Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 162–183

УДК 517.98

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА И КРЕЙНА—МИЛЬМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

© 2015 г. **Ф. С. СТОНЯКИН**

Аннотация. В работе развиваются исследования теории антикомпактных множеств (антикомпактов), введенных нами ранее. Описан класс пространств Фреше, в которых существуют антикомпакты — это те и только те пространства, которые имеют счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. В таких пространствах доказан аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении всякого линейного непрерывного функционала, заданного на исходном пространстве, на пространство, порожденное некоторым антикомпактом. Получен аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторных мер, который утверждает выпуклость и относительную слабую компактность специального типа замыкания образа безатомной векторной меры со значениями в пространстве Фреше, имеющем антикомпакт. С использованием полученного аналога теоремы А. А. Ляпунова доказана разрешимость бесконечномерного аналога задачи о справедливом разделе ресурсов, а также получен аналог теоремы А. А. Ляпунова для неаддитивных аналогов мер — векторных квазимер со значениями во всяком бесконечномерном пространстве Фреше, имеющем антикомпакт. В классе пространств Фреше, имеющих антикомпакт, получены аналоги теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках для необязательно компактных выпуклых ограниченных множеств. Особое место занимают аналоги теоремы Крейна—Мильмана в терминах введенных в работе крайних последовательностей (или секвенциальные аналоги теоремы Крейна—Мильмана).

Введение

В работе получены новые аналоги теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной меры, а также теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках в специальном классе пространств Фреше. Начнем с постановки исследуемых нами проблем в работе.

В конечномерных пространствах хорошо известна теорема А. А. Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [8]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [1, 5, 7, 10, 21, 22, 27–30]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [7, 10, 21–23, 25, 26].

Однако, как показывает множество примеров, теорема А. А. Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [6, 8, 24]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [1, 5]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова*. В каждом таком пространстве E для любой счетно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [6, 24]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p \in [1; 2) \cup (2; +\infty)$) [6]. Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в т.ч. и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона—Никодима [24]. Но как свойство Ляпунова, так и свойство Радона—Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a; b]$ и $C[a; b]$). Отметим также известный результат

Исследования раздела 3 данной работы выполнены при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых, код МК-2915.2015.1.

о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ для любой векторной меры в любом банаховом пространстве [24].

В наших работах [14, 15] мы поставили задачу получить аналоги теоремы А. А. Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [6]). В упомянутых работах для сепарабельных пространств Фреше получены теоремы о выпуклости и компактности замыкания множества значений безатомной векторной меры в пространствах, порожденных антикомпактами. В работе [16] мы обратились к результату о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры [24]. Но при этом мы заменили слабое замыкание на новый секвенциальный тип замыкания, что привело к сужению класса подходящих векторных мер, и получили в классе банаховых пространств, имеющих счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов, аналог теоремы Ула о выпуклости и относительной слабой компактности специального типа замыкания множества значений векторной меры [16]. В настоящей работе результат [16] перенесен в класс пространств Фреше, а также рассмотрены приложения к бесконечномерному аналогу задачи о разделе ресурсов и аналогу теоремы А. А. Ляпунова для нового неаддитивного обобщения векторной меры.

Теперь перейдем к постановке второй группы проблем, которым посвящена настоящая работа. Хорошо известна теорема Крейна—Мильмана, утверждающая совпадение всякого выпуклого компакта с выпуклой замкнутой оболочкой своих крайних точек [6]. Однако в бесконечномерном случае эта теорема уже, вообще говоря, неверна в классе выпуклых ограниченных замкнутых множеств [6, 24]. Более того, некомпактное выпуклое множество в бесконечномерном пространстве может вообще не иметь крайних точек [6, 24].

Существуют аналоги теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных множеств в бесконечномерных банаховых пространствах. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Крейна—Мильмана*. Также напомним, что во всяком пространстве со *свойством Радона—Никодима* любое выпуклое замкнутое множество есть выпуклая замкнутая оболочка сильно выставленных точек [24]. Но ни одно из этих свойств может не выполняться во многих важнейших пространствах, среди которых банаховы пространства числовых последовательностей c_0 и ℓ_∞ [6]. Также упомянем обобщения теоремы Крейна—Мильмана для замкнутых ограниченных множеств в банаховых пространствах, имеющих гладкое сопряженное [11]. Задача построения аналога теоремы Крейна—Мильмана для необязательно компактных (и даже необязательно выпуклых) множеств была исследована М. В. Балашовым и Е. С. Половинкиным в [2, 3] методами сильно выпуклого анализа в классе гильбертовых пространств.

Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Крейна—Мильмана для необязательно компактных множеств в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств. Наш подход к рассматриваемой проблеме основан на понятии *антикомпактного множества* в банаховых пространствах, которое введено и исследовано нами ранее в работах [15,16]. Такой подход дает возможность рассматривать класс пространств, который существенно отличен от класса пространств со свойствами Крейна—Мильмана или Радона—Никодима и содержит, в частности, пространства последовательностей c_0, c и ℓ_∞.

Работа состоит из введения и трех основных разделов.

В первом разделе мы напоминаем понятие антикомпактного множества в пространствах Фреше и даем точное описание класса пространств Фреше, в которых существует антикомпакт. Доказано, что антикомпакты существуют тогда и только тогда, когда пространство Фреше линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство (теорема 1.1) или, что то же самое, когда пространство Фреше имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов T_0 (теорема 1.2). Такие пространства могут и не быть сепарабельными (например, ℓ_∞). Далее, мы получили вспомогательный результат, который утверждает, что для всякого банахова пространства E, имеющего антикомпакт, сопряженное ему пространство E^* представимо в виде векторного индуктивного предела сопряженных пространств $E^*_{C'}$, порожденных антикомпактами $C' \in \mathcal{C}(E)$ (теорема 1.3). По сути, последний результат — это аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

Второй раздел работы посвящен приложениям антикомпактов к секвенциальным аналогам теоремы А. А. Ляпунова для мер и квазимер в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Для таких пространств введен новый тип сходимости — T_0-сходимость и соответствующий ему секвенциальный тип замыкания множества — T_0-замыкание. Для безатомных ограниченных векторных мер в пункте 2.1 получен секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторной меры, заменяющий в хорошо известном результате [24] слабое замыкание на T_0-замыкание (теорема 2.1). В пункте 2.2 получено приложение теоремы 2.1 к доказательству разрешимости бесконечномерного аналога задачи о справедливом разделе ресурсов (теорема 2.4). Далее в пункте 2.3 приведен краткий обзор наших совместных с Н. В. Магерой и Р. О. Шпилевым исследований [17, 18], посвященных моделированию задач о справедливом разделе ресурсов без учета достаточно малых величин. Такая постановка задачи привела к новым неаддитивным аналогам меры — понятиям квазимеры [17] и ε-квазимеры [18]. В пункте 2.3 мы кратко знакомим читателя с основными подходами и результатами [17, 18]. Далее в пункте 2.4 мы вводим аналогичное понятие *векторной квазимеры* для функций множества со значениями в пространствах Фреше (определение 2.10) и доказываем аналог теоремы 2.1 для таких функций множества (теорема 2.5).

И, наконец, в третьем разделе получена вторая часть финальных результатов работы — аналоги теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках для ограниченных выпуклых не обязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакты. Первый результат утверждает включение всякого ограниченного (не обязательно замкнутого) выпуклого множества A в некоторый компакт в $E_{C'}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (лемма 3.1). Второй аналог теоремы Крейна—Мильмана для банаховых пространств, имеющих антикомпакты — более тонкий результат, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество в терминах крайних точек его замыканий в пространствах, порожденных антикомпактами (теорема 3.1). Далее введено понятие так называемой *крайней последовательности* множества A (определение 3.1) с целью предложить аналог понятия крайней точки множества, который можно было бы использовать для получения секвенциальных аналогов теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных некомпактных выпуклых множеств (они могут вообще не иметь крайних точек в обычном смысле). Если A — выпуклый компакт, то показана сходимость всякой крайней последовательности A к некоторой крайней точке множества A (теорема 3.3). В классе пространств Фреше, имеющих антикомпакт, получены аналоги теоремы Крейна—Мильмана для крайних последовательностей как в пространствах $E_{C'}$, порожденных антикомпактами C' в E (теорема 3.4), так и крайними последовательностями в исходном пространстве E (следствие 3.2). Построены примеры крайних последовательностей для замкнутых единичных шаров в пространствах числовых последовательностей ℓ_∞, c и c_0 (примеры 3.2 — 3.4).

1. Антикомпакты. Пространства Фреше, имеющие антикомпакт

1.1. Понятие антикомпактного множества в пространствах Фреше. Класс пространств Фреше, в которых существует антикомпакт. Напомним понятие антикомпакта, предложенное нами в [14]. Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E. Здесь и всюду далее под $p_{C'}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $C' \subset E$.

