Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 43–58

УДК 517.956.4

# О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2015 г. **Е. В. ГОЛУБЕВА, Ю. А. ДУБИНСКИЙ**

Аннотация. Устанавливается корректная разрешимость нестандартных краевых задач для систем уравнений эллиптического и параболического типов с векторными граничными условиями. Приведены характерные примеры.

В представленной работе, являющейся расширенным изложением доклада [4], рассматриваются две нестандартные краевые задачи для систем эллиптических и параболических уравнений второго порядка.

Эти задачи можно рассматривать как некоторые «промежуточные» задачи между задачей Дирихле и задачей Неймана, поскольку граничные условия налагаются как на значения искомого решения $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x)), m \geqslant 2$, так и на значения вектора конормальных производных $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial \nu}(x), .., \dfrac{\partial u_m}{\partial \nu}(x)\right)$.

В частном случае системы уравнений Пуассона в области $G \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma$ предлагаемые задачи суть

$$-\Delta u = h, \quad x \in G,$$
$$(u, n)_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0$$

и

$$-\Delta u = h, \quad x \in G,$$
$$[u, n]_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0,$$

где $n = (n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ — вектор единичной нормали на границе $\Gamma$, $(\cdot, \cdot)$ — символ скалярного произведения, а $[\cdot, \cdot]$ символ векторного произведения в $\mathbb{R}^3$.

Аналогичные краевые условия рассматриваются и для систем параболических уравнений.

Как видно, предлагаемые условия на границе носят системный характер, то есть не распадаются (в отличие от условий Дирихле или Неймана) на индивидуальные условия для каждой компоненты искомого решения.

Столь же видно, что условие $(u, n)_\Gamma = 0$ означает, что $u_{\mathrm{norm}}(x)|_\Gamma = 0$, а условие $\left[\dfrac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0$ означает, что $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}(x)\right)_{\mathrm{tang}}\Big|_\Gamma = 0$, где $u_n(x)$ — нормальная часть вектора $u(x)$, а $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}(x)\right)_{\mathrm{tang}}$ — тангенциальная часть вектора $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x)$ в разложении соответствующих векторов в сумму нормальной и тангенциальной составляющих. Именно в такой форме ставятся краевые задачи в случае произвольной размерности области $G \subset \mathbb{R}^m$ и систем уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.

Основным результатом работы является корректность поставленных задач в смысле Адамара—Петровского.

---

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (соглашение № 14-11-00306) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ 2081.2014.1).

## 1. Постановка задач

Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ — ограниченная область с гладкой или кусочно-гладкой границей Г. В области $G$ рассматривается система дифференциальных уравнений второго порядка

$$-\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = h, \quad x \in G,$$

где $a_{ij}(x) \equiv a_{ji}(x)$ — непрерывные функции в замыкании области $\bar{G}$, $u(x) = (u_1(x),..,u_m(x))$ — искомая вектор-функция, а $h(x) = (h_1(x),..,h_m(x))$ задана.

Наша цель — изучить две краевые задачи, граничные условия в которых имеют системный характер в том смысле, что (в отличие от задачи Дирихле и задачи Неймана) они не сводятся к граничным условиям на каждую компоненту $u_1(x),..,u_m(x)$ в отдельности.

Для формулировки этих задач напомним понятие конормали к границе Г, отвечающей симметричной матрице $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1,..,m)$.

Именно, вектором, конормальным к границе Г, называется вектор $\nu(x) = (\nu_1(x),..,\nu_m(x))$, где

$$\nu_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x) cos(n, x_j),$$

$\vec{n}(x) = (n_1(x),..,n_m(x))$ — единичный вектор внешней нормали к границе Г.

Легко видеть, что при условии эллиптичности уравнения, то есть при условии

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0, \ \xi \in \mathbb{R}^m,$$

вектор конормали не обращается в нуль и трансверсален границе Г. Нормированный вектор в направлении конормали обозначим символом $\nu_0 = \nu_0(x)$.

Постановка рассматриваемых ниже задач следующая.

**Задача 1.** Найти решение системы

$$-\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = h, \quad x \in G, \tag{1.1}$$

при условиях на границе Г

$$u_{\text{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\text{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.3}$$

**Задача 2.** Найти решение системы

$$-\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = h, \quad x \in G,$$

при условиях на границе Г

$$u_{\text{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\text{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma.$$

В указанных условиях символы $u_{\text{norm}}$ и $u_{\text{tang}}$ означают «нормальную» и «тангенциальную» составляющие вектора $u(x)$, $x \in \Gamma$, в ортогональном разложении

$$u(x) = \big(u(x)\big)_{\text{norm}} + \big(u(x)\big)_{\text{tang}},$$

где $\big(u(x)\big)_{\text{norm}} = \big(u(x), \nu_0(x)\big)\nu_0(x)$, а $\big(u(x)\big)_{\text{tang}} = u(x) - \big(u(x)\big)_{\text{norm}}$.

Аналогично для вектора

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(x),.., \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(x)\right),$$

где

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x), \quad k = 1,..,m,$$

есть производная компоненты $u_k(x)$ искомого решения по конормали.

Ясно, что граничные условия в задачах 1 и 2 могут быть записаны в форме:

$$\big(u(x), \nu_0(x)\big) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \nu_0\right) \nu_0(x) \quad \text{(задача 1)}\ ,$$

$$u(x) = \big(u(x), \nu_0(x)\big)\nu_0(x), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \nu_0(x)\right) = 0 \quad \text{(задача 2)}\ .$$

Основной результат нижеследующего текста — доказательство корректности обеих задач в смысле Адамара—Петровского.

## 2. Необходимые пространства и неравенства

Пусть $W_2^1 \equiv W_2^1(G)$ — пространство Соболева вектор-функций $u(x) = (u_1(x),..,u_m(x))$ с нормой

$$||u||_1 = ||u||_0 + ||\nabla u||_0,$$

где $||u||_0$ — норма в пространстве Лебега $L_2$ в области $G$, а

$$||\nabla u||_0 = \sum_{i=1}^{m} ||\nabla u_i||_0$$

— норма градиента вектор-функции $u(x)$ в $L_2$.

