{R}\times\mathcal{C}\to\mathbb{R}^n$ удовлетворяет указанным ниже условиям:

$f_t)$ функция f по первому аргументу T-периодична:

$$f(t,\varphi) = f(t+T,\varphi) \quad \text{для всех } t\in\mathbb{R},\ \varphi\in\mathcal{C}$$

(очевидно, это условие позволяет рассматривать отображение f заданным на $[0,T]\times\mathcal{C}$);

$f_1)$ для каждого $\varphi\in\mathcal{C}$ функция $f(\cdot,\varphi):[0,T]\to\mathbb{R}^n$ измерима;

$f_2)$ почти для каждого $t\in[0,T]$ отображение $f(t,\cdot):\mathcal{C}\to\mathbb{R}^n$ непрерывно;

$f_3)$ для каждого $\rho>0$ существует функция $\alpha_\rho(\cdot)\in L^1_+([0,T],\mathbb{R})$ такая, что для каждого $\varphi\in\mathcal{C}$ с $\|\varphi\|\leqslant\rho$ и почти для всех $t\in[0,T]$

$$\|f(t,\varphi)\| \leqslant \alpha_\rho(t).$$

Для изучении задачи (3.1), (3.2) мы будем использовать теорию топологической степени совпадения пары отображений в следующей ситуации (см., например, [13]).

Пусть $X_1,\ X_2$ — нормированные пространства, $U\subset X_1$ — ограниченное открытое множество; $l:\operatorname{dom} l\subseteq X_1\to X_2$ — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса,

$$N_l = \{x\in\operatorname{dom} l:\ lx=0\},$$

$$R_l = \{lx:\ x\in\operatorname{dom} l\}.$$

Пусть $p:\ X_1\to X_1$, $q:\ X_2\to X_2$ — непрерывные операторы проектирования такие, что $R_p=N_l$ и $N_q=R_l$; l_p обозначает сужение l на $\operatorname{dom} l\cap N_p$, где $N_p=\operatorname{Ker} p$.

Далее, пусть $k_{p,q}=l_p^{-1}(i-q):\ X_2\to\operatorname{dom} l\cap N_p$ — непрерывный оператор.

Определение 3.1. Отображение $G : \overline{U} \to X_2$ называется l-компактным, если

1. $G(U)$ — ограниченное множество;
2. $k_{p,q} \circ G : \overline{U} \to K(E_1)$ является компактным отображением.

Замечание 3.1. Приведенное выше определение l-компактного отображения не зависит от выбора линейных операторов проектирования $p : E_1 \to E_2$ и $q : E_1 \to E_2$.

Далее пусть $G : \overline{U} \to X_2$ — замкнутый l-компактный оператор такой, что $lx \neq Gx$ для всех $x \in \partial U$. Тогда определена целочисленная топологическая характеристика — степень совпадения $\deg(l, G, \overline{U})$, отличие которой от нуля влечет существование точки совпадения $x_0 \in U$, $l(x_0) = G(x_0)$.

Нам понадобится следующее утверждение, которое может быть доказано с помощью степени совпадения и топологической степени отображений (см., например, [13]).

Теорема 3.1. *Пусть операторы qG и $k_{p,q}G$ компактны и выполнены условия*:

1. $lx \neq \lambda Gx$ *для всех* $\lambda \in (0,1)$, $x \in \operatorname{dom} l \cap \partial U$;
2. $0 \neq qGx$ *для всех* $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$.

Тогда, если $\deg(qG\,|_{\operatorname{Ker} l \cap U}, \overline{\operatorname{Ker} l \cap U}, 0) \neq 0$, *то уравнение* $lx = Gx$ *имеет решение в* $\operatorname{dom} l \cap \overline{U}$.

Обозначим C_T — пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t \in [0,T]} \|x(t)\|$.

Через $\|x\|_2$ обозначим норму функции x в пространстве L^2, $\|x\|_2 = \left(\int\limits_0^T \|x(s)\|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}$.

3.1. Строгая интегральная направляющая функция. В работе [11] вводится следующее понятие.

