Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 71–107

УДК 517.95+517.98

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

© 2015 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе при некоторых общих предположениях выводится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и (абстрактного) оператора следа, а также аналогичная формула, отвечающая полуторалинейной форме. Установлены условия существования абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. В качестве основного приложения выводятся обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа применительно к краевым задачам в липшицевых областях.

Введение

В данной работе рассматривается несколько проблем, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Во-первых, приводится вывод такой формулы для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Во-вторых, приводится вывод абстрактной формулы Грина для равномерно аккретивных полуторалинейных форм. Наконец, в-третьих, приводится вывод соответствующей абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач.

Частными случаями таких формул Грина являются, как известно, обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа и близкие к ним (скалярный случай), соответствующие обобщенные формулы Грина для векторных полей (теория упругости, гидродинамика), а также обобщенные формулы Грина для равномерно эллиптических уравнений и систем таких уравнений и др.

В работе рассматриваются примеры смешанных краевых задач, получаемых в произвольных ограниченных областях с липшицевой границей. Намечается программа дальнейших исследований, связанная с получением необходимых и достаточных условий разрешимости задач подобного рода.

Рассматриваются абстрактные краевые задачи, обобщающие классические краевые задачи Дирихле, Неймана и др., а также смешанные задачи. Приводятся примеры абстрактных спектральных краевых задач, находящих широкие приложения в конкретных проблемах прикладной математики.

Несколько слов об истории вопроса, связанного с выводом и получением абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Сначала автор этой статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии [14, с. 119] и этот вывод принадлежит С. Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. [20, глава 6], а также [26]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [30] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [20] или [26]. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит автору данной статьи (см. [11, 13, 15]).

Отметим еще, что абстрактные формулы Грина для равномерно аккретивных форм выводятся здесь, по-видимому, впервые (см. теоремы 2.1–2.3). Новыми являются также и варианты абстрактных формул Грина для смешанных краевых задач (см. теоремы 3.4, 3.6).

Автор благодарит М. С. Аграновича за конструктивные обсуждения проблем, представленных в данной работе, а также Т. А. Суслину за ценные замечания и советы.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

1. О выводе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств

В данном параграфе доказывается теорема о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, определенным образом связанных между собой. Далее рассматривается основной пример, приводящий к обобщению классической первой формулы Грина для оператора Лапласа. Приводятся и другие примеры обобщенных формул Грина для некоторых задач математической физики.

1.1. Основная теорема. При выводе абстрактной формулы Грина важную роль играют понятия гильбертовой пары пространств и оснащения гильбертова пространства (см. например, [6, 16], а также [14]).

Пусть F и E — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\,\cdot)_F$ и $(\cdot,\,\cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что F плотно вложено в E и обозначать этот факт символом $F \hookrightarrow E$, если F — плотное линейное подмножество в E и существует константа $a > 0$ такая, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \quad \forall u \in F.$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, а нормы определены формулами

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega |u(x)|^2\, d\Omega, \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, d\Omega. \tag{1.1}$$

По любой паре $(F;\, E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}(u, Av)_E = (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E \; \forall u \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ v \in \mathcal{D}(A) \subset F,\\ \mathcal{R}(A) = E.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Таким образом, как оператор, действующий в E, оператор A является положительно определенным (вообще говоря, неограниченным) самосопряженным оператором, причем $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$.

По оператору $A \gg 0$ можно ввести шкалу гильбертовых пространств E^α, $E^\alpha := \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, таким образом, чтобы

$$E = E^0, \quad F = E^{1/2}, \quad F^* = E^{-1/2},$$

где F^* — совокупность линейных ограниченных функционалов на пространстве F. Тогда имеет место оснащение

$$E^{1/2} = F \hookrightarrow E = E^0 \hookrightarrow F^* = E^{-1/2}$$

пространства E, причем любой линейный функционал на F выражается через «скалярное произведение» в E, т. е.

$$l_v(u) := \langle u, v\rangle_E,\ u \in F,\ v \in F^*,\ \ |\langle u, v\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}.$$

Иными словами, пространства $F = E^{1/2}$ и $F^* = E^{-1/2}$ дуальны по форме пространства E, а билинейная форма $\langle u, v\rangle_E$ является расширением по непрерывности скалярного произведения $(u, v)_E$, $u \in F$, $v \in E$, на случай, когда $v \in F^*$.

В построенной шкале E^α оператор A ограниченно действует из E^α в $E^{\alpha-1}$. В частности, для оператора A гильбертовой пары $(F;\, E)$ далее понадобится формула

$$(u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av\rangle_E \quad \forall u, v \in F, \tag{1.3}$$

являющаяся расширением формулы (1.2) и также служащая определением порождающего оператора гильбертовой пары $(F;\, E)$.

Пусть теперь $\{E,\, (\cdot,\,\cdot)_E\}$, $\{F,\, (\cdot,\,\cdot)_F\}$ и $\{G,\, (\cdot,\,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия:

1°. Плотность вложения:

$$F \hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \quad \forall u \in F. \tag{1.4}$$

2°. На F задан оператор γ, называемый *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$ и

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G, \quad \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \;\; b > 0 \;\; \forall u \in F. \tag{1.5}$$

3°. Ядро оператора γ, т. е. $\ker \gamma =: N$, плотно в E, и выполнено свойство

$$N \hookrightarrow E, \;\; \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F \;\; \forall\, u \in N. \tag{1.6}$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, с введенными на них нормами (1.1) и стандартной нормой в $L_2(\Gamma)$, а также с обычным оператором следа

$$\gamma u := u|_\Gamma \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.7}$$

В самом деле, в этом случае (в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей) по теореме вложения (С. Л. Соболев, В. Е. Кондрашов, Ф. Реллих, см. [22], [23, с. 32], [10, с. 47]) имеем свойство плотности $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и выполнены неравенства

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant a\|u\|_{H^1(\Omega)} \;\; \forall u \in H^1(\Omega),$$

причем оператор вложения компактен. Далее, по теореме Гальярдо о следах (см. [27]) получаем, что оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в пространство $G_+ := H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$, и выполнено неравенство

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant b\|u\|_{H^1(\Omega)} \;\; \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Наконец, в этом примере $N := \ker \gamma = H_0^1(\Omega)$, а это подпространство пространства $H^1(\Omega)$, как известно, плотно в $L_2(\Omega)$, и выполнено неравенство Фридрихса:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} \;\; \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Таким образом, для указанной тройки пространств и оператора следа (1.7) выполнены все условия 1°–3°.

Теорема 1.1. *Пусть для тройки пространств* E, F, G (*с введенными на них скалярными произведениями*) *и для оператора* γ *выполнены условия* (1.4)–(1.6). *Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение* $Lu \in F^*$ *и абстрактная производная по внешней нормали* $\partial u \in (G_+)^*$ *такие, что имеет место абстрактная формула Грина* (*аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа*)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.10}$$

При этом ∂u *по элементам* $u \in F$ *и* $Lu \in F^*$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Оно проводится, с одной стороны, по схеме, изложенной в [20, с. 188-189], а с другой — с изменениями и некоторыми обобщениями, учитывающими, в частности, то обстоятельство, что только по элементу $u \in F$ выражения $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ находятся неоднозначно (см. [28, с. 117]).

1. Переходя к доказательству теоремы, отметим сначала, что в силу (1.5) ядро $N = \ker\gamma$ является подпространством в F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F, т. е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \;\; \dim N = \dim M = \infty. \tag{1.11}$$

Согласно определениям N и M оператор сужения $\gamma_M := \gamma|_M$ оператора γ на подпространство M осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+ (см. (1.5)). Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{1.12}$$

Опираясь на (1.12) и (1.11), можно установить, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min\{\|u\|_F : \gamma u = \varphi\},$$

и так как $G_+ \hookrightarrow G$ и имеет свойство (1.5), то $(G_+; G)$ — гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

С целью получения представления для оператора гильбертовой пары $(G_+; G)$ проведем следующие построения. Обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M по форме пространства G. Так как в силу (1.12) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M := (\gamma_M)^*$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $M^* = M$. При этом по определению T_M имеем

$$(\eta, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M \eta, \psi \rangle_G \quad \forall \eta \in M \quad \forall \psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \tag{1.13}$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M, который, очевидно, существует, поскольку между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия (см. (1.12)), а потому $(T_M)^{-1} = (\gamma_M^*)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*$. Тогда из (1.13) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M \eta, \partial_M w \rangle_G \quad \forall \eta, w \in M, \quad \gamma_M \eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*. \tag{1.14}$$

При $\eta = T_M\varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (1.13) получаем соотношение

$$(T_M\varphi, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M T_M \varphi, \psi \rangle_G \quad \forall \varphi, \psi \in (G_+)^*.$$

Отсюда следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G^{1/2} = G_+$. Кроме того, $C_M|_G$ является ограниченным в G самосопряженным и положительным оператором.

Эти свойства позволяют установить, что $(C_M)^{-1}$ является оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$, и для него согласно свойству (1.3) выполнено тождество

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle \varphi, C_M^{-1}\psi \rangle_G \quad \forall \varphi, \psi \in G_+.$$

2. Продолжим построения, связанные с доказательством теоремы. Рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$, которая существует в силу условия 1°, и введем оператор A этой гильбертовой пары. Тогда согласно (1.3)

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = \langle \eta, Au \rangle_E \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.15}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M соответственно и рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_F, \quad \eta_N = P_N\eta \in N, \quad u \in F.$$

С учетом (1.15) он преобразуется к виду

$$\begin{gathered}(\eta_N, u)_F = \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N\eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ L_N u := P_N^* Au \quad \forall u \in F.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Здесь $L_N : F \to N^*$ — линейный ограниченный оператор, так как $A : F \to F^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F^* \to N^* = AN$ — ограниченный проектор, действующий в F^*.

Из (1.16) приходим к формулам

$$(\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \quad \eta_N = P_N\eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F, \tag{1.17}$$

$$(\eta_N, u_M)_F = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E, \quad u_M = P_M u, \quad u \in F. \tag{1.18}$$

Так как $\overline{N} = E$ (см. (1.6)), то из (1.18) получаем, что

$$L_N u_M = L_N P_M u = 0, \quad u \in F. \tag{1.19}$$

3. Введенный функционал $L_N u$ задан на подпространстве N. Расширим его определенным образом до функционала Lu, действующего на всем $F = N \oplus M$. Именно, далее будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F \to N^*, \quad L_M : F \to M^* := AM. \tag{1.20}$$

При этом потребуем (и это свойство соответствует многочисленным приложениям), чтобы

$$Lu_M = 0 \quad \forall u_M \in M. \tag{1.21}$$

Тогда в силу (1.19) и (1.20) должно выполняться свойство

$$L_M u_M = 0 \quad \forall u_M \in M. \tag{1.22}$$

4. Введем теперь в рассмотрение функционал

$$\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u \rangle_E \quad \forall \eta, u \in F.$$

По построению (см. (1.16)) имеем свойство $\Psi_u(\eta_N) = 0$. Поэтому

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M), \quad \eta_M = P_M\eta \in M,$$

т. е. этот функционал принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+, так как между M и G_+ имеет место изометрический изоморфизм (см. (1.12)).

