Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 22–42

УДК 517.929

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2015 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Получены результаты о корректной разрешимости упомянутых интегродифференциальных уравнений в весовых пространствах Соболева вектор-функций со значениями в гильбертовом пространстве, заданных на положительной полуоси. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

1. Введение

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальных уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [17, 32], а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [17,29,36]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью; кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси) (см. [5,13,14]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время существует обширная литература по абстрактным интегродифференциальным уравнениям (см., например, работы [2–11,18,25–27,33–42] и цитированную в них литературу). В работах [1–3,25–27,33,41,42] (см. также цитированную в них литературу) изучались интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение. Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см, например, [4,7–11,28,34,39,40]).

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \kappa_0 I$ ($\kappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H с областью определения $Dom\,(B)$ ($Dom\,(A) \subseteq Dom\,(B)$), неотрицательный, $(Bx, x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in Dom\,(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \kappa\|Ax\|$, $0 < \kappa < 1$ для любого $x \in Dom\,(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-11-00754).

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int\limits_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int\limits_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{1.2}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\gamma_k t}, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-\gamma_k t}, \tag{1.3}$$

где коэффициенты $a_k > 0$, $b_k \geqslant 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k \to +\infty$ $(k \to +\infty)$. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\gamma_k} < 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{\gamma_k} < 1. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (1.4) добавить также условия

$$K(0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty, \quad Q(0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty, \tag{1.5}$$

тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

Интегродифференциальное уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, где операторы A и B порождаются следующими дифференциальными выражениями:

$$A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \mathrm{grad}(\mathrm{div} u)\right), \quad B = -\rho^{-1}\lambda\ \mathrm{grad}(\mathrm{div} u),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды, среда заполняет ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.6}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $Dom(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (1.6). Условия (1.4) имеет конкретный физический смысл (подробнее см. [15, 20]).

В случае, когда оператор $B = 0$ и самосопряженный положительный оператор A может быть реализован как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0, \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Другой класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [21, 22]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, в которой отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул (см. [19]).

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1.1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{1.7}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$ соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\lambda + \gamma_k)}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(\lambda + \gamma_k)}. \tag{1.8}$$

В предлагаемой работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1.1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [4, 6–11, 39, 40] проводилось подробное исследование задачи (1.1), (1.2) в случае, когда оператор $B = 0$. Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (1.7), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [4, 6, 8–11, 39, 40] подытожены в главе 3 монографии [7].

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандольфи в работе [38], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A_0 — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 2.1 о разрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время как в работе [38] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leqslant cE$, выполненное с некоторой положительной константой c, выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы := и =: для введения новых величин.

2. Формулировка результатов

Введем обозначения:

$$a := \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad b := \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad A_0 := A + B. \tag{2.1}$$

Согласно известному результату [31, с. 361], оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $Dom(A_0^{\beta})$ оператора A_0^{β}, $\beta > 0$ в гильбертово пространство H_{β}, введя на $Dom(A_0^{\beta})$ норму $\| \cdot \|_{\beta} = \|A_0^{\beta} \cdot \|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^{β}.

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} — ограниченные, а оператор A_0^{-1} — компактный.

2.1. Корректная разрешимость.

Через $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)} \equiv \left(\int_0^{\infty} e^{-2\gamma t} \left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|_H^2 + \|A_0 u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W^n_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ см. [16, глава 1]. При $n = 0$ полагаем $W^0_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W^n_{2,0} = W^n_2$.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию u сильным решением задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ ($A_0 = A + B$), удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (1.2).

Следующая теорема дает нам достаточное условие корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (1.5), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$ *и* $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в пространстве* $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)} \leqslant d\left(\left\|f'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H\right), \tag{2.2}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

2.2. Спектральный анализ. Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (1.4), (1.5), а также следующие условия:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^2(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = +\infty \tag{2.3}$$

и существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} = 0. \tag{2.4}$$

Замечание 2.2. Условие (2.4) выполняется в случае степенного поведения последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$, т. е. когда $\gamma_k \simeq k^\alpha$, $\alpha > 0$. В этом случае $\dfrac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} \sim \dfrac{\alpha}{k} \to 0$, $(k \to \infty)$. В задачах усреднения в многофазных средах последовательности $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$являются последовательностями собственных значений некоторых вспомогательных эллиптических задач и поэтому имеют степенную асимптотику (подробнее см. [5, 13, 14]). В свою очередь, условие (2.4) не выполняется, если последовательность $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ ведет себя как геометрическая прогрессия со знаменателем большим единицы, т. е. $\gamma_k = cq^k$, $q > 1$, $c > 0$. Подобное поведение членов последовательности γ_k реже встречается в приложениях.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5), (2.3), (2.4). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит объединению интервалов* $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde{p}_k) \subset (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ ($\gamma_0 = 0$) *и полосы* $\{\lambda \in \mathbb{C} | \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2\}$, *где* $\tilde{p}_k = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$, $p_k(\tau)$ — *вещественные корни уравнения*

$$\Phi_\tau(p) := \tau\sum_{k=1}^\infty a_k(p+\gamma_k)^{-1} + (1-\tau)\sum_{k=1}^\infty b_k(p+\gamma_k)^{-1} = 1 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant 1),$$

принадлежащие интервалам $(-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ ($\gamma_0 = 0$), $\tau' := \left\|A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\|A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|$ $(0 < \tau' < \tau'' \leqslant 1)$,

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^\infty \frac{((a_kA + b_kB)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^\infty \frac{((a_kA + b_kB)f, f)}{\left((A+B+\gamma_k^2 I)f, f\right)}, \quad f \in D(A).$$

Замечание 2.3. Согласно [23, лемма 2.1] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой [23, лемма 2.1] и самосопряженности оператора $A_0 = A + B$ оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Таким образом, величины τ' и τ'', фигурирующие в формулировке теоремы 2.2, определены корректно.

Теорема 2.3. *Невещественный спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметричен относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \mathbb{C}\setminus\{\lambda : \alpha_1 \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \alpha_2, |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (1.7) в случае конечного числа слагаемых в представлении (1.8) ($a_k = b_k = 0$, $k > N$, $N \in \mathbb{N}$) изучалась в [18]. Теоремы 2.2, 2.3 представляют собой естественное развитие результатов работы [18].

3. Доказательство теоремы 2.1

Вначале докажем теорему 2.1 в случае однородных (нулевых) начальных условий ($\varphi_0 = \varphi_1 = 0$). Для доказательства корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2) используем преобразование Лапласа. Напомним основные определения и утверждения, которые будут использоваться далее.

Определение 3.1. Назовем пространством Харди $H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$ класс вектор-функций $\hat{f}(\lambda)$ со значениями в H, голоморфных (аналитических) в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \Re\lambda > \gamma \geqslant 0\}$, для которых

$$\sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| \hat{f}(x+iy) \right\|_H^2 dy < \infty \quad (\lambda = x+iy). \tag{3.1}$$

Сформулируем хорошо известную теорему Пэли—Винера для вектор-функций в пространстве Харди $H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$.

Теорема (Пэли—Винер)**.**

1. *Пространство* $H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$ *совпадает с множеством вектор-функций* (*преобразований Лапласа*), *представимых в виде*
$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt, \tag{3.2}$$
где $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re\lambda > \gamma \geqslant 0$.
2. *Для любой вектор-функции* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$ *существует и единственно представление* (3.2)*, где вектор-функция* $f(t)$ *принадлежит пространству* $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ *и справедлива формула обращения*
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\gamma+iy) e^{(\gamma+iy)t} dy, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \gamma \geqslant 0. \tag{3.3}$$
3. *Для вектор функций* $\hat{f}(\lambda) \in H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$ *и* $f(t) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, *связанных соотношением* (3.2)*, справедливо равенство*
$$\|\hat{f}\|^2_{H_2(\Re\lambda>\gamma,H)} \equiv \sup_{x>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\| \hat{f}(x+iy) \right\|_H^2 dy = \int\limits_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \|f(t)\|_H^2 dt \equiv \|f\|^2_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.4}$$

Сформулированная теорема Пэли—Винера хорошо известна для скалярных функций и имеет естественное обобщение для вектор-функций со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Доказательство теоремы 2.1. Преобразование Лапласа сильного решения задачи (1.1), (1.2) с начальными условиями $u(+0) = 0$, $u^{(1)}(+0) = 0$ имеет следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \hat{f}(\lambda). \tag{3.5}$$

Здесь оператор-функция $L(\lambda)$ является символом уравнения (1.1) и имеет вид (1.7), $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функции $f(t)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Пусть $f'(t) \in L_{2,\gamma_2}(\mathbb{R}_+, H)$, $f(0) = 0$. Для доказательства теоремы 2.1 достаточно доказать, что вектор-функции $\lambda^2 \hat{u}(\lambda)$ и $A_0 \hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству Харди $H_2(\Re\lambda > \gamma, H)$ для некоторого $\gamma > \gamma_0 \geqslant 0$. Тогда по теореме Пэли—Винера мы получим, что вектор-функции $\dfrac{d^2 u}{dt^2}$ и $A_0 u(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ и, следовательно, $u(t) \in W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$. Таким образом, будет доказана корректная разрешимость задачи (1.1), (1.2) с однородными начальными условиями в пространстве $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$.