Пусть $\bar{G} = G \cup \Gamma$ и $C^1_{\text{tang}}(\bar{G})$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций $u(x) = (u_1(x),..,u_m(x))$ таких, что $(u, \nu_0)_\Gamma = 0$ в точках границы $\Gamma$.

Обозначим через $W^1_{2,\text{tang}}$ замыкание $C^1_{\text{tang}}(\bar{G})$ по норме пространства $W_2^1$. Как известно, каждая компонента $u_j(x)$, $j = 1,..,m$, имеет на границе след $u_j|_\Gamma \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Тем самым на границе почти всюду определено и скалярное произведение $(u, \nu_0)_\Gamma$, причем $(u, \nu_0)_\Gamma = 0$. Это означает, что вектор-функции $u \in W^1_{2,\text{tang}}$ имеют на границе $\Gamma$ тривиальную конормальную составляющую.

Пространство $W^1_{2,\text{tang}}$ является основным пространством при решении задачи 1.

Аналогично для решения задачи 2 вводится пространство $W^1_{2,\text{norm}}$, состоящее из вектор-функций, которые на границе $\Gamma$ коллинеарны конормали $\nu_0(x)$.

Так как изучение обеих задач в целом параллельно, рассмотрим детально, например, задачу 1.

Вначале сформулируем требуемые условия на область $G$ и ее границу $\Gamma$.

**Определение 2.1.** Область $G \subset \mathbb{R}^m$ называется допустимой, если выполнены два условия:

1. вложение $W_2^1 \subset L_2$ компактно,
2. множество конормальных векторов $\nu_0 = \nu_0(x)$ на границе $\Gamma$ содержит хотя бы один базисный набор, то есть $m$ линейно независимых векторов.

Применительно к задаче 1 важное значение имеет следующая

**Лемма 2.1.** *Пусть область $G$ допустима в смысле определения 2.1. Тогда в пространстве $W_2^1$ норма $||u||_1 = ||u||_0 + ||\nabla u||_0$ и норма*

$$||u||_{1,\text{norm}} = ||\nabla u||_0 + \left(\int_\Gamma |u_{\text{norm}}|^2 d\gamma\right)^{1/2},$$

*или, что то же,*

$$||u||_{1,\text{norm}} = ||\nabla u||_0 + \left(\int_\Gamma (u, \nu_0)^2 d\gamma\right)^{1/2},$$

*эквивалентны.*

*Доказательство.* Неравенство $||u||_{1,\mathrm{norm}} \leqslant M||u||_1$ ($M > 0$ — константа) очевидно, так как всякая функция $u \in W_2^1$ имеет на границе $\Gamma$ след $u\Big|_\Gamma \in W_2^{1/2}(\Gamma)$, при этом

$$||u\Big|_\Gamma||_0 \leqslant M||u\Big|_\Gamma||_{1/2} \leqslant M||u||_1.$$

Для доказательства обратного неравенства $||u||_1 \leqslant M||u||_{1,\mathrm{norm}}$ предположим противное. Это означает, что найдется последовательность функций $u_n \in W_2^1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что

а) $||u_n||_1 = 1,\ n = 1, 2, \dots,$

б) $||u_n||_{1,\mathrm{norm}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Из первого свойства допустимой области, т. е. из компактности вложения $W_2^1 \subset L_2$, получаем (строго говоря, переходя к подпоследовательности), что последовательность $u_n(x)$ сходится сильно в $L_2$ к некоторой функции $u \in L_2$. В то же время из б) следует, что $||\nabla u_n||_0 \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, $u \in W_2^1$ и $\nabla u(x) = 0$. Тем самым $u = (c_1, .., c_m)$ — некоторый постоянный вектор. В итоге $u_n \to \vec{c} = (c_1, .., c_m)$ в пространстве $W_2^1$.

Покажем, что $\vec{c} = 0$. Действительно, из б) получается, что

$$\int\limits_\Gamma (\vec{c}, \nu_0)^2 d\gamma = 0,$$

т. е. $(\vec{c}, \nu_0)_\Gamma = 0$.

Поскольку область $G$ — допустимая, то в силу свойства 2 это возможно лишь в случае $\vec{c} = (c_1, .., c_m) = 0$, что и требовалось.

С другой стороны, в силу равенств а) будем иметь $||\vec{c}||_1 = ||\vec{c}||_0 = 1$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение. □

**Следствие 2.1.** *Если область $G$ допустима, то для любой функции $u \in W_2^1$ справедливо неравенство типа неравенства Фридрихса*

$$||u||_0^2 \leqslant M\left(||\nabla u||_0^2 + \int\limits_\Gamma (u, \nu_0)^2 d\gamma\right) \equiv M\left(||\nabla u||_0^2 + \int\limits_\Gamma |u_{\mathrm{norm}}|^2 d\gamma\right)$$

*в том числе для $u \in W_{2,\mathrm{tang}}^1$*

$$||u||_0^2 \leqslant M||\nabla u||_0^2,$$

*где $M > 0$ — постоянная.*

**Следствие 2.2.** *В пространстве $W_{2,\mathrm{tang}}^1$ норма $||u||_1$ и норма $||\nabla u||_0$ эквивалентны.*

## 3. Основные теоремы

Обратимся непосредственно к разрешимости краевой задачи (1.1)–(1.3), или, что то же, задачи

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = h, \quad x \in G,$$

$$\big(u(x)\nu_0(x)\big) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, \nu_0(x)\right)\nu_0(x), \quad x \in \Gamma,$$

где $\nu_0(x)$ — нормированный вектор конормали.

Напомним, что коэффициенты $a_{ij}(x)$ предполагаются непрерывными функциями в области $\bar{G} = G \cup \Gamma$, при этом $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $(i, j = 1, .., m)$ и соответствующая матрица является положительно определенной.

**Определение 3.1.** Вектор-функция $u \in W_{2,\mathrm{tang}}^1$ называется обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), если для любой функции $v \in W_{2,\mathrm{tang}}^1$ справедливо интегральное равенство

$$\sum_{i,j=1}^m \int\limits_G \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right) dx = \int\limits_G (h, v) dx. \tag{3.1}$$

Нетрудно видеть, что гладкое решение задачи (1.1)–(1.3) является и обобщенным решением, то есть удовлетворяет тождеству (3.1), и наоборот, если обобщенное решение оказалось гладкой функцией, то оно является классическим решением задачи (1.1)–(1.3).