Определение 1.1. Назовем множество $C' \in \Omega_{ac}(E)$ *антикомпактным* в E, если:

1. $p_{C'}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot C' = \{0\}$);
2. любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{C'} = (span\ C',\ p_{C'}(\cdot))$. Здесь мы считаем, что $E_{C'}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{C'} = p_{C'}(\cdot)$.

Примем обозначение: $\mathcal{C}'(E)$ — *набор антикомпактных подмножеств* пространства Фреше E.

В предыдущих работах [14, 15] построены примеры системы антикомпактных множеств в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах. Оказывается, что случай гильбертова пространства в каком-то смысле универсален, поскольку антикомпакты существуют только в пространствах Фреше, линейно инъективно и непрерывно вложенных в сепарабельное гильбертово пространство. Приступим к доказательству этого утверждения.

Из определения 1.1 вытекает, что если $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to E_{C'}$ ($Ax = x \ \forall x \in E$). Покажем, что существование такого оператора — не только необходимое, но и достаточное условие наличия антикомпакта в E.

Предложение 1.1. *Пусть существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где E — пространство Фреше, а F — банахово пространство. Тогда в E существует антикомпакт.*

Доказательство. Положим $C' = \{x \in E \mid \|Ax\|_F \leqslant 1\}$, $\|x\|_{C'} = \|Ax\|_F$. Ввиду линейности и инъективности оператора A, мы имеем, что $\forall x \in E$ $\|x\|_{C'} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Предкомпактность всякого ограниченного множества $B \subset E$, очевидно, вытекает из компактности оператора A. □

Итак, справедлива

Лемма 1.1. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где F — некоторое банахово пространство.*

Предыдущий результат позволяет получить уже более проверяемый критерий.

Теорема 1.1. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть в E существует антикомпактное множество. Тогда для некоторого банахова пространства F существует линейный инъективный и компактный оператор $A : E \to F$. Поэтому всякое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в любом пространстве $E_{C'}$, $C' \in \mathcal{C}'(E)$ (или множество $A(B) \subset F$ предкомпактно в F). Поэтому образ $A(E)$ можно вложить в некоторое замкнутое сепарабельное подпространство $F_0 \subset F$. Итак, E инъективно линейно и непрерывно вложено в сепарабельное пространство F_0. А поскольку всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2 (см. [6, с. 556]), то существует линейный инъективный и непрерывный оператор $A' : E \to \ell_2$.

2. *Достаточность.* Если же E инъективно линейно и непрерывно вложено в ℓ_2, то можно воспользоваться [14, лемма 1], которая утверждает наличие в пространстве ℓ_2 антикомпакта, т. е. что ℓ_2 инъективно, линейно и компактно вложено в ℓ_2. Следовательно, существует линейный инъективный и компактный оператор $A' : E \to \ell_2$, откуда и вытекает существование антикомпакта в E по лемме 1.1. □

Покажем примеры практического использования полученного критерия. Так, хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Покажем, что это возможно и в некоторых несепарабельных пространствах (напомним, что случай сепарабельных пространств был исследован в [15]).

Пример 1.1. Пространство ограниченных числовых последовательностей ℓ_∞ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Действительно, достаточно рассмотреть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_2$, задаваемый следующим образом: $Ax = \left(x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \ldots, \dfrac{x_n}{n}, \ldots\right)$.

Пример 1.2. Пространство существенно ограниченных функций $L_\infty([0;\ 1])$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\ sup}\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$ линейно инъективно и непрерывно вложено в $L_2([0;1]) \cong \ell_2$. Действительно, достаточно рассмотреть тождественный оператор $A : L_\infty([0;\ 1]) \to L_2([0;\ 1])$, $Af(t) = f(t)$:

$$\|Af\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \left((\operatorname*{ess\ sup}_{t\in[0;1]} |f(t)|)^2\right)^{1/2} = \|f\|_{L_\infty},$$

т. е. оператор A непрерывен. Линейность и инъективность A очевидны. Итак, $L_\infty([0;\ 1])$ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2, т. е. в $L_\infty([0;\ 1])$ существует антикомпакт.

Аналогично можно рассмотреть и пространство Фреше $L_\infty([0;+\infty))$ существенно ограниченных функций с определяющей системой полунорм $\|f\|_n = \operatorname*{ess\ sup}\limits_{t\in[0;n]} |f(t)|$, $n \in \mathbb{N}$.

Предложим еще одно достаточно простое описание класса пространств Фреше, имеющих антикомпакты. Мы будем опираться, в частности, на аналогичный результат в банаховом случае, полученный в [16, следствие 1].

Теорема 1.2. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда над E существует счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Согласно теореме 1.1, если E имеет антикомпакт, то существует линейный непрерывный инъективный оператор $A: E \to \ell_2$. В свою очередь, в пространстве ℓ_2 существует счетное тотальное подмножество T_0 линейных непрерывных функционалов. Легко проверить, что $T_0 \subset E^*$ в силу непрерывности вложения E в ℓ_2. При этом T_0 разделяет точки E в силу инъективности вложения E в ℓ_2. Поэтому $T_0 \subset E^*$ — тотальное подмножество E.

2. *Достаточность.* Воспользуемся схемой рассуждений из [15, доказательство теоремы 2.5]. Напомним, что любое пространство Фреше E со счетной определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^{\infty}$ есть проективный предел последовательности банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где $\widehat{E}_j$ являются пополнениями по фактор-нормам фактор-пространств $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $(j \in \mathbb{N})$.

В силу [16, следствие 1] для любого $j \in \mathbb{N}$ в банаховом пространстве E_j существует антикомпакт $\widehat{C}_j$ и поэтому все E_j инъективно, линейно и компактно вложены в сепарабельное гильбертово пространство $H = \ell_2$ по теореме 1.1. Не уменьшая общности рассуждений, систему антикомпактов $\left\{\widehat{C}_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ можно в H выбрать неубывающей, если нужно, рассмотрев систему множеств $\left\{\bigcup\limits_{j=1}^{N} \widehat{C}_j\right\}_{N=1}^{\infty}$. Антикомпактность этих множеств установлена в [15, предложение 2.4]. При таком соглашении

$$\|\cdot\|_{\widehat{C}_j} \geqslant \|\cdot\|_{\widehat{C}_k} \quad \forall k \geqslant j. \tag{1.1}$$

Пусть $\widehat{E} = \prod\limits_{\widehat{C}_j} E_{\widehat{C}_j}$ — прямое произведение пространств $E_{\widehat{C}_j}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{C} := \left\{ x \in \widehat{E} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2} \leqslant 1. \right\}$$

Поскольку E — проективный предел пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому E может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то всякое ограниченное множество $C \subset E$ может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E) и непрерывно вложено в произведение $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} j^2 \widehat{C}_j$, которое компактно в $\widehat{E}$ по теореме Тихонова в топологии прямого произведения. Далее, в силу (1.1) и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ можно проверить компактность C в пространстве $E_{\widehat{C}} \supset E$, порожденном и пополненном относительно нормы

$$\|x\|_{\widehat{C}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}.$$

Поэтому C — непустой абсолютно выпуклый компакт в $E_{\widehat{C}}$, т. е. $\widehat{C}$ — антикомпакт в E. □

На базе последнего следствия легко привести пример пространства, которое ни одного антикомпакта не имеет. При этом такое пространство может быть гильбертовым (несепарабельным) и поэтому рефлексивным.

Пример 1.3. Рассмотрим пространство $\ell_2([0;1])$ таких вещественных функций $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, что $\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 < \infty$. Ясно, что всякая функция $f \in \ell_2([0;1])$ имеет не более чем счетное множество значений. Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 \right)^{1/2},$$

а всякий линейный непрерывный функционал ℓ на $\ell_2([0;1])$ представим в виде

$$\ell(f) = \ell_g(f) = \sum_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|,$$

где g — некоторый фиксированный элемент из $\ell_2([0;1])$.

Ясно, что какое бы счетное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\ell_2([0;1])$ мы не выбрали, они все будут принимать нулевые значения на множестве функций из $f \in \ell_2([0;1])$, которые обращаются в нуль в точках $t \in [0;1]$, для которых $g_n(t) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому всякое счетное множество линейных непрерывных функционалов на $\ell_2([0;1])$ принимает нулевые значения на ненулевых функциях, и поэтому в пространстве $\ell_2([0;1])$ нет счетного тотального подмножества линейных непрерывных функционалов.