В дальнейших рассуждениях мы будем опираться на следующие леммы.

Лемма 3.1. *Существует такое $\gamma > 0$, что справедливо неравенство*

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma>0}\left\|\frac{1}{\lambda}A_0\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1}\right\| < \frac{const}{\tau}, \quad \lambda = \tau + i\nu. \tag{3.6}$$

Доказательство. Принимая во внимание, что оператор A_0 самосопряженный, используем спектральную теорему (см. [31, с. 452-453]). Положим $\lambda = \tau + i\nu$ $(\tau, \nu \in \mathbb{R})$ и $a \in \sigma(A_0) \subset [\kappa_0, +\infty)$, т. е. a принадлежит спектру оператора A_0. Согласно утверждению спектральной теоремы, достаточно установить следующую оценку:

$$\frac{a}{(\tau^2+\nu^2)^{1/2}((\tau^2-\nu^2)+a)^2+4\tau^2\nu^2)^{1/2}} \leqslant \frac{const}{\tau}, \quad \tau \geqslant \gamma > 0. \tag{3.7}$$

Для этого оценим снизу функцию

$$f(a,\tau,\nu) = (\tau^2+\nu^2)((\tau^2-\nu^2)+a)^2+4\tau^2\nu^2).$$

Пусть константа $d \in (0,1)$, тогда имеет место следующая оценка:

$$f(a,\tau,\nu) \geqslant \min\left\{\min_{\nu^2\in[0,da]} f(a,\tau,\nu), \min_{\nu^2\in[da,+\infty]} f(a,\tau,\nu)\right\} \geqslant$$
$$\geqslant \min\left\{\tau^2(\tau^2+(1-d)a\tau^2)^2, (\tau^2+da)4da\tau^2\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{(f(a,\tau,\nu))^{1/2}} \leqslant a\max\left[\frac{1}{(\tau^2+(1-d)a)\tau}, \frac{1}{(\tau^2+da)^{1/2}2\sqrt{da}\tau}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max\left[\frac{1}{\tau\Big(\frac{\tau^2}{a}+(1-d)\Big)}, \frac{1}{2\sqrt{d}\tau\Big(\frac{\tau^2}{a}+d\Big)^{1/2}}\right] \leqslant \max\left[\frac{1}{\tau(1-d)}, \frac{1}{2\tau d}\right]. \tag{3.8}$$

Полагая $d = 1/3$ в неравенстве (3.8), мы получаем искомую оценку (3.7). Лемма доказана. □

Лемма 3.2. *Предположим, что выполнено условие теоремы* 2.1. *Тогда существует такое $\gamma > 0$, что оператор-функция $(I - V(\lambda))^{-1}$, где*

$$V(\lambda) = \hat{K}(\lambda)A\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1} + \hat{Q}(\lambda)B\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1} \tag{3.9}$$

является аналитической в правой полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma\}$ и справедливо следующее неравенство:

$$\sup_{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\gamma}\left\|(I - V(\lambda))^{-1}\right\| \leqslant const. \tag{3.10}$$

Доказательство. Используя условия (1.5), легко показать, что имеют место неравенства

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\left|\hat{K}(\lambda)\right| = \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a_j}{(\lambda+\gamma_j)}\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}a_j\right)\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\frac{1}{|\lambda+\gamma_1|} \leqslant \frac{K(0)}{|\lambda|}, \tag{3.11}$$

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\left|\hat{Q}(\lambda)\right| = \sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_j}{(\lambda+\gamma_j)}\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty}b_j\right)\sup_{\operatorname{Re}\lambda>0}\frac{1}{|\lambda+\gamma_1|} \leqslant \frac{Q(0)}{|\lambda|}. \tag{3.12}$$

Затем из леммы 3.1 получаем, что существует такое $\gamma^* > 0$, что для всех $\operatorname{Re}\lambda > \gamma^*$ справедливы оценки

$$\left\|\hat{K}(\lambda)A\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant \left|\hat{K}(\lambda)\right| \left\|AA_0^{-1}\right\| \left\|A_0\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant |K(0)| \left\|AA_0^{-1}\right\| \left\|\frac{1}{\lambda}A_0\big(\lambda^2 I + A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant \frac{const}{\operatorname{Re}\lambda}. \tag{3.13}$$

$$\left\|\hat{Q}(\lambda)B\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant \left|\hat{Q}(\lambda)\right| \|BA_0^{-1}\| \left\|A_0\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant |Q(0)| \, \|BA_0^{-1}\| \left\|\frac{1}{\lambda}A_0\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant \frac{const}{\operatorname{Re}\lambda}. \quad (3.14)$$

Объединяя оценки (3.13), (3.14), получаем

$$\|V(\lambda)\| \leqslant \frac{const}{\operatorname{Re}\lambda}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \gamma^*. \quad (3.15)$$

Следовательно, возможно выбрать такое $\gamma > 0$, что имеет место оценка

$$\sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma} \|V(\lambda)\| < 1.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.3. *Справедлива следующая оценка*

$$\left\|\lambda\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Пусть параметр a принадлежит спектру оператора A_0. Используя спектральную теорему, нетрудно получить следующую цепочку неравенств:

$$\left|\lambda\big(\lambda^2+a\big)^{-1}\right| = \frac{\big(\tau^2+\nu^2\big)^{1/2}}{\Big(\tau^2+(\nu+\sqrt{a})^2\Big)^{1/2}\Big(\tau^2+(\nu-\sqrt{a})^2\Big)^{1/2}} \leqslant \frac{1}{|\tau|}, \quad \lambda=\tau+i\nu.$$

Таким образом, получаем оценку (3.16). Лемма доказана. □

Теперь используем леммы 3.1–3.3 и следующее представление:

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left[\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\Big(I-\hat{K}(\lambda)A\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1} - \hat{Q}(\lambda)B\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\Big)^{-1}\lambda f(\lambda)\right]. \quad (3.17)$$

Покажем, что вектор-функции $\lambda^2\hat{u}(\lambda)$ и $A_0\hat{u}(\lambda)$ принадлежат пространству Харди $H_2\left(\operatorname{Re}\lambda>\gamma, H\right)$. По условию теоремы $f'(t)\in L_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$ и $f(0)=0$, следовательно, вектор-функция $\lambda\hat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H_2\left(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_0, H\right)$. Из лемм 3.1–3.3 вытекает, что оператор-функция

$$A_0\frac{1}{\lambda}\left[\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\Big(I-\hat{K}(\lambda)A\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1} - \hat{Q}(\lambda)B\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}\Big)^{-1}\right]$$

является ограниченной и аналитической в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda>\gamma\}$. Выберем $\gamma_1=\max(\gamma_0,\gamma)$. Следовательно, вектор-функция $A_0\hat{u}(\lambda)$ принадлежит пространству Харди $H_2\left(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1, H\right)$. Кроме того, справедлива следующая оценка:

$$\|A_0\hat{u}(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1,H)} \leqslant \sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1}\left\|A_0\frac{1}{\lambda}\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}(I-V(\lambda))^{-1}\right\| \cdot \|\lambda f(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1,H)}. \quad (3.18)$$

