Современная математика. Фундаментальные направления. Том 58 (2015). С. 5–21

УДК 517.958

О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА—КУЗНЕЦОВА

© 2015 г. **А. П. АНТОНОВА, А. В. ФАМИНСКИЙ**

1. Введение. Описание основных результатов

В работе рассматривается начально-краевая задача для уравнения Захарова—Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = f(t,x,y), \tag{1.1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y), \qquad x \geqslant 0, \tag{1.2}$$

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3}$$

в области $\Pi_T^+ = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$, где $T > 0$ произвольно, $u = u(t,x,y)$.

Уравнение (1.1) является одним из вариантов $(2+1)$-мерного обобщения уравнения Кортевега—де Фриза $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$. Впервые оно было выведено в работе [2] для описания распространения нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, помещенной в магнитное поле, и в дальнейшем получило название уравнения Захарова—Кузнецова. Это уравнение является модельным для описания волн, двигающихся в заданном направлении (в данном случае это положительное направление оси x) и испытывающих поперечные деформации. Физический смысл рассматриваемой задачи состоит в описании волн, распространяющихся от начальной «стенки» $x = 0$.

Целью работы является изучение свойств внутренней регулярности слабых решений. В случае задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова эти вопросы были ранее рассмотрены в статьях [1, 12, 16], а в случае аналогичной начально-краевой задачи в полуполосе $(0,T) \times \mathbb{R}_+$ для уравнения Кортевега—де Фриза — в статье [4].

Для описания классов рассматриваемых решений введем некоторые обозначения. Положим $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : x > 0\}$, $B_T = (0,T) \times \mathbb{R}$, $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}^2_+)$, $W^k_{p,+} = W^k_p(\mathbb{R}^2_+)$, $H^k_+ = H^k(\mathbb{R}^2_+)$. Если $\nu = (k_1, k_2)$ — целочисленный мультииндекс, $|\nu| = k_1 + k_2$, то положим $\partial^\nu = \partial_x^{k_1}\partial_y^{k_2}$. Пусть

$$|D^k\phi| = \Big(\sum_{|\nu|=k} (\partial^\nu \phi)^2\Big)^{1/2}, \qquad |D\phi| = |D^1\phi|.$$

Для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$L^\alpha_{p,+} = \{\phi(x,y) : (1+x)^\alpha \phi \in L_{p,+}\}, \qquad W^{1,\alpha}_{p,+} = \{\phi(x,y) \in L^\alpha_{p,+} : \phi_x, \phi_y \in L^\alpha_{p,+}\}, \quad H^{1,\alpha}_+ = W^{1,\alpha}_{2,+}$$

и введем на этих пространствах естественные нормы. В дальнейших результатах начальная функция u_0 будет выбираться из пространств $L^\alpha_{2,+}$ и $H^{1,\alpha}_+$ при $\alpha \geqslant 0$. Для описания свойств краевых условий будем использовать анизотропные пространства Соболева дробного порядка: для $s_1, s_2 \geqslant 0$ положим

$$H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2) = \{\mu(t,y) : (1 + |\xi_1|^{s_1} + |\xi_2|^{s_2})\widehat{\mu}(\xi_1,\xi_2) \in L_2(\mathbb{R}^2)\},$$

где символом $\widehat{\mu}$ обозначено преобразование Фурье функции μ. Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ через $H^{s_1,s_2}(\Omega)$ обозначим пространство сужений на Ω функций из $H^{s_1,s_2}(\mathbb{R}^2)$ с естественной нормой.

Символом $C^k_b(\overline{\Omega})$ будем обозначать пространство функций, обладающих всеми частными производными до порядка k включительно, непрерывными и ограниченными в $\overline{\Omega}$. Положим $C^k_{b,+} = C^k_b(\overline{\mathbb{R}}^2_+)$, $C_b(\overline{\Omega}) = C^0_b(\overline{\Omega})$.

Слабые решения рассматриваемой задачи понимаются в смысле следующего определения.

Работа выполнена в рамках Проекта 333 государственного задания Минобрнауки РФ в сфере научной деятельности.

Определение 1.1. Функция $u \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$ называется слабым решением задачи (1.1)–(1.3), если для любой функции $\phi(t,x,y)$ такой, что $\phi \in L_\infty(0,T;H^3_+)$, $\phi_t \in L_\infty(0,T;L_{2,+})$, $\phi|_{t=T}=0$, $\phi|_{x=0}=\phi_x|_{x=0}=0$, справедливо равенство

$$\iiint_{\Pi_T^+}\Big[u(\phi_t+\phi_{xxx}+\phi_{xyy})+\frac{1}{2}u^2\phi_x+f\phi\Big]\,dxdydt+ \\ +\iint_{\mathbb{R}^2_+}u_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy+\iint_{B_T}u_1\phi_{xx}\big|_{x=0}\,dydt=0. \quad (1.4)$$

Слабые решения задачи (1.1)–(1.3) будем рассматривать в пространстве функций $X^\alpha(\Pi_T^+)$ при $\alpha \geqslant 0$, состоящем из функций $f(t,x,y)$ таких, что

$$f\in C_w([0,T];L^\alpha_{2,+}),\qquad \sup_{x_0\geqslant 0}\int_0^T\int_{x_0}^{x_0+1}\int_{\mathbb{R}}|Df|^2\,dydxdt<\infty,$$

а если $\alpha>0$, то дополнительно

$$|Df|\in L_2(0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$$

(символ C_w обозначает пространство слабо непрерывных отображений).

Разрешимость задачи в пространствах $X^\alpha(\Pi_T^+)$ изучалась в работах [8, 11] (на самом деле там рассматривались уравнения более общего вида) и [9, 10]. В статье [10] доказан следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть* $u_0\in L^\alpha_{2,+}$, $u_1\in H^{s/3,s}(B_T)$, $f\in L_1(0,T;L^\alpha_{2,+})$ *для некоторых* $\alpha\geqslant 0$, $s>3/2$, $T>0$. *Тогда существует слабое решение задачи* (1.1)–(1.3) *из пространства* $X^\alpha(\Pi_T^+)$. *Если* $\alpha\geqslant 1$, *то это решение единственно в рассматриваемом классе.*

При более гладких граничных данных глобальная корректность рассматриваемой задачи рассматривалась в статьях [9, 10]). Введем пространство функций

$$K_1(\Pi_T^+)=\{u\in C([0,T];H^1_+)\cap L_2(0,T;C^1_{b,+})\cap L_2(\mathbb{R}_+;C_b(\overline{B}_T)),\\ \partial_x^j u\in C_b(\overline{\mathbb{R}}^x_+;H^{(2-j)/3,2-j}(B_T)),\quad 0\leqslant j\leqslant 2\}$$

(символ C_b обозначает пространство непрерывных ограниченных отображений). В работе [9] был установлен следующий результат.

Теорема 1.2. *Пусть* $u_0\in H^1_+$, $u_1\in H^{2/3,2}(B_T)$, $f\in L_2(0,T;H^1_+)$ *для некоторого* $T>0$, $u_1(0,y)\equiv u_0(0,y)$. *Тогда существует единственное слабое решение задачи* (1.1)–(1.3) *из пространства* $K_1(\Pi_T^+)$.

Глобальная корректность рассматриваемой задачи при более гладких граничных данных $u_0\in H^k_+$, $u_1\in H^{(k+1)/3,k+1}(B_T)$ при $k\geqslant 2$ доказана в [10].

Другие начально-краевые задачи для уравнения Захарова—Кузнецова изучались в работах [5–7, 10, 11, 13–15, 17–19] и других.

В настоящей работе устанавливается, что при дополнительных условиях убывания начальной функции u_0 и правой части f при $x\to+\infty$ решения, построенные в теоремах 1.1 и 1.2, обладают дополнительной гладкостью внутри области Π_T^+.

Чтобы сформулировать результаты настоящей статьи, введем дополнительные обозначения. Для $\delta\in(0,T)$, $x_0\geqslant 0$ положим $\Pi_T^{\delta,x_0}=(\delta,T)\times(x_0,+\infty)\times\mathbb{R}$,

$$L^\alpha_{2,x_0}=\{\phi(x,y):(1+x-x_0)^\alpha\phi\in L_2\big((x_0,+\infty)\times\mathbb{R}\big)\},$$

$$\lambda(f;T,\delta,x_0)=\sup_{x_1\geqslant x_0}\int_\delta^T\int_{x_1}^{x_1+1}\int_{\mathbb{R}}f^2\,dydxdt.$$

Через $X^\alpha(\Pi_T^{\delta,x_0})$ обозначим пространство функций $f(t,x,y)$ таких, что

$$f\in C_w([\delta,T];L^\alpha_{2,x_0}),\qquad \lambda(|Df|;T,\delta,x_0)<\infty,$$

а если $\alpha > 0$, то дополнительно
$$|Df| \in L_2(\delta, T; L^{\alpha-1/2}_{2,x_0}).$$

Теорема 1.3. *Пусть* $u_0 \in L^\alpha_{2,+}$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_2(0,T;L^\alpha_{2,+})$, $|Df| \in L_2(\delta_0, T; L^{\alpha-1/2}_{2,+})$ *для некоторых* $\alpha \geqslant 1/2$, $T > 0$, $\delta_0 \in [0,T)$. *Тогда существует слабое решение задачи* (1.1)–(1.3) $u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ *такое, что* $|Du| \in X^{\alpha-1/2}(\Pi^{\delta,0}_T)$ *для любого* $\delta \in (\delta_0, T)$.

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.3 *при* $\alpha \geqslant 1$, *и пусть дополнительно существует натуральное число* $m \in [2, 2\alpha]$ *такое, что* $\partial^\nu f \in L_1(\delta_0, T; L^{\alpha-|\nu|/2}_{2,a})$ *для* $2 \leqslant |\nu| \leqslant m$ *и некоторого* $a \geqslant 0$. *Тогда если* $u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ — *слабое решение задачи* (1.1)–(1.3), *то* $|D^m f| \in X^{\alpha-m/2}(\Pi^{\delta,x_0}_T)$ *для любых* $\delta \in (\delta_0, T)$, $x_0 > a$.

Теорема 1.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.2 *и дополнительно* $u_0 \in H^{1,\alpha}_+$, $f \in L_2(0,T; H^{1,\alpha}_+)$ *для некоторого* $\alpha > 0$. *Тогда, если* $u \in K_1(\Pi^+_T)$ — *слабое решение задачи* (1.1)–(1.3), *то* $\partial^\nu u \in X^\alpha(\Pi^+_T)$ *при* $|\nu| \leqslant 1$.