Определение 3.2. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется интегральной направляющей функцией задачи (3.1), (3.2), если найдется $N > 0$ такое, что

$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x(s)), f(s, x_s)) \, ds > 0 \tag{3.3}$$

для любой непрерывно дифференцируемой функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'(t)\| \leqslant \|f(t, x_t)\|$ $(t \in [0,T])$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — интегральная направляющая функция задачи* (3.1), (3.2) *такая, что*

$$\deg(\operatorname{grad} V; \overline{B_N}, 0) \neq 0, \tag{3.4}$$

где $B_N \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса N с центром в нуле. Тогда задача (3.1), (3.2) *имеет решение.*

Замечание 3.2. Отметим, что условия теоремы выполнены, если, например, функция V четна или $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} V(x) = \pm\infty$.

Приведем схему доказательства теоремы 3.2 (подробное доказательство см. [11]).

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 3.1. Рассмотрим следующие операторы:

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x \in C^1\} \to C_T, \quad lx = x',$$
$$G : C_T \to C_T, \quad (Gx)(t) = f(t, x_t).$$

Нетрудно проверить (см., например, [13]), что оператор Немыцкого G — l-компактный оператор, l — линейный фредгольмов оператор нулевого индекса и $\operatorname{Ker} l = \mathbb{R}^n$. Проекция $q : C_T \to \mathbb{R}^n$ может быть задана формулой $qx = \dfrac{1}{T} \int\limits_0^T x(s) \, ds$. Нетрудно проверить, что операторы pG и $k_{p,q}G$ компактны.

Отметим, что для $\lambda \in (0,1)$ решение $x \in \operatorname{dom} l$ уравнения $l(x) = \lambda G(x)$ удовлетворяет задаче

$$x'(t) = \lambda f(t, x_t), \tag{3.5}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.6}$$

Тогда

$$\int\limits_0^T (\mathrm{grad} V(x(s)), f(s, x_s))\, ds = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^T \big(\mathrm{grad} V(x(s)), x'(s)\big)\, ds =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^T V'(x(s))\, ds = \frac{1}{\lambda}(V(x(T)) - V(x(0))) = 0,$$

откуда следует, что

$$\|x\|_2 < N.$$

С другой стороны, из условия (f_3) вытекает, что $\|x'\|_2 < M$ для некоторого $M > 0$. Но тогда найдется и $M' > 0$ такое, что

$$\|x\|_C < M'.$$

В качестве U возьмем шар $B_r \subset C_T$ радиуса $r = \max\{N, M', NT^{-1/2}\}$. Тогда имеем

$$l(x) \neq \lambda G(x)$$

для всех $x \in \partial U$.

Пусть теперь $u \in \partial U \cap \operatorname{Ker} l$ произвольно. Поскольку $\|u\| \geqslant NT^{-1/2}$, из определения интегральной направляющей функции получаем, что

$$\int\limits_0^T (\mathrm{grad} V(u), f(s, u))\, ds > 0$$

и, следовательно, $qGx \neq 0$ для любого $x \in \operatorname{Ker} l \cap \partial U$.

Это значит, что в силу (3.4)

$$\deg(qG|_{U_{\operatorname{Ker} l}}, \overline{U_{\operatorname{Ker} l}}, 0) = \deg(\mathrm{grad} V, \overline{U_{\operatorname{Ker} l}}, 0) \neq 0,$$

где $U_{\operatorname{Ker} l} = U \cap \operatorname{Ker} l$. Таким образом, все условия теоремы 3.1 выполнены и задача (3.1), (3.2) имеет решение. $\square$

Примеры

3.1.1. Дифференциальное уравнение с запаздыванием. Рассмотрим периодическую задачу для дифференциального уравнения с запаздыванием

$$x'(t) = f(t, x(t - \tau)), \tag{3.7}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.8}$$

где отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям $(f_t), (f_1)$ и (f_2).

Теорема 3.3. *Пусть найдутся $\overline{N} > 0$ и $C > 0$ такие, что*

$$(x, f(t, x)) \geqslant C$$

для всех x, $\|x\| \geqslant \overline{N}$. Если отображение f ограничено:

$$\|f(t, x)\| \leqslant M$$

и $C - \tau M^2 > 0$, то задача (3.7), (3.8) *имеет решение.*

Доказательство. Покажем, что $V(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2$ является интегральной направляющей функцией для задачи (3.7), (3.8). Тогда, учитывая замечание 3.2, утверждение настоящей теоремы будет следовать из теоремы 3.2. Действительно, для достаточно большого $N > 0$ условия $\|x'(t)\| \leqslant M$ ($t \in [0,T]$) и $\|x\|_2 \geqslant N$ будут влечь $\|x(t)\| \geqslant \overline{N}$ при всех $t \in [0,T]$ для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(\cdot) \in C_T$. Но тогда для такой функции $x(\cdot)$ мы имеем:

$$\int_0^T (\mathrm{grad} V(x(s)), f(s, x(s-\tau)))\, ds = \int_0^T (x(s), f(s, x(s-\tau)))\, ds =$$

$$= \int_0^T (x(s-\tau), f(s, x(s-\tau)))\, ds + \int_0^T (x(s) - x(s-\tau), f(s, x(s-\tau)))\, ds =$$

$$\geqslant CT - \tau M^2 T = (C - \tau M^2)T > 0.$$

□

3.1.2. Полулинейное функционально-дифференциальное уравнение. Рассмотрим следующую периодическую задачу

$$x'(t) = Ax(t) + f(t, x_t), \tag{3.9}$$

$$x(0) = x(T). \tag{3.10}$$

Здесь отображение $f : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям (f_t), (f_1)–(f_3), а $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Теорема 3.4. *Пусть квадратичная форма (Ax, x) удовлетворяет для некоторого $\varepsilon > 0$ условию*

$$(Ax, x) \geqslant \varepsilon \|x\|^2$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Если

$$\overline{\lim_{\|x\|_2 \to +\infty}} \frac{\|\tilde{G}x\|_2}{\|x\|_2} < \varepsilon,$$

для всех $x \in C_T$, где $\tilde{G}$ — оператор Немыцкого, порожденный f:

$$\tilde{G} : C_T \to C_T : [\tilde{G}(x)](t) = f(t, x_t),$$

то задача (3.9), (3.10) *имеет решение.*

Доказательство. Как и в предыдущем примере, покажем, что $V(x) = \dfrac{1}{2}\|x\|^2$ является интегральной направляющей функцией задачи (3.9), (3.10). Действительно, имеем

$$\int_0^T (\mathrm{grad} V(x(s)), Ax(s) + f(s, x_s))\, ds = \int_0^T (Ax(s), x(s))\, ds + \int_0^T (x(s), f(s, x_s))\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \varepsilon \|x\|_2^2 - \|x\|_2 \|\tilde{G}x\|_2 > 0$$

для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

3.1.3. Градиентное функционально-дифференциальное уравнение. Рассмотрим периодическую задачу вида

$$x'(t) = \mathrm{grad}\, g(x(t)) + f(t, x_t), \tag{3.11}$$

$$x(0) = x(T), \tag{3.12}$$

где отображение f удовлетворяет условиям (f_t), (f_1)–(f_3), а $\mathrm{grad}\, g$ — градиент C_1-функции $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия*:

1. *найдутся константы $\varepsilon > 0$, $K > 0$ и $\beta \geqslant 1$ такие, что*

   $$\|\mathrm{grad}\, g(x)\| \geqslant \varepsilon \|x\|^\beta - K$$

   для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

2. $\overline{\lim\limits_{\|x\|_2\to+\infty}} \dfrac{\|\tilde{g}x\|_2}{\|x\|_2^\beta} < \varepsilon T^{(1-\beta)/2}$ *для всех* $x \in C_T$;
3. *градиент* $\operatorname{grad} g$ *имеет ненулевой топологический индекс*:
$$\deg(\operatorname{grad} g, \overline{B_N}, 0) \neq 0$$
для достаточно больших $N > 0$.

Тогда задача (3.11), (3.12) *имеет решение.*

Доказательство. Аналогично предыдущим примерам покажем, что g является интегральной направляющей функцией для задачи (3.11), (3.12). Отметим, что вложение $L^{2\beta} \subset L^2$ дает для любой непрерывно дифференцируемой функции $x(\cdot) \in C_T$ оценку
$$\|\operatorname{grad} g(x(\cdot))\|_2 \geqslant \varepsilon \|x\|_{2\beta}^\beta - K\sqrt{T} \geqslant \varepsilon T^{(1-\beta)/2} \|x\|_2^\beta - K\sqrt{T}.$$
Но тогда имеем
$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} g(x(s)), \operatorname{grad} g(x(s)) + f(s, x_s))\, ds \geqslant$$
$$\geqslant \|\operatorname{grad} g(x(\cdot))\|_2 \left(\|\operatorname{grad} g(x(\cdot))\|_2 - \|\tilde{g}x\|_2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \|\operatorname{grad} g(x(\cdot))\|_2 \left(\varepsilon T^{(1-\beta)/2} - \frac{K\sqrt{T}}{\|x\|_2^\beta} - \frac{\|\tilde{g}x\|_2}{\|x\|_2^\beta}\right) \|x\|_2^\beta > 0$$
для достаточно больших значений $\|x\|_2$. □

3.2. Обобщенная интегральная направляющая функция. Некоторое усиление условия (3.3) также позволяет получить принцип существования T-периодического решения.