Действительно, в первом случае, умножая уравнения (1.1) на произвольную вектор-функцию $v \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$ и интегрируя по частям, приходим к тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_G \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - \int\limits_\Gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right) d\gamma = \int\limits_G (h, v) dx.$$

В силу граничных условий (1.2), (1.3) скалярное произведение $\left( \dfrac{\partial u}{\partial \nu}, v \right) \equiv 0$ на границе $\Gamma$. Следовательно, $u(x)$ является обобщенным решением.

Обратно, если обобщенное решение $u \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$ есть гладкая функция, то, выбирая в тождестве (3.1) $v \in C_0^\infty(G)$ и интегрируя по частям, убеждаемся, что $u(x)$ удовлетворяет уравнениям (1.1) в смысле обобщенных функций и тем самым, будучи гладкой функцией, — в классическом смысле.

Полагая теперь в (3.1) $v(x)$ произвольной вектор-функцией из пространства $W^1_{2,\mathrm{tang}}$ и вновь интегрируя по частям, приходим к тождеству

$$\int\limits_\Gamma \left( \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right) d\gamma = 0, \quad v \in W^1_{2,\mathrm{tang}}.$$

Это означает, что в граничных точках тангенциальная составляющая вектор-функции $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ равна нулю, то есть выполнено условие (1.3). Таким образом, $u(x)$ — классическое решение задачи (1.1)–(1.3).

В итоге мы можем констатировать, что определение 3.1 корректно.

Дополнительно отметим, что из приведенных рассуждений следует, что если $u \in W_2^1$ и при этом

$$Lu \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \in L_2,$$

то граничный вектор $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x)$, $x \in \Gamma$, приобретает смысл линейного непрерывного функционала над пространством $W_2^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, значение которого на следе $v(x)|_\Gamma$ функции $v \in W_2^1$ определяется формулой

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v|_\Gamma \right\rangle = \int\limits_G (Lu, v) dx - \int\limits_G \left( \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx.$$

Условие (1.3) выражается отбрасыванием в этом равенстве граничного слагаемого, что и отражено в определении обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3).

**Определение 3.2.** Скажем, что задача (1.1)–(1.3) корректна, если для любой функции $h \in L_2$ существует единственное обобщенное решение $u \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$, причем

$$||u||_1 \leqslant M||h||_0,$$

где $M > 0$ — постоянная.

**Теорема 3.1.** *Задача* (1.1)–(1.3) *корректна тогда и только тогда, когда для любой функции* $u \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$ *справедливо неравенство*

$$||u||_0 \leqslant M||\nabla u||_0, \tag{3.2}$$

*где* $M > 0$ — *постоянная.*

*Доказательство.* Вначале установим необходимость неравенства (3.2). Допустим, что задача (1.1)–(1.3) корректна в смысле определения 3.2, выберем произвольно $h \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$ и обозначим через $u_h(x)$ соответствующее решение задачи (1.1)–(1.3). Это означает, что для любой функции $v \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$

$$\int\limits_G \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_G (h, v) dx,$$

причем

$$||u_h||_1 \leqslant M ||h||_{L_2}, \tag{3.3}$$

где $M > 0$ — постоянная. Положим $v(x) = h(x)$. Тогда получим

$$\int\limits_G (h, h) dx = \int\limits_G \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u_h}{\partial x_j}, \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) dx,$$

и, следовательно,

$$||h||_0^2 \leqslant M ||\nabla u_h||_0 ||\nabla h||_0,$$

где постоянная $M$ зависит от коэффициентов $a_{ij} \in C(\bar{G})$. Отсюда, используя неравенство (3.3), получаем, что

$$||h||_0 \leqslant M ||\nabla h||_0.$$

Это и требуется.

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (3.2). Докажем, что задача (1.1)–(1.3) корректна.

Существование решения устанавливается, например, методом Галеркина, причем наличие неравенства (3.2) позволяет провести доказательство стандартно. В связи с этим будем кратки.

Выберем базисную систему вектор-функций $v_1(x), v_2(x), ..$ в пространстве $W^1_{2,\mathrm{tang}}$ и определим последовательность приближенных решений в виде

$$u_N(x) = c_{1N} v_1(x) + \ldots + c_{NN} v_N(x), \quad N = 1, 2, ..,$$

где постоянные $c_{1N}, .., c_{NN}$ определяются из моментных уравнений Галеркина

$$\sum_{i,j=1}^m \int\limits_G \left( a_{ij} \frac{\partial u_N}{\partial x_j}, \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_G (h, v_k) dx, \quad k = 1, .., N.$$

В силу положительной определенности матрицы $a_{ij}(x)$ $(i, j = 1, .., m)$ получаем оценку

$$||\nabla u_N||_0 \leqslant M ||h||_0 \quad (M > 0),$$

которая в силу предположенного неравенства (3.2) эквивалентна неравенству

$$||u_N||_1 \leqslant M ||h||_0.$$

Тем самым в пространстве $W^1_{2,\mathrm{tang}}$ можно выбрать подпоследовательность последовательности $u_N(x)$, сходящуюся слабо к некоторой функции $u \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$, причем $||u||_1 \leqslant M ||h||_0$. Найденная функция и является обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3).

Единственность решения очевидна. Теорема полностью доказана. □

Ясно, что с точки зрения разрешимости задачи (1.1)–(1.3) теорема 3.1 носит условный характер, однако, учитывая лемму 2.1, в качестве следствия получаем «безусловную» теорему.

**Теорема 3.2.** *Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — тангенциально допустимая область. Тогда задача* (1.1)–(1.3) *корректна, то есть однозначно разрешима, и справедлива оценка*

$$||u||_0 + ||\nabla u||_0 \leqslant M ||h||_0 \quad (M > 0).$$

Рассмотрим теперь задачу 2: найти решение системы уравнений

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = h, \quad x \in G, \tag{3.4}$$

при граничных условиях

$$u_{\mathrm{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma, \tag{3.5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\mathrm{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{3.6}$$

Как и в изучении задачи 1, здесь ключевую роль играет системное неравенство типа неравенства Фридрихса

$$||u||_0^2 \leqslant M \left( ||\nabla u||_0^2 + \int\limits_\Gamma |u_{\mathrm{tang}}|^2 d\gamma \right), \tag{3.7}$$

где $u \in W_2^1$ — произвольная функция, $M > 0$ — постоянная.