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно представить в виде либо функционала на M, либо функционала на G_+, либо суммы функционалов на M и G_+ соответственно, причем в этом последнем случае между указанными функционалами будет определенная связь. Именно этот последний вариант, как будет видно из рассмотренного ниже классического примера, и возникает в приложениях. Отметим еще, что в краевых задачах математической физики элемент $f = Lu \in F^*$ может содержать составляющую (обобщенную функцию, распределение), сосредоточенную не только внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, где изучается краевая задача, но и на границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области (см., например, [28, с. 117]).

Реализуя эту идею в абстрактной форме, представим $\Psi_u(\eta)$ в виде

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u\rangle_E = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F. \tag{1.23}$$

Здесь $L_M u \in M^* = AM$, а $\langle \eta, L_M u\rangle_E = \langle \eta_M, L_M u\rangle_E$ — функционал на подпространстве M, выраженный в виде полуторалинейной формы относительно $\eta_M \in M$ и $L_M u \in M^*$. Соответственно $\partial u \in (G_+)^*$, а $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_G$ — функционал на G_+, выраженный в виде формы относительно $\gamma\eta = \gamma_M\eta_M$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Отметим, что в приложениях конкретный вид выражения $L_M u$ определяется, исходя из заданного дифференциального выражения, отражающего физический процесс, и соответствующей формулы Грина, отвечающей исследуемой задаче.

Из (1.23) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$(\eta_M, u_M)_F = \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \quad \eta_M, u_M \in M, \quad \partial_M u_M := (\partial u)|_M, \tag{1.24}$$

служащее определением функционала $\partial_M u_M \in (G_+)^*$, являющегося абстрактным аналогом производной по внешней нормали для элементов из подпространства M. Заметим, что это тождество уже было выведено ранее (см. (1.14)), причем

$$\partial_M = (T_M)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*.$$

При выводе (1.24) было учтено, что (см. (1.16), (1.22))

$$\langle \eta_M, L_N u_M\rangle_E = 0, \quad L_M u_M = 0.$$

При $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (1.23) имеем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G \quad \forall \eta_M \in M \quad \forall u_N \in N, \quad \partial_N u_N := (\partial u)|_N, \tag{1.25}$$

Именно оно и дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, о которой говорилось выше. В частности, если функционал $L_M u_N \in M^*$ задан, то функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$ определен однозначно.

5. Назовем $Lu := L_N u + L_M u$ (см. (1.20)) абстрактным дифференциальным выражением. С учетом (1.19) и (1.22) будем иметь

$$Lu = L_N(u_N + u_M) + L_M(u_N + u_M) = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N \in F^*. \tag{1.26}$$

Введем еще функционал

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \quad \forall u = u_N + u_M \in N \oplus M = F$$

и назовем его *абстрактной производной по внешней нормали* для любого элемента $u \in F$.

Для получения абстрактной формулы Грина используем тождества (1.17), (1.18) и (1.24), (1.25). Из них после сложения левых и правых частей приходим к соотношению

$$\begin{aligned}(\eta, u)_F &= (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G = \\ &= \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M + \partial_N u_N\rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \\ &= \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Проверим теперь, что

$$\langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \langle \eta, Lu\rangle_E, \tag{1.28}$$

где Lu определено формулой (1.20). В самом деле, с учетом (1.26) имеем

$$\begin{aligned}\langle \eta, Lu\rangle_E &= \langle \eta_N+\eta_M, L_N u_N + L_M u_N\rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_N, L_M u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E,\end{aligned} \tag{1.29}$$

так как

$$\begin{aligned}\langle \eta_M, L_N u_N\rangle_E &= \langle P_M\eta, P_N^* A u_N\rangle_E = \langle P_N P_M \eta, A u_N\rangle_E = 0,\\ \langle \eta_N, L_M u_N\rangle_E &= \langle \eta_N, P_M^* L_M u_N\rangle_E = \langle P_M P_N \eta, L_M u_N\rangle_E = 0.\end{aligned}$$

Здесь в последнем тождестве использовано свойство $L_M u_N = P_M^* L_M u_N \in M^*$.

6. Из (1.27) и (1.28) следует формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F, \tag{1.30}$$

причем по построению

$$Lu \in F^*, \;\; \partial u \in (G_+)^*, \;\; Lu = L_N u_N + L_M u_N, \;\; \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N.$$

Отметим еще раз, что если функционал $L_M u_N$ выбран, то функционал $\partial_N u_N$ определен однозначно. □

Замечание 1.1. Из проведенного доказательства теоремы следует, что для тройки пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ, удовлетворяющих условиям (1.4)–(1.6), существует не одна, а целое семейство формул Грина. Это семейство параметризуется, во-первых, выбором функционала $L_M u_N \in M^*$, а во-вторых, — произвольным числовым параметром α, вещественным либо комплексным. В самом деле, при выбранном $L_M u_N$ можно ввести семейство абстрактных дифференциальных выражений $L(\alpha)u$ по формуле

$$L(\alpha)u := L_N u + \alpha L_M u = L_N u_N + \alpha L_M u_N, \tag{1.31}$$

а также отвечающее им семейство производных по нормали

$$\partial(\alpha)u := \partial_M u_M + \alpha\, \partial_N u_N, \tag{1.32}$$

и тогда получим семейство формул Грина вида

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F.$$

При этом формула Грина (1.30) отвечает значению $\alpha = 1$. □

Замечание 1.2. Отметим еще раз, что в приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ определено из физического смысла задачи, и тогда для него однозначно находятся $L_M u_N$ и константа α. □

Следствием теоремы 1.1 является такое утверждение.

Теорема 1.2 (вторая формула Грина). *Если выполнены условия теоремы* 1.1, *то в случае вещественных гильбертовых пространств* E, F *и* G *справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \langle u, L\eta\rangle_E = \langle \gamma u, \partial\eta\rangle_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F;$$

для комплексных пространств E, F *и* G *соответственно имеем*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L\eta\rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial\eta\rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F.$$

□

1.2. Основной пример. Рассмотрим в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ с нормами (1.1). Как уже упоминалось выше, пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, т. е. соответствующий оператор вложения компактен, а $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Воспользуемся первой формулой Грина для оператора $u - \Delta u$ (см., например, [28, с. 114]):

$$(\eta, u - \Delta u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in H^1(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega).$$

Отсюда на основе обычных вариационных соображений и с использованием определения (1.2) порождающего оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega);\ L_2(\Omega))$ устанавливаем, что он является оператором краевой задачи Неймана:

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.33}$$

Точнее говоря, в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ порождающий оператор пары $(H^1(\Omega);\ L_2(\Omega))$ является расширением оператора задачи (1.33) с $H^2(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, при этом

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A) = (H^1(\Omega))^*, \tag{1.34}$$

а его сужение на $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$ с $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$, причем A^{-1} — положительный компактный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$.

Введем, как и выше (см. (1.7)), для элементов из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \tag{1.35}$$

Как уже упоминалось, по теореме Гальярдо (см. [27]) в области Ω с липшицевой границей Γ оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\varphi|^2\, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x}\int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}\, d\Gamma_x\, d\Gamma_y, \tag{1.36}$$

и имеет место оценка (вида (1.8)):

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

При этом $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma)$. Далее, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ), такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим согласно общей схеме пункта 1.1 ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$N = \ker\gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_\Gamma = 0\} =: H^1_0(\Omega).$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H^1_0(\Omega)$ в $F = H^1(\Omega)$.

Если $\eta \in H^1_0(\Omega)$ и $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\, d\Omega = 0 \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega) \quad \forall u \in M.$$

Отсюда, из свойства плотности $H^1_0(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, а также того факта, что в $H^1_0(\Omega)$ плотным множеством является совокупность финитных бесконечно дифференцируемых функций, получаем, что

$$M =: H^1_h(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \tag{1.37}$$

Далее для простоты будем называть $H^1_h(\Omega)$ *подпространством гармонических функций*. Таким образом, имеет место ортогональное разложение (разложение Вейля, см. [7])

$$F = H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega) = N \oplus M. \tag{1.38}$$

Воспользуемся еще следующим фактом (см., например, [28, с. 98], [24, с. 149]): в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.39}$$

т. е. $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — дуальные пространства, и имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{1.40}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$ соответственно (см. (1.38)). Реализуя для данного примера общие построения, которые были проведены при доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\eta_N u + \nabla\eta_N \cdot \nabla u) d\Omega \quad \forall \eta_N = P_N\eta \in H_0^1(\Omega), u \in H^1(\Omega). \tag{1.41}$$

С учетом определения (1.3) оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а также выражения (1.33) для этого оператора функционал (1.41) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} l_u(\eta_N) &:= (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta_N, P_N^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} =: \\ &=: \langle \eta_N, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta_N \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.42}$$

(Это соотношение выводится сначала для $u \in H^2(\Omega)$, а затем предельным переходом и для $u \in H^1(\Omega)$.)

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и имеет место оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega), \tag{1.43}$$

то из (1.42) следует, что

$$L_N u := P_N^*(u - \Delta u) \in N^* = (H_0^1(\Omega))^*,$$

а оператор $L_N \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_0^1(\Omega))^*)$. Здесь P_N^* — проектор в пространстве $(H^1(\Omega))^*$).

Из тождества (1.42) следуют соотношения

$$\begin{aligned} &(\eta_N, u_N)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_{L_2(\Omega)} \quad \forall \eta_N = P_N\eta \quad \forall u_N = P_N u \in H_0^1(\Omega), \\ &(\eta_N, u_M)_{H^1(\Omega)} = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_{L_2(\Omega)} \quad \forall \eta_N \in H_0^1(\Omega) \quad \forall u_M \in H_h^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Из (1.44) и (1.43), в частности, получаем, что

$$L_N u_M = P_N^*(u_M - \Delta u_M) = 0, \tag{1.45}$$

хотя этот факт очевиден также из (1.37).

Следуя далее общей схеме доказательства теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Psi_u(\eta) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \eta, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) d\Omega - \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Так как по построению $\Psi_u(\eta_N) = 0$, то $\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M)$, $\eta_M = P_M\eta \in M = H_h^1(\Omega)$.

Напомним, что между элементами пространства $H_h^1(\Omega)$ и элементами пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ имеется изоморфизм и даже изометрия, если в $H^{1/2}(\Gamma)$ задать норму в виде

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \varphi = \gamma_M u, \quad u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.47}$$

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно выразить как в виде $\langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)}$, где $L_M u \in (H_h^1(\Omega))^* = AH_h^1(\Omega)$, $L_M \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_h^1(\Omega))^*)$ — произвольный оператор, так и в виде $\langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}$, $\partial u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. (1.40)), либо в виде суммы таких функционалов, связанных между собой (см. (1.25)):

$$\begin{aligned} &\Psi_u(\eta) = \langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ &\eta_M = P_M\eta \in H_h^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Учитывая, что $\gamma_M\eta_M = \gamma\eta \ \forall \eta \in H^1(\Omega)$, а также тот факт, что $L_M u = P_M^* L_M u$, правую часть в (1.48) можно переписать в виде

$$\Psi_u(\eta) = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.49}$$

а тогда из (1.46), (1.49) следует тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.50}$$

$$Lu := L_N u + L_M u = P_N^*(u - \Delta u) + L_M u, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{1.51}$$

Потребуем, как и в общей схеме доказательства теоремы 1.1 (см. (1.21)), чтобы выполнялось условие

$$Lu_M = 0. \tag{1.52}$$

Тогда в силу (1.51), (1.45) получаем свойство

$$L_M u_M = 0 \quad \forall u_M = P_M u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.53}$$

Из (1.50) либо (1.48), в частности, при $u = u_M \in H_h^1(\Omega)$, $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$ имеем соотношение

$$(\eta_M, u_M)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_{L_2(\Gamma)} =: \langle \gamma_M\eta_M, \frac{\partial u_M}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \frac{\partial u_M}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.54}$$

которое служит определением производной по внешней нормали элемента $u_M \in H_h^1(\Omega)$. Оно обобщает обычную формулу

$$\int_\Omega (\eta_M u_M + \nabla\eta_M \cdot \nabla u_M)d\Omega = \int_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_M}{\partial n}\, d\Gamma,$$
$$\eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ u_M \in H_h^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Отметим еще, что в (1.54) функционал $\left(\dfrac{\partial u_M}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от того, какой функционал $L_M u$ выбран в (1.48), так как выполнено условие (1.53).