Определение 3.3. Непрерывно дифференцируемая функция $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется обобщенной интегральной направляющей функцией задачи (3.1), (3.2), если найдется $N > 0$ такое, что
$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x(s)), f(s, x_s))\, ds \geqslant 0 \tag{3.13}$$
для любой непрерывно дифференцируемой функции $x \in C_T$ такой, что $\|x\|_2 \geqslant N$ и $\|x'(t)\| \leqslant \|f(t, x_t)\|$ $(t \in [0, T])$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.6. *Пусть* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *обобщенная интегральная направляющая функция задачи* (3.1), (3.2) *такая, что* $\operatorname{grad} V(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| \geqslant N$ *и*
$$\deg(\operatorname{grad} V, \overline{B_N}, 0) \neq 0, \tag{3.14}$$
где $B_N \subset \mathbb{R}^n$ — *шар радиуса* N *с центром в нуле. Тогда задача* (3.1), (3.2) *имеет решение.*

4. Направляющая функция на заданном множестве

Мы будем рассматривать периодическую задачу для дифференциального уравнения следующего вида:
$$x'(t) = f(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T], \tag{4.1}$$
$$x(0) = x(T). \tag{4.2}$$
предполагая, что отображение $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет указанным ниже условиям:

$f_t)$ функция f по первому аргументу T-периодична:
$$f(t, x) = f(t + T, x) \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$$
(очевидно, это условие позволяет рассматривать отображение f заданным на $[0, T] \times \mathbb{R}^n$);

$f_1)$ для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ функция $f(\cdot, x) : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ измерима;

$f_2)$ почти для каждого $t \in [0, T]$ отображение $f(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно;

$f_3)$ для каждого $\rho > 0$ существует функция $\alpha_\rho(\cdot) \in L^1_+([0,T],\mathbb{R})$ такая, что для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ с $\|x\| \leqslant \rho$ и почти для всех $t \in [0,T]$

$$\|f(t,x)\| \leqslant \alpha_\rho(t).$$

Под решением задачи (4.1), (4.2) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(\cdot)$, удовлетворяющую условию периодичности (4.2) и уравнению (4.1) почти всюду.

Для изучении задачи (4.1), (4.2) мы будем использовать теорию топологической степени совпадения пары отображений в аналогичной разделу 3 ситуации.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество.

Обозначим символом C_T пространство непрерывных T-периодических функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_C = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Обозначим теперь

$$\Gamma(D) := \{x \in C_T : x(t) \in D \quad \text{для всех} \;\; t \in [0,T]\}.$$

Для функции $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ M \subset \mathbb{R}$ и для любого $r \in \mathbb{R}$ пусть

$$V^{-1}(M) := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \in M\},$$

$$\mathcal{V}_r := \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < r\}.$$

4.1. Обобщенная направляющая функция на заданном множестве. В работе [15] введено следующее понятие.

Определение 4.1. Непрерывно дифференцируемая функция $V : D \to \mathbb{R}$ называется обобщенной направляющей функцией на D для уравнения (4.1), если для каждого $x \in D$ и $t \in [0,T]$ выполнено

$$(\mathrm{grad} V(x), f(t,x)) \leqslant 0. \tag{4.3}$$

Случай, когда $D = \mathbb{R}^n \setminus B(r)$ для некоторого $r > 0$, аналогичен приведенному выше в пункте 1.1 и подробно был рассмотрен в [13].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что выполняются следующие условия*:

1. *$\mathcal{V}_0$ является непустым, открытым и ограниченным множеством*;
2. *V является обобщенной направляющей функцией для уравнения* (4.1) *на множестве* $V^{-1}(0)$;
3. $\mathrm{grad}\, V(x) \neq 0$ *для всех* $x \in V^{-1}(0)$;
4. $\deg(\mathrm{grad}\, V, \overline{\mathcal{V}_0}, 0) \neq 0$.