Аналогично можно рассмотреть и счетно-гильбертово пространство (пространство Фреше) $\ell_2([0;+\infty))$ с определяющей системой полунорм ($n \in \mathbb{N}$)

$$\|f\|_{\ell_2}^n = \left(\sum_{t\in[0;N]} |f(t)|^2\right)^{1/2}.$$

1.2. Аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов в пространствах Фреше, имеющих антикомпакты. Данный раздел статьи посвящен вспомогательному результату, показывающему при наличии антикомпакта $C' \in \mathcal{C}(E)$ представимость всякого сопряженного пространства E^* в виде векторного индуктивного предела сопряженных пространств $E^*_{C'}$, порожденных антикомпактами $C' \in \mathcal{C}(E)$. Иными словами, мы доказываем, что всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве Фреше E, можно продолжить до линейного непрерывного функционала, заданного на некотором пространстве $E_{C'}$, порожденном антикомпактом $C' \in \mathcal{C}(E)$. Это, по сути, аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала с «неувеличением» нормы. Этот результат будет использован нами в разделе, посвященном аналогам теоремы Крейна—Мильмана в пространствах Фреше, порожденных антикомпактами.

Теорема 1.3. *Если в пространстве Фреше E существует антикомпактное множество, то*

$$E^* = \bigcup_{C'\in\mathcal{C}'(E)} E^*_{C'}. \tag{1.2}$$

Доказательство. 1. Ясно, что

$$\forall C' \in \mathcal{C}'(E) \quad E^*_{C'} \subset E^*. \tag{1.3}$$

Действительно, по построению антикомпакта $E \subset E_{C'}$ $\forall C' \in \mathcal{C}'(E)$, и поэтому всякий линейный функционал на $E_{C'}$ будет линейным и на подмножестве E. Непрерывность же этого функционала вытекает из неравенства

$$\|x\|_{C'} \leqslant K \cdot \|x\|_E \text{ для всякого } x \in E \quad \forall C' \in \mathcal{C}'(E), \tag{1.4}$$

справедливого для некоторого числа $K > 0$.

2. Докажем теперь, что любой функционал $\ell \in E^*$ можно продолжить на $E^*_{C'}$ при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Рассмотрим функционал $p^{\ell}_{C''}(\cdot) : E \to \mathbb{R}$: $p^{\ell}_{C'}(x) = |\ell(x)| + \|x\|_{C'}$ для некоторого множества $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Ясно, что $p^{\ell}_{C'}(\cdot)$ — норма на E. Рассмотрим множество $C'' = \{x \in E \mid p^{\ell}_{C'}(x) \leqslant 1\}$, $E_{C''} = (span\ C'', p_{C''}(\cdot))$ — банахово пространство, порожденное C'' (и пополненное по данной норме).

Любое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в $E_{C''}$. Действительно, для всякой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ можно выбрать сходящуюся в $E_{C'}$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. А, в свою очередь, из последовательности $\{\ell(y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, которая по построению будет сходиться в $E_{C''}$. Итак, $C'' \in \mathcal{C}'(E)$. При этом

$$|\ell(x)| \leqslant |\ell(x)| + \|x\|_{C'} = \|x\|_{C''} \quad \forall x \in E.$$

Далее, на основании теоремы Хана—Банаха [6] о продолжении линейного непрерывного функционала с сохранением нормы $|\ell(x)| \leqslant \|x\|_{C''}$ $\forall x \in E_{C''}$, т. е. $\ell \in E^*_{C''}$.

Таким образом, верно (1.2), ч.т.д. □

2. Секвенциальные аналоги теоремы А. А. Ляпунова для векторных мер и квазимер

2.1. Секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова для мер. Теперь переходим к первой группе основных результатов работы — секвенциальным аналогам теоремы А. А. Ляпунова для векторных мер и квазимер со значениями в пространствах Фреше. Напомним, что наиболее известный аналог теоремы А. А. Ляпунова — теорема Ула — утверждает выпуклость и компактность замыкания образа векторной меры (сильно) ограниченной вариации в пространствах со свойством Радона—Никодима. Также известно, что слабое замыкание образа векторной меры со значением в любом пространстве выпукло и слабо компактно. Нам в классе банаховых пространств, имеющих антикомпакты (такие пространства могут не иметь ни свойства Радона—Никодима, ни свойства Ляпунова), удалось выделить класс векторных мер, для которых слабое замыкание можно заменить на некоторый секвенциальный тип замыкания. Введем понятие T_0-сходимости последовательности, где $T_0 \subset E^*$ — счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов в E.

Определение 2.1. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *T_0-сходится* к $x \in E$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)$ $\forall \ell \in T_0 \subset E^*$.

Предыдущее определение корректно (предел единственен) в силу того, что множество функционалов T_0 тотально в E (разделяет элементы из E). В качестве наглядного примера такой сходимости можно привести пример покоординатной сходимости в пространствах числовых последовательностей c, c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При этом напомним, что в пространствах ℓ_1 и ℓ_∞ покоординатная сходимость может отличаться от слабой сходимости [6] даже для ограниченных последовательностей. Введем также понятие T_0-замыкания множества $A \subset E$.

Определение 2.2. Назовем *T_0-замыканием* множества $A \subset E$ такое множество $\widehat{A} \subset E$, что для любого $x \in \widehat{A}$ существует T_0-сходящаяся к x последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Оказывается, что можно получить аналог теоремы А. А. Ляпунова для ограниченных векторных мер с использованием T_0-замыканий.

Теорема 2.1. *Пусть пространство Фреше E имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов $T_0 \subset E^*$, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная ограниченная мера. Тогда T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E.*

Перед доказательством этого результата приведем некоторые вспомогательные понятия и результат из [4, 12, 13]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать далее). Напомним [4, с. 104], что *полной вариацией векторной меры* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ в E называется отображение $|\,\nu\,|: \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{2.1}$$

где супремум берется по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Легко проверить, что отображение $|\,\nu\,|$ — конечная счетно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [4, с. 104]). Обозначим через $V(S, E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$ (Σ — σ-алгебра подмножеств S), которые имеют конечную полную вариацию $|\,\nu\,|\,(S) < \infty$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на E (см. (2.1)).

Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$. Эти пространства были введены и детально изучались И. В. Орловым (см., например, [12]).

Определение 2.3. Будем говорить, что ν имеет (*сильную*) *компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S, E)$, $|\,\nu\,|_C$ — полная вариация векторной меры ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того чтобы сформулировать необходимый результат из [13], нам потребуется вспомогательная характеристика для мер $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — (*сильная*) *компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S,E,\mu)$ множество всех векторных мер $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, т. е. таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A)=0 \Rightarrow |\nu|(A)=0$ или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0: \quad (\mu(A)<\delta) \Rightarrow |\nu|(A)<\varepsilon$).

Определение 2.4. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S,E)$ (*сильно*) *компактно абсолютно непрерывна на* S *относительно числовой меры* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S,E_C,\mu)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S,E,\mu)$.

Приведем важный вспомогательный результат из [13].

Теорема 2.2. *Если* $\nu \in AC_K(S,E,\mu)$, *то найдется такое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : S \to E$, *что для любого* $A \in \Sigma$ *верно*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t). \tag{2.2}$$

Переходим к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство. 1. Векторная мера μ имеет слабо ограниченную вариацию ввиду ее ограниченности и того, что всякий ограниченный числовой заряд $\ell(\overrightarrow{\mu})(\cdot)$ ($\ell \in E^*$) имеет ограниченную вариацию. Обозначим через $c_k = V(\ell_k(\overrightarrow{\mu}))(S)$ полные вариации зарядов $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$, $\ell_k \in T_0$. Выберем числовую последовательность $n_k \to +\infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\dfrac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной, и рассмотрим множество

$$\widetilde{C} = \left\{ x \in E \ \middle|\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant 1 \right\},$$

а также порожденное $\widetilde{C}$ банахово пространство $E_{\widetilde{C}} = \left(span\ \widetilde{C}, p_{\widetilde{C}}(\cdot)\right)$ ($p_{\widetilde{C}}(\cdot)$ — функционал Минковского, порожденный $\widetilde{C}$), $E_{\widetilde{C}} \cong \ell_\infty$.

Не уменьшая общности рассуждений, будем полагать, что $\|T_0\|_{E^*} \leqslant 1$ (если E — пространство Фреше, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1, то его можно инъективно компактно и линейно вложить в сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2 в силу теорем 1.1 и 1.2). Пусть $B \subset E$ — произвольное ограниченное множество. Покажем, что оно содержится и предкомпактно в $E_{\widetilde{C}}$. В силу $n_k \to \infty$ существует $L>0$ такое, что $\dfrac{1}{n_k} \leqslant L$ и поэтому для любого $x \in B$

$$\sup_k \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant K \cdot \|\ell_k\|_{E^*} \cdot \|x\|,$$

т. е. $B \subset E_{\widetilde{C}}$. Далее, предкомпактность B в $E_{\widetilde{C}}$ вытекает из того, что последовательности $\left(\dfrac{|\ell_1(x)|}{n_1}, \dfrac{|\ell_2(x)|}{n_2}, \ldots, \dfrac{|\ell_k(x)|}{n_k}, \ldots\right)$ ограничены элементом $\left(\dfrac{1}{n_1}, \dfrac{1}{n_2}, \ldots, \dfrac{1}{n_k}, \ldots\right) \in c_0$ равномерно по $x \in B$ (это обеспечивает предкомпактность множества в ℓ_∞). Итак, $\widetilde{C} \in \mathcal{C}'(E)$.