Теорема 1.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.5 *при* $\alpha \geqslant 1/2$, *и пусть дополнительно существует натуральное число* $m \in [2, 2\alpha+1]$ *такое, что* $\partial^\nu f \in L_1(\delta_0, T; L^{\alpha-|\nu|/2+1/2}_{2,a})$ *для* $2 \leqslant |\nu| \leqslant m$ *и некоторых* $\delta_0 \in [0,T)$, $a \geqslant 0$. *Тогда, если* $u \in K_1(\Pi^+_T)$ — *слабое решение задачи* (1.1)–(1.3), *то* $|D^m f| \in X^{\alpha-m/2+1/2}(\Pi^{\delta,x_0}_T)$ *для любых* $\delta \in (\delta_0, T)$, $x_0 > a$.

Подчеркнем, что все производные в условиях теорем 1.1–1.6 рассматриваются как обобщенные в смысле Соболева. Можно установить также результаты о существовании непрерывных производных рассматриваемых решений строго внутри области Π^+_T. Эти результаты полностью аналогичны случаю задачи Коши и приведены в последней части работы.

Условия, накладываемые в теоремах 1.2 и 1.3 на функцию u_1, можно считать естественными, так как они индуцированы свойствами дифференциального оператора $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$ в следующем смысле. Пусть $v(t,x,y)$ является решением задачи Коши из пространства $C_b(\mathbb{R}^t; H^1(\mathbb{R}^2))$ для уравнения
$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0 \tag{1.5}$$
с начальной функцией $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Тогда согласно [5] для любого $x \in \mathbb{R}$
$$\|v(\cdot, x, \cdot)\|_{\dot H^{2/3,2}(\mathbb{R}^2)} = \|(|\xi_1|^{2/3} + |\xi_2|^2)\widehat{v}(\xi_1, x, \xi_2)\|_{L_2^{\xi_1,\xi_2}(\mathbb{R}^2)} \sim \|\nabla v_0\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие вспомогательные функции. Положим
$$\omega(x) \equiv \begin{cases} ce^{1/(x^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \tag{1.6}$$
где положительная константа c выбрана так, чтобы $\int\limits_{-1}^{1} \omega(x)\,dx = 1$. Свойства этой функции хорошо известны, в частности, $\omega \in C^\infty(\mathbb{R})$. Положим
$$\eta(x) \equiv \int\limits_{-\infty}^{2x-1} \omega(\xi)\,d\xi = 2\int\limits_{-\infty}^{x} \omega(2\xi - 1)\,d\xi. \tag{1.7}$$
Тогда $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta'(x) > 0$ при $x \in (0,1)$, $\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$, а также $\eta(x) + \eta(1-x) \equiv 1$.

Будем использовать следующее интерполяционное неравенство из статьи [11]. Пусть $\psi_0(x)$, $\psi_1(x)$ — две положительные бесконечно гладкие при $x \geqslant 0$ функции такие, что $\psi_0(x) \leqslant c\psi_1(x)$, $|\psi_j^{(k)}(x)| \leqslant c(k)\psi_j(x)$ для всех $x \geqslant 0$, натуральных k и $j = 0$ или 1, а $w(x,y)$ — такая функция, что $|Dw|\psi_0^{1/2}, w\psi_1^{1/2} \in L_2(\mathbb{R}^2_+)$. Тогда для $q \in [2, +\infty)$
$$\|w\psi_0^s\psi_1^{1/2-s}\|_{L_{q,+}} \leqslant c(q)\||Dw|\psi_0^{1/2}\|^{2s}_{L_{2,+}}\|w\psi_1^{1/2}\|^{1-2s}_{L_{2,+}} + c(q)\|w\psi_1^{1/2}\|_{L_{2,+}}, \tag{1.8}$$
где $s = 1/2 - 1/q$.

Далее мы будем опускать пределы интегрирования в интегралах по $\mathbb{R}^2_+$. Символом $[s]$ обозначается целая часть числа $s \geqslant 0$.

Статья организована следующим образом. В части 2 рассматривается вспомогательная линейная задача. В части 3 устанавливаются вспомогательные результаты о разрешимости начально-краевой задачи для более общего уравнения, чем (1.1), но при нулевой краевой функции u_1, а также некоторые оценки решений. Теоремы 1.3–1.6 доказаны в части 4. Результаты о существовании непрерывных производных и их оценках в нормах Гельдера приведены в части 5.

2. Вспомогательная линейная задача

Рассмотрим начально-краевую задачу в Π_T^+ для линейного уравнения

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = f(t,x,y) \tag{2.1}$$

с граничными данными (1.2), (1.3).

В статьях [9–11] было построено специальное решение однородного уравнения (2.1) типа «граничного потенциала». Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$r^3 - r\xi^2 + i\lambda = 0, \qquad (\lambda,\xi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Это уравнение имеет единственный корень $r_0(\lambda,\xi)$ с отрицательной действительной частью. Положим для $\mu \in L_2(\mathbb{R}^2)$ при $x \geqslant 0$

$$J(t,x,y;\mu) \equiv \mathcal{F}^{-1}_{t,y}\left[e^{r_0 x}\widehat{\mu}(\xi_1,\xi_2)\right](t,y) \tag{2.2}$$

($\mathcal{F}^{-1}$ — обратное преобразование Фурье). Известно, что эта функция бесконечно дифференцируема при $x > 0$ и удовлетворяет уравнению (2.1) при $f \equiv 0$. Более того, если $\mu \in H^{1/3,1}(B_T)$ и $\mu(t,y) = 0$ при $t < 0$, то J является слабым решением задачи (2.1), (1.2), (1.3) для $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv \mu$, $f \equiv 0$ в смысле, аналогичном определению 1.1.

Лемма 2.1. *Если $\mu(t,y) = 0$ при $t < 0$, то для любых $T > 0$, $a > 0$, $\beta \geqslant 0$ и целых неотрицательных чисел m, l, j существует положительная константа c такая, что*

$$\sup_{t\in[0,T],x\geqslant a} e^{\beta x}\|\partial_t^m\partial_x^l J(t,x,\cdot;\mu)\|_{H^j(\mathbb{R})} \leqslant c\|\mu\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. В работе [9] для функции J при $x > 0$ было установлено альтернативное представление

$$J(t,x,y;\mu) = \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathbb{R}} (3\partial_x^3 + \partial_y^2)G(t-\tau,x,y-z)\mu(\tau,z)\,dzd\tau, \tag{2.4}$$

$$G(t,x,y) \equiv \frac{1}{t^{2/3}}A\Big(\frac{x}{t^{1/3}},\frac{y}{t^{1/3}}\Big), \qquad A(x,y) \equiv \mathcal{F}^{-1}_{x,y}\left[e^{i(\xi_1^3+\xi_1\xi_2^2)}\right](x,y). \tag{2.5}$$

Свойства функции A изучались в работах [5, 12]. В частности, в [12] установлено, что функция A бесконечно дифференцируема и существует положительная константа $c_0 > 0$ такая, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}$, целых неотрицательных m и мультииндекса ν

$$(1+|y|)^m|\partial^\nu A(x,y)| \leqslant c(x_0,m,|\nu|)e^{-c_0(x-x_0)^{3/2}} \qquad \forall x \geqslant x_0, \forall y \in \mathbb{R}.$$

Тогда оценка (2.3) следует из равенства (2.4). □

В статье [10] при изучении корректности задачи (1.1)–(1.3) для описания класса рассматриваемых решений были введены следующие пространства, частным случаем которых является упомянутое выше пространство $K_1(\Pi_T^+)$, а именно, для любого целого $n \geqslant 0$ пусть символ $K_n(\Pi_T^+)$ обозначает пространство функций $u(t,x,y)$ таких, что

$$\begin{aligned}
\partial_t^m u &\in C\big([0,T];H_+^{n-3m}\big), && m \leqslant [n/3],\\
\partial_x^l u &\in C_b\big(\overline{\mathbb{R}}_+;H^{(n-l+1)/3,n-l+1}(B_T)\big), && l \leqslant n+1,\\
\partial_t^m\partial_x^l\partial_y^j u &\in L_2\big(0,T;C_{b,+}\big), && 3m+l+j \leqslant n,\\
\partial_t^m\partial_x^l\partial_y^j u &\in L_2\big(\mathbb{R}_+;C_b(\overline{B}_T)\big), && n \geqslant 1, \quad 3m+l+j \leqslant n-1.
\end{aligned}$$

В частности, в [10] доказана следующая оценка:

$$\|J(\cdot,\cdot,\cdot;\mu)\|_{K_n(\Pi_T^+)} \leqslant c(T,n)\|\mu\|_{H^{(n+1)/3,n+1}(\mathbb{R}^2)}. \tag{2.6}$$

Для описания свойств правых частей уравнения (2.1) в этой же статье было введено пространство $M_n(\Pi_T^+)$ функций $f(t,x,y)$ таких, что

$$\partial_t^m f \in L_2\big(0,T;H_+^{n-3m}\big), \qquad m \leqslant m_0 = [(n+1)/3].$$

Чтобы сформулировать утверждения о разрешимости рассматриваемой задачи, введем вспомогательные функции $\widetilde{\Phi}_m$ следующим образом: пусть $\widetilde{\Phi}_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а для $m \geqslant 1$ положим

$$\widetilde{\Phi}_m(x,y) \equiv \partial_t^{m-1} f(0,x,y) - (\partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)\widetilde{\Phi}_{m-1}(x,y). \tag{2.7}$$

В работе [10] был установлен следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть $u_0 \in H_+^n$ для некоторого целого $n \geqslant 0$, $u_1 \equiv 0$, $f \in M_n(\Pi_T^+)$, и пусть $\widetilde{\Phi}_m(0,y) \equiv 0$ при $m < n/3$. Тогда существует единственное решение $u(t,x,y)$ задачи* (2.1), (1.2), (1.3) *из пространства $K_n(\Pi_T^+)$ и для любого $t_0 \in (0,T]$*

$$\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n)\Big(\|u_0\|_{H_+^n} + t_0^{1/6}\|f\|_{M_n(\Pi_{t_0}^+)} + \sum_{m=0}^{m_0-1}\|\partial_t^m f\big|_{t=0}\|_{H_+^{n-3(m+1)}}\Big). \tag{2.8}$$

В частном случае $n=1$ это утверждение было установлено в [9] и выглядит следующим образом: если $u_0 \in H_+^1$, $u_0(0,y) \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, $f \in L_2(0,T;H_+^1)$, то существует единственное решение $u(t,x,y)$ задачи (2.1), (1.2), (1.3) из пространства $K_1(\Pi_T^+)$ и для любого $t_0 \in (0,T]$ справедливо неравенство

$$\|u\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\big(\|u_0\|_{H_+^1} + t_0^{1/6}\|f\|_{L_2(0,t_0;H_+^1)}\big). \tag{2.9}$$

Определим также специальные пространства экспоненциально убывающих функций. Для любого $\beta > 0$ положим

$$Y_\beta(\Pi_T^+) = \{u(t,x,y) : ue^{\beta x} \in C([0,T];L_{2,+}), |Du|e^{\beta x} \in L_2(\Pi_T^+)\},$$

и пусть для целых неотрицательных n

$$Y_{\beta,n}(\Pi_T^+) = \{u(t,x,y) : \partial_t^m\partial^\nu u \in Y_\beta(\Pi_T^+), \quad 3m + |\nu| \leqslant n\};$$

введем на этих пространствах естественные нормы.