Возьмем теперь в (1.50) $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$, $u = u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда в силу ортогональности $H_h^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а также свойства (1.52) получаем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_{L_2(\Gamma)} \ \ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega) \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega), \tag{1.55}$$
$$\partial_N u_N = (\partial u)|_N \in (G_+)^*, \ \ L_M u_N \in M^*.$$

Здесь по аналогии с формулой

$$\int_\Omega \eta_M(u_N - \Delta u_N)d\Omega + \int_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_N}{\partial n}\, d\Gamma = 0 \ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega) \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{1.56}$$

функционал $\partial_N u_N$ можно назвать *производной по внешней нормали* для элемента $u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N = \left(\frac{\partial u_M}{\partial n} + \frac{\partial u_N}{\partial n}\right)_\Gamma = \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_N + u_M\Big)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

т. е. ∂u есть производная по внешней нормали для произвольного элемента $u \in H^1(\Omega)$.

Тождество (1.55), как и в общих построениях в теореме 1.1, дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, которая по необходимости должна выполняться. В частности, опираясь на (1.56), можно выбрать $L_M u_N$ в виде

$$L_M u_N := P_M^*(u_N - \Delta u_N), \ \ u_N \in H_0^1(\Omega).$$

(Напомним, что согласно (1.33), (1.34) элемент $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, а P_M^* — проектор на подпространство $M^* = AM = (H_h^1(\Omega))^*$.) Тогда формула (1.50) примет вид

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) + P_M^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.57}$$

Теорема 1.3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* γ (*см.* (1.35)) *имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.58}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.59}$$

При этом $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ *определяется по элементам* $u \in H^1(\Omega)$ и $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ *однозначно.*

Доказательство. Оно следует из проведенных построений и из (1.57), если заметить, что $P_N^* + P_M^* = I_{F^*}$ — единичный оператор в $(H^1(\Omega))^*$. □

Из (1.58) следует также «привычная» первая формула Грина для оператора Лапласа Δ:

$$\langle \eta, -\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla\eta\cdot\nabla u\,d\Omega - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.60}$$

Из (1.58) можно получить и вторую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа, см. теорему 1.2.

Замечание 1.3. Отметим еще раз, как и в замечаниях 1.1 и 1.2, что из доказательства теоремы 1.3 можно установить существование не одной формулы Грина (1.58), а целого семейства таких формул, т. е.

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega),\\ L(\alpha)u := P_N^*(u-\Delta u) + \alpha P_M^*(u-\Delta u) \in (H^1(\Omega))^*,\\ \partial(\alpha)u := \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n}\Big)_\Gamma + \alpha\Big(\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma),\end{gathered} \tag{1.61}$$

где α — произвольная константа. Однако в приложениях возникает дифференциальное выражение $u - \Delta u$ (или $-\Delta u$ в (1.60)), которое получается из (1.61) при $\alpha = 1$. □

1.3. Другие примеры обобщенных формул Грина.

1.3. Другие примеры обобщенных формул Грина. Здесь будут рассмотрены некоторые примеры классических формул Грина и (без доказательства) их соответствующие обобщенные варианты.

1.3.1. Равномерно эллиптическое дифференциальное выражение. Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\Gamma := \partial\Omega$ — сначала достаточно гладкая.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u, \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.62}$$

для которого выполнены условия

$$a_{jk}(x) = \overline{a_{kj}(x)} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad j,k = \overline{1,m}, \quad 0 < a_0 \leqslant a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \tag{1.63}$$

а также условие равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^m |\xi_k|^2, \ \ c > 0 \ \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.64}$$

Введем производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}n_j, \quad \vec{n} = \sum_{j=1}^m n_j\vec{e}_j,$$

отвечающую дифференциальному выражению (1.62), и квадратичную форму

$$\|u\|^2_{H^1_{eq}(\Omega)} := \int\limits_\Omega \Big[\sum_{j,k=1}^m a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)|u|^2\Big]\,d\Omega. \tag{1.65}$$

Тогда, как известно, имеет место следующая классическая формула Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения Lu:

$$\int\limits_\Omega \eta Lu\,d\Omega = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \int\limits_\Gamma \eta\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma, \ \ \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Форма (1.65) при условиях (1.63), (1.64) задает в пространстве $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной норме (1.1). Отсюда, а также из теоремы Гальярдо следует, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1_{eq}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ (см. (1.35)) выполнены для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ общие условия (1.4)–(1.6). Отсюда, в свою очередь, следует, что справедлива следующая обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора:

$$\langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1_{eq}(\Omega) = H^1(\Omega), \tag{1.66}$$

$$Lu \in (H^1_{eq}(\Omega))^*, \;\; \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \;\; \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Отметим, что если выполнены условия

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}, \quad a_0(x) \equiv 1,$$

то формула (1.66) переходит в формулу (1.58).

1.3.2. Обобщенная формула Грина для систем линейных эллиптических уравнений. Будем снова считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и $\Gamma := \partial\Omega$ достаточно гладкая.

Рассмотрим систему дифференциальных выражений

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j \Big[a_{jk}(x)\partial_k u(x)\Big] + a_0(x)u(x), \;\; \partial_j := \partial/\partial x_j, \tag{1.67}$$

которая применена к вектор-столбцу

$$u(x) := (u_1(x);\, \ldots;\, u_n(x))^{\tau}, \;\; x \in \Omega,$$

где символом $(\,\cdot;\, \ldots;\, \cdot\,)^{\tau}$ обозначена операция транспонирования. Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a^*_{jk}(x) = a_{jk}(x) \iff a^{rs}_{jk}(x) = \overline{a^{sr}_{kj}(x)}, \;\; r, s = \overline{1, n},$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т. е.

$$a^*_0(x) = a_0(x) \gg 0.$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (1.67):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x)\partial_k u(x), \quad n = (n_1(x);\, \ldots;\, n_m(x))^{\tau},$$

и будем считать, что выполнены следующие условия (см. [2]):

1. Матрица

$$a(x,\xi) := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1,$$

называемая *главным символом* дифференциального выражения (1.67), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т. е. выражение $L_a u$ сильно эллиптично. Как указано в [2, с. 11], из сформулированного условия следует свойство эллиптичности $\det a(x,\xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро—Лопатинского.

2. Имеет место неравенство

$$\sum a^{rs}_{jk}\xi^r_j\overline{\xi^s_k} \geqslant c\sum |\xi^r_j|^2, \;\; x \in \overline{\Omega}, \;\; \xi^r_j \in \mathbb{C}, \;\; c > 0.$$

Тогда (см., например, [2]) имеет место неравенство

$$\|u\|^2_{H^1_a(\Omega)} := \int\limits_{\Omega} E(u,u)\, d\Omega + \int\limits_{\Omega} (a_0(x)u)\cdot \overline{u}\, d\Omega \geqslant$$
$$\geqslant c\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := c\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad E(u,u) := \sum a^{rs}_{jk}\partial_j u^r \overline{\partial_k u^s}. \tag{1.68}$$

Заметим, что для гладких функций $\eta(x) := (\eta_1(x);\ldots;\eta_n(x))^{\tau}$ и $u(x) := (u_1(x);\ldots;u_n(x))^{\tau}$ в области Ω с гладкой границей имеет место следующая формула Грина:

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a} u)_{L_2(\Gamma)}, \;\; \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.69}$$

$$L_2(\Omega) := \{u := (u_1;\, \ldots;\, u_n)^\tau : \ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{r=1}^{n} \|u_r\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty\}, \tag{1.70}$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi := (\varphi_1;\, \ldots;\, \varphi_n)^\tau : \ \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{r=1}^{n} \|\varphi_r\|^2_{L_2(\Gamma)} < \infty\}, \tag{1.71}$$

$$\gamma u := (\gamma u_1;\, \ldots;\, \gamma u_n)^\tau.$$

Из неравенства (1.68) следует, что нормы в пространствах $H^1_a(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ (для вектор-столбца $u := (u_1;\, \ldots;\, u_n)^\tau$, см. правую часть (1.68)) эквивалентны. Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$ (см. (1.70)), $F = H^1_a(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ (см. (1.71)) и оператору γ, приходим к выводу, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\langle \eta, L_a u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a} u\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1_a(\Omega),$$

$$L_a u \in (H^1_a(\Omega))^*, \quad \partial_{\nu_a} u \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma),$$

обобщающая формулу (1.69).

1.3.3. Обобщенная формула Грина линейной теории упругости. В линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, перемещений сплошной упругой среды является выражение

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0,$$

где λ и μ — физические константы. Соответствующая классическая формула Грина для гладких полей $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ в области Ω с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет вид

$$\int\limits_\Omega \vec{\eta} \cdot (L\vec{u})\, d\Omega = \mu\, E(\vec{\eta}, \vec{u}) + \lambda \int\limits_\Omega (\mathrm{div}\vec{\eta})(\mathrm{div}\vec{u})\, d\Omega + \int\limits_\Omega \vec{\eta} \cdot \vec{u}\, d\Omega -$$

$$- \int\limits_\Gamma (\gamma\vec{\eta}) \cdot (P\vec{u})\, d\Gamma, \ \ \vec{\eta} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}), \ \ \vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}),$$

$$E(\vec{\eta}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{u})\, d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{1.72}$$

$$P\vec{u} := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda \mathrm{div}\vec{u}\, \delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \widehat{\ } \vec{e}_k)\vec{e}_j,$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j \vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3} (\gamma u_j)\vec{e}_j =: \vec{\eta}|_\Gamma.$$

Введем пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой (1.70) при $n = 3$, соответствующее пространство $\vec{L}_2(\Gamma)$ (см. (1.71)), а также пространство $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} := \mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda \int\limits_\Omega |\mathrm{div}\vec{u}|^2\, d\Omega + \int\limits_\Omega |\vec{u}|^2\, d\Omega.$$

Опираясь на неравенство Корна (см. [21, с. 18], а также (1.68))

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} \geqslant c_1 \|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0 \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega),$$

можно доказать, что нормы в пространстве $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ и в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$ со стандартной нормой эквивалентны.

Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к пространствам $E = \vec{L}_2(\Omega)$, $F = \vec{H}^1_{eq}(\Omega)$, $G = \vec{L}_2(\Gamma)$ и оператору следа γ (см. (1.72)), получаем, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место следующая обобщенная формула Грина линейной теории упругости:

$$\langle \vec{\eta}, L\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{H}^1_{eq}(\Omega) = \vec{H}^1(\Omega),$$

$$L\vec{u} \in (\vec{H}^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \gamma\vec{\eta} \in \vec{H}^{1/2}(\Gamma), \quad P\vec{u} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = \vec{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Здесь $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся элементами из $H^{1/2}(\Gamma)$.

2. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм

До сих пор рассматривалась ситуация, когда имеется тройка гильбертовых пространств E, F, G и оператор следа γ, связанные условиями (1.4)–(1.6), и для этих объектов имеет место формула Грина (1.10). Однако в приложениях часто возникает ситуация (несимметричный случай), когда вместо скалярного произведения в пространстве F исходной является полуторалинейная форма $\Phi(\eta, u)$, $\eta, u \in F$, связанная с нормой в пространстве F естественными соотношениями (см. ниже (2.1) и (2.6)). Оказывается, и в этом случае можно доказать существование абстрактной формулы Грина, где вместо скалярного произведения $(\eta, u)_F$ стоит соответствующая форма $\Phi(\eta, u)$.

2.1. Полуторалинейные ограниченные формы. Рассмотрим функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F. Ее называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по η и антилинейна по u, т. е.

$$\Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) = c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u),$$
$$\Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) = \bar{c}_1\Phi(\eta, u_1) + \bar{c}_2\Phi(\eta, u_2).$$

Простейшим примером полуторалинейной формы является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F, если

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \ \ \forall \eta, u \in F, \ \ c_1 > 0. \tag{2.1}$$

Будем считать далее, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*.$$

Нетрудно установить, что каждой форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$, с помощью которого форма $\Phi(\eta, u)$ допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au\rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F. \tag{2.2}$$

В самом деле, в силу (2.1) форма $\Phi(\eta, u)$ является ограниченным линейным функционалом в пространстве F, а потому ее можно представить в виде

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, u_*\rangle_E \ \ \forall \eta \in F.$$

При этом элемент $u_* \in F^*$ однозначно находится по элементу $u \in F$.

Вводя оператор $A : F \to F^*$ по закону

$$Au := u_*,$$

приходим к выводу, что имеет место представление (2.2). При этом в силу (2.1) имеем

$$|\langle \eta, Au\rangle_E| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F,$$

откуда следует, что

$$\|Au\|_{F^*} \leqslant c_1\|u\|_F \implies \|A\|_{F\to F^*} \leqslant c_1, \tag{2.3}$$

т. е. оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ ограничен.

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: каждый линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$ однозначно определяет форму $\Phi(\eta, u)$ по закону (2.2), и для этой формы выполнено неравенство (2.1) с константой $c_1 := \|A\|_{F\to F^*}$. Таким образом, между ограниченными формами и их операторами имеет место взаимно однозначное соответствие.

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)}$$

называется *сопряженной* к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u) \ \ \forall \eta, u \in F,$$

то форма $\Phi(\eta,u)$ называется *эрмитовой*, или *симметрической*. Сопряженной форме $\Phi^*(\eta,u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^*:\ F\to\ F^*$:

$$\Phi^*(\eta,u)=\langle\eta,A^*u\rangle_E, \tag{2.4}$$

а эрмитовой (симметрической) форме отвечает *самосопряженный* оператор (действующий из F в F^*):

$$\Phi(\eta,u)=\langle\eta,Au\rangle_E=\overline{\langle u,A\eta\rangle}_E\ \ \forall\eta,u\in F. \tag{2.5}$$

2.2. Равномерно аккретивные формы. Назовем форму $\Phi(\eta,u)$ и отвечающий ей оператор A *равномерно аккретивными* (*сильно коэрцитивными*) в пространстве F, если

$$\operatorname{Re}\Phi(u,u)=\operatorname{Re}\langle u,Au\rangle_E\geqslant c_2\|u\|_F^2,\ \ c_2>0\ \ \forall u\in F. \tag{2.6}$$

(Это соотношение иногда называют также *усиленным неравенством Гординга*.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u,u)|\geqslant c_2\|u\|_F^2, \tag{2.7}$$

поскольку $|\Phi(u,u)|\geqslant\operatorname{Re}\Phi(u,u)$.

Лемма 2.1. *Ограниченная равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta,u)$ может быть представлена через скалярное произведение в F в виде*

$$\Phi(\eta,u)=(Q\eta,u)_F=(\eta,Q^*u)_F\ \ \forall\eta,u\in F, \tag{2.8}$$

где Q — линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор.

Доказательство. Снова заметим, что при фиксированном $u\in F$ величина $\Phi(\eta,u)$ является линейным по η функционалом в F и потому представима в виде

$$\Phi(\eta,u)=(\eta,w)_F,\ \ w\in F, \tag{2.9}$$

при этом

$$\|w\|_F\leqslant c_1\|u\|_F, \tag{2.10}$$

в силу чего элемент w определяется однозначно. Положив $w=Q^*u$, придем к представлению (2.8), причем в этом представлении $Q^*:F\to F$, а потому и Q — ограниченные операторы:

$$\|Q^*\|=\|Q\|\leqslant c_1.$$

Принимая в (2.9) $\eta=u$, из (2.7), (2.10) получаем

$$c_2\|u\|_F^2\leqslant|\Phi(u,u)|=|(u,Q^*u)_F|=|(u,w)_F|\leqslant\|u\|_F\cdot\|w\|_F\leqslant c_1\|u\|_F^2. \tag{2.11}$$

Отсюда при $u\neq0$ имеем

$$c_2\|u\|_F\leqslant\|w\|_F=\|Q^*u\|_F\leqslant c_1\|u\|_F. \tag{2.12}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$c_2\|u\|_F\leqslant\|Qu\|_F\leqslant c_1\|u\|_F. \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что $\ker Q^*=\{0\}$, а потому, в силу разложения

$$F=\mathcal{R}(Q)\oplus\ker Q^*,$$

приходим к выводу, что область значений оператора Q есть все пространство. Тогда из левого неравенства (2.13) следует, что оператор Q имеет ограниченный обратный и

$$\|Q^{-1}\|\leqslant c_2^{-1}.$$

□

Далее понадобится еще одно известное утверждение.

Лемма 2.2 (Лакс, Мильграм, см., например, [28, с. 43]). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A:F\to F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta,u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1}:F^*\to F$.*

Доказательство. Аналогично (2.11) и с учетом (2.2) имеем

$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \operatorname{Re}\Phi(u,u) \leqslant |\Phi(u,u)| = |\langle u, Au\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|Au\|_{F^*},$$

откуда при $u \neq 0$ следует, что

$$\|u\|_F \leqslant c_2^{-1}\|Au\|_{F^*} \quad \forall u \in F.$$

Следовательно, $\ker A = \{0\}$. Аналогично устанавливаем, что $\ker A^* = \{0\}$. Так как $A : F \to F^*$ ограничен (см. (2.3)), а потому замкнут, снова, как и в лемме 2.1, получаем, что $\mathcal{R}(A) = F^*$. Значит, обратный оператор существует, определен на всем F^* и потому (по теореме Банаха) ограничен:

$$\|A^{-1}\|_{F^*\to F} \leqslant c_2^{-1}.$$

□

2.3. О представлении несимметрической равномерно аккретивной формы. Доказанные выше факты позволяют установить для ограниченной несимметрической равномерно аккретивной формы $\Phi(\eta,u)$ структуру отвечающего ей оператора A. Перейдем к изложению этого круга вопросов.

Итак, пусть несимметрическая форма $\Phi(\eta,u)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.6), т. е. является ограниченной и равномерно аккретивной в пространстве F, причем $\Phi(\eta,u) \neq \Phi^*(\eta,u)$.

Введем в рассмотрение симметрические формы

$$\Phi_R(\eta,u) := \frac{1}{2}\Big[\Phi(\eta,u) + \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_R^*(\eta,u),$$

$$\Phi_I(\eta,u) := \frac{1}{2i}\Big[\Phi(\eta,u) - \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_I^*(\eta,u),$$

называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta,u)$, так как

$$\Phi(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u) + i\Phi_I(\eta,u). \tag{2.14}$$

Для $\Phi_R(\eta,u)$ из (2.6), (2.1) имеем неравенства

$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \Phi_R(u,u) =: \|u\|_{F_0}^2 \leqslant c_1\|u\|_F^2 \quad \forall u \in F. \tag{2.15}$$

Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести новую норму, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение. Таким образом, теперь имеем $F = F_0$, а норма в F_0 определена по закону (2.15).

Возникает гильбертова пара пространств $(F_0; E)$. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда в шкале пространств E^α, построенной по этому оператору, будем иметь

$$E = E^0, \quad F_0 = E^{1/2} = \mathcal{D}(A_0), \quad F_0^* = E^{-1/2} = \mathcal{R}(A_0),$$

$$A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(F_0; E), \quad A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(E; F_0^*),$$

$$(\eta,u)_{F_0} = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0 u\rangle_E \quad \forall \eta, u \in F_0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств мнимой части формы $\Phi(\eta,u)$. Из неравенств (2.1) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_I(\eta,u)| &\leqslant |\Phi(\eta,u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \leqslant c_1 c_2^{-1}\|\eta\|_{F_0} \cdot \|u\|_{F_0} = \\ &= c_1 c_2^{-1}\|A_0^{1/2}\eta\|_E \cdot \|A_0^{1/2}u\|_E, \end{aligned} \tag{2.16}$$

т. е. формы $\Phi_I(\eta,u)$ и $\Phi(\eta,u)$ ограничены сверху в пространстве F_0.

Из (2.16) следует, что форму $\Phi_I(\eta,u)$ можно рассматривать как функцию от аргументов $A_0^{1/2}\eta$ и $A_0^{1/2}u$ в пространстве E:

$$\Phi_I(\eta,u) =: \varphi(\eta',u'), \quad \eta' = A_0^{1/2}\eta \in E, \quad u' = A_0^{1/2}u \in E, \tag{2.17}$$

причем эта новая форма ограничена на E. Поэтому к форме $\varphi(\eta',u')$ применима лемма 2.1 в следующей редакции. Во-первых, вместо F здесь следует взять пространство E. Во-вторых, необходимо использовать то утверждение леммы, где учитывается лишь ограниченность, но не равномерная аккретивность формы. В-третьих, следует учесть, что $\Phi_I(\eta,u)$, а потому и $\varphi(\eta',u')$ — симметрические формы.