По теореме Пэли—Винера имеем следующую оценку:

$$\|A_0 u(t)\|_{L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant const\big\|f'(t)\big\|_{L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,H)}. \quad (3.19)$$

Таким образом, из леммы 3.3 получаем, что оператор-функция $\lambda\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}(I-V(\lambda))^{-1}$ является ограниченной и аналитической в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda>\gamma\}$. Следовательно, вектор-функция $\lambda^2\hat{u}(\lambda)\in H_2\left(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1, H\right)$ и справедлива следующая оценка:

$$\big\|\lambda^2\hat{u}(\lambda)\big\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1,H)} \leqslant \sup_{\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1}\left\|\lambda\big(\lambda^2 I+A_0\big)^{-1}(I-V(\lambda))^{-1}\right\| \cdot \|\lambda f(\lambda)\|_{H_2(\operatorname{Re}\lambda>\gamma_1,H)}. \quad (3.20)$$

По теореме Пэли—Винера получаем следующую оценку:

$$\left\|\frac{d^2u}{dt^2}\right\|_{L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant const\big\|f'(t)\big\|_{L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,H)}. \quad (3.21)$$

Используя неравенства (3.19) и (3.21), получаем оценку

$$\|u(t)\|_{W^2_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,A_0)} \leqslant const\big\|f'(t)\big\|_{L_{2,\gamma_1}(\mathbb{R}_+,H)}. \quad (3.22)$$

Таким образом, мы доказали теорему 2.1 для однородных начальных условий (1.2).

Рассмотрим теперь общий случай, а именно задачу (1.1), (1.2) с ненулевыми начальными условиями φ_0 и φ_1. Будем искать решение задачи (1.1), (1.2) в виде

$$u(t) = \cos(A_0^{1/2}t)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}t)\varphi_1 + \omega(t),$$

где $\omega(t)$ — неизвестная вектор-функция. Тогда вектор-функция $\omega(t)$ является решением следующей задачи с однородными начальными условиями:

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + A_0\omega(t) - \int_0^t K(t-s)A\omega(s)ds - \int_0^t Q(t-s)B\omega(s)ds = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{3.23}$$

$$\omega(+0) = \omega^{(1)}(+0) = 0, \tag{3.24}$$

где $f_1(t) = f(t) + h(t)$ и вектор-функция $h(t)$ имеет вид

$$h(t) = \int_0^t K(t-s)A\left(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1\right)ds + \\ + \int_0^t Q(t-s)B\left(\cos(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + A_0^{-1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_1\right)ds. \tag{3.25}$$

Достаточно доказать, что $h'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ и $h(0) = 0$. Интегрируя по частям, получаем следующее представление для вектор-функции $h'(t)$:

$$h'(t) = g_1(t) + Ag_2(t) + Bg_3(t), \tag{3.26}$$

где

$$g_1(t) = K(t)A\varphi_0 + Q(t)B\varphi_0,$$
$$g_2(t) = \int_0^t K(t-s)\left(-A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + \cos(A_0^{1/2}s)\varphi_1\right)ds, \tag{3.27}$$
$$g_3(t) = \int_0^t Q(t-s)\left(-A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}s)\varphi_0 + \cos(A_0^{1/2}s)\varphi_1\right)ds.$$

Далее, интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\cos(A_0^{1/2}s)ds = \left(A_0 + \gamma_j^2 I\right)^{-1}\left(\gamma_j\left(\cos(A_0^{1/2}t) - e^{-\gamma_j t}I\right) + A_0^{1/2}\sin(A_0^{1/2}t)\right),$$

$$\int_0^t e^{-\gamma_j(t-s)}\sin(A_0^{1/2}s)ds = \left(A_0 + \gamma_j^2 I\right)^{-1}\left(A_0^{1/2}\left(e^{-\gamma_j t}I - \cos(A_0^{1/2}t)\right) + \gamma_j\sin(A_0^{1/2}t)\right). \tag{3.28}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее предложение.

Предложение 3.1. *Справедливо неравенство*

$$\left\|\left(A_0 + \gamma_j^2 I\right)^{-1}\right\|_H^2 \lesssim \gamma_j^{-2}\left\|A_0^{-1/2}\right\|_H, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{3.29}$$

Действительно, для любого вектора $x \in H$ такого, что $\|x\|_H = 1$, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\left\|\left(A_0 + \gamma_j^2 I\right)^{-1}x\right\|_H^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + \gamma_j^2\right)^{-2}|x_n|^2 \lesssim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\gamma_j a_n^{1/2}\right)^{-2}|x_n|^2 = \left\|\gamma_j^{-1}A_0^{-1/2}x\right\|_H^2,$$

где $x_n = (x, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, составленный из собственных векторов самосопряженного оператора A_0, соответствующих собственным значениям a_j:

$A_0e_j = a_je_j$, $j \in \mathbb{N}$. Собственные значения a_j упорядочены по возрастанию с учетом кратности: $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$; $a_n \to +\infty$ as $n \to +\infty$.

Далее будем использовать следующие известные оценки:

$$\|\cos(A_0^{1/2}t)\|_H \leqslant 1, \quad \|\sin(A_0^{1/2}t)\|_H \leqslant 1, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.30}$$

Будем считать, что выполнено условие (1.5) и начальные векторы удовлетворяют следующим условиям: $\varphi_0 \in D(A_0)$, $\varphi_1 \in D(A_0)$. На основе соотношений (3.28) оценим нормы вектор-функций $\|g_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$, $\|Ag_2(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$, $\|Bg_3(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}$. Будем использовать следующее замечание.

Замечание 3.1. Из определения оператора A_0 следуют очевидные неравенства

$$\|Ax\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|A_0x\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}, \quad x \in Dom(A_0)$$

$$\|Bx\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|A_0x\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)}. \tag{3.31}$$

Опираясь на замечание 3.1, оценим вектор-функции $A_0g_2(t)$ и $A_0g_3(t)$. Имеет место следующая оценка:

$$\|g_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} = \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_je^{-\gamma_jt}A\varphi_0 + \sum_{j=1}^{\infty} b_je^{-\gamma_jt}B\varphi_0\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|A_0\varphi_0\|_H. \tag{3.32}$$

Используя соотношения (3.28), получим для вектор-функции $A_0g_2(t)$ следующее представление:

$$A_0g_2(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{\infty} a_je^{-\gamma_j(t-s)}A_0\left(-A_0^{1/2}\sin\left(A_0^{1/2}s\right)\varphi_0 + \cos\left(A_0^{1/2}s\right)\varphi_1\right)ds =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} a_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}\left(-A_0^{1/2}\right)\left(A_0^{1/2}\left(e^{-\gamma_jt}I - \cos\left(A_0^{1/2}t\right)\right) + \gamma_j\sin\left(A_0^{1/2}t\right)\right)\varphi_0 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} a_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}\left(\gamma_j\left(\cos\left(A_0^{1/2}t\right) - e^{-\gamma_jt}I\right) + A_0^{1/2}\sin\left(A_0^{1/2}t\right)\right)\varphi_1.$$

Предложение 3.2. *Справедливы неравенства*

$$\left\|A_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}\right\|_H \leqslant 1, \quad j \in \mathbb{N}.$$

На основе предложений 3.1, 3.2 и неравенств (3.30) получаем следующие оценки:

$$\|A_0g_2(t)\|_H \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}A_0e^{-\gamma_jt}\varphi_0\right\|_H +$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}A_0\cos\left(A_0^{1/2}t\right)\varphi_0\right\|_H + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\gamma_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}A_0^{1/2}\sin\left(A_0^{1/2}t\right)\varphi_0\right\|_H +$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\gamma_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}e^{-\gamma_jt}\varphi_1\right\|_H + \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\gamma_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}\cos\left(A_0^{1/2}t\right)\varphi_1\right\|_H +$$

$$+\left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_jA_0\left(A_0+\gamma_j^2I\right)^{-1}A_0^{1/2}\sin\left(A_0^{1/2}t\right)\varphi_1\right\|_H \lesssim \sum_{j=1}^{\infty} a_j\|A_0\varphi_0\|_H + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H. \tag{3.33}$$

Абсолютно аналогично получаем оценку для вектор-функции $Bg_3(t)$:

$$\|Bg_3(t)\|_H \leqslant \|A_0g_3(t)\|_H \leqslant const\left(\|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H\right).$$

Объединяя неравенства (3.32)-(3.33), получаем следующую оценку:

$$\|g_1(t)\|_H + \|Ag_2(t)\|_H + \|Bg_3(t)\|_H \leqslant const\left(\|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H\right). \tag{3.34}$$

Из представления (3.25) и оценки (3.33) получаем, что вектор-функции $A^2 g_2(t)$, $Bg_3(t)$ принадлежат пространству $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$ для любого $\gamma > 0$, и справедлива следующая оценка:

$$\left\|h'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant \|g_1(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|Ag_2(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|Bg_3(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} \leqslant$$
$$\leqslant const\left(\|A_0\varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2}\varphi_1\right\|_H\right). \tag{3.35}$$

Положим $\gamma = \gamma_0$.