Доказательство этого неравенства проводится точно так же, как и доказательство неравенства

$$||u||_0^2 \leqslant M \left( ||\nabla u||_0^2 + \int\limits_\Gamma |u_{\mathrm{norm}}|^2 d\gamma \right),$$

с тем лишь отличием, что допустимой областью является область $G$, удовлетворяющая условиям:

1. вложение $W_2^1 \subset L_2$ компактно,
2. множество конормалей $\nu(x)$, $x \in \Gamma$, содержит хотя бы одну неколлинеарную пару.

Далее вводится пространство

$$C^1_{\mathrm{norm}}(\bar{G}) = \{u \in C^1(\bar{G}) : \ (u(x)|_\Gamma)_{\mathrm{tang}} = 0\}$$

или, что то же,

$$C^1_{\mathrm{norm}}(\bar{G}) = \{u \in C^1(\bar{G}) : \ u(x) = \big(u(x), \nu_0(x)\big)\nu_0(x), \ x \in \Gamma\},$$

определяется пространство $W^1_{2,\mathrm{norm}}$ как замыкание $C^1_{\mathrm{norm}}(\bar{G})$ по норме $W_2^1$, даются соответствующие определения обобщенного решения задачи (3.4)–(3.6) и ее корректности по Адамару—Петровскому.

**Теорема 3.3.** *Задача* (3.4)–(3.6) *корректна тогда и только тогда, когда справедливо неравенство* (3.7).

**Теорема 3.4.** *Если область $G$ допустима, то задача* (3.4)–(3.6) *корректна.*

Доказательство теорем повторяет доказательство теорем 3.1, 3.2 с очевидными изменениями, и мы на них не останавливаемся.

## 4. Система уравнений Пуассона

В области $G \subset \mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma$ рассматривается система уравнений Пуассона

$$-\Delta u = h, \quad x \in G, \tag{4.1}$$

где $u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $h(x) = (h_1(x), h_2(x), h_3(x))$. В этом случае конормаль есть обычная нормаль $n = (n_1, n_2, n_3)$ в граничных точках, а ортогональное разложение трехмерного вектора $u = (u_1, u_2, u_3)$ представляется в виде суммы

$$u = (u, n)n + [n, [u, n]],$$

где $(\cdot, \cdot)$ и $[\cdot, \cdot]$ суть скалярное и векторное произведения в $\mathbb{R}^3$.

Учитывая это разложение, задачу 1 и задачу 2 можно эквивалентно записать в следующем виде.

**Задача 1.** Найти решение системы (4.1) при условиях

$$(u, n)_\Gamma = 0, \tag{4.2}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0, \tag{4.3}$$

где $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial n}, \dfrac{\partial u_2}{\partial n}, \dfrac{\partial u_3}{\partial n}\right)$ — вектор нормальных производных от компонент искомого решения.

**Задача 2.** Найти решение системы (4.1) при условиях

$$[u,n]_\Gamma = 0, \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0. \tag{4.5}$$

Соответствующие интегральные неравенства типа неравенства Фридрихса принимают вид

$$\int\limits_G |u(x)|^2 dx \leqslant M \left( \int\limits_G |\nabla u(x)|^2 dx + \int\limits_\Gamma (u,n)^2 d\gamma \right)$$

и

$$\int\limits_G |u(x)|^2 dx \leqslant M \left( \int\limits_G |\nabla u(x)|^2 dx + \int\limits_\Gamma |[u,n]|^2 d\gamma \right),$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от выбора функции $u \in W_2^1$.

Таким образом, в допустимых областях задача 1 и задача 2 корректны в смысле Адамара—Петровского (соответствующие формулировки не вызывают затруднений).

В заключение приведем конкретные примеры допустимых областей и соответствующих задач.

**Пример 4.1.** Пусть $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 < x_i < 1,\ i = 1,2,3\}$ — куб с границей $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x_i| = 1,\ i = 1,2,3\}$. В этом случае в задаче 1 граничные условия $(u,n) = 0$ и $\left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0$ имеют вид:

$$u_3|_{x_3=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm1} = 0$$

(нижняя и верхняя грани куба);

$$u_2|_{x_2=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\pm1} = 0,$$

$$u_1|_{x_1=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm1} = 0$$

(боковые грани куба).

Для второй задачи условия $[u,n]_\Gamma = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0$ суть

$$u_1|_{x_3=\pm1} = 0, \quad u_2|_{x_3=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\Big|_{x_3=\pm1} = 0$$

(нижняя и верхняя грани куба);

$$u_1|_{x_2=\pm1} = 0, \quad u_3|_{x_2=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|_{x_2=\pm1} = 0,$$

$$u_2|_{x_1=\pm1} = 0, \quad u_3|_{x_1=\pm1} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm1} = 0$$

(боковые грани куба).

**Пример 4.2.** Пусть $G = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$ — единичный шар, $S_1$ — его граница. Тогда рассмотренные задачи имеют вид:

**Задача 1.**

$$\Delta u = h,\ x \in G,$$

$$(u, \vec{r}) = 0,\ x \in S_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}, \vec{r}\right)\vec{r},\ x \in S_1.$$

**Задача 2.**

$$\Delta u = h,\ x \in G,$$
$$u = (u, \vec{r})\vec{r},\ x \in S_1,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}, \vec{r}\right) = 0,\ x \in S_1.$$

Здесь $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки $x$, $r = |x|$.

Ясно, что квадрат и круг являются допустимыми областями, следовательно, поставленные задачи корректны.

Отметим, что случай двух пространственных переменных рассмотрен отдельно в работе [5].

## 5. Система уравнений параболического типа

Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ — ограниченная область с гладкой или кусочно-гладкой границей $\Gamma$. В цилиндре $Q_T = [0,T] \times G$ рассматриваются следующие задачи.