Тогда по лемме 2.1 будем иметь

$$\varphi(\eta', u') = (Q\eta', u')_E = (\eta', Qu')_E \ \ \forall \eta, u \in E, \tag{2.18}$$

где уже учтено, что оператор $Q \in \mathcal{L}(E)$ является самосопряженным в E. Таким образом, из (2.17), (2.18) имеем представление

$$\Phi_I(\eta, u) =: (QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, QA_0^{1/2}u)_E \ \ \forall \eta, u \in F_0. \tag{2.19}$$

Окончательно с учетом (2.14), (2.15) и (2.19) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, u) &:= (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E + i(QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, (I - iQ)A_0^{1/2}u)_E = \\ &= \langle \eta, A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F_0 = F. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Сравнивая (2.20) с формулой (2.2), приходим к выводу, что оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ имеет вид

$$A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}, \ \ A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{2.21}$$

Так как $Q = Q^*$ в пространстве E, а оператор $A_0^{1/2}$ ограниченно обратим (из F_0^* в E и из E в F_0), то оператор A имеет ограниченный обратный

$$A^{-1} = A_0^{-1/2}(I - iQ)^{-1}A_0^{-1/2}, \ \ A^{-1} \in \mathcal{L}(F_0^*, F_0).$$

Выкладки и выводы, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, можно повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$. Тогда вместо (2.20) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi^*(\eta, u) &= \Phi_R(\eta, u) - i\Phi_I(\eta, u) = ((I - iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= (A_0^{1/2}\eta, (I + iQ)A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E \ \forall \eta, u \in F = F_0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом определения (2.4) получаем, что форме $\Phi^*(\eta, u)$ отвечает сопряженный к (2.21) оператор

$$A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}, \ \ A^* \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{2.22}$$

Заметим также, что при $Q = 0$, т. е. в симметрическом случае, из (2.21), (2.22) следует, что

$$\Phi(\eta, u) = \Phi^*(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, A_0 u\rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F_0,$$

где $A_0 : F_0 \to F_0^*$ — самосопряженный оператор в смысле определения (2.5).

2.4. Абстрактные формулы Грина для полуторалинейных форм. Представления (2.21) для оператора A формы $\Phi(\eta, u)$ и соответствующего оператора A^* из (2.22) для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u)$ позволяют получить обобщение обсуждавшегося в пункте 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E, F и G, а также оператор следа γ. Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением имеется форма $\Phi(\eta, u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (2.1), (2.6). Соответствующую формулу Грина, существование которой далее будет установлено, назовем *абстрактной формулой Грина* для полуторалинейной формы $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть выполнены условия (1.4)–(1.6), а также условия (2.1), (2.6). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (2.15) и соответствующим скалярным произведением

$$(\eta, u)_{F_0} := \Phi_R(\eta, u),$$

пространств E, G и оператора следа γ выполнены условия теоремы 1.1, и потому имеет место абстрактная формула Грина вида

$$\Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, L_0 u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_0 u\rangle_G \ \ \forall \eta, u \in F_0, \tag{2.23}$$

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \ \ N_0 = \ker\gamma, \ \ L_0 u := L_{0,N_0}u + L_{0,M_0}u, \tag{2.24}$$

$$\partial_0 u = \partial_{N_0}u_{N_0} + \partial_{M_0}u_{M_0} \ \ \forall u = u_{N_0} + u_{M_0} \in F_0, \ \ \partial_0 u \in (G_+)^*, \ \ L_0 u \in (F_0)^*. \tag{2.25}$$

Здесь $L_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение, $\partial_0 u$ — абстрактный оператор производной по внешней нормали, который однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Пусть $\eta = \eta_{N_0} + \eta_{M_0}$, $u = u_{N_0} + u_{M_0}$ — произвольные элементы из F_0, представленные через их проекции на взаимно ортогональные подпространства N_0 и M_0. Тогда из (2.23) получаем формулы (являющиеся аналогами формул (1.17), (1.18), а также (1.24), (1.25)) следующего вида:

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{N_0}) = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{N_0} \rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{N_0} = P_{N_0}^* A_0 u_{N_0}, \tag{2.26}$$

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{M_0}) = 0 = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{M_0} \rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{M_0} = 0,$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{M_0}) = \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{M_0} u_{M_0} \rangle_G, \quad L_{0,M_0} u_{M_0} = 0, \tag{2.27}$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{N_0}) = 0 = \langle \eta_{M_0}, L_{0,M_0} u_{N_0} \rangle_E + \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{N_0} u_{N_0} \rangle_G. \tag{2.28}$$

Здесь A_0 — оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$, P_{N_0} — ортопроектор на $N_0 = \ker \gamma$; $L_{0,M_0} u_{N_0}$ — функционал, который, вообще говоря, выбирается произвольно, $L_{0,M_0} : \ N_0 \to M_0^* := A_0 M_0$; при этом соотношение (2.27) служит определением функционала $\partial_{M_0} u_{M_0}$, а (2.28) — функционала $\partial_{N_0} u_{N_0}$ (через $L_{0,M_0} u_{N_0}$).

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta, u)$, которая бы имела вид, близкий к (2.23), и при $Q = 0$ (когда $\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u)$) переходила бы в формулу (2.23). Иными словами, желательно получить формулу с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

По-видимому, тогда искомая формула Грина должна иметь вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G \ \ \forall \eta, u \in F_0,$$

где Lu и ∂u — абстрактные дифференциальное выражение и производная по внешней нормали (конормали), определяемые по исходным данным и при $Q \to 0$ (в $\mathcal{L}(E)$) переходящие в $L_0 u$ и $\partial_0 u$ соответственно (см. (2.24), (2.25)).

Отметим еще одно важное обстоятельство: для несимметричной формы $\Phi(\eta, u)$ теперь следует использовать не ортогональное, а прямое разложение пространства F_0, т. е.

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N (\dot{+}) M, \ \ N = N_0 = \ker \gamma, \ \ M \neq M_0. \tag{2.29}$$

Здесь подпространство M, очевидно, снова обладает тем свойством, что между элементами $u \in M$ и $\gamma u \in G_+$ по-прежнему, как и в симметрическом случае, имеет место взаимно однозначное соответствие, поскольку $\ker \gamma = N$.

Проведем далее построения, близкие к тем, которые уже были использованы при доказательстве теоремы 1.1 применительно к форме $(\eta, u)_F$, однако теперь с учетом представления (2.20), (2.21) для $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть подпространства N и M в прямом разложении F_0 (см. (2.29)) уже выбраны, а P_N и $P_M = I - P_N$ — соответствующие проекторы на эти подпространства. Рассмотрим при любом $u \in F_0$ функционал

$$\begin{aligned} &\Phi(\eta_N, u) = \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N \eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P_N^* Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ &L_N u := P_N^* Au, \quad A = A_0^{1/2} (I - iQ) A_0^{1/2}, \quad \eta_N = P_N \eta \in N, \end{aligned} \tag{2.30}$$

где $A : F_0 \to F_0^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F_0^* \to N^*$ — ограниченный проектор. Из (2.30) приходим к формулам

$$\Phi(\eta_N, u_N) = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \quad \eta_N = P_N \eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F_0, \tag{2.31}$$

$$\Phi(\eta_N, u_M) = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E. \tag{2.32}$$

Введенный функционал $L_N u \in N^*$ задан на подпространстве N. Расширим его на все пространство $F_0 = N (\dot{+}) M$ до функционала Lu и будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F_0 \to N^*, \quad L_M : F \to M^*. \tag{2.33}$$

При этом потребуем (как и при доказательстве теоремы 1.1), чтобы

$$Lu_M = L_N u_M + L_M u_M = 0 \quad \forall u = u_M \in M. \tag{2.34}$$

Введем теперь функционал

$$\Psi_u(\eta) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E \quad \forall \eta, u \in F_0, \tag{2.35}$$

который в силу (2.30) принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+. Как и при доказательстве теоремы 1.1, будем считать, что правая часть в (2.35) равна сумме функционалов на M и G_+:

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u\rangle_E = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F, \tag{2.36}$$
$$L_M u = P_M^* L_M u \in M^* \subset F_0^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad \gamma\eta = \gamma_M \eta_M \in G_+.$$

Из (2.36) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \eta_M, L_M u_M\rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \tag{2.37}$$

где учтено, что $\langle \eta_M, L_N u_M\rangle_E = 0$ в силу определения $L_N u$ из (2.30) и свойства $P_M P_N = 0$. Далее, при $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (2.36) получаем аналогично

$$\Phi(\eta_M, u_N) = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N\rangle_G. \tag{2.38}$$

До сих пор выбор подпространств N и M из прямого разложения (2.29) не был сделан. Будем далее считать, что эти подпространства таковы, что выполнено условие

$$\Phi(\eta_N, u_M) = 0 \quad \forall \eta_N = P_N \eta \in N, \quad \forall u_M = P_M u \in M. \tag{2.39}$$

Тогда из (2.32) получаем, что в силу плотности N в E должно иметь место свойство

$$L_N u_M = 0, \quad u_M = P_M u \in M,$$

которое вместе с (2.34) дает также свойство

$$L_M u_M = 0, \quad u_M \in M. \tag{2.40}$$

Поэтому из (2.33) имеем формулу

$$Lu = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N, \tag{2.41}$$

определяющую закон действия абстрактного дифференциального выражения $Lu \in F_0^*$, учитывающий свойство (2.34).

С учетом (2.40) формула (2.37) приводит к соотношению

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \tag{2.42}$$

служащему определением абстрактной производной по конормали из подпространства M. Заметим, что это определение не зависит от выбора функционала $L_M u$ в (2.36). Далее, формулой (2.38) определяется производная по конормали из подпространства N, т. е. функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$. Очевидно, этот функционал зависит от выбора функционала $L_M u_N \in M^*$.

Итак, если выполнено условие (2.39), то соотношения (2.31), (2.32), (2.42), (2.38) являются обобщением соотношений (2.26)–(2.28) соответственно и при $Q \to 0$ переходят в них, так как $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$, а проекторы P_N и P_M, как будет установлено ниже, переходят в ортопроекторы P_{N_0} и P_{M_0} (см. (2.29)).

Покажем, что условие (2.39) выполнимо, и получим соответствующие формулы для проекторов P_M и P_N.

Для любого $\eta \in F_0$ имеем

$$\eta = P_{N_0}\eta + P_{M_0}\eta = P_N \eta + P_M \eta = \eta_N + \eta_M. \tag{2.43}$$

Здесь $P_N \eta \in N = N_0$ и потому $P_{N_0} P_N \eta = P_N u$. Аналогично устанавливаем, что $P_{M_0} P_M u = P_{M_0} u$ $\forall u \in F_0$, и тогда

$$P_{M_0} P_M = P_{M_0} \quad \Longleftrightarrow \quad P_N = P_{N_0} P_N. \tag{2.44}$$

Воспользуемся теперь формулами (2.20) и представим $\Phi(\eta, u)$ в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, u) &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}(I + iA_0^{-1/2}QA_0^{1/2})\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ_0)\eta, u)_{F_0} = (\eta, (I - iQ_0)u)_{F_0} \ \ \forall \eta, u \in F_0.\end{aligned} \tag{2.45}$$

Легко проверить, что здесь

$$Q_0 := A_0^{-1/2} Q A_0^{1/2} = Q_0^* \in \mathcal{L}(F_0),$$

т. е. Q_0 является ограниченным самосопряженным оператором, действующим в F_0.