Тогда уравнение (4.1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение* $x(\cdot) \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$.

Приведем схему доказательства теоремы 4.1 (подробное доказательство см. [14, 15]).

Доказательство.

а). Покажем сначала, что утверждение теоремы справедливо, когда условия 2 и 3 предполагаются выполненными на множестве $V^{-1}([0,\varepsilon])$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Зададим гомотопию $H : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$H(t,x,\lambda) = -(1-\lambda)\mathrm{grad}\, V(x(t)) + \lambda f(t,x(t)). \tag{4.4}$$

Рассмотрим периодическую задачу

$$x'(t) = H(t,x,\lambda) \quad \text{п.в.} \quad \lambda \in [0,1), \tag{4.5}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.6}$$

Пусть $\lambda \in [0,1)$ и x — некоторое решение (4.5)-(4.6) такое, что $x \in \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0})$. Покажем, что $x \in \Gamma(\mathcal{V}_0)$, т. е. что $V(x(t)) < 0$, для всех $t \in [0,T]$. Предположим, что при некотором $\tau \in [0,T]$ имеем $V(x(\tau)) = 0$. Это означает, что $x(\tau) \in V^{-1}(0)$ и в силу условия 3 выполнено $\mathrm{grad}\, V(x(\tau)) \neq 0$. Следовательно, найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\mathrm{grad}\, V(x(\tau)) \neq 0 \quad \text{для всех} \;\; t \in [\tau-\delta, \tau+\delta] \cap [0,T]. \tag{4.7}$$

Предположим без ограничения общности, что $\tau - \delta \in (0,T)$ и что $V(x(t)) \in [-\varepsilon, 0]$ для всех $t \in [\tau-\delta, \tau]$. Тогда, применяя предположение 2 и соотношение (4.7), получаем:

$$0 \leqslant V(x(\tau)) - V(x(\tau-\delta)) = \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau} \frac{d}{dt} V(x(t))dt =$$

$$= \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau} \left[-(1-\lambda)\|\operatorname{grad} V(x(t))\|^2 + \lambda(\operatorname{grad} V(x(t)), f(t,x(t)))\right] dt < 0.$$

Получили противоречие. Таким образом, или задача (4.1)-(4.2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$, и в этом случае теорема доказана, или для каждого $\lambda \in [0,1]$ задача (4.5)-(4.6) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_0)$.

Тогда определим оператор

$$l : \operatorname{dom} l := \{x \in C_T : x - \text{абсолютно непрерывна}\} \to C_T, \quad lx = x',$$

и при каждом $\lambda \in [0,T]$ оператор Немыцкого

$$G(\cdot,\lambda) = G_H(\cdot,\lambda) : C_T \to C_T, \quad (G_H x)(t) = H(t,x,\lambda).$$

Нетрудно проверить (см., например, [13]), что $G(\cdot,\lambda)$ является семейством l-компактных операторов, а l — линейным фредгольмовым оператором нулевого индекса.

Запишем (4.5) в абстрактном виде как

$$lx = G(x,\lambda) \tag{4.8}$$

или

$$lx = -(1-\lambda)\operatorname{grad} V(x) + \lambda f(\cdot, x).$$

По свойству гомотопической инвариантности топологической степени совпадения

$$\deg(l, H(\cdot,1), \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0}), 0) = \deg(l, H(\cdot,0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0}), 0).$$

Из условий 1 и 4 следует, что

$$|\deg(l, H(\cdot,0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}_0}), 0)| = |\deg(\operatorname{grad} V, \overline{\mathcal{V}_0}, 0)| \neq 0.$$

Тогда из свойства существования точки совпадения заключаем, что

$$l(x) = G(x,\lambda) \quad \text{для} \;\; x \in \Gamma(\mathcal{V}_0).$$

б). Пусть теперь условия 2 и 3 имеют место на множестве $V^{-1}(0)$.

Идея доказательства в этом случае состоит в построении последовательности отображений $f_m : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ таких, что

$$\|f_m(t,x)\| \leqslant 2\alpha_\rho(t) + 1 \quad \text{почти для всех} \quad t \in [0,T], x \in \overline{\mathcal{V}_0};$$

$$\lim_{\|m\|\to\infty} f_m(t,x) = f(t,x)$$

и

$$(\operatorname{grad} V(x), f_m(t,x)) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (t,x) \in ([0,T] \setminus N) \times \overline{\mathcal{V}_0},$$

где $N \subset [0,T]$ — множество меры нуль. В силу непрерывности отображений $\operatorname{grad} V$ и f_m последнее неравенство истинно для всех $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\mathcal{V}_0}$.