Лемма 2.3. *Пусть $u_0e^{\beta x} \in H_+^n$, где $n = 3k$ для некоторого целого неотрицательного k, $u_1 \equiv 0$, $\partial_t^m fe^{\beta x} \in L_2(0,T;H_+^{n-3m})$ при $m \leqslant k$, причем выполнены условия согласования граничных данных, а именно, $\widetilde{\Phi}_m(0,y) \equiv 0$ при $m < k$. Тогда существует единственное решение $u(t,x,y)$ задачи* (2.1), (1.2), (1.3) *из пространства $Y_{\beta,n}(\Pi_T^+) \cap K_n(\Pi_T^+)$ и для любого $t_0 \in (0,T]$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n,\beta)\Big(\|u_0e^{\beta x}\|_{H_+^n} + t_0^{1/6}\sum_{m=0}^{k}\|\partial_t^m fe^{\beta x}\|_{L_2(0,t_0;H_+^{n-3m})} + \sum_{m=0}^{k-1}\|\partial_t^m f\big|_{t=0}e^{\beta x}\|_{H_+^{n-3(m+1)}}\Big). \tag{2.10}$$

Доказательство. При $n=0$ утверждение леммы было ранее установлено в [11]. При этом были доказаны оценка

$$\|u\|_{Y_\beta(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,\beta)\big(\|u_0e^{\beta x}\|_{L_{2,+}} + \|fe^{\beta x}\|_{L_1(0,t_0;L_{2,+})}\big) \tag{2.11}$$

и неравенство

$$\iint u^2(t,x,y)e^{2\beta x}\,dxdy + 2\beta\int_0^t\iint(3u_x^2+u_y^2)e^{2\beta x}\,dxdyd\tau \leqslant$$

$$\leqslant \iint u_0^2e^{2\beta x}\,dxdy + 8\beta^3\int_0^t\iint u^2e^{2\beta x}\,dxdyd\tau + 2\int_0^t\iint fue^{2\beta x}\,dxdyd\tau \tag{2.12}$$

(формально оно получается умножением равенства (2.1) на $2ue^{2\beta x}$ и последующим интегрированием).

Поскольку при выполнении условий настоящей леммы выполнены также условия леммы 2.2, то существование решения рассматриваемой задачи из пространства $K_n(\Pi_T^+)$ уже доказано. При этом норма решения в пространстве $K_n(\Pi_{t_0}^+)$ оценивается через правую часть (2.8). Поэтому, в частности, в силу линейности задачи можно считать рассматриваемое решение достаточно гладким для справедливости промежуточных выкладок.

Осталось оценить решение в пространствах функций с экспоненциальными весами, например, при $x \geqslant 1$. Для любого $r \geqslant 1$ положим $\rho(x) \equiv e^{2\beta x}\eta(2 - x/r)\eta(x) + e^{4\beta r}\eta(x/r - 1)$. Заметим, что $\rho(x) \to e^{2\beta x}\eta(x)$ при $r \to +\infty$. Кроме того, $|\rho'''(x)| \leqslant c(\rho(x) + 1)$ при $x \geqslant 0$ равномерно по r.

Пусть $3m + |\nu| \leqslant n$. Тогда функция $v \equiv \partial_t^m \partial^\nu u$ удовлетворяет уравнению

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = \partial_t^m \partial^\nu f \tag{2.13}$$

и $v|_{t=0} = \widetilde{\Phi}_m$. Умножив равенство (2.13) на $2v(t,x,y)\rho(x)$ и проинтегрировав, получим аналогично (2.12), что

$$\iint v^2(t,x,y)\rho(x)\,dxdy + \int_0^t\!\!\iint (3v_x^2 + v_y^2)\rho'\,dxdyd\tau =$$

$$= \iint \widetilde{\Phi}_m^2 \rho\,dxdy + \int_0^t\!\!\iint v^2\rho'''\,dxdyd\tau + 2\int_0^t\!\!\iint \partial_t^m\partial^\nu f v\rho\,dxdyd\tau, \tag{2.14}$$

откуда с учетом (2.8) следует, что равномерно по r

$$\|v\rho^{1/2}\|_{C([0,t_0];L_{2,+})} + \||Dv|(\rho')^{1/2}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant$$

$$\leqslant c\Big(\|u_0 e^{\beta x}\|_{H_+^n} + t_0^{1/6}\sum_{m=0}^{k}\|\partial_t^m f e^{\beta x}\|_{L_2(0,t_0;H_+^{n-3m})} + \sum_{m=0}^{k-1}\|\partial_t^m f\big|_{t=0} e^{\beta x}\|_{H_+^{n-3(m+1)}}\Big).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \to +\infty$, завершаем доказательство леммы. □

3. Вспомогательная нелинейная задача

Перейдем к нелинейному уравнению следующего вида:

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x + (g(t,x,y)u)_x = f(t,x,y). \tag{3.1}$$

Вначале рассмотрим задачу (3.1), (1.2), (1.3) для $u_1 \equiv 0$ в классе функций $K_1(\Pi_T^+)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $u_0 \in H_+^1$, $u_1 \equiv 0$, $g \in K_1(\Pi_T^+) \cap L_2(0,T;W_{\infty,+}^{1,3/4})$, $f \in L_2(0,T;H_+^1)$, *причем* $u_0(0,y) \equiv 0$. *Тогда существует единственное слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (3.1), (1.2), (1.3) *из пространства* $K_1(\Pi_T^+)$. *Отображение* $(u_0,g,f) \mapsto u$ *Липшиц-непрерывно на любом шаре в норме отображения* $H_+^1 \times K_1(\Pi_T^+) \cap L_2(0,T;W_{\infty,+}^{1,3/4}) \times L_2(0,T;H_+^1)$ *в* $K_1(\Pi_T^+)$.

Доказательство. Сначала установим результат локальный по времени.

Для $t_0 \in (0,T]$ определим на множестве $K_1(\Pi_{t_0}^+)$ отображение Λ следующим образом: $u = \Lambda v$ является решением из множества $K_1(\Pi_{t_0}^+)$ начально-краевой задачи в $\Pi_{t_0}^+$ для линейного уравнения

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} = f - vv_x - (gv)_x \tag{3.2}$$

с граничными условиями (1.2), (1.3) (при $u_1 \equiv 0$).

В работе [9] было установлено следующее неравенство: при $t_0 \in (0,T]$

$$\|uv_x\|_{L_2(0,t_0;H_+^1)} + \|uv_y\|_{L_2(0,t_0;H_+^1)} \leqslant c(T)\|u\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}\|v\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}. \tag{3.3}$$

Из леммы 2.2 следует, что отображение Λ существует и в силу неравенств (2.9) и (3.3)

$$\|u\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\Big(\|u_0\|_{H_+^1} + \|f\|_{L_2(0,T;H_+^1)} + \|g\|_{K_1(\Pi_T^+)}^2 + t_0^{1/6}\|v\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}^2\Big). \tag{3.4}$$

Из неравенства (3.4) вытекает, что при достаточно больших $R>0$ и достаточно малых $t_0^*\in(0,T]$ отображение Λ для любого $t_0\in(0,t_0^*]$ переводит шар $K_{1,R}(\Pi_{t_0}^+)=\{v\in K_1(\Pi_{t_0}^+):\|v\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}\leqslant R\}$ в себя.

Далее рассмотрим две функции v и $\widetilde v$ из шара $K_{1,R}(\Pi_{t_0}^+)$. Аналогично (3.4) находим, что

$$\|\Lambda v-\Lambda\widetilde v\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}\leqslant c(T)t_0^{1/6}\big(R+\|g\|_{K_1(\Pi_T^+)}\big)\|v-\widetilde v\|_{K_1(\Pi_{t_0}^+)}. \tag{3.5}$$

Таким образом, при достаточно малых t_0 отображение Λ является сжимающим в шаре $K_{1,R}(\Pi_{t_0}^+)$.

В итоге, применяя принцип сжимающих отображений, находим, что существует величина t_0, зависящая от $\|u\|_{H_+^1}$, $\|g\|_{K_1(\Pi_T^+)}$ и $\|f\|_{L_2(0,T;H_+^1)}$, такая что в области $\Pi_{t_0}^+$ существует единственное решение задачи (3.1), (1.2), (1.3) из пространства $K_1(\Pi_{t_0}^+)$.