**Задача 3.** Найти решение $u(t,x) = \big(u_1(t,x), .., u_m(t,x)\big)$ системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = h, \quad t \in (0,T],\ x \in G, \tag{5.1}$$

при начальном условии

$$u(0,x) = 0, \quad x \in G \tag{5.2}$$

и граничных условиях

$$u_{\text{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T], \tag{5.3}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\text{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{5.4}$$

**Задача 4.** Найти решение системы (5.1) при начальном условии (5.2) и граничных условиях

$$u_{\text{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T],$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)_{\text{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T].$$

Здесь $a_{ij}(t,x) \equiv a_{ji}(t,x)$ — непрерывные функции в $\bar{Q}_T$ такие, что

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geqslant a_0|\xi|^2, \quad a_0 > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^m,$$

$h(t,x) = \big(h_1(t,x), .., h_m(t,x)\big)$ — заданная вектор-функция,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \nu}, .., \frac{\partial u_m}{\partial \nu}\right)$$

— производная по конормали $\nu(t,x) = (\nu_1(t,x), .., \nu_m(t,x))$ вектор-функции $u$, то есть

$$\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(t,x) = \sum_{i=1}^{m} \nu_i(t,x)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(t,x), \quad k = 1, .., m,$$

$$\nu_i(t,x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t,x)\cos(n, x_j),$$

$\vec{n}(x) = (n_1(x), .., n_m(x))$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\Gamma$. Нормированный вектор в направлении конормали обозначим символом $\nu_0 = \nu_0(t,x)$.

Символы $u_{\text{norm}}$ и $u_{\text{tang}}$ означают «нормальную» и «тангенциальную» составляющие вектора $u(t,x)$, $x \in \Gamma$, $t \in [0,T]$, в ортогональном разложении

$$u(t,x) = \big(u(t,x)\big)_{\text{norm}} + \big(u(t,x)\big)_{\text{tang}},$$

где $\big(u(t,x)\big)_{\text{norm}} = \big(u(t,x), \nu_0(t,x)\big)\nu_0(t,x)$, а $\big(u(t,x)\big)_{\text{tang}} = u(t,x) - \big(u(t,x)\big)_{\text{norm}}$.

Изучим более детально задачу 3. Ее разрешимость будет установлена в пространстве $L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$, то есть в пространстве векторнозначных функций $u:[0,T]\to W^1_{2,\mathrm{tang}}$, для которых

$$||u||_{L_2\left(0,T;W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)} = \left(\int\limits_0^T ||u(t)||^2_{W^1_2}dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Напомним, что через $W^1_{2,\mathrm{tang}}$ обозначено замыкание пространства $C^1_{\mathrm{tang}}(\bar{G})$ по норме пространства $W^1_2$.

**Определение 5.1.** Функция $u \in L_2\left(0,T;W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ называется обобщенным решением задачи (5.1)–(5.4), если

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;W^{-1}_2)$$

и

$$\forall \eta \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)\ \&\ \{\frac{\partial \eta}{\partial t} \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)\}\ \&\ \{\eta(T,x)=0,\quad \forall x\in G\} \tag{5.5}$$

выполнено интегральное равенство

$$-\int\limits_{Q_T}\left(u,\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)dxdt + \sum_{i,j=1}^m \int\limits_{Q_T}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\right)dxdt = \int\limits_{Q_T}(h,\eta)dxdt. \tag{5.6}$$

Обобщенная производная $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ понимается в смысле следующего определения.

**Определение 5.2.** Пусть $w \in L_2\left(0,T;\ W^{-1}_2\right)$. Элемент $v$ из пространства $L_2\left(0,T;\ W^{-1}_2\right)$ будем называть обобщенной производной функции $w$ по переменной $t$ и обозначать $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, если для любых функций $z\in C^\infty_0(0,T)$, $\phi \in W^1_{2,\mathrm{tang}}(G)$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^T z'(t)\int\limits_G (w(t,x),\phi(x))dxdt = -\int\limits_0^T z(t)\int\limits_G (v(t,x),\phi(x))dxdt.$$

Это определение отличается от общепринятого тем, что функция $\phi$ здесь берется из пространства $W^1_{2,\mathrm{tang}}(G)$, а не из $H^1_0(G)$.

Заметим, что в интегральном равенстве (5.6) содержится информация о производной решения по переменной $t$. Действительно, выбирая в этом равенстве $\eta(t,x)=z(t)\phi(x)$, где $z\in C^\infty_0(0,T)$, $\phi \in C^1_{\mathrm{tang}}(\bar{G})$, можно получить

$$-\int\limits_0^T z'(t)\int\limits_G (u(t,x),\phi(x))dxdt = \int\limits_0^T z(t)\int\limits_G \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(t,x)\right) + h(t,x),\phi(x)\right)dxdt.$$

Так как $C^1_{\mathrm{tang}}(\bar{G})$ плотно в $W^1_{2,\mathrm{tang}}$, то это равенство остается справедливым и при любой функции $\phi \in W^1_{2,\mathrm{tang}}$. Это означает, что функция $u(t,x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2\left(0,T;\ W^{-1}_2\right)$.

Покажем, что определение 5.1 корректно. Пусть $u(t,x)$ — регулярное решение задачи (5.1)–(5.4), то есть

$$u\in L_2(Q_T),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\in L_2(Q_T),\ i=1,..,m,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\in L_2(Q_T).$$

Тогда $u\in C(0,T;L_2(G))$ и равенство $u(0,x)=0$ для почти всех $x\in G$ имеет смысл. Граничным условиям функция $u$ удовлетворяет в смысле следов. Умножая уравнения (5.1) на произвольную вектор-функцию $\eta(t,x)$, удовлетворяющую условиям (5.5), и интегрируя по частям, приходим к равенству:

$$-\int\limits_{Q_T}\left(u,\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)dxdt+\sum_{i,j=1}^{m}\int\limits_{Q_T}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)dxdt-\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu},\eta\right)d\gamma dt=\int\limits_{Q_T}(h,\eta)dxdt.$$

В силу граничных условий (5.2), (5.3) скалярное произведение $\left(\dfrac{\partial u}{\partial\nu},\eta\right)\equiv 0$ на границе $\Gamma$. Следовательно, $u(t,x)$ удовлетворяет тождеству (5.6) и является обобщенным решением.