Поскольку ядра $K(t)$ и $Q(t)$ принадлежат пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$, согласно замечанию 3.1 и условиям теоремы 2.1 вектор-функция $h(t)$ (см. (3.25)) удовлетворяет требуемым условиям $\lim\limits_{t\to+0} h(t) = h(+0) = 0$.

На основе оценок (3.22), представлений (3.25), (3.26) и оценки (3.35) получаем требуемую оценку (2.2). Теорема 2.1 доказана. □

4. Доказательство теорем 2.2, 2.3

Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{\lambda^2(N)}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda(N) + \gamma_k}, \quad \lambda(N) \in \mathbb{C}, \quad c_k > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

зависящих от параметра $N \in \mathbb{N}$ при фиксированном значении $\omega \in \mathbb{R}$. Рассмотрим также семейство соответствующих (4.1) уравнений

$$1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{p(N) + \gamma_k}. \tag{4.2}$$

Кроме того, рассмотрим уравнение

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + \gamma_k}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

соответствующее семейству уравнений (4.1). Обозначим

$$f(x) := \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{x + \gamma_k}, \quad x \in \mathbb{R}$$

для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$. Так как на области определения функции $f(x)$ справедливо неравенство

$$f'(x) = -\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(x + \gamma_k)^2} < 0,$$

то функция $f(x)$ является убывающей на области определения и $f(x) \to \infty$ при $x \to -\gamma_k$, $k = 1, \ldots, N$. Согласно результатам работ [18], [7, гл. 3], уравнение (4.1) имеет N вещественных и два комплексно-сопряженных корня, а уравнение (4.2) имеет N вещественных корней.

Обозначим $\lambda_k(N) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$, $\lambda^{\pm}(N) = \alpha(N) \pm i\beta(N) \in \mathbb{C}$, $\alpha(N), \beta(N) \in \mathbb{R}$ — корни уравнения (4.1) для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$. Обозначим $p_k(N) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$ — корни уравнения (4.2) для любого фиксированного значения параметра $N \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.1. *Пусть выполнено условие*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \gamma_k^2(\gamma_{k+1} - \gamma_k) = +\infty. \tag{4.4}$$

Тогда уравнение (4.3) *имеет счетную последовательность вещественных корней* $\left\{\lambda_k^0 | k \in \mathbb{N}\right\}$, *удовлетворяющих неравенствам* $-\gamma_k < \lambda_k^0 < -\gamma_{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_0 = 0$, *а также пару комплексно-сопряженных корней* $\lambda_0^{\pm} = \alpha_0 \pm i\beta_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha_0 < 0$.

Доказательство. На комплексной плоскости переменной $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ рассмотрим прямоугольный контур $\Gamma = \left\{\Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma^* \cup \bar{\Gamma}^*\right\}$, где

$$\Gamma^{\pm} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | x = \pm X, |y| \leqslant Y, X > 0, Y > 0\},$$

$$\Gamma^* = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | |x| \leqslant X, y = Y, X > 0, Y > 0\},$$

$$\bar{\Gamma}^* = \{z \in \mathbb{C} | \bar{z} \in \Gamma^*\}.$$

Положим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z + \gamma_k} - 1, \quad g(z) = \frac{z^2}{\omega^2}.$$

Покажем, что существуют такие числа $X > 0$, $Y > 0$, что неравенство

$$|f(z)| < |g(z)| \tag{4.5}$$

выполняется для всех $z \in \Gamma$. Вначале установим оценку (4.5) на вертикальных отрезках $\Gamma^{\pm}$, а затем на горизонтальных отрезках Γ^*, $\bar{\Gamma}^*$.

Для всех $z \in \Gamma^-$ справедлива оценка

$$|f(z)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{z + \gamma_k} - 1\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-X + iy + \gamma_k|} + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|-X + \gamma_k|} + 1 =: q(X).$$

Положим $X = X_N := (\gamma_N + \gamma_{N+1})/2$, где N — достаточно большое натуральное число. Покажем, что

$$\inf_N \left\{\frac{q(X_N)}{X_N^2}\right\} = 0.$$

Действительно,

$$q(X_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{X_N - \gamma_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k - X_N} + 1.$$

Поскольку

$$X_N - \gamma_k = (\gamma_{N+1} - \gamma_k + \gamma_N - \gamma_k)/2 \geqslant (\gamma_{N+1} - \gamma_k)/2, \quad k \leqslant N,$$

$$\gamma_k - X_N \geqslant (\gamma_k - \gamma_N)/2, \quad k \geqslant N + 1.$$

Следовательно,

$$q(X_N) \leqslant 2\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\gamma_{N+1} - \gamma_k} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k - \gamma_N}\right) + 1 < \frac{2}{\gamma_{N+1} - \gamma_N} \sum_{k=1}^{\infty} c_k.$$

Таким образом,

$$\frac{q(X_N)}{X_N^2} < \frac{2}{\gamma_N^2(\gamma_{N+1} - \gamma_N)} \sum_{k=1}^{\infty} c_k + \frac{1}{\gamma_N^2}.$$

Отсюда, учитывая условие (4.4), получаем, что для заданного ω при достаточно больших N справедливо неравенство

$$|g(z)| \geqslant \frac{X_N^2}{\omega^2} > X_N^2 \left(\frac{2}{\gamma_N^2(\gamma_{N+1} - \gamma_N)} \sum_{k=1}^{N} c_k + \frac{1}{\gamma_N^2}\right) > X_N^2 \frac{q(X_N)}{X_N^2} \geqslant |f(z)|.$$

Пусть теперь $z \in \Gamma^+$, тогда

$$|f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|X_N + iy + \gamma_k|} + 1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} + 1.$$

Следовательно, неравенство (4.5) выполняется для всех $z \in \Gamma^+$, если

$$|g(z)| \geqslant \frac{X_N^2}{\omega^2} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\gamma_k} + 1,$$

что равносильно выбору $X_N > \omega\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k}{\gamma_k}+1\Big)^{1/2}$. Рассмотрим теперь горизонтальный отрезок Γ^* контура Γ. Пусть $z \in \Gamma^*$ Очевидно, что

$$\inf_{z\in\Gamma^*}\left|\frac{z^2}{\omega^2}\right| = \frac{Y^2}{\omega^2}$$

для всех $z \in \Gamma^*$. Далее, для всех $z \in \Gamma^*$ имеем

$$|f(z)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|x+iY+\gamma_k|} \leqslant \frac{1}{Y}\sum_{k=1}^{\infty}c_k.$$

Следовательно, неравенство (4.5) выполняется на множестве Γ^*, если

$$\frac{Y^2}{\omega^2} > \frac{1}{Y}\sum_{k=1}^{\infty}c_k,$$

что равносильно выбору $Y > \Big(\omega^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\Big)^{1/3}$. Для всех $z \in \bar{\Gamma}^*$ справедливо $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$, следовательно, неравенство (4.5) выполняется при том же условии.