Чтобы продолжить это решение на весь интервал времени $(0,T)$, установим две априорные оценки.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *и пусть для некоторого* $T'\in(0,T]$ *функция* $u\in K_1(\Pi_{T'}^+)$ *является слабым решением задачи* (3.1), (1.2), (1.3) *в области* $\Pi_{T'}^+$, *тогда*

$$\|u\|_{C([0,T'];L_{2,+})}+\|u_x\big|_{x=0}\|_{L_2(B_{T'})}\leqslant c\big(T,\|u_0\|_{L_{2,+}},\|g\|_{L_1(0,T;W^1_{\infty,+})},\|f\|_{L_1(0,T;L_{2,+})}\big), \tag{3.6}$$

$$\|u\|_{C([0,T'];H_+^1)}\leqslant c\big(T,\|u_0\|_{H_+^1},\|g\|_{L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})},\|f\|_{L_2(0,T;H_+^1)}\big). \tag{3.7}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (3.3) $uu_x,(gu)_x\in L_2(0,T';H_+^1)$. Тогда в силу [10, лемма 4.3] для $t\in[0,T']$ справедливо равенство

$$\iint u^2(t,x,y)\,dxdy+\iint_{B_t}u_x^2\big|_{x=0}\,dyd\tau=\iint u_0^2\,dxdy+2\iiint_{\Pi_t^+}\big(f-(gu)_x-uu_x\big)u\,dxdyd\tau \tag{3.8}$$

(формально оно получается умножением равенства (3.1) на $2u$ и последующим интегрированием), откуда очевидно следует оценка (3.6). Далее в силу [10, лемма 4.4] (см. также [9, лемма 4]) для $t\in[0,T']$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
&\iint\Big(u_x^2+u_y^2-\frac13u^3\Big)\rho(x)\,dxdy+\iiint_{\Pi_t^+}(3u_{xx}^2+4u_{xy}^2+u_{yy}^2)\rho'(x)\,dxdyd\tau+\\
&\quad+\iint_{B_t}\big(u_{xx}^2\rho+2u_{xx}u_x\rho'-u_x^2\rho''\big)\big|_{x=0}\,dyd\tau-\iiint_{\Pi_t^+}(u_x^2+u_y^2)\rho'''\,dxdyd\tau-\\
&\quad-\iiint_{\Pi_t^+}u(4u_x^2+2u_y^2)\rho'\,dxdyd\tau+\frac13\iiint_{\Pi_t^+}u^3\rho'''\,dxdyd\tau+\frac14\iiint_{\Pi_t^+}u^4\rho'\,dxdyd\tau-\\
&-2\iiint_{\Pi_t^+}(gu)_x(u_{xx}+u_{yy})\rho\,dxdyd\tau-2\iiint_{\Pi_t^+}(gu)_xu_x\rho'\,dxdyd\tau-\frac13\iiint_{\Pi_t^+}(2g_x\rho-g\rho')u^3\,dxdyd\tau=\\
&=\iint_{\mathbb R_+^2}\Big(u_{0x}^2+u_{0y}^2-\frac13u_0^3\Big)\rho\,dxdy+2\iiint_{\Pi_t^+}(f_xu_x+f_yu_y)\rho\,dxdyd\tau+2\iint_{B_t}(fu_x\rho)\big|_{x=0}\,dyd\tau-\\
&\qquad-\iiint_{\Pi_t^+}fu^2\rho\,dxdyd\tau,
\end{aligned}\tag{3.9}$$

где $\rho(x)\equiv2-(1+x)^{-1/2}$ (формально оно получается умножением равенства (3.1) на $-\big(2(u_x\rho)_x+2u_{yy}\rho+u^2\rho\big)$ и последующим интегрированием). В силу интерполяционного неравенства (1.8) и уже установленной оценки (3.6)

$$\Big|\iint u^3\rho\,dxdy\Big|\leqslant\Big(\iint u^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint u^4\rho^2\,dxdy\Big)^{1/2}\leqslant c\Big(\iint|Du|^2\rho\,dxdy\Big)^{1/2}+c, \tag{3.10}$$

аналогично при $|\nu| = 1$

$$\Big|\iint u(\partial^\nu u)^2\rho'\,dxdy\Big| \leqslant c\Big(\iint (\partial^\nu u)^4(\rho')^2\,dxdy\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon \iint |D(\partial^\nu u)|^2\rho'\,dxdy + c(\varepsilon)\iint (\partial^\nu u)^2\rho\,dxdy, \quad (3.11)$$

где $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым; далее,

$$\Big|\iint (gu)_x(u_{xx}+u_{yy})\rho\,dxdy\Big| \leqslant \varepsilon \iint |D^2u|^2\rho'\,dxdy + \\ + c(\varepsilon)\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}\big[(g_x^2+g^2)(\rho')^{-1}\big]\iint (u_x^2\rho + u^2)\,dxdy, \quad (3.12)$$

где $(\rho'(x))^{-1} \sim (1+x)^{3/2}$, а $\varepsilon > 0$ также можно выбрать сколь угодно малым. Тогда из равенства (3.9) легко следует оценка (3.7). □

Вернемся к доказательству теоремы 3.1, в котором осталось установить непрерывную зависимость решений от данных задачи. Пусть два набора (u_0, g, f) и $(\widetilde{u}_0, \widetilde{g}, \widetilde{f})$ лежат в некотором шаре в соответствующем пространстве. Рассуждая полностью аналогично доказательству существования локального по времени решения, выберем $R > 0$ и $t_0 \in (0,T]$ так, чтобы решения соответствующих начально-краевых задач u и $\widetilde{u}$ были единственными неподвижными точками сжимающих отображений Λ и $\widetilde{\Lambda}$ в шаре $K_{1,R}(\Pi^+_{t_0})$. По аналогии с неравенством (3.5) можно записать, что

$$\|u-\widetilde{u}\|_{K_1(\Pi^+_{t_0})} \leqslant c(T)\big[\|u_0-\widetilde{u}_0\|_{H^1_+} + \|f-\widetilde{f}\|_{L_2(0,T;H^1_+)} + R\|g-\widetilde{g}\|_{K_1(\Pi^+_T)} + \\ + t_0^{1/6}\max(\|g\|_{K_1(\Pi^+_T)}, \|\widetilde{g}\|_{K_1(\Pi^+_T)})\|u-\widetilde{u}\|_{K_1(\Pi^+_{t_0})} + t_0^{1/6}R\|u-\widetilde{u}\|_{K_1(\Pi^+_{t_0})}\big],$$

откуда следует непрерывная зависимость локально по времени. Применение оценок (3.6), (3.7) завершает доказательство теоремы. □

Замечание 3.1. Использовав в доказательстве леммы 2.2 другую весовую функцию ρ, показатель 3/4 в условии $g \in L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})$, очевидно, можно немного уменьшить, но для наших дальнейших целей это непринципиально.

Обобщим данный результат на более гладкий случай. Чтобы сформулировать условия согласования граничных данных на прямой $(t,x) = (0,0)$, введем соответствующие вспомогательные функции: пусть $\Phi_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а для $m \geqslant 1$ положим

$$\Phi_m(x,y) \equiv \partial_t^{m-1}f(0,x,y) - (\partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2)\Phi_{m-1}(x,y) - \\ - \sum_{l=0}^{m-1}\binom{m-1}{l}\Big[\Phi_l(x,y)\partial_x\Phi_{m-l-1}(x,y) + \big(\partial_t^l g(0,x,y)\Phi_{m-l-1}(x,y)\big)_x\Big]. \quad (3.13)$$

Теорема 3.2. *Пусть $u_0 \in H^n_+$ для некоторого натурального n, $u_1 \equiv 0$, $g \in K_n(\Pi^+_T) \cap L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})$, $f \in M^n(\Pi^+_T)$, причем $\Phi_m(0,y) \equiv 0$ для любого $m < n/3$. Тогда существует единственное решение $u(t,x,y)$ задачи* (3.1), (1.2), (1.3) *из пространства $K_n(\Pi^+_T)$.*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, сначала установим локальный по времени результат.

Для $t_0 \in (0,T]$ введем множество функций

$$\widetilde{K}_n(\Pi^+_{t_0}) = \big\{v \in K_n(\Pi^+_{t_0}) : \partial_t^m v\big|_{t=0} = \Phi_m \text{ при } m \leqslant m_0 - 1\big\}$$

и определим на нем отображение Λ_n следующим образом: $u = \Lambda_n v$ является решением из $\widetilde{K}_n(\Pi^+_{t_0})$ начально-краевой задачи в $\Pi^+_{t_0}$ для линейной задачи (3.2), (1.2), (1.3) (при $u_1 \equiv 0$).

Заметим, что при $m < n/3$ функции $\widetilde{\Phi}_m$, записанные по формулам (2.7) для случая уравнения (3.2), совпадают с функциями Φ_m из формул (3.13).

В статье [10] были установлены следующие неравенства, обобщающие (3.3):

$$\|uv_x\|_{M_n(\Pi_{t_0}^+)} + \|uv_y\|_{M_n(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n)\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}\|v\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}, \tag{3.14}$$

а при $n \geqslant 2$

$$\|uu_x\|_{M_n(\Pi_{t_0}^+)} + \|uu_y\|_{M_n(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n)\|u\|_{K_{n-1}(\Pi_{t_0}^+)}\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}. \tag{3.15}$$

В силу (3.14) $vv_x \in M_n(\Pi_{t_0}^+)$; очевидно также, что $(gv)_x \in M_n(\Pi_{t_0}^+)$. Тогда из леммы 2.2 вытекает существование отображения Λ_n, причем аналогично (3.4)

$$\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n)\Big(\widetilde{c} + t_0^{1/6}\|v\|^2_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}\Big), \tag{3.16}$$

где константа $\widetilde{c}$ зависит от норм u_0, g и f в соответствующих пространствах. Из этого неравенства следует, что при достаточно больших $R > 0$ и достаточно малых $t_0^* \in (0,T]$ отображение Λ_n для любого $t_0 \in (0, t_0^*]$ переводит соответствующий шар радиуса R в себя. Аналогично (3.5) устанавливается также, что при малых t_0 это отображение является сжимающим.

Чтобы построить глобальное решение, установим следующую априорную оценку: если $u \in K_n(\Pi_{T'}^+)$ является слабым решением задачи (3.1), (1.2), (1.3) в области $\Pi_{T'}^+$ при $n \geqslant 2$, то

$$\|u\|_{K_n(\Pi_{T'}^+)} \leqslant c(n, T, \|u_0\|_{H_+^n}, \|g\|_{K_n(\Pi_T^+)}, \|g\|_{L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})}, \|f\|_{M_n(\Pi_T^+)}, \|u\|_{K_{n-1}(\Pi_{T'}^+)}). \tag{3.17}$$

Действительно, если рассмотреть решение u как неподвижную точку отображения Λ_n, то аналогично (3.16) (но применяя вместо неравенства (3.14) неравенство (3.15)) находим, что

$$\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,n)\Big(\widetilde{c} + t_0^{1/6}\|u\|_{K_{n-1}(\Pi_{T'}^+)}\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}\Big),$$

откуда очевидным образом следует оценка (3.17). □

Замечание 3.2. Методами, аналогичными доказательству теоремы 3.1, можно также установить непрерывную зависимость решений от данных задачи в каждом из пространств $K_n(\Pi_T^+)$, но это в дальнейшем не используется. Однако, разумеется, из доказательства теоремы 3.2 следует, что норма решения задачи (3.1), (1.2), (1.3) в пространстве $K_n(\Pi_T^+)$ оценивается через соответствующие нормы функций u_0, g, f из условия теоремы.