Обратно, если обобщенное решение $u\in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ таково, что $\dfrac{\partial^2u}{\partial x_i^2}\in L_2(Q_T)$, $i=1,\ldots,m$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}\in L_2(Q_T)$, то, выбирая в тождестве (5.6) $\eta\in C_0^\infty(0,T;C_0^\infty(G))$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int\limits_{Q_T}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)-h,\eta\right)dxdt=0.$$

Отсюда следует, что $u(t,x)$ удовлетворяет системе (5.1) в смысле обобщенных функций и тем самым, будучи регулярной функцией, — в смысле $L_2$.

Положим теперь в (5.6) $\eta(t,x)$ произвольной вектор-функцией, удовлетворяющей условиям (5.5) и при этом такой, что $\eta(0,x)=0$ в $G$. Вновь интегрируя по частям, получаем тождество

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial\nu},\eta\right)d\gamma dt=0,$$

из которого следует, что

$$\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\Gamma}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)_{\mathrm{tang}},\eta_{\mathrm{tang}}\right)d\gamma dt=0.$$

Функция $\eta_{\mathrm{tang}}$ — произвольная, поэтому $u(t,x)$ удовлетворяет условию (5.4).

Наконец, возьмем в (5.6) $\eta(t,x)$ произвольной вектор-функцией, удовлетворяющей условиям (5.5). После интегрирования по частям будем иметь

$$\int\limits_{G}(u(0,x),\eta(0,x))\,dx=0.$$

Это означает, что $u(0,x)=0$ почти всюду в $G$.

**Теорема 5.1.** *Задача* (5.1)–(5.4) *имеет единственное обобщенное решение для любой правой части* $h\in L_2(Q_T)$.

*Доказательство.* Докажем существование обобщенного решения задачи (5.1)–(5.4) методом Фаэдо—Галеркина. Пусть $\{\phi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — полная в $W^1_{2,\mathrm{tang}}$ линейно независимая система вектор-функций, ортонормированная в $L_2(G)$. Приближенное решение задачи строится как функция вида

$$u_N(t,x)=\sum_{k=1}^{N}c_{kN}(t)\phi_k(x).$$

Функции $c_{kN}(t)$, $k=1,..,N$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений Фаэдо—Галеркина

$$\int\limits_{G}\left(\frac{\partial u_N}{\partial t},\phi_k\right)dx+\sum_{i,j=1}^{m}\int\limits_{G}\left(a_{ij}\frac{\partial u_N}{\partial x_j},\frac{\partial\phi_k}{\partial x_i}\right)dx=\int\limits_{G}(h,\phi_k)dx,\quad t\in(0,T],\ k=1,..,N, \tag{5.7}$$

при условиях

$$c_{kN}(0)=0,\quad k=1,..,N. \tag{5.8}$$

В силу ортонормированности системы $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(G)$ система (5.7) представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dc_{kN}(t)}{dt} + \sum_{l=1}^{N} d_{kl}(t)c_{lN}(t) = f_k(t), \quad k = 1,..,N, \tag{5.9}$$

где

$$f_k(t) = \int\limits_G (h(t,x), \phi_k(x))dx \in L_2(0,T)$$

$$d_{kl}(t) = \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_G \left( a_{ij}(t,x)\frac{\partial \phi_k}{\partial x_j}, \frac{\partial \phi_l}{\partial x_i} \right) dx \in C(0,T).$$

Поэтому по известной теореме о разрешимости задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений задача (5.9), (5.8) имеет единственное решение $c_{1N}(t), \ldots, c_{NN}(t)$ в пространстве $\dot{\mathrm{H}}^1(0,T) = \left\{ c \in L_2(0,T), \ \dfrac{dc}{dt} \in L_2(0,T), \ c(0) = 0 \right\}$.

Итак, определено приближенное решение $u_N \in L_2\left(0,T; W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$.

Для получения априорной оценки последовательности $u_N$ в пространстве $L_2\left(0,T; W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ каждое из уравнений системы (5.7) умножим на функцию $c_{kN}(t)$ и просуммируем по $k$ от 1 до $N$. Получим

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right) dx + \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_G \left( a_{ij}\frac{\partial u_N}{\partial x_j}, \frac{\partial u_N}{\partial x_i} \right) dx = \int\limits_G (h, u_N)dx, \quad t \in (0,T].$$

Так как для $u_N \in L_2\left(0,T; W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ справедливо равенство

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial u_N}{\partial t}, u_N\right) dx = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G |u_N(t,x)|^2 dx,$$

то с учетом положительной определенности матрицы $a_{ij}(t,x)$ будем иметь:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G |u_N|^2 dx + a_0||\nabla u_N(t,\cdot)||_{L_2(G)} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_G |u_N|^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_G |h|^2 dx$$

для всех $t \in (0,T]$, где $a_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Из неравенства Гроноулла получим

$$||u_N||^2_{L_2(Q_T)} \leqslant Te^T ||h||^2_{L_2(Q_T)},$$

откуда

$$||u_N||^2_{L_2\left(0,T;\ W^1_2\right)} \leqslant M||h||^2_{L_2(Q_T)}, \quad M > 0 - \text{некоторая постоянная.}$$

Тем самым найдется подпоследовательность (за которой сохраним то же обозначение) и функция $u \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ такие, что

$$u_N \rightharpoonup u \ \text{ слабо в } L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right). \tag{5.10}$$

Покажем, что эта предельная функция $u$ является обобщенным решением задачи (5.1)–(5.4). Равенства (5.7) умножим на произвольные функции $z_k \in H^1(0,T)$ такие, что $z_k(T) = 0$, просуммируем по $k$ от 1 до $N_0$, где $N_0 \leqslant N$, и проинтегрируем по $t$ от 0 до $T$. Обозначив

$$\eta_{N_0}(t,x) = \sum_{k=1}^{N_0} z_k(t)\phi_k(x), \tag{5.11}$$

с учетом (5.8) получим

$$-\int\limits_{Q_T} (u_N, \frac{\partial \eta_{N_0}}{\partial t})dxdt + \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_{Q_T} \left( a_{ij}\frac{\partial u_N}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta_{N_0}}{\partial x_i} \right) dxdt = \int\limits_{Q_T} (h, \eta_{N_0})dxdt.$$