Таким образом, согласно теореме Руше и принципу аргумента для всех $X_N > \omega\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{c_k}{\gamma_k}\Big)^{1/2}$ и $Y > \Big(\omega^2\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\Big)^{1/3}$ получаем

$$N(g) - P(g) = N(f+g) - P(f+g),$$

где $N(\varphi)$ и $P(\varphi)$, соответственно, — число нулей и полюсов функции φ внутри контура Γ, причем каждый полюс и нуль считается с учетом его порядка и кратности соответственно. Очевидно, $N(g) - P(g) = 2$. Внутри контура Γ функция $f+g$ имеет N полюсов: $-\gamma_N, -\gamma_{N-1}, \ldots, -\gamma_1$. Следовательно, $N(f+g) = N+2$. Легко видеть (графически), что функция $f(z)+g(z)$ имеет $N+1$ или N действительных нулей внутри контура Γ, в зависимости от того, $\lambda_N^0 < X_N$ или $\lambda_N^0 \geqslant X_N$. В первом случае функция $f(z)+g(z)$ имеет один невещественный нуль внутри контура Γ, что невозможно, т. к. $\bar{f}(z)+\bar{g}(z) = f(\bar{z})+g(\bar{z})$. Следовательно, внутри контура Γ существует ровно два недействительных комплексно-сопряженных нуля $\lambda_0^{\pm}$, где $\lambda_0^- = \overline{\lambda_0^+}$. □

Следующая лемма доказана в работе [18], однако приведенное в этой работе доказательство содержит небольшие пробелы. После устранения указанных пробелов и неточностей приводим здесь полное доказательство.

Лемма 4.2 (А. И. Милославский)**.** *Для любого фиксированного значения N уравнение* (4.1) *имеет N вещественных корней $\lambda_k(N) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих неравенствам*

$$-\gamma_k < \lambda_k(N) < p_k(N) < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \gamma_0 = 0, \tag{4.6}$$

а также пару комплексно-сопряженных корней $\lambda^{\pm}(N) = \alpha(N) \pm i\beta(N) \in \mathbb{C}$, $\alpha(N), \beta(N) \in \mathbb{R}$, причем для вещественной части $\alpha(N)$ справедливо следующее неравенство:

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}c_k < \alpha(N) < -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\omega^2 c_k}{\omega^2+\gamma_k^2}. \tag{4.7}$$

Доказательство. Приведем уравнения (4.1) и (4.2) к общему знаменателю и применим к полученным уравнениям теорему Виета: в уравнении, соответствующем (4.1), для коэффициентов при степенях $\lambda^{N+1}(N)$, $\lambda^N(N)$ и свободного члена получим соотношения

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N) + \sum_{k=1}^{N}\gamma_k = -2\alpha(N), \tag{4.8}$$

$$\sum_{1\leqslant k<n\leqslant N}\lambda_k(N)\lambda_n(N) + 2\alpha(N)\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N) + \alpha^2(N) + \beta^2(N) = \omega^2 + \sum_{1\leqslant k<n\leqslant N}\gamma_k\gamma_n, \tag{4.9}$$

$$\prod_{k=1}^{N}\gamma_k\left(\omega^2-\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\right)=(-1)^N\prod_{k=1}^{N}\lambda_k(N)\left(\alpha^2(N)+\beta^2(N)\right); \tag{4.10}$$

в уравнении, соответствующем (4.2), для коэффициента при степени $p^{N-1}(N)$ и свободного члена получим следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{N}p_k(N)+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k=\sum_{k=1}^{N}c_k, \tag{4.11}$$

$$\prod_{k=1}^{N}p_k(N)=(-1)^N\prod_{k=1}^{N}\gamma_k\left(1-\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\right), \tag{4.12}$$

Из неравенств (4.6) получаем $0<\lambda_k(N)+\gamma_k<p_k(N)+\gamma_k$, $k=1,\ldots,N$, $\gamma_0=0$. Следовательно, учитывая соотношения (4.8) и (4.11), получаем

$$-2\alpha(N)=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N)+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k<\sum_{k=1}^{N}p_k(N)+\sum_{k=1}^{N}\gamma_k=\sum_{k=1}^{N}c_k.$$

Отсюда следует левая часть неравенства (4.7). Покажем теперь, что справедлива правая часть неравенства (4.7). Выделяя в уравнении (4.1) мнимую часть, получим следующее уравнение:

$$\alpha(N)=-\frac{\omega^2}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{(\alpha(N)+\gamma_k)^2+\beta^2(N)}. \tag{4.13}$$

Из равенства (4.13) получаем, что для доказательства правой части неравенства (4.7) достаточно доказать справедливость следующих неравенств:

$$(\alpha(N)+\gamma_k)^2+\beta^2(N)<\omega^2+\gamma_k^2,\quad k=1,\ldots,N. \tag{4.14}$$

Перепишем неравенство (4.14) в виде

$$\alpha^2(N)+\beta^2(N)+2\gamma_k\alpha(N)<\omega^2,\quad k=1,\ldots,N. \tag{4.15}$$

Из (4.13) получаем, что $\alpha(N)<0$, $N\in\mathbb{N}$. Следовательно, неравенство (4.15) достаточно доказать для $k=1$. Используя соотношения (4.8) и (4.9), перепишем неравенство (4.15) для $k=1$ в следующем виде:

$$0>\alpha^2(N)+\beta^2(N)+2\gamma_1\alpha(N)-\omega^2=\sum_{1\leqslant k<n\leqslant N}(\gamma_k\gamma_n-\lambda_k(N)\lambda_n(N))-2\alpha(N)\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k(N)-\gamma_1)=$$

$$=\sum_{1\leqslant k<n\leqslant N}(\gamma_k\gamma_n-\lambda_k(N)\lambda_n(N))+\left(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N)\right)^2+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N)\sum_{k=2}^{N}\gamma_k-\gamma_1\sum_{k=1}^{N}\gamma_k.$$

Выполняя преобразования в последнем неравенстве, получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^2(N)+\sum_{1\leqslant k<n\leqslant N}\lambda_k(N)\lambda_n(N)+\sum_{2\leqslant k<n\leqslant N}\gamma_k\gamma_n<\gamma_1^2-\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(N)\sum_{k=2}^{N}\gamma_k=$$

$$=-\lambda_1(N)\sum_{k=2}^{N}\gamma_k+\gamma_1^2-\sum_{k=2}^{N}\lambda_k(N)\sum_{k=2}^{N}\gamma_k. \tag{4.16}$$

Введем обозначения:

$$A(N):=\lambda_1^2(N)+\lambda_1(N)\sum_{2\leqslant k<n\leqslant N}\lambda_n(N),$$

$$B(N):=\sum_{k=2}^{N}\lambda_k^2(N)+\sum_{2\leqslant k<n\leqslant N}(\lambda_k(N)\lambda_n(N)+\gamma_k\gamma_n).$$

Тогда неравенство (4.16) можно переписать в виде

$$A(N) + B(N) < -\lambda_1(N) \sum_{k=2}^{N} \gamma_k + \gamma_1^2 - \sum_{k=2}^{N} \lambda_k(N) \sum_{k=2}^{N} \gamma_k. \tag{4.17}$$

Из неравенств (4.6) следует, что

$$A(N) < \gamma_1^2 - \lambda_1(N) \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \gamma_n.$$

Таким образом, для доказательства неравенства (4.17) достаточно показать, что

$$B(N) < -\sum_{k=2}^{N} \lambda_k(N) \sum_{k=2}^{N} \gamma_k. \tag{4.18}$$

Обозначим $\delta_k(N) := \gamma_k + \lambda_k(N)$, $k = 2, \ldots, N$, следовательно, согласно (4.6),

$$0 < \delta_k(N) < -\lambda_{k+1}(N) + \lambda_k(N), \quad k = 2, \ldots, N-1. \tag{4.19}$$

Тогда неравенство (4.18) можно переписать в виде

$$\sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2(N) + \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \lambda_k(N)\lambda_n(N) + \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} (-\lambda_k(N) + \delta_k(N))(-\lambda_n(N) + \delta_n(N)) <$$

$$< \left(\sum_{k=2}^{N} (-\lambda_k(N) + \delta_k(N))\right) \left(-\sum_{k=2}^{N} \lambda_k(N)\right). \tag{4.20}$$