Перейдем к результату, аналогичному теореме 3.3 для случая пространств с экспоненциальными весами. Для описания свойств правой части уравнения введем специальное пространство (фактически оно уже использовалось в лемме 2.3) с естественной нормой: для $n = 3k$ ($k \geqslant 0$ — целое число) и $\beta > 0$ положим

$$Z_{\beta,n}(\Pi_T^+) = \{f(t,x,y) : \partial_t^m f e^{\beta x} \in L_2(0,T; H_+^{n-3m})\}.$$

Лемма 3.2. *Если k — натуральное, то для любого $T > 0$ при $t_0 \in (0,T]$*

$$\|uv_x\|_{Z_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)} + \|uv_y\|_{Z_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,\beta,n)\|u\|_{K_n(\Pi_{t_0}^+)}\|v\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)}. \tag{3.18}$$

Доказательство. Для простоты изложения ограничимся случаем $k = 1$, поскольку в общем случае рассуждения полностью аналогичны.

Оценим в пространстве $L_2(\Pi_{t_0}^+)$ выражения $\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}$ для $|\nu_1|+|\nu_2| = 4$, $|\nu_1| \leqslant 3$. Если $|\nu_1| = 0$, то

$$\|u\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant \|u\|_{L_\infty(\Pi_{t_0}^+)}\|\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c\|u\|_{C([0,T];H_+^2)}\|v\|_{Y_{\beta,3}(\Pi_{t_0}^+)}$$

в силу известного вложения $H^2(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$ на плоскости. Аналогично, если $|\nu_1| = 1$, то

$$\|\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\|u\|_{C([0,T];H_+^3)}\|\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{C([0,t_0];L_{2,+})},$$

а если $|\nu_1| = 3$, то

$$\|\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\|u\|_{C([0,t_0];H_+^3)}\|\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{C([0,t_0];L_{\infty,+})} \leqslant c(T,\beta)\|u\|_{K_3(\Pi_{t_0}^+)}\|ve^{\beta x}\|_{C([0,t_0];H_+^3)}.$$

Наконец, если $|\nu_1| = 2$, то

$$\|\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\|\partial^{\nu_1}u\|_{C([0,t_0];L_{4,+})}\|\partial^{\nu_2}ve^{\beta x}\|_{C([0,t_0];L_{4,+})} \leqslant$$
$$\leqslant c(T,\beta)\|u\|_{C([0,t_0];H_+^3)}\|ve^{\beta x}\|_{C([0,t_0];H_+^3)}.$$

Кроме того, при $|\nu|=1$

$$\|u\partial^\nu v_t e^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c\|u\|_{C([0,T];H_+^2)}\||Dv_t|e^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)},$$

$$\|\partial^\nu u v_t e^{\beta x}\|_{L_2(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T)\|u\|_{C([0,T];H_+^3)}\|v_t e^{\beta x}\|_{C([0,t_0];L_{2,+})}.$$

□

Теорема 3.3. *Пусть $u_0 e^{\beta x} \in H_+^n$ для некоторого $\beta > 0$, $n = 3k$ и натурального k, $u_1 \equiv 0$, $g \in K_n(\Pi_T^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)$, $f \in Z_{\beta,n}(\Pi_T^+)$, причем $\Phi_m(0,y) \equiv 0$ для любого $m < k$. Тогда существует единственное решение $u(t,x,y)$ задачи* (3.1)*,* (1.2)*,* (1.3) *из пространства $K_n(\Pi_T^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)$.*

Доказательство. Схема доказательства полностью аналогична теореме 3.2. Для $t_0 \in (0,T]$ определим на множестве $\widetilde{K}_n(\Pi_{t_0}^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)$ отображение $u = \Lambda_n v$ как решение задачи (3.2), (1.2), (1.3) из этого же множества.

В силу лемм 2.2 и 2.3, а также оценок (3.14) и (3.18) отображение Λ_n существует, и для него справедлив аналог неравенства (3.16), в котором норма в пространстве $K_n(\Pi_{t_0}^+)$ заменена на сумму норм в $K_n(\Pi_{t_0}^+)$ и $Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)$. Рассуждая аналогично теореме 3.2, получаем результат о разрешимости рассматриваемой задачи в $K_n(\Pi_{t_0}^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)$ при малых t_0.

Чтобы продолжить это локальное по времени решение, заметим, что в пространстве $K_n(\Pi_T^+)$ это уже осуществлено. Далее, в силу (2.10) и (3.18)

$$\|u\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)} \leqslant c(T,\beta,n)\big(\widetilde{c} + \|g\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)}\|u\|_{K_n(\Pi_T^+)} + \\ + t_0^{1/6}\|g\|_{K_n(\Pi_T^+)}\|u\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)} + t_0^{1/6}\|u\|_{K_n(\Pi_T^+)}\|u\|_{Y_{\beta,n}(\Pi_{t_0}^+)}\big),$$

что позволяет продолжить решение и в пространстве $Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)$. □

Определим вспомогательную весовую функцию $\rho_\alpha(x)$, $\alpha \geqslant 0$, следующим образом: $\rho_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$ — монотонно возрастающая функция такая, что $\rho_\alpha(x) \equiv e^x$ для $x \leqslant -1$, $\rho_\alpha(x) \equiv (1+x)^\alpha$, если $\alpha > 0$, и $\rho_0(x) \equiv 2 - (1+x)^{-1/2}$ для $x \geqslant 0$, $\rho'_\alpha(x) > 0$ для $-1 < x < 0$. Заметим, что $\rho'_\alpha(x) \leqslant c(\alpha)\rho_\alpha(x)$, $|\rho_\alpha^{(k)}(x)| \leqslant c(k,\alpha)\rho'_\alpha(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и натуральных $k \geqslant 2$.

В следующих шести леммах будем предполагать, что условия теоремы 3.3 выполнены при любом натуральном k и рассматривать соответствующие бесконечно гладкие быстро убывающие на бесконечности решения задачи (3.1), (1.2), (1.3), но полученные оценки будут зависеть от норм функций u_0, g и f из условий каждой леммы.

Лемма 3.3. *Пусть $\alpha \geqslant 0$. Тогда*

$$\|u\|_{X^\alpha(\Pi_T^+)} \leqslant c, \tag{3.19}$$

где константа c зависит от T, α, нормы u_0 в $L_{2,+}^\alpha$, нормы g в $L_1(0,T;W_{\infty,+}^1)$ и нормы f в $L_1(0,T;L_{2,+}^\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x) \equiv \rho_{2\alpha}(x - x_0)$ для произвольного $x_0 \geqslant 0$. Умножив равенство (3.1) на $2u(t,x,y)\rho(x)$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}_+^2$, получим, что

$$\frac{d}{dt}\iint u^2\rho\,dxdy + \iint (3u_x^2 + u_y^2)\rho'\,dxdy + \int_{\mathbb{R}} u_x^2\big|_{x=0}\rho(0)\,dy - \iint u^2\rho'''\,dxdy - \\ - \frac{2}{3}\iint u^3\rho'\,dxdy + \iint (g_x\rho - g\rho')u^2\,dxdy + 2\iint fu\rho\,dxdy. \tag{3.20}$$

Аналогично (3.10), используя уже полученную оценку (3.6), находим, что

$$\Big|\iint u^3\rho'\,dxdy\Big| \leqslant \Big(\iint u^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint u^4(\rho')^2\,dxdy\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant c\Big(\iint |Du|^2\rho'\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint u^2\rho\,dxdy\Big)^{1/2} + c\iint u^2\rho\,dxdy. \tag{3.21}$$

Тогда из (3.20), (3.21) и свойств функции ρ следует утверждение леммы. □

Лемма 3.4. *Пусть $\alpha \geqslant 1/2$. Тогда для любых $\delta_0 \in (0,T)$, $\delta \in (\delta_0, T)$*

$$\big\||Du|\big\|_{X^{\alpha-1/2}(\Pi_T^{\delta,0})} \leqslant c, \tag{3.22}$$

где константа c зависит от T, α, δ_0, δ, нормы u_0 в $L_{2,+}^\alpha$, нормы g в $L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})$, нормы f в $L_2(0,T;L^\alpha_{2,+})$ и нормы $|Df|$ в $L_2(\delta_0,T;L^{\alpha-1/2}_{2,+})$.

Доказательство. Пусть $\rho(x) \equiv \rho_{2\alpha-1}(x-x_0)$ для произвольного $x_0 \geqslant 0$, $\varphi(t) \equiv \eta\big((t-\delta_0)/(\delta-\delta_0)\big)$, где функция η задана равенством (1.7) (тогда $\varphi(t)=0$ при $t\leqslant\delta_0$, $\varphi(t)=1$ при $t\geqslant\delta$). Умножим равенство (3.1) на $-\big(2(u_x\rho)_x + 2u_{yy}\rho + u^2\rho\big)\varphi$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2_+$; тогда аналогично (3.9)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\iint\Big(u_x^2+u_y^2-\frac13u^3\Big)\rho\varphi\,dxdy+\iint(3u_{xx}^2+4u_{xy}^2+u_{yy}^2)\rho'\varphi\,dxdy+\\
+\int\limits_{\mathbb{R}}\big(u_{xx}^2\rho+2u_{xx}u_x\rho'-u_x^2\rho''\big)\big|_{x=0}\varphi\,dy-\iint(u_x^2+u_y^2)\rho'''\varphi\,dxdy-\\
-\iint u(4u_x^2+2u_y^2)\rho'\varphi\,dxdy+\frac13\iint u^3\rho'''\varphi\,dxdy+\frac14\iint u^4\rho'\varphi\,dxdy-\\
-2\iint(gu)_x(u_{xx}+u_{yy})\rho\varphi\,dxdy-2\iint(gu)_xu_x\rho'\varphi\,dxdy-\frac13\iint(2g_x\rho-g\rho')u^3\varphi\,dxdy=\\
=\iint\Big(u_x^2+u_y^2-\frac13u^3\Big)\rho\varphi'\,dxdy+2\iint(f_xu_x+f_yu_y)\rho\varphi\,dxdy+2\int\limits_{\mathbb{R}}(fu_x\rho)\big|_{x=0}\varphi\,dy-\\
-\iint fu^2\rho\varphi\,dxdy.\end{gathered}\tag{3.23}$$