Зафиксируем $N_0$ и функцию $\eta_{N_0}$. Так как $a_{ij} \in C(\bar{Q}_T)$, то

$$\mathfrak{L}(u) = \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_{Q_T} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta_{N_0}}{\partial x_i} \right) dxdt$$

— линейный ограниченный функционал, заданный на $L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\text{tang}}\right)$. Поэтому в силу (5.10) будем иметь

$$-\int\limits_{Q_T} (u, \frac{\partial \eta_{N_0}}{\partial t}) dxdt + \sum_{i,j=1}^{m} \int\limits_{Q_T} \left( a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \eta_{N_0}}{\partial x_i} \right) dxdt = \int\limits_{Q_T} (h, \eta_{N_0}) dxdt. \tag{5.12}$$

Поскольку в определении обобщенного решения пробная функция удовлетворяет условиям (5.5), то $\eta$ может быть представлена в виде

$$\eta(t,x) = \int\limits_{T}^{t} \xi(\tau, x) d\tau, \tag{5.13}$$

где $\xi \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\text{tang}}\right)$.

Покажем, что с помощью линейной комбинации функций $\{\phi_k(x)\}$ можно приблизиться сколь угодно близко к такой $\eta$ в нормах

$$||\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)||_{L_2(Q_T)},\ ||\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)||_{L_2(Q_T)},\ ||\cdot||_{L_2(Q_T)}.$$

Действительно, функцию $\xi \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\text{tang}}\right)$ можно разложить в ряд Фурье по $t$ :

$$\xi(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sin \frac{n\pi t}{T}, \tag{5.14}$$

сходящийся в норме пространства $L_2\left(0,T;\ W^1_2\right)$, где

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int\limits_0^T \xi(\tau, x) \sin \frac{n\pi\tau}{T} d\tau.$$

Ясно, что $X_n \in W^1_{2,\text{tang}}$, ибо $\xi \in W^1_{2,\text{tang}}$ по переменной $x$.

Полную в $W^1_{2,\text{tang}}$ систему $\{\phi_k\}$ ортонормируем по методу Грама—Шмидта и разложим $X_n$ в ряд Фурье по ортонормированному базису $\{\phi_k\}$:

$$X_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \phi_k(x),$$

сходящийся в $W^1_{2,\text{tang}}$, где $a_{nk} = (X_n, \phi_x)_{L_2(G)}$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 > N$:

$$||X_n - \sum_{k=1}^{N_1} a_{nk} \phi_k||_{W^1_2(G)} < \varepsilon. \tag{5.15}$$

Используя (5.14), (5.15), для $\xi \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\text{tang}}\right)$ при достаточно больших $N_1, N_2$ имеем

$$||\xi - \sum_{n=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} a_{nk} \sin \frac{n\pi t}{T} \phi_k||_{L_2\left(0,T;\ W^1_2\right)} < \varepsilon. \tag{5.16}$$

Обозначим

$$\xi_{N_1 N_2}(t,x) = \sum_{n=1}^{N_2} \sum_{k=1}^{N_1} a_{nk} \sin \frac{n\pi t}{T} \phi_k(x).$$

Тогда для $\eta(t,x)=\int\limits_T^t \xi(\tau,x)d\tau$ имеем при достаточно больших $N_1$ и $N_2$ :

$$\left\|\frac{\partial\eta}{\partial t}-\xi_{N_1N_2}\right\|_{L_2(Q_T)}<\varepsilon,\quad \left\|\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-\int\limits_T^t\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_{N_1N_2}\right\|_{L_2(Q_T)}<\varepsilon,\quad \left\|\eta-\int\limits_T^t\xi_{N_1N_2}d\tau\right\|_{L_2(Q_T)}<\varepsilon.$$

Установим, например, второе из этих неравенств. В самом деле, из (5.16) следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_G|\xi-\xi_{N_1N_2}|^2dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_G\sum_{i=1}^3\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi-\xi_{N_1N_2})\right|^2dxdt<\varepsilon^2.$$

Тогда

$$\left\|\frac{\partial\eta}{\partial x_i}-\int\limits_T^t\frac{\partial}{\partial x_i}\xi_{N_1N_2}\right\|^2_{L_2(Q_T)}=\int\limits_0^T\int\limits_G\left|\int\limits_T^t\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi-\xi_{N_1N_2})d\tau\right|^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_0^T\int\limits_G\left(\int\limits_0^T\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi-\xi_{N_1N_2})\right|d\tau\right)^2dxdt\leqslant$$

$$\leqslant cT\int\limits_0^T\int\limits_G\left|\frac{\partial}{\partial x_i}(\xi-\xi_{N_1N_2})\right|^2dxdt\leqslant cT\varepsilon^2,$$

где $c>0$ — константа из условия непрерывного вложения пространства $L_2(0,T)$ в $L_1(0,T)$.

Таким образом, мы показали, что линейной комбинацией функций $\{\phi_k\}$ можно аппроксимировать функции вида (5.13) в нормах $\left\|\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)\right\|_{L_2(Q_T)}$, $\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\right\|_{L_2(Q_T)}$, $||\cdot||_{L_2(Q_T)}$.

Поэтому последовательности

$$\{\eta_{N_0}\},\ \{\frac{\partial\eta_{N_0}}{\partial t}\},\ \{\frac{\partial\eta_{N_0}}{\partial x_i}\}$$

сходятся в норме $||\cdot||_{L_2(Q_T)}$ при $N_0\to\infty$ к $\eta$, $\frac{\partial\eta}{\partial t}$, $\frac{\partial\eta}{\partial x_i}$ соответственно, где $\eta$ есть произвольная пробная функция. Следовательно, в (5.12) можно перейти к пределу при $N_0\to\infty$, и мы получаем, что

$$-\int\limits_{Q_T}\left(u,\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)dxdt+\int\limits_{Q_T}(\nabla u,\nabla\eta)dxdt=\int\limits_{Q_T}(h,\eta)dxdt.$$

Это и значит, что функция $u$ является обобщенным решением нашей задачи.