Совершая тождественные преобразования в обеих частях неравенства (4.20), получаем

$$\sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2(N) + \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \lambda_k(N)\lambda_n(N) + \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} (-\lambda_k(N) + \delta_k(N))(-\lambda_n(N) + \delta_n(N)) =$$

$$= \sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2(N) + 2 \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \lambda_k(N)\lambda_n(N) - \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} (\lambda_k(N)\delta_n(N) + \lambda_n(N)\delta_k(N)) +$$

$$+ \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \delta_k(N)\delta_n(N) < \left(\sum_{k=2}^{N} (-\lambda_k(N) + \delta_k(N))\right) \left(-\sum_{k=2}^{N} \lambda_k(N)\right) = \sum_{k=2}^{N} \lambda_k^2(N) +$$

$$+2 \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \lambda_k(N)\lambda_n(N) - \sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} (\lambda_k(N)\delta_n(N) + \lambda_n(N)\delta_k(N)) - \sum_{k=2}^{N} \delta_k(N)\lambda_k(N). \tag{4.21}$$

Сокращая одинаковые слагаемые в обеих частях неравенства (4.21), имеем

$$\sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \delta_k(N)\delta_n(N) < -\sum_{k=2}^{N} \delta_k(N)\lambda_k(N). \tag{4.22}$$

Складывая неравенства (4.19), приходим к неравенствам

$$0 < \delta_2(N) < -\lambda_3(N), \quad \delta_2(N) + \delta_3(N) < -\lambda_4(N), \ldots \quad \sum_{k=2}^{N-1} \delta_k(N) < -\lambda_N(N). \tag{4.23}$$

Группируя слагаемые в левой части неравенства (4.22), получаем

$$\sum_{2\leqslant k<n\leqslant N} \delta_k(N)\delta_n(N) = \delta_N(N) \sum_{k=2}^{N-1} \delta_k(N) + \delta_{N-1}(N) \sum_{k=2}^{N-2} \delta_k(N) + \ldots + \delta_3(N)\delta_2(N) <$$

$$-\delta_N(N)\lambda_N(N) - \delta_{N-1}(N)\lambda_{N-1}(N) - \ldots - \delta_3(N)\lambda_3(N) < -\sum_{k=2}^{N} \delta_k(N)\lambda_k(N).$$

Таким образом, доказано неравенство (4.22) и, следовательно, правая часть неравенства (4.7). $\square$

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия* (2.3), (2.4) *и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ *сходится. Тогда существует предел* $\lim\limits_{N\to\infty} \lambda^{\pm}(N) = \lambda_0^{\pm}$, *и для вещественной части* α_0 *корней* $\lambda_0^{\pm}$ *уравнения* (4.3) *справедливо неравенство*

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \leqslant \alpha_0 \leqslant -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2+\gamma_k^2}. \tag{4.24}$$

Доказательство. Последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} c_k$ является возрастающей, следовательно, в силу (4.11) последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} (p_k(N)+\gamma_k)$ также является возрастающей. Кроме того, в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ справедлива оценка $\sum\limits_{k=1}^{N} (p_k(N)+\gamma_k) < \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$. Таким образом, последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} (p_k(N)+\gamma_k)$ является возрастающей и ограниченной сверху и, следовательно, имеет предел при $N\to\infty$. Далее, из неравенств (4.6) имеем

$$0 < \lambda_k(N)+\gamma_k < p_k(N)+\gamma_k, \quad k=1,\ldots,N, \quad \gamma_0 = 0. \tag{4.25}$$

Поэтому последовательность сумм $\sum\limits_{k=1}^{N} (\lambda_k(N)+\gamma_k)$ является возрастающей и ограниченной сверху и, следовательно, также имеет предел при $N\to\infty$. Обозначим $\psi_k(N) := \lambda_k(N)+\gamma_k$. Таким образом, в силу равенства (4.8) существует предел

$$\lim_{N\to\infty}\alpha(N) = -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(\lambda_k(N)+\gamma_k) = -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\psi_k(N) =: \alpha_0. \tag{4.26}$$

Теперь покажем, что существует предел $\lim\limits_{N\to\infty}\beta(N)$. Действительно, из соотношения (4.10) получаем

$$\left(\alpha^2(N)+\beta^2(N)\right) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\gamma_k}{(-1)^N\prod\limits_{k=1}^{N}\lambda_k(N)}\left(\omega^2 - \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\right),$$

$$\beta^2(N) = -\alpha^2(N) + \frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\gamma_k}{\prod\limits_{k=1}^{N}(\gamma_k-\psi_k(N))}\left(\omega^2 - \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\right). \tag{4.27}$$

Покажем, что при $N\to\infty$ правая часть равенства (4.27) имеет предел. В самом деле, при $N\to\infty$

$$\lim_{N\to\infty}\left(\omega^2 - \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\gamma_k}\right) = \omega^2 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\gamma_k}.$$

В свою очередь, сомножитель

$$\frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\gamma_k}{(-1)^N\prod\limits_{k=1}^{N}\lambda_k(N)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{N}\gamma_k}{\prod\limits_{k=1}^{N}(\gamma_k-\psi_k(N))},$$

где $\psi_k(N)\geqslant 0$, $k\in\mathbb{N}$, может быть преобразован к виду

$$\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left(1-\dfrac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right)}. \tag{4.28}$$

Покажем, что величина (4.28) имеет предел при $N \to \infty$. Легко проверить, что справедливо следующее неравенство:

$$-\ln(1-x) < 2x, \quad x \in [0, 1/2). \tag{4.29}$$

В свою очередь, из условия (2.4) вытекает, что величина $\dfrac{\psi_k(N)}{\gamma_k}$ стремится к нулю при $k \to +\infty$, поскольку

$$\frac{\psi_k(N)}{\gamma_k} < \frac{\gamma_k - \gamma_{k-1}}{\gamma_k} \to 0, \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, найдется такое $k_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k \geqslant k_0$ выполнено неравенство

$$0 < \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k} < \frac{1}{2}.$$

Таким образом, согласно неравенству (4.29) справедлива цепочка неравенств

$$-\ln \prod_{k=k_0}^{N} \left(1 - \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right) = -\sum_{k=k_0}^{N} \ln \left(1 - \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right) < 2 \sum_{k=k_0}^{N} \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k} \leqslant 2 \sum_{k=k_0}^{N} \psi_k(N),\ \gamma_k \geqslant 1.$$

Отсюда и из соотношения (4.26) следует существование предела последовательности

$$-\ln \prod_{k=1}^{N} \left(1 - \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right),$$

а следовательно, и последовательности (4.28), поскольку конечное число слагаемых

$$-\sum_{k=1}^{k_0} \ln \left(1 - \frac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right)$$

не влияет на сходимость последовательности $-\sum\limits_{k=1}^{N} \ln \left(1 - \dfrac{\psi_k(N)}{\gamma_k}\right)$ при $N \to +\infty$.

Таким образом, правая часть равенства (4.27) имеет предел при $N \to \infty$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} \beta(N) = \beta_0$. Выделяя в уравнении (4.1) действительную и мнимую части, получаем следующие равенства:

$$\frac{\alpha^2(N) - \beta^2(N)}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k(\alpha(N) + \gamma_k)}{(\alpha(N) + \gamma_k)^2 + \beta^2(N)}, \tag{4.30}$$

$$\alpha(N) = -\frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{(\alpha(N) + \gamma_k)^2 + \beta^2(N)}. \tag{4.31}$$

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в уравнениях (4.30) и (4.31) получаем равенства

$$\frac{\alpha_0^2 - \beta_0^2}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k(\alpha_0 + \gamma_k)}{(\alpha_0 + \gamma_k)^2 + \beta_0^2},$$

$$\alpha_0 = -\frac{\omega^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\alpha_0 + \gamma_k)^2 + \beta_0^2}.$$

Следовательно, числа $\lambda_0^{\pm} = \alpha_0 \pm i\beta_0$ являются комплексно-сопряженными корнями уравнения (4.3). Таким, образом, переходя к пределу при $N \to \infty$ в неравенстве (4.7), получаем неравенство (4.24). □

Определим расположение невещественных корней уравнения

$$(L(\lambda)f, f) = \lambda^2 + (Af, f) + (Bf, f) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(Af, f) + b_k(Bf, f)}{\lambda + \gamma_k} = 0 \quad (f \in D(A),\ ||f|| = 1). \tag{4.32}$$

Введем следующие обозначения: $\omega^2 = ((A+B)f, f) > 0$, $c_k = ((a_k A + b_k B)f, f)\,\omega^{-2} > 0$, $A(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k(\lambda + \gamma_k)^{-1}$, $B(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k(\lambda + \gamma_k)^{-1}$.