Здесь аналогично (3.10), используя уже полученную оценку (3.19), находим, что

$$\Big|\iint u^3\rho\varphi\,dxdy\Big|\leqslant\Big(\iint u^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint u^4(\rho')^2\varphi^2\,dxdy\Big)^{1/2}\leqslant c\Big(\iint|Du|^2\rho\varphi\,dxdy\Big)^{1/2}+c,$$

кроме того, в силу (3.19)

$$\int\limits_0^T\!\!\iint\Big|u_x^2+u_y^2-\frac13u^3\Big|\rho\varphi'\,dxdydt\leqslant c.$$

Для оценки интегралов по $\mathbb{R}$ при $x=0$ используем неравенство (3.6). Далее, аналогично (3.11) при $|\nu|=1$ и любом сколь угодно малом $\varepsilon>0$

$$\begin{gathered}\Big|\iint u(\partial^\nu u)^2\rho'\varphi\,dxdy\Big|\leqslant\Big(\iint u^2\,dxdy\Big)^{1/2}\Big(\iint(\partial^\nu u)^4(\rho')^2\varphi^2\,dxdy\Big)^{1/2}\leqslant\\
\leqslant\varepsilon\iint|D(\partial^\nu u)|^2\rho'\varphi\,dxdy+c(\varepsilon)\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy.\end{gathered}$$

Наконец, аналогично (3.12)

$$\begin{gathered}\Big|\iint(gu)_x(u_{xx}+u_{yy})\rho\varphi\,dxdy\Big|\leqslant\varepsilon\iint|D^2u|^2\rho'\varphi\,dxdy+\\
+c(\varepsilon)\operatorname*{ess\,sup}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}\big[(g_x^2+g^2)\rho(\rho')^{-1}\big]\iint(u_x^2+u^2)\rho\varphi\,dxdy,\end{gathered}\tag{3.24}$$

где $\rho(x)(\rho'(x))^{-1}\leqslant c(1+x)^{3/2}$ при $\alpha=1/2$, $\rho(x)(\rho'(x))^{-1}\leqslant c(1+x)$ при $\alpha>1/2$, а $\varepsilon>0$ можно выбрать сколь угодно малым. Тогда из равенства (3.23) вытекает искомая оценка. □

Лемма 3.5. *Пусть $\alpha\geqslant1/2$. Тогда для любых $\delta_0\in(0,T)$, $\delta\in(\delta_0,T)$*

$$\|u\|_{K_1(\Pi_T^{\delta,0})}\leqslant c,\tag{3.25}$$

где константа c зависит от тех же величин, что и в (3.22), а также от нормы g в $K_1(\Pi_T^+)$

Доказательство. Перенесем начало отсчета времени в точку $t=\delta$. В силу (3.22)

$$\|u(\delta,\cdot,\cdot)\|_{H^1_+}\leqslant c. \tag{3.26}$$

Тогда требуемое утверждение следует из теоремы 3.1. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $\alpha\geqslant 1$, $2\leqslant m\leqslant 2\alpha$ для некоторого натурального m. Тогда для любых $\delta_0\in(0,T)$, $\delta\in(\delta_0,T)$, $a>0$, $x_0>a$, если $2\leqslant l\leqslant m$, то*

$$\big\||D^l u|\big\|_{X^{\alpha-l/2}(\Pi_T^{\delta,x_0})}\leqslant c, \tag{3.27}$$

где константа c зависит от тех же величин, что и в (3.25)*, а также от m, a, x_0, нормы g в $L_1(\delta_0,T;W^1_{m+1}((a,+\infty)\times\mathbb{R}))$ и норм $|D^jf|$ в $L_1(\delta_0,T;L_{2,a}^{\alpha-j/2})$ при $2\leqslant j\leqslant m$.*

Доказательство. Применим индукцию по l. Пусть $x'\in(x_0,a)$,

$$\rho(x)\equiv\rho_{2\alpha-l}(x-x_1)\eta\left(\frac{x-x_1+x_0-x'}{x_0-x'}\right)$$

для произвольного $x_1\geqslant x_0$ (тогда при $x\geqslant x_1$, если $2\alpha-l>0$, то $\rho(x)=(1+x-x_1)^{2\alpha-l}$, а если $2\alpha-l=0$, то $\rho(x)=2-(1+x-x_1)^{-1/2}$; $\rho(x)=0$ при $x\leqslant x_1-x_0+x'$), $\delta'\in(\delta_0,\delta)$, $\varphi(t)\equiv\eta\left(\dfrac{t-\delta'}{\delta-\delta'}\right)$, $|\nu|=l$. Умножим равенство (3.1) на $(-1)^l2\partial^\nu(\partial^\nu u\rho)\varphi$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2_+$; тогда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy-\iint(\partial^\nu u)\rho\varphi'\,dxdy+\iint\big(3(\partial^\nu u_x)^2+(\partial^\nu u_y)^2\big)\rho'\varphi\,dxdy-\\-\iint(\partial^\nu u)^2\rho'''\varphi\,dxdy+2\iint\partial^\nu(uu_x)\partial^\nu u\rho\varphi\,dxdy+2\iint\partial^\nu(gu_x+g_xu)\partial^\nu u\rho\varphi\,dxdy=\\=2\iint\partial^\nu f\partial^\nu u\rho\varphi\,dxdy.\end{aligned} \tag{3.28}$$

Согласно (3.22) при $l=2$ и в силу индуктивного предположения при $l>2$

$$\int_0^T\!\!\iint(\partial^\nu u)^2(\rho\varphi'+\rho'''\varphi)\,dxdydt\leqslant c. \tag{3.29}$$

Оценим интеграл от функции $\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u_x\partial^\nu u\rho\varphi$, где $|\nu_1|,|\nu_2|\leqslant l$, $|\nu_1|+|\nu_2|=l$, причем если $|\nu_2|=l$, то $\nu_2=\nu$. Если $|\nu_1|=0$, то разобьем интеграл на две части. Положим $\psi_1(x)\equiv\eta(x-x_1)$, $\psi_2(x)\equiv\eta(1+x_1-x)$. Тогда при $t\in[\delta',T]$ в силу (3.25)

$$\begin{aligned}2\Big|\iint u\partial^\nu u_x\partial^\nu u\rho\psi_1\varphi\,dxdy\Big|=\Big|\iint(\partial^\nu u)^2\big(u_x\rho\psi_1+u(\rho\psi_1)'\big)\varphi\,dxdy\Big|\leqslant\\\leqslant c\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}\big(|u_x|+|u|\big)\times\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy=\gamma(t)\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy,\end{aligned} \tag{3.30}$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Если $x\in(x_1-x_0+x',x_1+1)$, то из определений функций η (см. (1.7)) и ρ_α легко следует, что $\rho(x)\leqslant c\rho'(x)$, и тогда согласно (3.25) при $t\in(\delta',T]$

$$\begin{aligned}\iint|u\partial^\nu u_x\partial^\nu u|\rho\psi_2\varphi\,dxdy\leqslant c\sup_{x\geqslant0}|u|\times\Big(\iint(\partial^\nu u_x)^2\rho'\varphi\,dxdy\Big)^{1/2}\times\\\times\Big(\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy\Big)^{1/2}\leqslant\varepsilon\iint(\partial^\nu u_x)^2\rho'\varphi\,dxdy+\gamma(t)\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy,\end{aligned} \tag{3.31}$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$, а $\varepsilon>0$ можно выбрать сколь угодно малым.

Если $|\nu_1|=1$, то в силу (3.25) при $t\in[\delta',T]$

$$\iint |\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u_x\partial^\nu u|\rho\varphi\,dxdy \leqslant c\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}|\partial^{\nu_1}u|\times\Bigl(\iint(\partial^{\nu_2}u_x)^2\rho\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}\times \times\Bigl(\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}\leqslant\gamma(t)\iint|D^lu|^2\rho\varphi\,dxdy, \quad (3.32)$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Аналогичная оценка, разумеется, справедлива при $|\nu_1|=l$.

Наконец, если $|\nu_1|\leqslant l-1$, $|\nu_2|\leqslant l-2$, то

$$\Bigl|\iint\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u_x\partial^\nu u\rho\varphi\Bigr|\leqslant\Bigl(\iint(\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u_x)^2\rho\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}\Bigl(\iint(\partial^\nu u)^2\rho\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}. \quad (3.33)$$

Опять применяя интерполяционное неравенство (1.8), находим, что

$$\Bigl(\iint(\partial^{\nu_1}u\partial^{\nu_2}u)^2\rho\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}\leqslant c\sum_{|\nu|\leqslant l-1}\Bigl(\iint(\partial^\nu u)^4\rho^2_{2\alpha-l}(x)\chi_{(x',+\infty)}(x)\varphi\,dxdy\Bigr)^{1/2}\leqslant \leqslant c_1\sum_{j\leqslant l}\iint|D^ju|^2\rho_{2\alpha-l}(x)\chi_{(x',+\infty)}(x)\varphi^{1/2}\,dxdy=\gamma(t), \quad (3.34)$$

где символ χ_I обозначает характеристическую функцию интервала $I\subset\mathbb{R}$, $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$.

В итоге из равенства (3.28) и оценок (3.29)–(3.34) получаем, что

$$\frac{d}{dt}\iint|D^lu|^2\rho\varphi\,dxdy+\frac12\iint|D^{l+1}u|^2\rho'\varphi\,dxdy\leqslant\gamma(t)\bigl(\iint|D^lu|^2\rho\varphi\,dxdy+1\bigr), \quad (3.35)$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$, откуда следует утверждение леммы. □

Лемма 3.7. *Если $\alpha>0$, то*

$$\bigl\||Du|\bigr\|_{X^\alpha(\Pi_T^+)}\leqslant c, \quad (3.36)$$

где константа c зависит от T, α, нормы u_0 в $H^{1,\alpha}_+$, норм g в $K_1(\Pi_T^+)$ и $L_2(0,T;W^{1,3/4}_{\infty,+})$, нормы f в $L_2(0,T;H^{1,\alpha}_+)$.