Рассматривается периодическая задача для следующего вспомогательного дифференциального уравнения

$$x'(t) = f_m(t, x(t)) \quad \text{п.в.} \quad t \in [0,T], \tag{4.9}$$

$$x(0) = x(T). \tag{4.10}$$

В силу первой части (а) доказательства теоремы задача (4.9)-(4.10) имеет по крайней мере одно T-периодическое решение $x_m^*(\cdot)$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем искомое решение $x^*(\cdot)$ задачи (4.1)-(4.2) как предельную точку последовательности $x_m^*(\cdot)$ решений (4.9)-(4.10). □

4.2. Усредненная направляющая функция на заданном множестве. Пусть, как и раньше, $D \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество.

Определение 4.2. Непрерывно дифференцируемая функция $V : D \to \mathbb{R}$ называется усредненной направляющей функцией на D для уравнения (4.1), если

$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x(s)), f(s, x(s)))ds \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \Gamma(D). \tag{4.11}$$

Замечание 4.1. Всякая обобщенная направляющая функция на D для уравнения (4.1) является для него усредненной направляющей функцией на D. Обратное, вообще говоря, неверно.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что выполняются следующие условия*:

1. $\mathcal{V}_0$ *и* $\mathcal{V}_r$ *являются непустыми, открытыми, ограниченными множествами, где*
$$r = \max\{T \max_{u \in V^{-1}(0)} \|\operatorname{grad} V(u)\|^2, \max_{u \in V^{-1}(0)} \int\limits_0^T |(\operatorname{grad} V(u), f(t, u))|dt\};$$
2. V *является усредненной направляющей функцией на множестве* $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{V}_0$ *для уравнения* (4.1);
3. $\operatorname{grad} V(x) \neq 0$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{V}_0$;
4. $\deg(\operatorname{grad} V, \mathcal{V}_0, 0) \neq 0$.

Тогда уравнение (4.1) *имеет по крайней мере одно T-периодическое решение* $x \in \Gamma(\mathcal{V}_r \cup V^{-1}(r))$.

Доказательство. Снова рассмотрим гомотопию $H : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, заданную следующим образом:
$$H(t, x, \lambda) = -(1 - \lambda)\operatorname{grad} V(x(t)) + \lambda f(t, x(t)).$$

Пусть x — некоторое решение задачи
$$x'(t) = H(t, x, \lambda), \quad \lambda \in [0, 1), \tag{4.12}$$
$$x(0) = x(T). \tag{4.13}$$
Если допустить, что $V(x(t)) \geqslant 0$ при всех $t \in [0, T]$, то, учитывая периодичность решения и предположение 2, получим

$$0 = V(x(T)) - V(x(0)) = \int\limits_0^T V'(x(s))ds = \int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x(s)), x'(s))ds =$$

$$= -(1 - \lambda) \int\limits_0^T \|\operatorname{grad} V(x(s))\|^2 ds + \lambda \int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x(s)), f(s, x(s)))ds < 0.$$

Из полученного противоречия следует, что найдется $t_0 \in [0, T]$ такое, что
$$V(x(t_0)) < 0, \tag{4.14}$$
то есть такое, что $x(t_0) \in \mathcal{V}_0$. Если
$$V(x(t)) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [0, T],$$
то из предположения 1 мы имеем априорную оценку для этого решения уравнения (4.12). В противном случае, найдется $\tau \in [0, T]$ такое, что $V(x(\tau)) > 0$ и, следовательно,
$$\max_{t \in [0, T]} V(x(t)) = V(x(\tau)) > 0. \tag{4.15}$$
Из (4.14) и (4.15) следует существование $\sigma \in [0, T]$ такого, что или
$$\sigma < \tau, \quad V(x(\sigma)) = 0, \quad V(x(t)) > 0 \quad \text{для } t \in (\sigma, \tau], \tag{4.16}$$

или

$$\tau < \sigma, \quad V(x(\sigma)) = 0, \quad V(x(t)) > 0 \quad \text{для } t \in [\tau, \sigma). \tag{4.17}$$