В представлении (2.45) условие (2.39) переписывается в виде

$$(P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0 \quad \forall \eta, u \in F_0.$$

Используя второе соотношение (2.44), отсюда имеем

$$(P_{N_0}P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = (P_{N_0}P_N\eta, P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0.$$

Значит, элемент $P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u$ принадлежит подпространству $N_0 = N$ и одновременно ортогонален ему при любом $u \in F_0$. Поэтому

$$P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u = 0 \ \ \forall u \in F_0. \tag{2.46}$$

Представляя $P_M u$ в виде суммы его ортогональных проекций на N_0 и M_0, имеем из (2.46), с учетом первой формулы (2.44) и свойства $P_{N_0}P_{M_0} = 0$,

$$\begin{aligned} &P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}P_M u) = P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}u) = \\ &= (I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})P_{N_0}P_M u - i(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) = 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где I_{N_0} — единичный оператор в N_0.

Поскольку здесь оператор $P_{N_0}Q_0P_{N_0}$ самосопряжен и действует в N_0, то существует ограниченный обратный оператор $(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}$, и из (2.47) получаем, что

$$P_{N_0}P_M u = i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0.$$

Окончательно имеем

$$P_M u = P_{M_0}u + i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0, \tag{2.48}$$

$$P_N u = P_{N_0}u - i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0. \tag{2.49}$$

Формулы (2.48), (2.49) дают связь проекторов P_M и P_N с ортопроекторами P_{N_0} и P_{M_0}. В симметрическом случае, т. е. при $Q = 0 \iff Q_0 = 0$, они переходят в ожидаемые тривиальные соотношения, когда $N = N_0$, $M = M_0$, $P_N = P_{N_0}$, $P_M = P_{M_0}$.

Можно проверить, что для операторов P_M и P_N из (2.48), (2.49) выполнены свойства $P_M^2 = P_M$, $P_N^2 = P_N$, т. е. эти ограниченные операторы действительно являются проекторами.

Таким образом, при выборе абстрактного дифференциального выражения Lu по формулам (2.33), (2.34), (2.41) и проекторов P_M и P_N в виде (2.48), (2.49) справедливы соотношения (2.31), (2.32), (2.42), (2.38), причем $Lu_M = 0$ и выполнено свойство (2.39).

Введем еще, как и в пункте 1.1, абстрактную производную по конормали ∂u по закону

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \in (G_+)^*, \quad u = u_N + u_M \in F_0.$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 2.1 (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм)**.** *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.6) *для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия* (2.1), (2.6) *для формы* $\Phi(\eta, u)$. *Тогда имеет место следующая формула Грина*:

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{2.50}$$

$$Lu = L_N u + L_M u \in F_0^*, \quad Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M \in (G_+)^*. \tag{2.51}$$

При этом ∂u *определяется однозначно по элементам* $u \in F_0$ *и* $Lu \in F_0^*$.

Доказательство. После проведенных выше построений для доказательства теоремы достаточно почти дословно повторить разделы 5 и 6 доказательства теоремы 1.1 с заменой $(\eta, u)_F$ на $\Phi(\eta, u)$. □

Замечание 2.1. Относительно формулы Грина (2.50), (2.51) справедливы утверждения, высказанные в замечаниях 1.1 и 1.2: наряду с (2.50) можно получить семейство формул Грина вида

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u \rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0,$$

где α — произвольная константа, а $L(\alpha)u$ и $\partial(\alpha)u$ по-прежнему выражаются формулами (1.31) и (1.32). Однако в приложениях Lu, как правило, задано обычным дифференциальным выражением, полученным из рассмотрения физического или иного смысла задачи. □

Построения, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, легко аналогично повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$ и отвечающего ей оператора $A^* = A_0^{1/2}(I + iQ)A_0^{1/2}$. Тогда вместо (2.45) будем иметь

$$\Phi^*(\eta, u) = ((I - iQ_0)\eta, u)_{F_0} \quad \forall \eta, u \in F_0,$$

а пространство F_0 допускает прямое разложение

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N_*(\dot{+})M_*, \quad N_* = N_0, \ \ M_* \neq M_0.$$

При этом вместо (2.48), (2.49) для проекторов P_{M_*} и P_{N_*} на подпространства M_* и N_* соответственно приходим к формулам

$$P_{M_*}u = P_{M_0}u - i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \quad \forall u \in F_0,$$

$$P_{N_*}u = P_{N_0}u + i(I_{N_0} + iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \quad \forall u \in F_0.$$

Далее, абстрактное дифференциальное выражение L_*u, отвечающее форме $\Phi^*(\eta, u)$, определяется по закону, аналогичному (2.51):

$$L_*u := L_{*,N}u + L_{*,M}u \in F_0^*, \quad L_*u = L_*u_{N_*}, \quad L_{*,N}u := (P_{N_*})^*A^*u, \quad u \in F_0, \tag{2.52}$$

а абстрактная производная по конормали — по формуле

$$\partial_*u := \partial_{M_*}u_{M_*} + \partial_{N_*}u_{N_*} \in (G_+)^*. \tag{2.53}$$

Здесь производные по конормали в подпространствах M_* и N_*, т. е. функционалы $\partial_{M_*}u_{M_*}$ и $\partial_{N_*}u_{N_*}$, определяются из тождеств, аналогичных (2.42) и (2.38):

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{M_*}) = \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{M_*}u_{M_*}\rangle_G,$$

$$\Phi^*(\eta_{M_*}, u_{N_*}) = \langle \eta_{M_*}, L_{*,M_*}u_{N_*}\rangle_E + \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{N_*}u_{N_*}\rangle_G.$$

Исходя из этих фактов, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2 (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейной сопряженной формы)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда имеет место следующая формула Грина*:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, L_*u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_*u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{2.54}$$

где L_*u и ∂_*u определены формулами (2.52), (2.53). □

Из (2.51), (2.54) и связи $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$ получаем, что

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \overline{\langle u, L_*\eta\rangle}_E + \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta\rangle}_G \quad \forall \eta, u \in F_0.$$

Теорема 2.3 (вторая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина*:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L_*\eta\rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta\rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{2.55}$$

□

3. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач

В этом параграфе при определенных дополнительных условиях выводится абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. Приводятся поясняющие примеры, а также приложения к классической тройке гильбертовых пространств.

3.1. Первые формулировки абстрактной формулы Грина. В математической физике часто изучаются такие проблемы, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют *смешанными*. Для таких задач функционал, связанный с Γ и фигурирующий в формуле Грина, естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Рассмотрим эту проблему в абстрактной форме. Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ выполнены условия (1.4)–(1.6), обеспечивающие по теореме 1.1 существование абстрактной формулы Грина:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \ Lu \in F^*, \ \gamma\eta \in G_+, \ \partial u \in (G_+)^* \ \forall \eta, u \in F. \tag{3.1}$$

Для смешанных краевых задач желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить, при определенных дополнительных условиях, на выражение $\sum\limits_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач, будем считать, что дополнительно к условиям (1.4)–(1.6) выполнены следующие соотношения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \quad \exists (G_+)_k, \, (G_+)^*_k : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)^*_k, \quad k = \overline{1, q}.$$

Рассмотрим для простоты случай $q = 2$. Пусть p_1 — непрерывный проектор, действующий в пространстве G_+, а $p_2 = I_+ - p_1$ — дополнительный проектор. Введем подпространства

$$\widehat{(G_+)}_k := p_k G_+, \quad p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k, \quad k = 1, 2,$$

отвечающие этим проекторам. Введем также операторы

$$\widehat{\gamma}_k := p_k\gamma, \quad \widehat{\partial}_k := p_k^*\partial, \quad p_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)^*.$$

Так как по условию p_k непрерывен, то и p_k^* непрерывен и $(p_k^*)^2 = p_k^*$.

Теорема 3.1 (первая формулировка абстрактной формулы Грина)**.** *В сформулированных выше предположениях имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме*:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.2}$$

Доказательство. Оно достаточно простое. Так как $p_1 + p_2 = I_+$, то

$$\gamma\eta = (p_1 + p_2)\gamma\eta = (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta \quad \forall \eta \in F.$$

Поэтому соответствующее слагаемое из правой части формулы (3.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \partial u\rangle_G = \\ = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k^2\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k\gamma\eta, p_k^*\partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Отсюда и из (3.1) следует формула (3.2). □

Из доказательства соотношения (3.3) видно, что если имеется не два, а q взаимно дополнительных проекторов, т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \quad p_k p_j = p_k \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q},$$

то аналогично выводу (3.3) приходим к формуле

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.4}$$

Поясним разобранную в абстрактной форме ситуацию на простом примере. Пусть липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, гомеоморфной шаровому слою, состоит из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2, причем

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \inf\{|x-y| : x \in \Gamma_1,\ y \in \Gamma_2\} > 0. \tag{3.5}$$

Тогда если $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \tag{3.6}$$

причем, как следует из формулы (1.36),

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geqslant \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\varphi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \tag{3.7}$$

Введем оператор p_1, действующий для любого φ из (3.6) по закону

$$p_1\varphi := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.8}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор обладает свойством $p_1^2 = p_1$. Обозначим совокупность элементов вида (3.8) через $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) := p_1 H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 3.1. *Оператор*

$$p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)$$

является ограниченным проектором, действующим в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Оно основано на оценке нормы $p_1\varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Непосредственное вычисление с использованием формулы (1.36) дает неравенство

$$\|p_1\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant (1 + 2|\Gamma_2| d^{-m-1}) \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.9}$$

где $d = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$. Поэтому

$$\|p_1\| \leqslant (1 + 2|\Gamma_2| d^{-m-1})^{1/2}. \tag{3.10}$$

Свойство $p_1^2 = p_1$ уже отмечалось выше, так что p_1 — ограниченный проектор. □

Оператор $p_2 := I_+ - p_1$, очевидно, также является ограниченным проектором (I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$) и действует по закону

$$p_2\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.11}$$

Эти рассуждения показывают, что при условии (3.5) имеет место прямое разложение:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) (\dot{+}) \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) = p_k H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \tag{3.12}$$

Таким образом, общий подход, примененный в теореме 3.1, является совершенно естественным для смешанных краевых задач.

Тем не менее форма (3.4) абстрактной формулы Грина не совсем естественна, так как в классическом случае, отвечающем разобранному выше простому примеру (3.5), (3.6), выражение

$$\langle \widehat{\gamma}_1 \eta, \widehat{\partial}_1 u\rangle_G = \int_\Gamma \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \eta = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma_2).$$

Но тогда интеграл справа лучше написать в виде

$$\int_{\Gamma_1} (\eta|_{\Gamma_1}) \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_1} d\Gamma_1,$$

а затем расширить его до выражения $\langle \gamma_1 \eta, \partial_1 u\rangle_{L_2(\Gamma_1)}$. Такие построения сейчас и будут проделаны.

Как следует из рассмотрения ряда задач математической физики, введенные выше проекторы p_k можно иногда представить в виде

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1,q}, \tag{3.13}$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — *оператор продолжения нулем* из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k \omega_k = (I_+)_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \quad k = \overline{1,q}, \tag{3.14}$$

т. е. ω_k является правым обратным для ρ_k. Будем далее считать также, что ρ_k и ω_k — ограниченные операторы.

Из (3.13), (3.14) следует, что $p_k^2 = p_k$ и этот оператор p_k ограничен, т. е. он является ограниченным проектором.