2. Далее, выберем такую последовательность положительных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{m_k} = 1$, и рассмотрим новый антикомпакт $\widetilde{C}' \supset \widetilde{C}$:

$$\widetilde{C}' = \left\{ x \in E \ \middle|\ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\ell_k(x)}{m_k n_k}\right| \leqslant 1 \right\}.$$

Покажем, что $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $E_{\widetilde{C}'} \cong \ell_1$. Действительно, $\forall A \in \Sigma$: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ ($A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$)

$$\sum_{i=1}^{p} \|\overrightarrow{\mu}(A_i)\|_{\widetilde{C}'} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A_i))|}{m_k n_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A_i))|}{m_k n_k} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A_i)}{m_k n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{m_k n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = 1$$

в силу выбора $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($|\nu|(\cdot)$ по-прежнему обозначает полную вариацию заряда ν). Поскольку $E_{\widetilde{C}'} \cong \ell_1$ и пространство последовательностей ℓ_1 имеет антикомпакт по теореме 1.2, то $\exists\, \widetilde{C}'' \supset \widetilde{C}'$: $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\widetilde{C}''}$. Введем теперь на Σ числовую меру

$$\mu_{\widetilde{C}}(A) := \sup \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{n_k}.$$

Ясно, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\widetilde{C}}$. Также мера $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|$ безатомна ввиду безатомности $\overrightarrow{\mu}$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K\left(\Sigma, E_{\widetilde{C}''}, \mu_{\widetilde{C}}\right)$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде неопределенного интеграла Бохнера по теореме 2.2. Доказываемое утверждение теперь вытекает из выпуклости образа векторной меры, представимой в виде интеграла Бохнера (см. [24, с. 266, доказательство теоремы 10]).

3. Остается рассмотреть множество $M(\overrightarrow{\mu}) = co\overrightarrow{\mu}(\Sigma) \cap \overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ (coA — выпуклая оболочка множества A, $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ — замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $E_{\widetilde{C}''}$). Это множество выпукло как пересечение выпуклых множеств и при этом содержится в T_0-замыкании множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$, поскольку $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ содержит все T_0-пределы последовательностей из $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$. Выпуклость T_0-замыкания выпуклого множества проверяется непосредственно.

Относительная слабая компактность T_0-замыкания $M(\overrightarrow{\mu})$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ вытекает из известного результата о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [24]. Теорема доказана. □

Возникает вопрос о том, можно ли в предыдущих результатах заменить ограничения на класс пространств E какими-то условиями на сами меры? Если Σ — счетно-порожденная σ-алгебра (например, такой будет σ-алгебра борелевских подмножеств вещественного отрезка), то на такой вопрос можно предложить ответ в виде следующего результата.

Теорема 2.3. *Если Σ — счетно-порожденная σ-алгебра и безатомная векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ имеет (сильно) ограниченную вариацию в некотором пространстве Фреше E. Тогда множество $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ погружается в подпространство $E_0 \subset E$, имеющее счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 \in E_0^*$ и T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E_0.*

Доказательство. Обозначим через $|\overrightarrow{\mu}|(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$. Ясно, что $|\overrightarrow{\mu}|$ — числовая мера на Σ. Ввиду счетно-порожденности Σ существует счетная система множеств $\Phi \subset \Sigma$ такая, что для любого $A \in \Sigma$ существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$ такая, что $A \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $|\overrightarrow{\mu}|(A) = \lim\limits_{n\to\infty} |\overrightarrow{\mu}|(A_n)$. Следовательно,

$$\|\overrightarrow{\mu}(A_n) - \overrightarrow{\mu}(A)\| = \|\overrightarrow{\mu}(A_n \backslash A)\| \leqslant |\overrightarrow{\mu}|(A_n \backslash A) = |\overrightarrow{\mu}|(A_n) - |\overrightarrow{\mu}|(A) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т. е. $\overrightarrow{\mu}(\Phi)$ — счетное плотное в $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество и поэтому $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ содержится в некотором сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. А в пространстве E_0 уже существует счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. Остается лишь применить теорему 2.1. □

Отметим, что условия счетной аддитивности и ограниченности вариации для векторной меры существенны. Построим пример конечной векторной меры со значениями в $L_\infty[0;1]$, не имеющей сильно ограниченной вариации и слабое секвенциальное замыкание множества значений которой не выпукло.

Пример 2.1. Пусть $\Sigma = \beta[0;1]$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $[0;1]$, mes — классическая мера Лебега на Σ, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to L_\infty[0;1]$:

$$\overrightarrow{\mu}(A) = \chi_A(t) = \begin{cases} 0, & t \notin A; \\ 1, & t \in A. \end{cases}$$

Ясно, что $\forall A \subset [0;1] : mes(A) \neq 0,\ ||\overrightarrow{\mu}(A)||_\infty = 1$. Поэтому $\overrightarrow{\mu}$ не имеет сильной ограниченной вариации. Допустим, что секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в $E = L_\infty[0;1]$ выпукло. Это значит, что $\exists \{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma :\ \forall \ell \in E^* = L_\infty^*[0;1]$

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\overrightarrow{\mu}(A_n)) = \ell\left(\frac{1}{2}\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right). \tag{2.3}$$

Если $\forall A \in \Sigma$ положить $\hat{A} = [0;1]\backslash A$, то $\chi_{\hat{A}}(t) + \chi_A(t) \equiv \chi_{[0;1]}(t)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ell\left(\overrightarrow{\mu}(\hat{A}_n)\right) &= \ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) - \lim_{n\to\infty} \ell\left(\mu(A_n)\right) = \\ &= \ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) - \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Вспомним теорему об описании E^* [20]. Из нее вытекает, что для любой функции g ограниченной вариации на $[0;1]$ функционал $\ell_g(f) = \int\limits_0^1 f(t)dg(t) \in E^*$. Если выбрать $g(t) = t$, то $\ell_g\left(\overrightarrow{\mu}(A_n)\right) = \int\limits_0^1 \chi_{A_n}(t)dt = \int\limits_{A_n} dt \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, т.к. $\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \int\limits_0^1 dt = 1$. Аналогично, $\ell_g(\overrightarrow{\mu}(\hat{A}_n)) \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Итак, существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma : \lim\limits_{n\to\infty} mes(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} mes(\hat{A}_n) = \dfrac{1}{2}$. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $A_n \dot{\cup} \hat{A}_n = [0;1]$, то $t \in [0;1]$ лежит в счетном наборе либо множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, либо $\{\hat{A}_n\}_{n=1}^\infty$. Для определенности будем полагать, что

$$t_0 \in \bigcap_{k=1}^\infty A_{n_k}, \quad \{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{A_n\}_{n=1}^\infty.$$

Выберем теперь

$$g_\delta = \begin{cases} t, & t \leqslant t_0; \\ t + \delta, & t > t_0 \end{cases}$$

для некоторого фиксированного $\delta > 0$. Тогда $\ell_{g_\delta}(\overrightarrow{\mu}(A_n)) = \int\limits_{A_n} dg_\delta(t) = mes(A_n) + \delta$. В силу (2.3)

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{g_\delta}\left(\overrightarrow{\mu}(A_n)\right) = \frac{1}{2}\ell_{g_\delta}\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dg_\delta(t) = \frac{1}{2}(1+\delta) = \frac{1+\delta}{2},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(mes(A_n) + \delta) = \dfrac{1}{2} + \delta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\delta}{2}$, что противоречит выбору $\delta > 0$.

Итак, секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ не выпукло.

2.2. Приложения полученного аналога теоремы А. А. Ляпунова к бесконечномерному аналогу задачи о разделе сокровищ. Теперь мы рассмотрим пример приложения полученного выше секвенциального аналога теоремы А. А. Ляпунова (теорема 2.1) к бесконечномерному аналогу задачи о справедливом разделе ресурсов для мер. Сначала напомним классическую постановку этой задачи для конечного числа лиц.

Мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Задача о справедливом разделе ресурсов (сокровищ) изучается математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для этих исследований, как правило, служит работа А. А. Ляпунова [8], в которой доказана теорема о выпуклости образа векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы Неймана [28] и Штейнгауза [30], в которых рассмотрены приложения основного результата Ляпунова к задаче о разделе сокровищ (ресурсов). Задачу о разделе ресурсов можно сформулировать следующим образом [28].

Задача 2.1. Пусть имеется n разбойников, которые оценивают части делимой добычи $A \in \Sigma$ с помощью числовых мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, заданных на некоторой σ-алгебре Σ. Полагаем, что оценка делимой добычи A одинакова для всех разбойников:

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \ldots = \mu_n(A) = 1.$$

Возможно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

так, чтобы $\mu_k(A_i) = \dfrac{1}{n}$ $\forall k, i = \overline{1,\ n}$?