Доказательство. Пусть $\rho(x)\equiv\rho_{2\alpha}(x-x_0)$ для произвольного $x_0\geqslant0$. Умножим равенство (3.1) на $-\bigl(2(u_x\rho)_x+2u_{yy}\rho\bigr)$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}^2_+$; тогда аналогично (3.23)

$$\frac{d}{dt}\iint(u_x^2+u_y^2)\rho\,dxdy+\iint(3u_{xx}^2+4u_{xy}^2+u_{yy}^2)\rho'\,dxdy+\int_{\mathbb{R}}\bigl(u_{xx}^2\rho+2u_{xx}u_x\rho'-u_x^2\rho''\bigr)\big|_{x=0}\,dy- -\iint(u_x^2+u_y^2)\rho'''\,dxdy+\iint(u_x\rho-u\rho')(u_x^2+u_y^2)\,dxdy+2\iint(gu)_x(u_{xx}+u_{yy})\rho\,dxdy- -2\iint(gu)_xu_x\rho'\,dxdy=2\iint(f_xu_x+f_yu_y)\rho\,dxdy+2\int_{\mathbb{R}}(fu_x\rho)\big|_{x=0}\,dy. \quad (3.37)$$

В силу теоремы 3.1

$$\Bigl|\iint(u_x\rho-u\rho')(u_x^2+u_y^2)\,dxdy\Bigr|\leqslant c\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+}\bigl(|u_x|+|u|\bigr)\times\iint(u_x^2+u_y^2)\rho\,dxdy= =\gamma(t)\iint(u_x^2+u_y^2)\rho\,dxdy, \quad (3.38)$$

где $\|\gamma\|_{L_1(0,T)}\leqslant c$. Используя также оценку (3.6) и оценку (3.24) (в которой положим $\varphi\equiv1$), выводим из равенства (3.37) утверждение леммы. □

Лемма 3.8. *Пусть $\alpha\geqslant1/2$, $2\leqslant m\leqslant2\alpha+1$ для некоторого натурального m. Тогда для любых $\delta_0\in(0,T)$, $\delta\in(\delta_0,T)$, $a>0$, $x_0>a$, если $2\leqslant l\leqslant m$, то*

$$\bigl\||D^lu|\bigr\|_{X^{\alpha-l/2+1/2}(\Pi_T^{\delta,x_0})}\leqslant c, \quad (3.39)$$

где константа c зависит от тех же величин, что и в (3.36)*, а также от* m, δ_0, δ, a, x_0, *нормы* g *в* $L_1(\delta_0,T;W^1_{m+1}((a,+\infty)\times\mathbb{R}))$ *и норм* $|D^j f|$ *в* $L_1(\delta_0,T;L^{\alpha-j/2+1/2}_{2,a})$ *при* $2\leqslant j\leqslant m$.

Доказательство. Доказательство полностью аналогично доказательству леммы 3.6. Применяем индукцию по l. Пусть $x'\in(x_0,a)$, $\rho(x)\equiv\rho_{2\alpha-l+1}(x-x_1)\eta\big((x-x_1+x_0-x')/(x_0-x')\big)$ для произвольного $x_1\geqslant x_0$, $\delta'\in(\delta_0,\delta)$, $\varphi(t)\equiv\eta\big((t-\delta')/(\delta-\delta')\big)$, $|\nu|=l$. Умножив равенство (3.1) на $(-1)^l 2\partial^\nu(\partial^\nu u\rho)\varphi$ и проинтегрировав по $\mathbb{R}^2_+$, получаем равенство (3.28) В силу (3.36) при $l=2$ и индуктивного предположения при $l>2$ выводим неравенство (3.29). Интеграл от нелинейности рассматривается полностью аналогично (3.30)–(3.34). В итоге получаем неравенство (3.35) и завершаем доказательство леммы. □

4. Обобщенные производные

На основании результатов части 3 проведем доказательство основных утверждений работы.

Доказательство теорем 1.3 *и* 1.4. В силу определения пространств $H^{s_1,s_2}(\Omega)$ можно сразу считать, что $u_1\in H^{2/3,2}(\mathbb{R}^2)$. Более того, перейдя к функции $u_1(t,y)\eta(t+1)$, можно также считать, что $u_1(t,y)=0$ при $t\leqslant -1$. Положим

$$g(t,x,y)\equiv J(t,x,y;u_1), \tag{4.1}$$

где функция J задана формулой (2.2). Положим также

$$U_0(x,y)\equiv u_0(x,y)-g(0,x,y),\quad F(t,x,y)\equiv f(t,x,y)-g(t,x,y)g_x(t,x,y) \tag{4.2}$$

и в области Π^+_T рассмотрим начально-краевую задачу

$$U_t+U_{xxx}+U_{xyy}+UU_x+(gU)_x=F,\qquad U\big|_{t=0}=U_0,\quad U\big|_{x=0}=0. \tag{4.3}$$

Тогда из свойств функции J вытекает, что функция

$$U(t,x,y)\equiv u(t,x,y)-g(t,x,y) \tag{4.4}$$

является слабым решением задачи (4.3) тогда и только тогда, когда функция u является решением исходной задачи.

В силу свойств (2.3) и (2.6) функция $g\in K_1(\Pi^+_T)$, $e^{\beta x}g\in L_2(0,T;C^1_{b,+})$, $e^{\beta x}g\in C([0,T];H^1_+)$ для любого $\beta\geqslant 0$, а если $a>0$, то $e^{\beta x}g\in C([0,T];H^n((a,+\infty)\times\mathbb{R}))$ для любого n. Тогда, в частности, для функций U_0 и F выполнены те же условия, что и для функций u_0 и f в гипотезах рассматриваемых теорем.

Теперь приблизим функции g, U_0 и F более гладкими с помощью операции усреднения. Для $h>0$ положим

$$u_1^h(t,y)\equiv\frac{1}{h^2}\iint_{\mathbb{R}^2}\omega\Big(\frac{t-t_1}{h}\Big)\omega\Big(\frac{y-y_1}{h}\Big)u_1(t_1,y_1)\,dy_1dt_1, \tag{4.5}$$

где ядро усреднения ω задано формулой (1.6),

$$g_h(t,x,y)\equiv J(t,x,y;u_1^h). \tag{4.6}$$

Аналогично продолжим нулем функцию U_0 при $x<0$ и функцию f при $t\notin(0,T)$, а также функцию f четным образом при $x<0$ и положим

$$U_{0h}(x,y)\equiv U_0^h(x,y)\eta(x/h)\eta(1/h-x),\quad F_h(t,x,y)\equiv F^h(t,x,y)\eta(t/h)\eta(1/h-x), \tag{4.7}$$

где верхний индекс h везде обозначает переход к средней функции. Свойства операции усреднения хорошо известны. В частности, функции u_1^h аппроксимируют функцию u_1 в пространстве $H^{2/3,2}(\mathbb{R}^2)$. Тогда, используя оценки (2.3), (2.6), нетрудно получить, что функции g_h, U_{0h}, F_h аппроксимируют функции g, U_0, F во всех указанных выше пространствах.

Более того, если рассмотреть задачу

$$U_t+U_{xxx}+U_{xyy}+UU_x+(g_hU)_x=F_h,\qquad U\big|_{t=0}=U_{0h},\quad U\big|_{x=0}=0, \tag{4.8}$$

то для нее справедливы условия теоремы 3.3 для любых β и k. Рассмотрим соответствующее решение этой задачи $U_h\in K_n(\Pi^+_T)\cap Y_{\beta,n}(\Pi^+_T)$, $n=3k$.

Тогда соответствующие аналоги оценок (3.19), (3.22), (3.25), (3.27) для функций U_h будут справедливы равномерно по h. Эти оценки обеспечивают слабую или $*$-слабую сходимость функций U_h и ее производных к некоторой функции U и ее производным при $h \to 0$ (после перехода к подпоследовательности) в аналогах пространств из гипотез рассматриваемых теорем, в которых свойство слабой непрерывности по времени соответствующих отображений надо заменить на принадлежность отображений классу L_∞ (эти и последующие рассуждения более подробно проведены, например, в [8, 11]).

Покажем, что предельная функция U является слабым решением задачи (4.3). Используя само уравнение (4.8), находим, что равномерно по h

$$\|U_{ht}\|_{L_2(0,T;H_+^{-3})} \leqslant c, \tag{4.9}$$

и тогда для любого компакта $K \subset \overline{\mathbb{R}}_+^2$, применяя также ограниченность множества $\{U_h\}$ в пространстве $L_2(0,T;H^1(K))$ (следующую из (3.19)), получаем сильную сходимость U_h к U (опять по подпоследовательности) в пространстве $L_2((0,T)\times K)$. Запишем аналог интегрального тождества (1.4) для функций U_h:

$$\iiint_{\Pi_T^+} \Big[U_h(\phi_t + \phi_{xxx} + \phi_{xyy}) + \frac{1}{2}U_h^2\phi_x + g_hU_h\phi_x + F_h\phi\Big]\,dxdydt + \iint U_{0h}\phi\big|_{t=0}\,dxdy = 0.$$

Пусть в нем сначала пробные функции ϕ гладкие с компактными носителями в $\overline{\mathbb{R}}_+^2$. Тогда установленная сильная сходимость позволяет перейти к пределу и получить интегральное тождество

$$\iiint_{\Pi_T^+} \Big[U(\phi_t + \phi_{xxx} + \phi_{xyy}) + \frac{1}{2}U^2\phi_x + gU\phi_x + F\phi\Big]\,dxdydt + \iint U_0\phi\big|_{t=0}\,dxdy = 0 \tag{4.10}$$

в этом случае. Аппроксимируя функции ϕ из определения 1.1 соответствующими гладкими финитными функциями и, в свою очередь, переходя к пределу, получаем равенство (4.10) и в общем случае.

Осталось заметить, что слабая непрерывность по времени отображений, необходимая для принадлежности функции U и ее производных соответствующим пространствам X^α или $X^{\alpha-m/2}$, вытекает стандартным образом из принадлежности этих отображений классам L_∞ и принадлежности производной U_t пространству $L_2(0,T;H_+^{-3})$ (см. (4.9)). □

Доказательство теорем 1.5 *и* 1.6. Введем функции g, U_0, F по формулам (4.1), (4.2). Заметим, что в силу условия согласования граничных данных $U_0(0,y) = u_0(0,y) - J(0,0,y;u_1) = u_0(0,y) - u_1(0,y) \equiv 0$, и тогда продолжение функции U_0 нулем при $x<0$ приводит к функции из пространства $H^1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому, функции U_{0h}, определенные по формулам (4.7), аппроксимируют функцию U_0 в пространстве $H_+^{1,\alpha}$.