Поясним общие свойства (3.13), (3.14) на примере, разобранном выше, см. (3.5)–(3.12). Введем оператор ρ_k по закону (см. (3.6))

$$\rho_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k} = \varphi_k \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2.$$

Введем еще операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_1 \varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \qquad \omega_2 \varphi_2 := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases}$$

Тогда очевидно, что $\omega_k \rho_k = p_k$, $k = 1, 2$ (см. (3.8), (3.11)) и, кроме того, выполнены свойства (3.14).

Заметим еще, что в силу связи $p_1 \varphi = \omega_1 \rho_1 \varphi = \omega_1 \varphi_1$ и оценки (3.9) будем иметь ограниченность оператора $\omega_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ с той же константой (см. (3.9), (3.10)), и аналогично ограниченность оператора $\omega_2 : H^{1/2}(\Gamma_2) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, если $d = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$, то в разобранном примере для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ выполнены свойства (3.13), (3.14) с ограниченными операторами ω_k, а также ограниченными операторами, как выясняется, ρ_k (см. ниже лемму 3.2).

Возвращаясь к общим рассуждениям, сформулируем в виде теоремы основной абстрактный результат.

Теорема 3.2 (вторая формулировка абстрактной формулы Грина)**.** *Пусть выполнены условия* (3.13)*,* (3.14) *и сделанные при этом предположения. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде*:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u \in F, \tag{3.15}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \tag{3.16}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Доказательство. Преобразуем слагаемое из суммы в правой части (3.2) с учетом (3.13), (3.14). Имеем

$$\langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \langle p_k^2 \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G. \tag{3.17}$$

Так как по предположению ω_k — непрерывный оператор, то полученное выражение является линейным ограниченным функционалом относительно элементов вида $\rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k$. Поэтому этот функционал можно представить по форме пространства G_k, $G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k$, $(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*$, $k = \overline{1,q}$, в следующем виде:

$$\langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \rho_k \gamma \eta, \omega_k^* \partial u \rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F. \tag{3.18}$$

Отсюда и следует формула Грина (3.15) с обозначениями (3.16). □

3.2. Классический пример. Вернемся снова к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, оператору γ, $\gamma u := u|_\Gamma$ $\forall u \in H^1(\Omega)$, и будем считать, что Γ — липшицева граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

В этом случае норму в $H^1(\Omega)$ определяют эквивалентным образом по формуле

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \inf\{\|\widehat{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^m)} : \ \widehat{u}|_\Omega = u\}, \tag{3.19}$$

(см. [24, с. 147]), а в пространстве $H^s(\Gamma)$ — аналогично:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} := \inf\{\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})} : \ \widehat{\varphi}|_\Gamma = \varphi\}, \quad |s| \leqslant 1. \tag{3.20}$$

(Точнее говоря, здесь вместо $\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$ следует взять $\sum\limits_j \|\eta_j\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$, где $\sum\limits_j \eta_j \equiv 1$ — конечное разбиение единицы на Γ, см., например, [24, с. 147], [5, с. 78-79]).

Разобьем теперь поверхность Γ на односвязные открытые части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Тогда аналогично (3.19), (3.20) нормы в пространствах $H^s(\Gamma_k)$ определяют по формуле

$$\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} := \inf\{\|\widehat{\psi}\|_{H^s(\Gamma)} : \ \widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \psi_k\}, \quad |s| \leqslant 1. \tag{3.21}$$

Введем в рассмотрение ρ_k, оператор сужения с Γ на Γ_k по закону

$$\rho_k\varphi := \varphi|_{\Gamma_k} \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.22}$$

Лемма 3.2. *Оператор ρ_k ограничен и*

$$\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1.$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из определения нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. (1.36)) и неравенства (3.7). □

Введем теперь подпространства

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\setminus\Gamma_k\} =$$
$$= \ker\gamma_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma), \quad k = \overline{1,q}.$$

Поскольку

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \supset H^1_0(\Omega) = \ker\gamma = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma)\}$$

и $H^1_0(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ при любом $k = \overline{1,q}$.

Введем также одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформулированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [29] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [24], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.3 (см. В. С. Рычков [29], а также М. С. Агранович [24]). *Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Тогда существует линейный оператор $\mathcal{E}_k$ (оператор В. С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\mathcal{E}_k\psi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant \ c_k\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} \ \ \forall\psi_k \in H^s(\Gamma_k), \ \ |s| \leqslant 1. \tag{3.23}$$

Введем еще одно важное понятие классов функций, заданных на Γ_k. Пусть $r(x)$, $x \in \Gamma_k$, — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки x до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, множество в $H^s(\Gamma)$, состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [5, с. 76], $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, продолженных нулем вне Γ_k, по норме $H^s(\Gamma)$.

Лемма 3.4. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{u \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}u \in L_2(\Gamma_k)\}. \tag{3.24}$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (которая наследуется из $H^{1/2}(\Gamma)$) на классе $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}u\|^2_{L_2(\Gamma_k)}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Оно проводится точно так же, как доказательство для [18, теорема 11.7, с. 85], с заменой обозначений $\Omega \mapsto \Gamma_k$, $H^{1/2}_{00}(\Omega) \mapsto \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. □

Далее понадобится еще один важный факт.

Лемма 3.5. *При любом $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant 1$, пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ и $H^{-s}(\Gamma_k)$ дуальны относительно спаривания в $L_2(\Gamma_k)$. В частности,*

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.26}$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству для [5, теорема 5.1.12]. □

Опираясь на введенные понятия, рассмотрим полуторалинейную форму следующего вида:

$$[\varphi, \psi_k]_\Gamma := \langle \varphi, \mathcal{E}_k\psi_k \rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k),$$

где $\mathcal{E}_k\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (см. (1.39)). Из (3.23) следует оценка

$$|\,[\varphi, \psi_k]_\Gamma\,| \leqslant c_k\,\|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Пусть теперь $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, т. е. $\gamma\eta = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_k$. Тогда можно проверить, что

$$\langle \gamma\eta, \mathcal{E}_k\psi_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi, \mathcal{E}_k\psi_k \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \rho_k\varphi, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \rho_k\gamma\eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{3.27}$$

где ρ_k — оператор сужения (3.22), а справа стоит расширение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$ на элементы $\rho_k\varphi = \gamma_k\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, т. е. функционал по форме $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим, что при выбранном $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, правая часть в (3.27) не зависит от способа продолжения элемента $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элемента $\widehat{\psi}_k := \mathcal{E}_k\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а определяется лишь значениями этой (обобщенной) функции ψ_k, сосредоточенной на Γ_k.

Рассмотрим теперь вспомогательную смешанную краевую задачу вида

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ w = 0 \ \ (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \ \ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \ \ (\text{на } \Gamma_k), \tag{3.28}$$

связанную, как будет видно ниже, с одной из форм обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа.

Слабым решением задачи (3.28) назовем такую функцию $w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, для которой при любой $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ выполнено тождество (см. (3.27))

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \ \ \gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta. \tag{3.29}$$

Нетрудно видеть, что классическое решение задачи (3.28) является слабым решением в смысле определения (3.29).

Лемма 3.6. *Задача* (3.28) *имеет слабое решение w тогда и только тогда, когда выполнено условие $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. При этом*

$$w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega) =: H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega).$$

Доказательство. Оно традиционно и основано на соотношении (3.27) с учетом леммы 3.2 и теоремы Гальярдо, второго соотношения (3.26), а также свойства $\gamma_k\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ для элементов η из $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$. □

Из этой леммы следует, что оператор $\widetilde{T}_k$, сопоставляющий элементу $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ решение $w = \widetilde{T}_k\psi_k$ задачи (3.28), ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ на $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$. Полагая в (3.29) $\eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, будем иметь тождество

$$(\eta, \widetilde{T}_k\psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall \eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad \forall \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{3.30}$$

Здесь, по построению, элементы вида $\widetilde{\varphi}_k := \gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, обладают следующими свойствами: во-первых, они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_k)$, а во-вторых, — продолженные нулем с Γ_k на всю Γ, они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что между элементами $\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w$ и w имеется взаимно однозначное соответствие.

Отсюда приходим к следующему представлению:

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \{\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w : w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.31}$$

Лемма 3.7. *Множество $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$.*

Доказательство. Оно проводится от противного с использованием тождества (3.30), см. [12]. □

Введем в рассмотрение оператор Стеклова $\widetilde{C}_k$ (иногда его называют оператором Пуанкаре—Стеклова, см. [1,17,19]), который сопоставляет слабому решению w_k задачи (3.28) его след на Γ_k:

$$\widetilde{C}_k\psi_k := \gamma_k w_k, \quad \widetilde{C}_k := \gamma_k\widetilde{T}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.32}$$

По построению между $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Учитывая этот факт, а также изоморфизм между $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, введем на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}, \ \ \eta, u \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ \gamma_k\eta = \alpha, \ \ \gamma_k u = \beta.$$

С учетом определения (3.31) и тождества (3.30) это соотношение можно переписать в виде

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \alpha, \widetilde{C}_k^{-1}\beta\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall \alpha, \beta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\eta = \widetilde{T}_k\zeta_k, \ \gamma_k\eta = \alpha, \ w = \widetilde{T}_k\psi_k, \ \gamma_k\widetilde{T}_k\psi_k = \widetilde{C}_k\psi_k = \beta, \ \psi_k, \ \zeta_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Лемма 3.8. *Оператор $\widetilde{C}_k^{-1} = (\gamma_k\widetilde{T}_k)^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ является оператором гильбертовой пары $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$.*

Доказательство. Оно основано на неравенствах

$$\begin{gathered} \|\widetilde{\varphi}\|_{L_2(\Gamma_k)} \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\widehat{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1\|w\|_{H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)} = c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \\ \widetilde{\varphi} = \gamma_k w, \ \ w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ \widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \gamma w = \widehat{\varphi}, \end{gathered} \tag{3.33}$$

где $\widehat{\varphi}$ — продолженная нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$ функция $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, лемме 3.7 и неравенстве (1.38). □

Таким образом, задаче (3.28) отвечает оснащение (см. (3.26))

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \hookrightarrow L_2(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что норма в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ «сильнее» стандартной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, что следует из (3.33) (см. (3.25)):

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} \ \ \forall \widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \subset H^{1/2}(\Gamma_k).$$

Опираясь на доказанные факты, введем на элементах из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ оператор ω_k продолжения нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$, действующий по закону

$$\omega_k\widetilde{\varphi}_k := \begin{cases} \widetilde{\varphi}_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k) \end{cases} \qquad \forall \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k).$$

Лемма 3.9. *Оператор ω_k продолжения нулем с Γ_k на Γ, рассматриваемый на области определения $\mathcal{D}(\omega_k) := \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, является непрерывным оператором из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$; при этом*

$$\|\omega_k\widetilde{\varphi}_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}_k\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} \ \ \forall\widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{3.34}$$

где $c_1 > 0$ — константа из неравенства (1.29) (*теорема Гальярдо*).

Доказательство. Этот факт уже установлен при выводе неравенств (3.33) с той же константой c_1. В самом деле, в (3.33) $\widehat{\varphi} = \omega_k\widetilde{\varphi}_k$, откуда и следует (3.34). □

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. Как известно (см. [18, с. 78], а также [9, с. 116-117]), даже в случае гладкой Γ оператор продолжения нулем с некоторой части $\Gamma_k \subset \Gamma$ (с гладкой $\partial\Gamma_k$) на всю Γ не является непрерывным из $H^{1/2}(\Gamma_k)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако в данном случае, т. е. на решениях w вспомогательной задачи (3.28) на элементах $\gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, этот оператор оказывается непрерывным.