В известном результате [28, 30] о разрешимости такой задачи предполагалось, что для оценки сокровищ используются меры, а добыча бесконечно делима (каждый разбойник может разделить множество на произвольное число частей, равных с его точки зрения). Это условие бесконечной делимости означает не что иное, как безатомность мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Оказывается, что при таком условии искомое разбиение возможно.

Рассмотрим теперь такой аналог такой задачи для бесконечного числа мер.

Задача 2.2. Будем обозначать делимые ресурсы через некоторое множество A и полагать, что его части (на которые возможен раздел) образуют σ-алгебру Σ подмножеств A. На Σ задано бесконечное количество числовых мер $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \ldots = \mu_n(A) = \ldots = 1.$$

Возможно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\mu_n(A_k) = \lambda_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный сходящийся ряд из положительных чисел?

Задаче 2.2 можно придать такой смысл. Пусть имеется объект и некоторый набор его подмножеств (σ-алгебра подмножеств). Предположим, что имеется счетное количество различных критериев оценки делимых частей исходного объекта, но сам объект одинаков с точки зрения этих критериев. Ставится вопрос о возможности построения такого разбиения исходного объекта на части, чтобы это деление удовлетворяло всем рассматриваемым критериям. По сути это как бы «сглаживание» оценок какого-либо множества с точки зрения бесконечного числа критериев.

Для исследования задачи 2.2 естественно рассмотреть пространство ℓ_∞ и векторную меру

$$\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) : \Sigma \to \ell_\infty.$$

По условию

$$\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, \ldots, 1, \ldots), \quad \overrightarrow{\mu}(\varnothing) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Разрешимость задачи 2.2 равносильна выпуклости $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ при произвольном выборе меры $\overrightarrow{\mu}$. А это неверно, как показано А. А. Ляпуновым даже для векторных мер со значениями в пространстве ℓ_1 [9]. Воспользоваться теоремой Ула (этот результат предполагает, что пространство обладает свойством Радона—Никодима) или свойством Ляпунова нельзя, поскольку пространство числовых последовательностей ℓ_∞ не имеет ни свойства Радона—Никодима, ни свойства Ляпунова. С использованием доказанной нами выше теоремы 2.1 мы получили следующий результат о разрешимости поставленной задачи в секвенциальной форме для бесконечного числа мер.

Теорема 2.4. *Пусть $\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots) : \Sigma \to \ell_\infty$ — безатомная векторная мера и множество A такое, что $\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, \ldots)$. Тогда существует система последовательностей множеств $\{A_{k,i}\}_{i,k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ такая, что $A_{k,i} \cap A_{\ell,i} = \varnothing$ при $k \neq \ell$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,i} = A$ и*

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{k,i}) = \lambda_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный ряд положительных чисел.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции по k.

1. *Базис индукции* ($k = 1$). Выберем в пространстве ℓ_∞ в качестве T_0 набор координатных функционалов — счетное тотальное множество. По теореме 2.1 T_0-замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло. Поэтому существует набор множеств $\{A_{1,i}\}_{i=1}^\infty \subset \Sigma$:

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{1,i}) = \lambda_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n(A \setminus A_{1,i}) = 1 - \lambda_1 = \sum_{j=2}^\infty \lambda_j.$$

2. Пусть теперь для любого $k = \overline{1, N}$ существует $\{A_{k,i}\}_{i=1}^\infty$: $A_{k,i} \cap A_{p,i} = \varnothing$ при $k \neq p$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{k,i}) = \lambda_k, \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n\left(A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{k,i})\right) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = \sum_{j=k+1}^\infty \lambda_j.$$

Применив теперь для каждого $i \in \mathbb{N}$ теорему 2.1 к векторной мере $\overrightarrow{\mu}$, заданной на σ-алгебре подмножеств $A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{N,i})$, мы получим существование последовательности множеств $\{A_{N+1,i}\}_{i=1}^\infty$ такой, что $A_{N+1,i} \cap A_{k_i} = \varnothing$ $\forall k \leqslant N$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{N+1,i}) = \lambda_{N+1}, \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n\left(A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{N,i} \cup A_{N+1,i})\right) =$$

$$= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N + \lambda_{N+1}) = \sum_{j=N+2}^\infty \lambda_j.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. □

2.3. Различные подходы к обобщению понятия меры с целью моделирования пренебрежения малыми величинами в задаче о справедливом разделе ресурсов. Проблеме справедливого раздела ресурсов посвящено множество работ (см., например [7, 10, 25, 26, 28, 30]). Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные аддитивные вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Однако можно встретить и работы, в которых для моделирования соответствующих задач рассматриваются также и неаддитивные функции множества (например, [22, 25]).

Использование мер также невозможно в случаях пренебрежения достаточно малыми или большими множествами, поскольку возникающие при этом функции множеств теряют аддитивность. Такая постановка задачи о разделе ресурсов рассматривалась в недавней работе [17] с использованием понятия квазимеры множества. Напомним понятие квазимеры из [17]. Для этого сначала приведем вспомогательные понятия.

Определение 2.5. Функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$) ρ называется *монотонной*, если $\forall A, B \in \Phi : A \supset B \quad \rho(A) \geqslant \rho(B)$.

Также мы используем аналог свойства Дарбу, которое названо нами промежуточной непрерывностью.

Определение 2.6. Пусть ρ — функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$). Она называется *промежуточно непрерывной*, если для $\forall A, B \in \Phi : A \subset B, \ \ \rho(A) = a \ (a > 0), \ \ \rho(B) = b \ \ (b > a)$ $\forall c \in (a; b)\ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c, \ \ A \subset C \subset B$.

В работе также будет использовано и классическое свойство полунепрерывности сверху.

Определение 2.7. Функция множества $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ называется *полунепрерывной сверху*, если для $\forall A_1, \ldots, A_n, \dots \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \ldots :$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Приведем теперь определение понятия квазимеры из работы [17].

Определение 2.8. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Будем говорить, что ρ — *квазимера*, если:

1. $\forall A \in \Phi\colon \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$
2. ρ монотонна по определению 2.5;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2.6;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 2.7.

Рассмотрим некоторые примеры квазимер над системой множеств, каждое из которых является объединением отрезков на прямой.

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m, \beta_m) \mid \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \cap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}, \text{ где } R = [0; 1).$$

Эта система является монотонным классом множеств.

Пример 2.2.

$$\rho_\varepsilon^{**}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.3.

$$\rho_\varepsilon^{2}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|\right)^2, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.4.

$$\rho_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|}, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Эти примеры моделируют вышеупомянутые ситуации пренебрежения «малыми» множествами. При этом все вышеуказанные квазимеры не будут мерами, так как не удовлетворяют свойству аддитивности. Это можно легко обнаружить, если взять два множества, каждое из которых имеет нулевую оценку, но объединение которых имеет ненулевую оценку.

На базе понятия квазимеры в работе [17] удалось доказать разрешимость задачи о разделе ресурсов в равном отношении. Однако предложенный в [17] подход к проблеме не позволил получить аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости для квазимер, и ввиду этого не удалось доказать возможность раздела объектов в любом отношении, а только лишь на равные части. На устранение данного недостатка направлена работа [18], в которой была поставлена задача так ввести аналог понятия меры для оценки частей делимых ресурсов, чтобы удалось получить возможность справедливого раздела не только в равных отношениях, но и в различных. Для этого необходимо получить фундаментальный результат — аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа меры в какой-то форме. А для такой задачи уже понятие квазимеры из [17] не подходит. В работе [18] предложен следующий аналог понятия квазимеры — понятие ε-квазимеры множества. Это понятие позволяет учесть пренебрежение «малыми» множествами и при этом сохранить в некотором смысле свойство аддитивности.

Определение 2.9. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Будем говорить, что ρ — *ε-квазимера*, если:

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$

2. ρ монотонна по определению 2.5;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2.6;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 2.7;
5. $\forall A, B\colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing\colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$.

Как можно заметить, среди рассмотренных выше примеров 2.2–2.4 только отображение из примера 2.2 будет удовлетворять определению ε-квазимеры. Для ε-квазимер в работе [18] получен следующий аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры. Всюду до конца пункта 2.3 мы полагаем, что Φ — монотонный класс множеств.

Теорема 2.5. *Если $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, то множество $\vec{\rho}(\Phi)$ квазивыпукло, т. е.*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n \ \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

На основании построенной теории ε-квазимер в [18] предложен вариант решения задачи о разделе сокровищ разбойниками, если каждый из этих разбойников использует ε-квазимеру для оценки частей сокровищ. При этом ввиду теоремы 2.5 рассмотрена следующая несколько усиленная формулировка задачи.

Задача 2.3. Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу в некотором заданном отношении $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_n$ ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ и для определенности можно положить, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$). При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, т. е. подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Будем полагать, что каждый работник использует для оценки сокровищ ε-квазимеры, заданные на монотонном классе множеств Φ. При каких условиях на ε-квазимеры, используемые разбойниками для оценки частей делимых сокровищ, такой раздел будет возможным?