Для определенности рассмотрим случай, когда выполняется (4.16) (случай, когда выполняется (4.17), рассматривается аналогично). Предположим сначала, что $\tau \neq 0$ (и $\tau \neq T$) и для каждого положительного целого n такого, что $\tau + \dfrac{1}{n} < T$, определим непрерывную функцию $x_n : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ как

$$x_n(t) = \begin{cases} x(\sigma), & \text{если } t \in [0, \sigma], \\ x(t), & \text{если } t \in (\sigma, \tau], \\ x(\tau + n(\sigma - \tau)(t - \tau)), & \text{если } t \in (\tau, \tau + \frac{1}{n}], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in (\tau + \frac{1}{n}, T]. \end{cases}$$

В случае, когда $\tau = 0$ и функция $V(x(\cdot))$ достигает своего максимума в точках 0 и T, мы определим $x_n(\cdot)$ для достаточно больших n таких, что $0 + \dfrac{1}{n} < \sigma$, следующим образом:

$$x_n(t) = \begin{cases} x(\tau + n(\sigma - \tau)t), & \text{если } t \in [0, \frac{1}{n}], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in (\frac{1}{n}, \sigma], \\ x(t), & \text{если } t \in (\sigma, T]. \end{cases}$$

В каждом случае $x_n(\cdot)$ является последовательностью непрерывных и T-периодических функций таких, что $0 \leqslant V(x_n(t)) \leqslant V(x(\tau))$, сходящейся на $[0, T]$ к функции $\xi(\cdot)$, определенной как

$$\xi(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in [\sigma, \tau], \\ x(\sigma), & \text{если } t \in [0, T] \setminus [\sigma, \tau] \end{cases}$$

и такой, что $0 \leqslant V(\xi(t)) \leqslant V(x(\tau))$. Из предположения 2 для всех достаточно больших n имеем

$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(x_n(s), f(s, x_n(s)))ds \leqslant 0.$$

Но тогда

$$\int\limits_0^T (\operatorname{grad} V(\xi(s), f(s, \xi(s))))ds \leqslant 0,$$

и мы получаем, что

$$0 > \left(\int\limits_\sigma^\tau + \int\limits_{[0,T] \setminus [\sigma, \tau]} \right) \left[-(1 - \lambda) \|\operatorname{grad} V(\xi(s))\|^2 + \lambda (\operatorname{grad} V(\xi(s)), f(s, \xi(s))) \right] ds =$$

$$= \int\limits_\sigma^\tau \frac{d}{dt} V(x(s))ds + \int\limits_{[0,T] \setminus [\sigma, \tau]} \left[-(1 - \lambda) \|\operatorname{grad} V(\xi(s))\|^2 + \lambda (\operatorname{grad} V(\xi(s)), f(s, \xi(s))) \right] ds =$$

$$= V(x(\tau)) + \int\limits_{[0,T] \setminus [\sigma, \tau]} \left[-(1 - \lambda) \|\operatorname{grad} V(x(\sigma))\|^2 + \lambda (\operatorname{grad} V(x(\sigma), f(s, x(\sigma))) \right] ds.$$

Отсюда ввиду предположения 1 имеем

$$V(x(\tau)) < \int\limits_{[0,T] \setminus [\sigma, \tau]} \left[(1 - \lambda) \|\operatorname{grad} V(x(\sigma))\|^2 - \lambda (\operatorname{grad} V(x(\sigma), f(s, x(\sigma))) \right] ds \leqslant$$

$$\leqslant \max\{T \max_{u \in V^{-1}(0)} \|\operatorname{grad} V(u)\|^2, \max_{u \in V^{-1}(0)} \int\limits_0^T |(\operatorname{grad} V(u), f(t, u))| dt\} = r.$$

Следовательно, неравенство $V(x(t)) < r$ верно для возможных решений уравнения (4.12) и для всех $t \in [0, T]$.