В указанных обозначениях уравнение (4.32) принимает вид (4.3):

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2}+1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda+\gamma_k},\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Покажем, что в этом случае выполняются условия $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k<+\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\gamma_k^{-1}<1$. Действительно, используя условия (1.4) и (1.5), получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(Af,f)\omega^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k(Bf,f)\omega^{-2}<\max\{a,b\}\left((Af,f)\omega^{-2}+(Bf,f)\omega^{-2}\right)=\max\{a,b\},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_k\gamma_k^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\gamma_k^{-1}(Af,f)\omega^{-2}+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\gamma_k^{-1}(Bf,f)\omega^{-2}<(Af,f)\omega^{-2}+(Bf,f)\omega^{-2}=1.$$

Лемма 4.4. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5), (2.3), (2.4). *Тогда невещественные корни уравнения* (4.32) *лежат в полосе* $\alpha_1\leqslant\operatorname{Re}\lambda\leqslant\alpha_2$, *где*

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\sup_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA+b_kB)f,f)}{((A+B)f,f)}\geqslant-\frac{1}{2}\left\|A_0^{-1/2}\left(aA+bB\right)A_0^{-1/2}\right\|,\quad f\in Dom(A),$$

$$\alpha_2=-\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA+b_kB)f,f)}{\left((A+B+\gamma_k^2I)f,f\right)}<-\frac{1}{2}\left\|(a_1A+b_1B)^{-1/2}\left(A_0+\gamma_1^2I\right)(a_1A+b_1B)^{-1/2}\right\|^{-1},$$

$$f\in Dom(A).$$

Доказательство. Пусть λ — невещественный корень уравнения (4.32). На основании леммы 4.3 имеем

$$\operatorname{Re}\lambda\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}c_k=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA+b_kB)f,f)}{((A+B)f,f)}\quad(f\in D(A),\ \|f\|=1).\tag{4.33}$$

Положим в неравенстве (4.33) $f=A_0^{-1/2}g$, тогда

$$\operatorname{Re}\lambda\geqslant-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left((a_kA+b_kB)A_0^{-1/2}g,A_0^{-1/2}g\right)}{\left(A_0^{1/2}g,A_0^{-1/2}g\right)}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(A_0^{-1/2}(a_kA+b_kB)A_0^{-1/2}g,g\right)}{(g,g)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\left(A_0^{-1/2}(aA+bB)A_0^{-1/2}g,g\right)}{(g,g)}\geqslant-\frac{1}{2}\left\|A_0^{-1/2}(aA+bB)A_0^{-1/2}\right\|.$$

Согласно [23, лемма 2.1] оператор $A_0^{-1/2}\left(aA+bB\right)A_0^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. С другой стороны,

$$\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^2c_k}{\omega^2+\gamma_k^2}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((a_kA+b_kB)f,f)}{\left((A+B+\gamma_k^2I)f,f\right)}<$$

$$<-\frac{1}{2}\frac{((a_1A+b_1B)f,f)}{\left((A+B+\gamma_1^2I)f,f\right)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\left((A+B+\gamma_1^2I)f,f\right)}{((a_1A+b_1B)f,f)}\right)^{-1}.\tag{4.34}$$

Положим в неравенстве (4.34) $f=(a_1A+b_1B)^{-1/2}g$, тогда

$$\operatorname{Re}\lambda\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{\left((A+B+\gamma_1^2I)(a_1A+b_1B)^{-1/2}g,(a_1A+b_1B)^{-1/2}g\right)}{\left((a_1A+b_1B)^{1/2}g,(a_1A+b_1B)^{-1/2}g\right)}\right)^{-1}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\left((a_1A+b_1B)^{-1/2}(A+B+\gamma_1^2I)(a_1A+b_1B)^{-1/2}g,g\right)}{(g,g)}\right)^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{2}\left\|(a_1A+b_1B)^{-1/2}(A+B+\gamma_1^2 I)(a_1A+b_1B)^{-1/2}\right\|^{-1}.$$

В силу [24, лемма 8.2] оператор a_1A+b_1B является самосопряженным и, согласно [23, лемма 2.1], оператор $(a_1A+b_1B)^{-1/2}(A+B+\gamma_1^2 I)(a_1A+b_1B)^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H.

□

Определим расположение вещественных корней уравнения (4.32). Обозначим $\tau = (Af,f)\omega^{-2}$, где $f \in Dom(A)$, $\|f\| = 1$, $0 \leqslant \inf\tau \leqslant \tau \leqslant \sup\tau \leqslant 1$. Перепишем уравнение (4.32) в виде

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2}+1 = \tau\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\lambda+\gamma_k} + (1-\tau)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{\lambda+\gamma_k} =: \tau A(\lambda) + (1-\tau)B(\lambda). \tag{4.35}$$

Рассмотрим уравнение

$$\Phi_\tau(p) := \tau A(p) + (1-\tau)B(p) = 1, \tag{4.36}$$

Функция $\Phi_\tau(p) \to \infty$ при $p \to -\gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$ и монотонно убывает при вещественных $p \in (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ ($\gamma_0 = 0$). Следовательно, уравнение (4.36) имеет бесконечную последовательность вещественных корней $p_k(\tau) \in (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. В свою очередь, уравнение (4.35) также имеет бесконечную последовательность вещественных корней $\lambda_k(\tau) \in (-\gamma_k, p_k(\tau))$ (по построению). Следовательно, $\lambda_k(\tau) \in (-\gamma_k, \max\limits_{0<\tau<1} p_k(\tau))$ для всех $\tau \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.5. *Пусть выполнены условия леммы* 4.4. *Тогда вещественные корни уравнения* (4.32) *принадлежат интервалам* $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde p_k)$, *где* $\tilde p_k = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$, $p_k(\tau)$ — *вещественные корни уравнения* (4.36), *принадлежащие интервалам* $(-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ ($\gamma_0 = 0$), $\tau' := \left\|A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\|A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|$.

Доказательство. Если мы покажем, что корни $p_k(\tau)$ уравнения (4.36) непрерывно зависят от параметра τ, то $\max p_k(\tau) = \max\{p_k(\inf\tau), p_k(\sup\tau)\}$, $k \in \mathbb{N}$. Действительно, решим уравнение (4.36) относительно τ:

$$\tau = \frac{B(p)-1}{B(p)-A(p)}. \tag{4.37}$$

Отсюда получаем, что каждому $p \in (\min p_k(\tau), \max p_k(\tau))$, $k \in \mathbb{N}$ соответствует единственное значение τ, если $B(p) \neq A(p)$. Кроме того, правая часть уравнения (4.37) непрерывно зависит от p на интервале $p \in (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, если $B(p) \neq A(p)$. Следовательно, правая часть уравнения (4.37) является монотонной функцией на интервале $p \in (-\gamma_k, -\gamma_{k-1})$, если $B(p) \neq A(p)$. В случае, когда $B(p) = A(p)$, получаем, что $A(p) = B(p) = 1$ и $p_k(\tau) = p_k$ не зависит от τ. Таким образом, либо $p_k(\tau)$ монотонно зависит от $\tau \in (\inf\tau, \sup\tau)$, либо $p_k(\tau)$ не зависит от τ.