В работе [18] доказана разрешимость поставленной задачи 2.3.

Теорема 2.6. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — набор чисел, причем $\lambda_i \geqslant \varepsilon \ \forall i$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Тогда $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A\colon$, $L_i \in \Phi$*

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

где $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

2.4. Секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова для векторных квазимер. В предыдущем пункте мы познакомились с подходами к обобщению понятия числовой меры с целью моделирования задачи о разделе ресурсов, которые бы учитывали пренебрежение малыми частями делимых объектов. Такие подходы к построению аналогов мер позволяют получить аналоги теоремы А. А. Ляпунова в конечномерном случае. Однако подходы работ [17, 18] не годятся для функций множества со значениями в бесконечномерных пространствах, поскольку в этом классе пространств уже невозможно, вообще говоря, использовать свойство монотонности и свойство Дарбу для таких функций множества.

В данном пункте работы мы предложим новый подход к обобщению понятия меры, подобный ранее рассмотренным в [17, 18], но уже для векторных функций множества $\rho : \Sigma \to E$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества, E — пространство Фреше. С использованием нового понятия будет получен секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной меры. Дадим определение.

Определение 2.10. Пусть $\overrightarrow{\rho} : \Sigma \to E$ — функция множества. Назовем $\overrightarrow{\rho}$ *векторной квазимерой*, если верны следующие условия:

1. $\overrightarrow{\rho}(\varnothing) = 0$;
2. для любой неубывающей последовательности множеств $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ из Σ

$$\overrightarrow{\rho}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \overrightarrow{\rho}(A_n);$$

3. Существуют два подмножества $\Sigma_0, \Sigma_1 \subset \Sigma$ такие, что:
   3.1. $\forall A \in \Sigma_0$, $A' \subset A \Longrightarrow \overrightarrow{\rho}(A') = 0$;

3.2. $\forall P \in \Sigma_1 \ \overrightarrow{\rho}(P) \neq 0$;

3.3. $\forall A \in \Sigma_0 \ \exists P \in \Sigma_1$: $P \supset A$;

3.4. $\forall A, B \in \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing \ \exists P, Q \in \Sigma_1$: $P \supset A$, $Q \supset B$ и $P \cap Q = \varnothing$;

3.5. $\forall P, Q \in \Sigma_1 \ \exists R \in \Sigma_1$: $P \cap R = Q \cap R = \varnothing$;

3.6. $\forall A \in \Sigma_0$ выражение $(P \cap A = \varnothing)$ $\overrightarrow{\rho}(A \cup P) - \overrightarrow{\rho}(P)$ не зависит от выбора $P \in \Sigma_1$.

4. $\forall A, B \in \Sigma \backslash \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing$:

$$\overrightarrow{\rho}(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}(A) + \overrightarrow{\rho}(B).$$

Естественно привести пример функции множества со значениями в бесконечномерном пространстве, удовлетворяющей предыдущему определению.

Пример 2.5. В качестве пространства значений выберем пространство последовательностей $E = \ell_\infty$, а Σ — некоторую σ-алгебру подмножеств некоторого множества Ω.

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ — набор счетно-аддитивных числовых мер таких, что $\mu_n(A) \leqslant 1 \ \forall A \subset \Omega$. Положим для некоторого фиксированного числа $\varepsilon > 0$

$$\overrightarrow{\rho}(A) = (\overrightarrow{\mu}_1(A), \overrightarrow{\mu}_2(A), \ldots, \overrightarrow{\mu}_n(A), \ldots) \text{ при } \mu_n(A) \geqslant \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

и $\overrightarrow{\rho}(A) = \overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ в противном случае.

В данном случае Σ_0 — это набор всех подмножеств $A \in \Sigma$ таких, что $\overrightarrow{\rho}(A) = 0$, а в качестве Σ_1 можно взять набор всех таких множеств $P \in \Sigma$, для которых хотя бы одна из мер $\mu_n(P) = \varepsilon$.

Докажем, что всякую векторную квазимеру можно «приблизить» обычной счетно-аддитивной векторной мерой $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$.

Теорема 2.7. *Если $\overrightarrow{\rho} : \Sigma \to E$ — векторная квазимера, то существует такая счетно-аддитивная векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$, что $\forall A \in \Sigma \ \overrightarrow{\rho}(A) = \overrightarrow{\mu}(A)$ или $\overrightarrow{\rho}(A) = 0$.*

Доказательство. 1. Введем функцию множества $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$:

$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R), \text{ если } A \in \Sigma_0, \text{ а } R \in \Sigma_1\text{: } R \cap A = \varnothing;$$
$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}(A), \text{ если } A \notin \Sigma_0.$$

Отметим, что согласно определению векторной квазимеры величина $\overrightarrow{\rho}(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R)$ не зависит от выбора R. Это доказывает корректность определения $\overrightarrow{\mu}$.

2. Докажем конечную аддитивность функции $\overrightarrow{\mu}$.

а). Пусть $A \cap B = \varnothing$, $\overrightarrow{\rho}(A') = \overrightarrow{\rho}(B') = 0 \ \forall A' \subset A$, $B' \subset B$ $(A, B \in \Sigma_0)$. Тогда $\exists P, Q \in \Sigma_1$: $P \supset A$, $Q \supset B$ и $P \cap Q = \varnothing$. Далее, $\exists R \in \Sigma_1$: $R \cap P = R \cap Q = \varnothing$ и по построению $\overrightarrow{\mu}$

$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R), \quad \overrightarrow{\mu}(B) = \overrightarrow{\rho}\,(B \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R).$$

Ясно, что $\overrightarrow{\mu}(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R)$ вне зависимости от того, $A \cup B \in \Sigma_0$ или $A \cup B \notin \Sigma_0$ (в последнем случае можно просто применить пункт 4 определения векторной квазимеры). Если $A \cup B \in \Sigma_0$, то $\exists P' \supset A \cup B$, $P' \in \Sigma_1$ и поскольку $P', R \in \Sigma_1$, то $\exists Q' \in \Sigma_1$: $P' \cap Q' = R \cap Q' = \varnothing$ (и, более того, $A \cap Q' = B \cap Q' = \varnothing$). Поэтому

$$\overrightarrow{\rho}\left(A \cup B \cup R \cup Q'\right) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) + \overrightarrow{\rho}\left(B \cup Q'\right)$$

и, аналогично,

$$\overrightarrow{\rho}\left(A \cup B \cup R \cup Q'\right) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) + \overrightarrow{\rho}\left(Q'\right),$$

откуда

$$\overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) - \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) = \overrightarrow{\rho}\left(B \cup Q'\right) - \overrightarrow{\rho}\left(Q'\right) = \overrightarrow{\mu}(B),$$

что и требовалось: $\overrightarrow{\mu}(A \cup B) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$.

Если же $A \cup B \notin \Sigma_0$, то

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R \cup S) - \overrightarrow{\rho}(R) - \overrightarrow{\rho}(S) =$$
$$= \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R) + \overrightarrow{\rho}\,(B \cup S) - \overrightarrow{\rho}(S) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$$

при условии $S \in \Sigma_1$, $S \cap R = S \cap (A \cup B) = \varnothing$.

б). Пусть теперь $A \in \Sigma_0$, $B \notin \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\overrightarrow{\rho}(B) = \overrightarrow{\mu}(B)$, $\overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)$. Если $R \subset B$, то

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,((A \cup R) \cup (B \backslash R)) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) + \overrightarrow{\rho}\,(B \backslash R) =$$

$$= \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\rho}(R) + \overrightarrow{\rho}\,(B\backslash R) = \overrightarrow{\rho}(B) + \overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$$

при условии $B\backslash R \notin \Sigma_0$. Если же $B\backslash R \in \Sigma_0$, то

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup (B\backslash R)) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}\,(B\backslash R) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\rho}(B) - \overrightarrow{\rho}(R),$$

т. е.

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup (B\backslash R)) + \overrightarrow{\rho}(R) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B).$$

Покажем, что

$$\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) + \overrightarrow{\mu}(R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)\,.$$

Если $\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) \in \Sigma_0$, то $(R \cap (A \cup B) = \varnothing)$

$$\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) - \overrightarrow{\mu}(R).$$

Если же $(A \cup B)\,\backslash R \notin \Sigma_0$, то согласно определению пункта 4 векторной квазимеры

$$\overrightarrow{\rho}\,((A \cup B)\,\backslash R) + \overrightarrow{\rho}(R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)\,.$$

Случай $A, B \notin \Sigma_0$ тривиален, как легко показывает пункт 4 определения векторной квазимеры.