Таким образом, или задача (4.1)-(4.2) имеет решение на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_r)$, и в этом случае теорема доказана, или для любого $\lambda \in [0,1]$ задача (4.12)-(4.13) не имеет решения на $\partial\Gamma(\mathcal{V}_r)$. Тогда, рассматривая уравнение, аналогичное (4.8), и повторяя приведенные в доказательстве теоремы 4.1 рассуждения, получаем

$$\deg(l, H(\cdot,1), \Gamma(\overline{\mathcal{V}_r}), 0) = \deg(l, H(\cdot,0), \Gamma(\overline{\mathcal{V}_r}), 0) = |\deg(\operatorname{grad} V, \overline{\mathcal{V}_r}, 0)| \neq 0.$$

Тогда утверждение теоремы следует из свойства существования точки совпадения. □

Следствие 4.1. *Пусть для некоторого* $r > 0$ *непрерывно дифференцируемая функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является усредненной направляющей функцией на* $\mathbb{R}^n \setminus B(r)$ *для уравнения* (4.1) *и выполнено условие*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} V(x) = \pm\infty.$$

Тогда задача (4.1)-(4.2) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

4.3. Асимптотически усредненная направляющая функция на заданном множестве. Результаты пункта 4.2 могут быть обобщены в следующем направлении.

Определение 4.3. Непрерывно дифференцируемая функция $V : D \to \mathbb{R}$ называется асимптотически усредненной направляющей функцией для уравнения (4.1), если существует функция $\alpha(\cdot) \in L^1_+([0,T], \mathbb{R})$ такая, что выполнены следующие условия:

1. $(\operatorname{grad} V(x), f(t,x)) \leqslant \alpha(t)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и почти для всех $t \in [0,T]$;
2. $\int\limits_0^T \lim \sup\limits_{\|x\|\to\infty} (\operatorname{grad} V(x(s)), f(s, x(s)))ds < 0.$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Для достаточно большого* $r > 0$ *всякая асимптотически усредненная направляющая функция для уравнения* (4.1) *является для него усредненной направляющей функцией на* $\mathbb{R}^n \setminus B(r)$.

Следствие 4.2. *Пусть непрерывно дифференцируемая функция* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *является асимптотически усредненной направляющей функцией для уравнения* (4.1) *и выполнено условие*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} V(x) = \pm\infty.$$

Тогда задача (4.1)-(4.2) *имеет по крайней мере одно* T*-периодическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2011.
2. *Звягин В.Г.* Введение в топологические методы нелинейного анализа: учебное пособие. — Воронеж: ВГУ, 2014.
3. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* Об интегральных направляющих функциях для функционально-дифференциальных включений// В сб. «Топологические методы нелинейного анализа». — Воронеж, 2000. — С. 87–107.
4. *Корнев С.В.* О методе многолистных направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений// Автоматика и телемеханика. — 2003. — № 3. — С. 72–83.
5. *Корнев С.В., Обуховский В.В.* О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2009. — № 5. — С. 23–32.
6. *Красносельский М.А., Перов А.И.* Об одном принципе существования ограниченных, периодических и почти периодических решений у систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1958. — *123*, № 2. — С. 235–238.
7. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1966.
8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.
9. *Перов А.И., Евченко В.К.* Метод направляющих функций. — Воронеж: ВГУ, 2012.
10. *Рачинский Д.И.* Вынужденные колебания в системах управления в условиях, близких к резонансу// Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 11. — С. 87–98.

11. *Fonda A.* Guiding functions and periodic solutions to functional differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1987. — *99*, № 1. — С. 79–85.
12. *Krasnoselskii A. M., Krasnoselskii M. A., Mawhin J., Pokrovskii A.* Generalized guiding functions in a problem on high frequency forced oscillations// Nonlinear Anal. — 1994. — *22*, № 11. — С. 1357–1371.
13. *Mawhin J. L.* Topological degree methods in nonlinear boundary value problems// CBMS Regional Conf. Ser. in Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I. — 1977. — № 40.
14. *Mawhin J., Thompson H. B.* Periodic or bounded solutions of Carathéodory systems of ordinary differential equations// J. Dynam. Differ. Equ. — 2003. — *15*, № 2-3. — С. 327–334.
15. *Mawhin J., Ward James R. Jr.* Guiding-like functions for periodic or bounded solutions of ordinary differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2002. — *8*, № 1. — С. 39–54.
16. *Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S.* Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. — Berlin: Springer, 2013.
17. *Rachinskii D. I.* Multivalent guiding functions in forced oscillation problems// Nonlinear Anal. — 1996. — *26*, № 3. — С. 631–639.

В. Г. Звягин
394006, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: zvg@math.vsu.ru

С. В. Корнев
394043, Россия, г. Воронеж, ул. Ленина, 86
E-mail: kornev_vrn@rambler.ru