Следовательно, для функций U_h справедливы равномерные по h аналоги оценок (3.19), (3.36) и (3.39). Более того, поскольку в силу неравенств (2.3) и (2.6) $g_h \to g$ при $h \to 0$ в пространствах $K_1(\Pi_T^+)$ и $L_2(0,T;W_{\infty,+}^{1,3/4})$, то в силу теоремы 3.1 функции $U_h \to U$ в $K_1(\Pi_T^+)$ при $h\to 0$, а следовательно, решение исходной задачи, заданное формулой (4.4), также принадлежит пространству $K_1(\Pi_T^+)$.

Окончание доказательства проводится так же, как и для предыдущих теорем, причем оно может быть значительно упрощено за счет использования свойств пространства $K_1(\Pi_T^+)$. □

Заметим, что из теоремы 3.3, свойств граничного потенциала J и формул (4.1)–(4.4) легко вытекает следующий результат о корректности исходной задачи в пространствах гладких убывающих на бесконечности функций.

Теорема 4.1. *Пусть* $u_0e^{\beta x} \in H_+^n$ *для некоторого* $\beta > 0$, $n = 3k$ *и натурального* k, $u_1 \in H^{k,n}(B_T)$, $f \in Z_{\beta,n}(\Pi_T^+)$, *причем* $\Phi_m(0,y) \equiv \partial_t^m u_1(0,y)$ *для любого* $m < k$, *где для вычисления функций* Φ_m *в формулах* (3.13) *следует положить* $g \equiv 0$. *Тогда существует единственное решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *из пространства* $K_n(\Pi_T^+) \cap Y_{\beta,n}(\Pi_T^+)$.

5. Непрерывные производные

Из теорем 1.1–1.6 и свойств фундаментального решения оператора $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x \partial_y^2$ можно получить следующие результаты о существовании у рассматриваемых слабых решений классических непрерывных производных.

Теорема 5.1. *Пусть* $u_0 \in L^\alpha_{2,+}$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $f \in L_\infty(0,T; L^\alpha_{2,+})$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha - 1/2)$ *нецелое,* $\partial^\nu f \in L_\infty(0,T; L^{\alpha-|\nu|/2}_{2,+})$ *для* $1 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha$, $m = [2\alpha - 1/2]$. *Тогда существует непрерывное в* Π_T^+ *слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *из пространства* $X^\alpha(\Pi_T^+)$. *Это решение обладает в* Π_T^+ *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 > 0$

$$\sup_{(t,x,y)\in \overline{\Pi}_T^{\delta,x_0}} |\partial^\nu u(t,x,y)| < \infty, \quad 0 \leqslant |\nu| \leqslant m-1. \tag{5.1}$$

Более того, если $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x_1,y_1) - \partial^\nu u(t,x_2,y_2)| \leqslant c(|x_1-x_2|^{\varepsilon-\sigma} + |y_1-y_2|^{\varepsilon-\sigma}) \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon), \tag{5.2}$$

а если $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m - 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t, \tau \in [\delta, T]$

$$|\partial^\nu u(t,x,y) - \partial^\nu u(\tau,x,y)| \leqslant c|t-\tau|^{(\varepsilon-\sigma)/3} \qquad \forall \sigma \in (0,\varepsilon), \tag{5.3}$$

где константы зависят от x_0, δ, σ, α.

Замечание 5.1. Если $3/4 < \alpha < 1$, то построенное в теореме 5.1 решение рассматриваемой задачи обладает также свойствами из теоремы 1.3. Если $\alpha \geqslant 1$, то выполнение свойств решений из теорем 1.3 и 1.4 вытекает автоматически из единственности решений в классе $X^\alpha(\Pi_T^+)$.

Теорема 5.2. *Пусть* $u_0 \in H_+^{1,\alpha}$, $u_1 \in H^{2/3,2}(B_T)$, $u_0(0,y) \equiv u_1(0,y)$, $f \in L_\infty(0,T; H_+^{1,\alpha})$ *для некоторого* $\alpha > 3/4$ *такого, что* $(2\alpha + 1/2)$ — *нецелое,* $\partial^\nu f \in L_\infty(0,T; L^{\alpha-|\nu|/2+1/2}_{2,+})$ *для* $2 \leqslant |\nu| \leqslant 2\alpha + 1$, $m = [2\alpha + 1/2]$. *Тогда существует (единственное) непрерывное в* Π_T *слабое решение* $u(t,x,y)$ *задачи* (1.1)–(1.3) *из пространства* $K_1(\Pi_T^+)$. *Это решение обладает в* Π_T^+ *непрерывными производными* $\partial^\nu u$ *до порядка* $|\nu| \leqslant m-1$. *При этом для любых* $\delta \in (0,T)$ *и* $x_0 > 0$ *справедливо неравенство* (5.1). *Если* $|\nu| = m-1$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2$, *то для любых* $x_1, x_2 \geqslant x_0$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ *и* $t \in [\delta, T]$ *справедливо неравенство* (5.2), *а если* $|\nu| = m-1-j$, $j = 0,1,2$, $\varepsilon = 2\alpha - m + 1/2 + j$, *то для любых* $x \geqslant x_0$, $y \in \mathbb{R}$ *и* $t, \tau \in [\delta, T]$ *справедливо неравенство* (5.3).

Доказательство теорем 5.1 *и* 5.2. Доказательство этих теорем полностью аналогично доказательству соответствующих результатов из работ [1, 12]. Действительно, пусть $x_0 > 0$, $\delta \in (0,T)$. Введем вспомогательные функции $\psi(x) \equiv \eta(4x/x_0 - 1)$, $\varphi(t) \equiv \eta(2t/\delta - 1)$. Положим $v(t,x,y) \equiv \partial^\nu u(t,x,y)\varphi(t)\psi(x)$, где $|\nu| \leqslant m-1$, тогда функция $v(t,x,y)$ является решением (вообще говоря, в смысле обобщенных функций) в слое Π_T линейной задачи Коши

$$\begin{aligned} v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = \partial^\nu f\varphi\psi - \sum_{|\nu_1|+|\nu_2|=|\nu|} c(\nu_1,\nu_2)\partial^{\nu_1} u \partial^{\nu_2} u_x \varphi\psi + \partial^\nu u \varphi'\psi + \\ + 3\partial^\nu u_{xx}\varphi\psi' + 3\partial^\nu u_x \varphi\psi'' + \partial^\nu u\varphi\psi''' + \partial^\nu u_{yy}\varphi\psi' \equiv F(t,x,y), \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$v\big|_{t=0} = 0. \tag{5.5}$$

Используя фундаментальное решение оператора $\partial_t + \partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2$ (см. (2.5)), запишем функцию v в виде

$$v(t,x,y) = \int_0^t \iint G(t-\tau, x-\xi, y-\zeta) F(\tau,\xi,\zeta)\, d\xi d\zeta d\tau. \tag{5.6}$$

Именно такое представление было использовано в [12] для получения оценок аналогичных (5.1) и в [1] — оценок аналогичных (5.2). Эти рассуждения без изменений переносятся на случай настоящей работы.

Оценка модуля непрерывности по t в (5.3) вытекает из результатов работы [3] и уже полученных оценок модуля непрерывности по пространственным переменным (более подробно см. также в [1]). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антонова А. П., Фаминский А. В.* О регулярности решений задачи Коши для уравнения Захарова—Кузнецова в нормах Гельдера// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 1. — С. 13–22.
2. *Захаров В. Е., Кузнецов Е. А.* О трехмерных солитонах// Журн. экспер. теорет. физ. — 1974. — *66*, № 2. — С. 594–597.
3. *Кружков С. Н., Фаминский А. В* О свойствах непрерывности решений некоторых классов нестационарных уравнений// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1983. — *3*. — С. 29–34.
4. *Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1988. — *51*. — С. 54–94.
5. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова—Кузнецова// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 6. — С. 1070–1081.
6. *Baykova E. S., Faminskii A. V.* On initial-boundary-value problems in a strip for the generalized two-dimensional Zakharov—Kuznetsov equation// Adv. Differ. Equ. — 2013. — *18*, №7-8. — С. 663–686.
7. *Doronin G. G., Larkin N. A.* Stabilization of regular solutions for the Zakharov—Kuznetsov equation posed on bounded rectangles and on a strip// arXiv: 1209.5767v1 [math.AP] — 25 сент. 2012.
8. *Faminskii A. V.* On the mixed problem for quasilinear equations of the third order// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2002. — *110*, № 2. — С. 2476–2507.
9. *Faminskii A. V.* Nonlocal well-posedness of the mixed problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2007. — *147*, № 1. — С. 6524–6537.
10. *Faminskii A. V.* Well posed initial-boundary value problems for the Zakharov—Kuznetsov equation// Electron. J. Differ. Equ. — 2008. — № 1. — С. 1–20.
11. *Faminskii A. V.* Weak solutions to initial-boundary value problems for quasilinear equations of an odd order// Adv. Differ. Equ. — 2012. — *17*, № 5-6. — С. 421–470.
12. *Faminskii A. V., Antonova A. P.* On internal regularity of solutions to the initial value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// В сб.: «Progress in Partial Differential Equations». — Springer, 2013. — С. 53–74.
13. *Faminskii A. V., Bashlykova I. Yu.* Weak solutions to one initial-boundary value problem with three boundary conditions for quasilinear equations of the third order// Ukr. Math. Bull. — 2008. — *5*, № 1. — С. 83–98.
14. *Larkin N. A.* Exponential decay of the H^1-norm for the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *405*, № 1. — С. 326–335.
15. *Larkin N. A., Tronco E.* Regular solutions of the 2D Zakharov—Kuznetsov equation on a half-strip// J. Differ. Equ. — 2013. — *254*, № 1. — С. 81–101.
16. *Levandosky J. L.* Smoothing properties of nonlinear dispersive equations in two spatial dimensions// J. Differ. Equ. — 2001. — *175*, № 2. — С. 275–301.
17. *Linares F., Pastor A., Saut J.-C.* Well-posedness for the Zakharov—Kuznetsov equation in a cylinder and on the background of a KdV soliton// Commun. Part. Differ. Equ. — 2010. — *35*, № 9. — С. 1674–1689.
18. *Saut J.-C., Temam R.* An initial boundary-value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation// Adv. Differ. Equ. — 2010. — *15*, № 11-12. — С. 1001–1031.
19. *Saut J. C., Temam R., Wang C.* An initial and boundary-value problem for the Zakharov—Kuznetsov equation in a bounded domain// J. Math. Phys. — 2012. — *53*. — 115612. — doi: 10.1063/1.4752102.

А. П. Антонова
Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `antonova-nastya@mail.ru`

А. В. Фаминский
Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: `afaminskii@sci.pfu.edu.ru`