3. Счетная аддитивность функции множества $\overrightarrow{\mu}$ вытекает из конечной аддитивности и слабой счетной аддитивности (счетной аддитивности всякого числового заряда $\ell(\overrightarrow{\mu})$, $\ell \in E^*$) (см. [19, теорема 3.6.2]). Слабая же счетная аддитивность $\overrightarrow{\mu}$ вытекает из свойств 2 и 4 определения векторной квазимеры, а также соответствующего свойства числовых зарядов $\ell(\overrightarrow{\mu})$ $(\ell \in E^*)$. $\square$

Будем называть меру, построенную в доказательстве предыдущей теоремы, *соответствующей для векторной квазимеры* $\overrightarrow{\rho}$ (примем обозначение $\overrightarrow{\mu}_\rho$). Сформулируем теперь аналог теоремы Ляпунова о выпуклости образа меры для векторных квазимер, который вытекает из предыдущего результата и теоремы 2.1.

Теорема 2.8. *Если для векторной квазимеры $\overrightarrow{\rho}$ соответствующая мера $\overrightarrow{\mu_\rho}$ безатомна, то T_0-замыкание множества $\overrightarrow{\rho}\,(\Sigma\backslash\Sigma_0)$ выпукло и относительно слабо компактно в E.*

3. Секвенциальные аналоги теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных замкнутых множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт

Теперь перейдем ко второй группе финальных результатов работы — аналогам теоремы Крейна—Мильмана для выпуклых ограниченных необязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Напомним, что согласно классической теореме Крейна—Мильмана всякий выпуклый компакт A есть замкнутая выпуклая оболочка крайних точек множества A [6, 24]. Пусть в банаховом пространстве E существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Тогда для ограниченного выпуклого множества $A \subset E$ замыкание $\overline{A}_{E_{C'}}$ — выпуклый компакт в $E_{C'}$. Согласно теореме Крейна—Мильмана (в пространстве $E_{C'}$)

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}}\ ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right),$$

где $ext(X)$ — множество крайних точек множества X, $\overline{co}_E X$ — выпуклая замкнутая (в пространстве E) оболочка множества X. Это означает, что справедлив следующий аналог теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных выпуклых множеств, утверждающий включение всякого такого множества A в некоторый компакт в $E_{C'}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (замкнутость A не требуется).

Лемма 3.1. *Если в пространстве Фреше E существует антикомпакт* (*или в E существует счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов*), *то для всякого ограниченного выпуклого множества $A \subset E$*

$$A \subset \overline{co}_{E_{C'}} ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right). \tag{3.1}$$

Будем интерпретировать (3.1) так: если E инъективно компактно вложено в $E_{C'}$ и $\varphi_{C'} : E \to E_{C'}$ — соответствующее каноническое вложение, то (3.1) означает, что

$$\varphi_{C'}(A) \subset \overline{co}_{E_{C'}}\ ext\ \overline{\varphi_{C'}(A)}.$$

В пространстве E последнее равенство можно переписать так:

$$A \subset \varphi_{C'}^{-1}\left(\overline{co}_{E_{C'}} ext\overline{\varphi_{C'}(A)} \cap \varphi(E)\right).$$

Теперь рассмотрим более тонкий результат — аналог теоремы Крейна—Мильмана, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество с помощью крайних точек его замыкания в пространствах, порожденных антикомпактами. Пусть $\widehat{A}_{C'} = \varphi_{C'}(E) \cap \overline{co}_{E_{C'}}\, ext\, \varphi_{C'}(A)$, $A_{C'} := \overline{\varphi_{C'}^{-1}(\widehat{A}_{C'})} \subset E$. Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть в E существует антикомпакт. Тогда для всякого замкнутого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$*

$$A = \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}.$$

Доказательство. Включение $A \subset \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}$ вытекает из предыдущей леммы. Пусть существует $x \in \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}$, но $x \notin A$. Тогда по теореме Хана—Банаха существует такой линейный непрерывный функционал $\ell \in E^*$, что $\ell(x) > \sup \ell(A)$. По теореме 1.3 существует $C'' \in \mathcal{C}'(E)$ такой, что $\ell \in E^*_{C''}$ и $\ell\left(\varphi_{C''}(x)\right) > \sup \ell\left(\varphi_{C''}(A)\right)$. Это означает, что

$$\varphi_{C''}(x) \notin \overline{co}_{E'_{C'}}\left(\varphi_{C''}(A)\right) = \overline{co}_{E'_{C'}}\; ext\; \left(\varphi_{C''}(A)\right).$$

Поэтому $x \notin A_{C''}$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. □

Аналогично можно проверить следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть в пространстве Фреше E существует антикомпакт. Тогда для всякого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$*

$$\overline{A} = \bigcap_{C' \in \overline{\mathcal{C}(E)}} \overline{A_{E_{C'}}},$$

где $\overline{A}$ и $\overline{A_{E_{C'}}}$ — замыкания множества A в пространстве E в топологиях, порожденных нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{C'}$ соответственно.

В качестве иллюстрации возможностей применения полученных результатов приведем пример.

Пример 3.1. Докажем, что в пространстве числовых последовательностей ℓ_∞ замкнутый единичный шар есть выпуклая замкнутая оболочка последовательностей, состоящих из ± 1:

$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Очевидно, что $\overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \subset \overline{B_{\ell_\infty}}$. Для того чтобы доказать обратное включение, рассмотрим систему антикомпактов в пространстве ℓ_∞:

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_\infty \middle| \sup \left|\frac{x_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant 1\right\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$. Легко видеть, что любой вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$: $\alpha_i = \pm 1$ — крайняя точка в пространстве E_{C_ε}. И наоборот, всякий вектор из шара B_{ℓ_∞}, одна из координат которого по модулю строго меньше 1, не есть крайняя точка. Поэтому по обычной теореме Крейна—Мильмана, примененной в пространстве E_{C_ε},

$$\overline{B_{C_\varepsilon}} = \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Это значит, что

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \quad \forall \varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \bigcap_{\varepsilon \longrightarrow +\infty} \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}$$

и ввиду предыдущей теоремы 3.2

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Итак,

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \subset \overline{B_{\ell_\infty}},$$

откуда

$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\}\,.$$

Рассматривая пересечения шара $\overline{B_{\ell_\infty}}$ с пространствами сходящихся числовых последовательностей c и c_0, можно показать справедливость следующих представлений:

$$\overline{B_c} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);\ (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots)\}$$

и

$$\overline{B_{c_0}} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0 \ldots, 0, 0, \ldots)\}\,.$$

Предыдущий пример явно показывает, что применение системы антикомпактов и теоремы Крейна—Мильмана в пространствах, порожденных антикомпактами, может позволить выразить выпуклое замкнутое ограниченное не обязательно компактное подмножество E как замкнутую выпуклую оболочку элементов этого же пространства. Оказывается, что эта ситуация в некотором смысле типична. Точнее говоря, от аналогов теоремы Крейна—Мильмана, описывающих выпуклые множества через элементы пространств, порожденных антикомпактами, можно перейти к некоторым результатам, описывающим эти множества через элементы самого пространства. Правда, при этом нельзя не учитывать того, что крайних точек в классическом смысле для таких множеств в пространствах без свойства Крейна—Мильмана может и не быть. Поэтому напрашивается идея ввести обобщение понятия крайней точки множества, позволяющее записать аналог теоремы Крейна—Мильмана для замкнутых ограниченных не обязательно компактных множеств. Мы предлагаем такое понятие. Введем необходимые дополнительные обозначения: для $a \in E$ обозначим через $p(a)$ векторный отрезок, середина которого — a:

$$p(a) = \left\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \quad \lambda \in [0;1] \text{ и } a = \frac{x_1 + x_2}{2}\right\}.$$

Если имеется последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, то введем соответствующую этой последовательности систему множеств $A[x_n]$ (отметим, что отрезок $p(x_k)$, в частности, может быть и одноточечным):

$$A[x_n] = \overline{\bigcup_{k \geqslant n} \{p(x_k) \mid p(x_k) \subset A\}}, \quad p(x_k) \text{ — всевозможные отрезки.}$$

Перейдем теперь к понятию аналога крайней точки множества A.

Определение 3.1. Назовем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *крайней* для множества A, если пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n]$ либо одноточечно, либо пусто.

Возникает естественный вопрос о том, как связаны понятия крайней точки множества и крайней последовательности множества (в чем сходство)? Ясно, что при всяком выборе последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ верно $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] \subset A$. Покажем, что если x_0 — крайняя точка выпуклого компакта A, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, сходящаяся к x_0, для которой верно $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$.