Покажем, что $\sup\tau = \left\|A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|$, $\inf\tau = \left\|A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$. Действительно, по определению

$$\tau = \frac{(Af,f)}{((A+B)f,f)} = \frac{(Af,f)}{(A_0f,f)}, \quad (f \in D(A), ||f|| = 1) \tag{4.38}$$

Положим в равенстве (4.38) $f = A_0^{-1/2}g$, тогда

$$\tau = \frac{(AA_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g)}{(A_0^{1/2}g, A_0^{-1/2}g)} = \frac{(A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}g, g)}{(g,g)}.$$

Таким образом,

$$\sup\tau = \sup_{g\neq 0}\frac{(A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}g,g)}{(g,g)} \leqslant \left\|A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|.$$

Положим в равенстве (4.38) $f = A^{-1/2}g$, тогда

$$\tau^{-1} = \frac{(A_0A^{-1/2}g, A^{-1/2}g)}{(A^{1/2}g, A^{-1/2}g)} = \frac{(A^{-1/2}A_0A^{-1/2}g, g)}{(g,g)}.$$

Следовательно,

$$\sup \tau^{-1} = \sup_{g\neq 0} \frac{(A^{-1/2}A_0A^{-1/2}g, g)}{(g,g)} \leqslant \left\| A^{-1/2}A_0A^{-1/2} \right\|.$$

Отсюда получаем, что $\inf \tau = \left(\sup \tau^{-1}\right)^{-1} \geqslant \left\| A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$.

Введем обозначения: $\tau' := \left\| A^{-1/2}A_0A^{-1/2}\right\|^{-1}$, $\tau'' := \left\| A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\right\|$, $\tilde{p}_k := \max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant 1} p_k(\tau) = \max\{p_k(\tau'), p_k(\tau'')\}$. Из приведенных рассуждений следует, что вещественные корни $\lambda_k(\tau)$ уравнения (4.35) принадлежат интервалам $\Delta_k = (-\gamma_k, \tilde{p}_k)$.

Завершим доказательство теоремы 2.2. Рассмотрим λ, находящееся на положительном расстоянии от нулей и особенностей функции $(L(\lambda)f, f)$, где f — произвольный вектор из области определения $Dom(A)$ оператора A и $\|f\| = 1$. С этой целью введем в рассмотрение сколь угодно малые $\delta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$. Обозначим

$$\Pi_k = \{\lambda = x_k + iy_k \in \mathbb{C} | x_k, y_k \in \mathbb{R}, x_k \in [-\gamma_k - \delta_k, \tilde{p}_k + \delta_k], y_k \in [-\delta_k, \delta_k], \delta_k > 0\},$$

$$\Pi = \{\lambda = x + iy \in \mathbb{C} | -\alpha_1 - \delta < x < -\alpha_2 + \delta, \delta > 0\}.$$

Из лемм 4.4-4.5 следует, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{\cup_{k=1}^{\infty}\Pi_k \cup \Pi\}$ существует такое число $C(\lambda) > 0$, что $\|L(\lambda)f\| \geqslant \sup\limits_{||f||=1} |(L(\lambda)f, f)| \geqslant C(\lambda) > 0$. Кроме того, так как $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$, то $\|L^*(\lambda)f\| \geqslant C(\lambda) > 0$. Таким образом, оператор-функция $L(\lambda)$ обратима на множестве $\mathbb{C}\backslash\{\cup_{k=1}^{\infty}\Pi_k \cup \Pi\}$ для сколь угодно малых $\delta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$.

Теорема 2.2 доказана. □

Доказательство теоремы 2.3. Преобразуем оператор-функцию $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = A^{1/2}\left(\lambda^2 A^{-1} + (1 - \hat{K}(\lambda))I + (1 - \hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}\right)A^{1/2}, \tag{4.39}$$

где $\mathcal{K}$ — неотрицательное самосопряженное ограниченное расширение по Фридрихсу оператора $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ (подробнее см. [23, лемма 2.1]). Рассмотрим оператор-функцию

$$\mathcal{Q}(\lambda) = (1 - \hat{K}(\lambda))I + (1 - \hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}) = (1 - \hat{K}(\lambda))\left[I + s(\lambda)\mathcal{K}\right], \tag{4.40}$$

где $s(\lambda) = \dfrac{1 - \hat{Q}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)}$. Оператор-функция $\mathcal{Q}(\lambda)$ обратима, если $\arg s(\lambda) \neq \pi$ и $\hat{K}(\lambda) \neq 1$. Предположим, что $s(\lambda) = -r$ при некотором положительном r, тогда из уравнения

$$-r = \frac{1 - \hat{Q}(\lambda)}{1 - \hat{K}(\lambda)}$$

следует уравнение

$$\frac{r}{1+r}\hat{K}(\lambda) + \frac{1}{1+r}\hat{Q}(\lambda) = 1, \tag{4.41}$$

которое имеет решение. Корни уравнения (4.41), также как и корни уравнения $1 + \hat{K}(\lambda) = 0$ — отрицательные числа, следовательно, при $\arg\lambda \neq \pi$ оператор-функция $Q(\lambda)$ обратима. Согласно теореме И. Ц. Гохберга (см. [12]), оператор-функция $\mathcal{Q}(\lambda) + \lambda^2 A^{-1} (A^{-1} \in \sigma_\infty)$ обратима при всех невещественных λ, за исключением некоторого счетного множества характеристических чисел конечной алгебраической кратности, которые могут иметь лишь отрицательные точки сгущения. В силу формулы (4.39) это утверждение справедливо и для оператор-функции $L(\lambda)$. Симметрия невещественной части спектра относительно вещественной оси вытекает из соотношения $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$. □

Авторы глубоко признательны профессору А. А. Шкаликову за полезные обсуждения и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1995. — *186.* — № 8. — С. 67–92.
2. *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах// Тр. МИАН. — 1999. — *227.* — С. 109–121.
3. *Власов В. В.* О корректной разрешимости абстрактных параболических уравнений с последействием// Докл. РАН. — 2007. — *415.* — № 2. — С. 151-152.
4. *Власов В. В., Ву Дж., Кабирова Г. Р.* Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *35.* — С. 44–59.
5. *Власов В. В., Гавриков А. А., Иванов С. А., Князьков Д. Ю., Самарин В. А., Шамаев А. С.* Спектральные свойства комбинированных сред// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 134–155.
6. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30.* — С. 3–173.
7. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2011. — *8.*
8. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — *28.* — С. 75–114.
9. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
10. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 36–65.
11. *Власов В. В., Шматов К. И.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с запаздыванием в гильбертовом пространстве// Тр. МИАН. — 2003. — *243.* — С. 127–137.
12. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
13. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191.* — № 7. — С. 31–72.
14. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23.* — С. 149-187.
15. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
16. *Лионс Ж. П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М., 1971.
17. *Лыков А. В.* Проблема тепло- и массообмена — Минск: Наука и техника, 1976.
18. *Милославский А. И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости// Деп. в Укр. НИИНТИ. — 13.07.1987. — № 1229-УК87.
19. *Палин В. В., Радкевич Е. В.* Законы сохранения и их гиперболические регуляризации// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 88–115.
20. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
21. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
22. *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью// Изв. РАН. Сер. Мех. жидк. и газа. — 2011. — № 2. — С. 92–103.
23. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1988. — *177*, № 1. — С. 96-118.
24. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1989. — *14.* — С. 140–224.
25. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integral Equ. Appl. — 1994. — *6.* — С. 479–508.
26. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102.* — С. 38–57.
27. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations// Israel J. Math. — 1985. — *50.* — № 3. — С. 231–263.

28. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space// J. Differ. Equ. — 1987. — *70.* — С. 366–389.
29. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31.* — С. 113–126.
30. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *355.* — С. 1–11.
31. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — N. Y.: Springer, 1966.
32. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel: Birkhäuser, 2003.
33. *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structual operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays// Differ. Integral Equ. — 1990. — *3*, № 4. — С. 733–756.
34. *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2008. — *66.* — № 3, 4. — С. 249–272.
35. *Miller R. K.* Volterra integral equation in Banach space// Funkcialaj Ekvac. — 1975. — *18.* — С. 163–194.
36. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *66.* — С. 313–332.
37. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces// Funkcialaj Ekvac. — 1978. — *21.* — С. 279–305.
38. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52.* — С. 143–165.
39. *Vlasov V. V., Rautian N. A.* Correct solvability of integro-differential equations arising in the theory of viscoelastisity// Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Acad. Sci. Azerbaijan. — 2014. — *40.* — С. 407–417.
40. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// J. Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — С. 751–768.
41. *Wu J.* Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay// Differ. Integral Equ. — 1991. — *4*, № 6. — С. 1325–1351.
42. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer, 1996.

В. В. Власов
МГУ им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва
E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан
МГУ им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва
E-mail: nrautian@mail.ru