Установим единственность решения задачи (5.1)–(5.4). Покажем, что если функция $u\in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ является обобщенным решением системы (5.1) с нулевой правой частью при условиях (5.2), (5.3), (5.4), то $u\equiv 0$ в $Q_T=[0,T]\times G$.

Справедливо равенство

$$\int\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial t},\eta\right)dx+\sum_{i,j=1}^m\int\limits_G\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial\eta}{\partial x_i}\right)dx=0,$$

в котором $\eta(t,x)=u(t,x)$ при $0\leqslant t\leqslant t'$, $\eta(t,x)=0$ при $t'<t\leqslant T$. Используя равенство

$$\int\limits_G\left(\frac{\partial u}{\partial t},u\right)dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_G|u(t,x)|^2dx,$$

условие (5.2) и положительную определенность матрицы $a_{ij}(t,x)$, получим

$$0 \leqslant a_0 \int\limits_0^{t'} ||\nabla u(t,\cdot)||^2 dt \leqslant -\frac{1}{2} \int\limits_G |u(t',x)|^2 dx,$$

где $t' \in (0,T)$ — любое. Отсюда получаем, что $u \equiv 0$ в $Q_T$.

Таким образом, единственность обобщенного решения установлена.

Теорема доказана. □

Задача 4 изучается аналогично задаче 3. Именно, вводится пространство $W^1_{2,\mathrm{norm}}$ как замыкание $C^1_{\mathrm{norm}}(\bar{G})$ по норме пространства $W^1_2$, дается соответствующее определение обобщенного решения $u \in L_2\left(0,T;W^1_{2,\mathrm{norm}}\right)$ и устанавливается существование единственного решения для любой правой части $h \in L_2(Q_T)$.

## 6. Система уравнений теплопроводности

В качестве пространственной части рассмотрим систему операторов Лапласа. Именно, в цилиндре $Q_T = [0,T] \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой или кусочно-гладкой границей $\Gamma$, изучается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h, \quad t \in (0,T],\ x \in G. \tag{6.1}$$

Тогда конормаль есть обычная нормаль $n = (n_1,n_2,n_3)$ на $\Gamma$, а ортогональное разложение трехмерного вектора $u = (u_1,u_2,u_3)$ представляется в виде суммы

$$u = (u,n)n + [n,[u,n]].$$

Соответствующие задачи примут следующий вид:

**Задача 3.** Найти решение системы (6.1) при начальном условии (5.2) и граничных условиях

$$u_{\mathrm{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T], \tag{6.2}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\mathrm{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{6.3}$$

**Задача 4.** Найти решение системы (6.1) при начальном условии (5.2) и граничных условиях

$$u_{\mathrm{tang}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T], \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{\mathrm{norm}} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0,T]. \tag{6.5}$$

**Определение 6.1.** Функция $u \in L_2\left(0,T;W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ называется обобщенным решением задачи (6.1), (5.2), (6.2), (6.3), если

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(0,T;W_2^{-1})$$

и для любой функции $\eta(t,x)$, удовлетворяющей условиям (5.5), выполнено интегральное равенство

$$-\int\limits_{Q_T} \left(u, \frac{\partial \eta}{\partial t}\right) dxdt + \int\limits_{Q_T} (\nabla u, \nabla \eta) dxdt = \int\limits_{Q_T} (h,\eta) dxdt. \tag{6.6}$$

Существование обобщенного решения для любой правой части $h \in L_2(Q_T)$ доказывается так же, как и для задачи 3. Единственность можно установить следующим образом.

Покажем, что если функция $u \in L_2\left(0,T;\ W^1_{2,\mathrm{tang}}\right)$ является обобщенным решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad t \in (0,T],\ x \in G, \tag{32'}$$

при условиях (5.2), (6.2), (6.3), то $u \equiv 0$ в $Q_T = [0,T] \times G$.

Положим $\eta(t,x)=\int\limits_T^t u(\tau,x)d\tau$ и подставим в (6.6). Получим

$$-\int\limits_0^T\int\limits_G u^2dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_G\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\left(\int\limits_T^t\frac{\partial u_i}{\partial x_j}d\tau\right)dxdt=0.$$

Обозначим

$$z_{ij}(t,x)=\int\limits_T^t\frac{\partial u_i}{\partial x_j}d\tau,$$

тогда

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial z_{ij}}{\partial t}.$$

Будем иметь

$$-\int\limits_0^T\int\limits_G u^2dxdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_G\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\frac{\partial z_{ij}^2}{\partial t}dxdt=0,$$

или

$$-\int\limits_{Q_T}u^2dxdt-\frac{1}{2}\int\limits_G\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3 z_{ij}^2(0,x)dx=0,$$

откуда следует, что $u\equiv 0$ в $Q_T$.

Для задачи (6.1), (5.2), (6.4), (6.5) аналогично формулируется определение обобщенного решения и доказывается теорема о его существовании и единственности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Дубинский Ю. А. Разложение соболевской шкалы и градиентно-дивергентной шкалы в сумму соленоидальных и потенциальных подпространств// Тр. МИАН. — 2005. — *255*, № 5. — С. 136–145.
2. Дубинский Ю. А. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Пуассона в трехмерной области// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 5. — С. 610–613.
3. Дубинский Ю. А. Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Стокса// Вестн. МЭИ. — 2014. — № 1. — С. 94–98.
4. Дубинский Ю. А. О некоторых задачах для систем уравнений Пуассона и Стокса// Abstracts of the Seventh Int. Conf. on Differ. and Funct. Differ. Equ., Moscow, Russia, August 21–28, 2014. — С. 140.
5. Голубева Е. В. Краевая задача для системы уравнений Пуассона в двумерной области// Пробл. мат. анализа. — 2014. — *77*. — С. 55–61.
6. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
7. Dubinskii Yu. A. Some coercive problems for the system of Poisson equations// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, № 4. — С. 402–412.



Елизавета Викторовна Голубева
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
кафедра математического моделирования
E-mail: egollip@mail.ru

Юлий Андреевич Дубинский
Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт»,
кафедра математического моделирования
E-mail: julii_dubinskii@mail.ru