Теорема 3.3. *Если A — выпуклый компакт в пространстве Фреше E, то x_0 — крайняя точка в A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 : \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}.$$

Доказательство. 1. Пусть x_0 — крайняя точка в A и $x_n \in A$: $x_n \to x_0$. Тогда $A[x_n] \supset \overline{\{x_k\}_{k=n}^{\infty}}$ и поэтому $x_0 \in A[x_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Допустим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] \neq \{x_0\}$, т. е. существует $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n]$, $y_0 \neq x_0$. В силу выпуклости A векторный отрезок

$$[x_0, y_0] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda)y_0 \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \subset A.$$

По построению $y_0 \in A[x_n]$ и поэтому существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$: $y_n \in p(x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Поскольку $y_0 \neq x_0$, то и $y_n \neq x_n$ для бесконечного числа значений n. $y_n \in p(x_n)$ означает, что существует $z_n \in p(x_n) \subset A$: $y_n + z_n = 2x_n$, т. е. $z_n = 2x_n - y_n$. Поэтому существует предел

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n = 2\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = 2x_0 - y_0,$$

$z_0 \in A$ ввиду замкнутости A. Это означает, что x_0 — середина векторного отрезка $[y_0, z_0] \subset A$, что противоречит тому, что x_0 — крайняя точка множества A. Итак, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$.

2. Если же x_0 — не крайняя точка A, то существует векторный отрезок $[x_1, x_2] \subset A$: $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Выберем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [x_1,\ x_2] \subset A$:

$$y_{2k} = x_0 + \frac{1}{2k}(x_2 - x_1), \quad y_{2k+1} = x_0 - \frac{1}{2k+1}(x_2 - x_1).$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. При этом для любого $k \in \mathbb{N}$:

$$A[y_{2k}] \supset p(y_{2k}) \cup p(y_{2k+1}) \supset [x_1; x_2] \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A[y_n] = [x_1; x_2],$$

и поэтому множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[y_n]$ не может быть одноточечным. □

Пусть x_0 — крайняя точка выпуклого компакта A. Обозначим через $\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующую x_0 крайнюю последовательность, которая существует в силу предыдущей теоремы. На основании обычной теоремы Крейна—Мильмана мы имеем

Следствие 3.1. *Если A — выпуклый компакт в пространстве Фреше E, то верно следующее представление*:

$$A = \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext(A)} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$$

или (*начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$*)

$$A = \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext(A)} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Оказывается, что предыдущее следствие можно перенести и на случай ограниченных замкнутых не обязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Отметим, что такие множества могут вообще не иметь крайних точек в обычном смысле.

Если в E существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то замыкание $\overline{A}_{E_{C'}}$ всякого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$ будет компактом и поэтому верно равенство

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}} \bigcup_{x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}} \bigcup_{x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Ясно, что $A \subset \overline{A}_{E_{C'}}$, и по теореме 3.2 в силу замкнутости A в E мы можем записать (замыкание берется в E)

$$A \subset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A \subset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Согласно шагу 1 доказательства теоремы 3.2 всякая последовательность $x_n(x_0) \to x_0$ (в $E_{C'}$) будет крайней. Поскольку $x_0 \in \overline{A}_{E_{C'}}$, то все последовательности $x_n(x_0)$ мы можем выбрать так, что $x_n(x_0) \in A$ и поэтому

$$A \supset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n(x_0) \in A\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A \supset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{\{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty} \mid x_n(x_0) \in A\}.$$

Итак, справедлива

Теорема 3.4. *Если A — выпуклое замкнутое ограниченное множество в пространстве Фреше E, имеющем антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то (объединение берется по всем крайним последовательностям из $E_{C'}$ для фиксированного антикомпакта C')*

$$A = \overline{co}\left\{\cup\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \mid x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}}), \quad x_n(x_0) \in A\right\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A = \overline{co}\left\{\cup\{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty} \mid x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}}), \quad x_n(x_0) \in A\right\}.$$

Для всякой крайней последовательности $x_n(x_0) \in A$ выпуклого компакта (в $E_{C'}$) $\overline{A}_{E_{C'}}$ верно равенство $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$, где $x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})$, а x_0 может либо лежать в A, либо нет. Поэтому в пространстве E либо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$, либо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \varnothing$ и всякая крайняя для $E_{C'}$ последовательность $x_n(x_0) \in A$ будет крайней и для A. Поэтому верно

Следствие 3.2. *Если A — выпуклое замкнутое ограниченное множество в пространстве Фреше E, имеющем антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то (объединение берется по всем крайним последовательностям для фиксированного антикомпакта C')*

$$A = \overline{co}\{\cup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \textit{крайняя последовательность } A\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A = \overline{co}\{\cup\{x_n\}_{n=k}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \textit{крайняя последовательность } A\}.$$

Покажем конкретные примеры крайних последовательностей для единичных шаров в пространствах числовых последовательностей ℓ_∞, c и c_0.

Пример 3.2. Для шара $\overline{B_{\ell_\infty}}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами x_n вида

$$(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, 0, 0 \dots, 0, 0, \dots); \quad (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, 1, 1 \dots, 1, 1, \dots);$$

$$(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, -1, -1, \dots, -1, -1, \dots); \quad (\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1, \dots).$$

Напомним, что в пространстве ℓ_∞ существует система антикомпактов [15]:

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_\infty \middle| \sup \left|\frac{x_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant 1\right\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots)$ — произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$. Пусть некоторая крайняя точка $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in \ell_\infty$, $\alpha_k = \pm 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|x_n - x_0\|_{E_{C_\varepsilon}} = \|(0, 0, \dots, \widetilde{\alpha}_{n+1}, \widetilde{\alpha}_{n+2}, \dots)\|_{E_{C_\varepsilon}},$$

причем $|\widetilde{\alpha}_k| \leqslant 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\|x_n - x_0\|_{E_{C_\varepsilon}} = \sup_{k>n} \left|\frac{\widetilde{\alpha}_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon_n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Аналогично можно получить следующие представления для единичных шаров в пространствах сходящихся числовых последовательностей c и c_0.

Пример 3.3. Для шара $\overline{B_c}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами вида

$$x_n = (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots); \quad (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);$$
$$(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots).$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_c} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);\ (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots)\right\}.$$

Пример 3.4. Для шара $\overline{B_{c_0}}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами вида

$$x_n = (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_{c_0}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0 \ldots, 0, 0, \ldots)\right\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 3. — С. 21–77.
2. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие подмножества// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 1. — С. 27–64.
3. *Балашов М. В.* Об аналоге теоремы Крейна—Мильмана для сильно выпуклой оболочки в гильбертовом пространстве// Математические заметки. — 2002. — *71*, № 1. — С. 37–42.
4. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 6. — С. 51–116.
6. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006.
7. *Кутателадзе С. С.* Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг// В сб.: «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения», Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 262–264.
8. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях. I// Изв. АН СССР. — 1940. — *4*. — С. 465–478.
9. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях. II// Изв. АН СССР. — 1946. — *10*. — С. 277–279.
10. *Ляпунов А. Н.* Теорема А. А. Ляпунова о выпуклости значений мер// В сб.: «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения», Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 257–261.
11. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
12. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 165–175.
13. *Стонякин Ф. С.* Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона—Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2010. — *23*(*62*), № 1. — С. 131–149.
14. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры// Динам. сист. — 2013. — *3* (*31*), № 3-4. — С. 281–288.
15. *Стонякин Ф. С.* Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *53*. — С. 155–176.
16. *Стонякин Ф. С.* Секвенциальная версия теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторных мер// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2014. — *27*(*66*), № 1. — С. 100–111.
17. *Стонякин Ф. С., Магера М. В.* Розв'язання задачі про розділ скарбів для довільної кількості розбійників// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2013. — *26*(*65*), № 1. — С. 109–128.

18. *Стонякин Ф. С., Шпилев Р. О.* Аналог теоремы Ляпунова о выпуклости для ε-квазимер и ее приложения к задаче о разделе ресурсов// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2014. — *27*(*66*), № 1. — С. 112–124.
19. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
20. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
21. *Arzi O., Aumann Y., Dombb Y.* Throw one's cake — and eat it too. — arXiv: 1101.4401v2 [cs.GT], 2011.
22. *Chen Y., Lai J., Parkes D. C., Procaccia A. D.* Truth, justice, and cake cutting. — Association for the Advancement of Artificial Intelligence, 2010.
23. *Dai P., Feinberg E. A.* Extension of Lyapunov's convexity theorem to subranges. — arXiv: 1102.2534v1 [math.PR], 2011.
24. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures. — Providence: Am. Math. Soc., 1977.
25. *Husseinov F., Sagarab N.* Concave measures and the fuzzy core of exchange economie with heterogeneous divisible commodities// Fuzzy Sets and Systems. — 2012. — *198*. — С. 70–82.
26. *Maccheroni F., Marinacci M.* How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations// Soc. Choice Welf. — 2003. — *20*, № 3. — С. 457–465.
27. *Mossel E., Tamuz O.* Truthful fair division. — arXiv: 1003.5480v2 [cs.GT], 2010.
28. *Neyman J.* Un théorème d'existence// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1946. — *222*. — С. 843–845.
29. *Robertson J., Webb W.* Cake-cutting algorithms: be fair if you can. — Natick: AK Peters, Ltd., 1998.
30. *Steinhaus H.* Sur la division pragmatique// Econometrica. — 1949. — *17*. — С. 315–319.

Ф. С. Стонякин

E-mail: fedyor@mail.ru