Введем теперь следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \ \ k = \overline{1,q}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^q_{k=1} H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ &H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа* (порожденным задачами вида (3.28)) по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (3.35), (3.36), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ имеем

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_q, \ \ u_0 \in H^1_0(\Omega), \ \ u_k \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ k = \overline{1,q},$$

$$\gamma u_0 = 0, \ \ \gamma_k u_k =: \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \ \ \gamma_k u_j = 0 \ (k \neq j), \ \ j,k = \overline{1,q}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь следующую тройку пространств и оператор следа:

$$E = L_2(\Omega), \ \ F = \widehat{H}^1(\Omega), \ G = L_2(\Gamma), \ \Gamma := \partial\Omega, \ \gamma u := u|_\Gamma, \ u \in \widehat{H}^1(\Omega).$$

Нетрудно видеть, что для них выполнены следующие свойства:

1. $\widehat{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и
$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} = c\|u\|_{\widehat{H}^1(\Omega)} \ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega),$$
2. Оператор $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен, $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$ и (по теореме С. Л. Соболева о следах)
$$\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \widehat{c}\,\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega),$$
3. Пространство $H^1_0(\Omega) = \ker\gamma$ плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство Фридрихса (см. (1.9)).
4. Для каждого $k = \overline{1,q}$ оператор $p_k = \omega_k\rho_k$ в силу лемм 3.2 и 3.9 является ограниченным проектором в пространстве $G_+ := \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$, а оператор $\rho_k\omega_k$ по построению является единичным оператором в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) =: (G_+)_k$.

Поэтому по теореме 3.2 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.3. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой* *на части* Γ_k *с липшицевыми границами* $\partial\Gamma_k$, $k=\overline{1,q}$, *справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$\begin{gathered}
\langle \eta, u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{q}\langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall \eta, u\in \widehat{H}^1(\Omega),\\
u-\Delta u\in (\widehat{H}^1(\Omega))^*, \gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ \ k=\overline{1,q}.
\end{gathered} \tag{3.37}$$

□

3.3. Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Вторая формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 3.2, не всегда отражает те классы смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений пункта 3.2, полезно использовать в случаях, когда куски Γ_k границы $\Gamma=\partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы задают краевые условия Дирихле с функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы в приложениях можно было использовать и краевые условия Неймана или Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, снова будем считать, что имеют место оснащения

$$(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad k=\overline{1,q}, \quad G=\bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \tag{3.38}$$

а операторы проектирования $p_k: G_+\to \widehat{(G_+)}_k$ представляются в виде (3.13), (3.14):

$$p_k=\omega_k\rho_k, \quad k=\overline{1,q}, \quad \rho_k\omega_k=(I_+)_k, \quad k=\overline{1,q}, \quad \sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \tag{3.39}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k: G_+\to (G_+)_k$ и $\omega_k:\ (G_+)_k\to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях сопряженный оператор

$$p_k^*=\rho_k^*\omega_k^*, \quad \rho_k^*: (G_+)_k^*\to (G_+)^*, \quad \omega_k^*: \widehat{(G_+)}_k^{\,*}\to (G_+)_k^*, \quad k=\overline{1,q}, \tag{3.40}$$

где ρ_k^* и ω_k^* — ограниченные операторы, причем здесь ω_k^* — оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^{\,*}$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 3.4 (общий вид абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач)**.** *Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактной формулы Грина в форме* (1.10)*, т. е. условия* (1.4)–(1.6). *Пусть также выполнены условия* (3.38) *и условия* (3.39) *либо* (3.40). *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в форме* (3.15), (3.16):

$$\begin{gathered}
\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q}\langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u\in F.\\
\gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta\in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^*\partial u\in (G_+)_k^*,
\end{gathered}$$

где ρ_k *и* ω_k^* — *операторы со свойствами* (3.39), (3.40).

Доказательство. Если выполнены условия (3.39), то доказательство полностью повторяет вывод формул (3.17), (3.18).

Если же выполнены условия (3.40), то имеем

$$\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \gamma\eta, \Big(\sum_{k=1}^q p_k^*\Big)\partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^q \langle \gamma\eta, p_k^*\partial u\rangle_G =$$
$$= \sum_{k=1}^q \langle \gamma\eta, \rho_k^*\omega_k^*\partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^q \langle \rho_k\gamma\eta, \omega_k^*\partial u\rangle_{G_k} =: \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F.$$

□

3.4. Другие приложения к классической тройке гильбертовых пространств. Построения, приведшие к формуле Грина (3.37), были непосредственно связаны с решениями вспомогательной задачи (3.28) с однородным условием Дирихле на части $\Gamma\backslash\Gamma_k$ границы $\Gamma = \partial\Omega$. Напомним, что при этом

$$\gamma_k\eta = \eta|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q}, \quad \eta, u \in \widehat{H}^1(\Omega).$$

Аналогичные построения с однородным граничным условием Неймана на части Γ приводят к иной формуле Грина.

Переходя к изучению этого вопроса, рассмотрим вспомогательную задачу Неймана

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma\backslash\Gamma_k), \tag{3.41}$$

а также соответствующую задачу Зарембы

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad w = \varphi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma_k), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma\backslash\Gamma_k). \tag{3.42}$$

Слабым решением задачи (3.41) назовем функцию $w \in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall \eta \in H^1(\Omega). \tag{3.43}$$

Теорема 3.5. *Задача Неймана* (3.41) *тогда и только тогда имеет слабое решение* $w =: T_k\psi_k \in H_h^1(\Omega)$, *когда выполнено условие*

$$\psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.44}$$

Задача Зарембы (3.42) *имеет слабое решение* $w =: \gamma_k^{-1}\varphi_k \in H_h^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.45}$$

Доказательство. Заметим сначала, что условия (3.44), (3.45) необходимы для разрешимости задач (3.41), (3.42). В самом деле, если $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то по теореме Гальярдо (см. пункт 1.2) $\gamma w := w|_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma)$, а потому, как следует из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma_k)$ (см. (1.36)), $\varphi_k := w|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. выполнено условие (3.45). Далее, для $w \in H_h^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ аналогично получаем (см. (1.59)), что $(\partial w/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому, согласно (3.21), $(\partial w/\partial n)_{\Gamma_k} =: \ \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Более того, в силу постановки задачи (3.41), $(\partial w/\partial n)_{\Gamma_k}$ должно быть продолжено нулем до $(\partial w/\partial n)_\Gamma$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$, т. е. должно выполняться условие (3.44) (см. первую формулу (3.26)).

Докажем теперь, что условия (3.44), (3.45) достаточны для разрешимости (3.41), (3.42) соответственно.

Представим решение задачи Зарембы (3.42) в виде $w = w_1 + w_2$. Предварительно продолжим с помощью оператора В. С. Рычкова $\mathcal{E}_k$ функцию $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$, т. е. введем согласно лемме 3.3

$$\varphi := \mathcal{E}_k\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|\mathcal{E}_k\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}.$$

Далее будем считать, что φ есть след на Γ функции w_1, которая является решением задачи Дирихле:

$$w_1 - \Delta w_1 = 0 \ \ (\text{в } \ \Omega), \quad w_1 = \varphi = \mathcal{E}_k\varphi_k \ \ (\text{на } \ \Gamma).$$

Тогда решение w_1 этой задачи существует, единственно и выражается формулой

$$w_1 = \gamma_M^{-1}\mathcal{E}_k\varphi_k \in H_h^1(\Omega),$$

где оператор γ_M^{-1} ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H_h^1(\Omega)$.

Для функции $w_2 := w - w_1$ возникает краевая задача

$$w_2 - \Delta w_2 = 0 \ \text{(в } \Omega), \quad w_2 = 0 \ \text{(на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = -\frac{\partial w_1}{\partial n} \ \text{(на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \tag{3.46}$$

которая уже исследована выше (см. (3.28)). В самом деле, так как $w_1 \in H^1(\Omega)$, то $(\partial w_1/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому $(\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. По лемме 3.6 получаем, что задача (3.46) имеет единственное слабое решение

$$w_2 \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad w_2 = T_k(-\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k}.$$

Итак, условие (3.45) не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача Зарембы (3.42) имела единственное слабое решение.

Пусть теперь $\psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$. Докажем, что существует единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ задачи Неймана (3.41).

Опираясь на доказанные утверждения, а также на очевидное неравенство

$$\begin{gathered}|\langle\varphi_k,\psi_k\rangle|_{L_2(\Gamma_k)} \leqslant \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}\cdot\|\psi_k\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\psi_k\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)}\cdot\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)},\\ \forall\varphi\in H^{1/2}(\Gamma), \quad \varphi_k = \rho_k\varphi = \varphi|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \|\rho_k\| = 1,\end{gathered} \tag{3.47}$$

докажем, что при $\psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ задача Неймана (3.41) имеет единственное решение $w \in H_h^1(\Omega)$.

В самом деле, ее слабое решение определяется из тождества (3.43). Так как при любом $\eta \in H^1(\Omega)$ правая часть в (3.43) в силу свойств $\gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\rho_k\gamma\eta = \gamma_k\eta =: \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ и неравенства (3.47) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$, то имеет место тождество (3.43). Тогда

$$w =: T_k\psi_k, \quad T_k \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\, H_h^1(\Omega)).$$

□

Опираясь на утверждения теоремы 3.5, введем, как и выше (см. (3.28), (3.32)), оператор Стеклова, который сопоставляет решению w задачи Неймана (3.41) его след на Γ_k:

$$\varphi_k = \gamma_k T_k\psi_k =: C_k\psi_k, \quad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k).$$

Пусть η и w — два решения задачи Неймана (3.41), отвечающие соответственно элементам ζ_k и ψ_k из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем $\eta|_{\Gamma_k} = \xi_k$, $w|_{\Gamma_k} = \varphi_k$. Тогда, исходя из определения (3.43) слабого решения задачи Неймана, легко видеть, что

$$\langle\xi_k,\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle\xi_k, C_k^{-1}\varphi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \tag{3.48}$$

откуда следует, что C_k^{-1} — оператор гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$,

$$\mathcal{D}(C_k^{-1}) = \mathcal{R}(C_k) = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(C_k^{-1}) = \mathcal{D}(C_k) = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.49}$$

Будем далее говорить, что если выполнены условия (3.48), (3.49), то пространства $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задаче Неймана (3.41) либо задаче Зарембы (3.42).

Аналогичное утверждение о дуальности справедливо и для задачи (3.28)-(3.29), т. е.

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma\setminus\Gamma_k), \tag{3.50}$$

и соответствующей задачи Дирихле:

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ w = \widetilde{\varphi}_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma\setminus\Gamma_k). \tag{3.51}$$

Здесь, как показали проведенные выше рассмотрения, возникает оператор Стеклова $\widetilde{C}_k := \gamma_k\widetilde{T}_k$, гильбертова пара пространств $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$, а также соотношения

$$\begin{gathered}\langle\widetilde{\xi}_k,\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle\zeta_k, \widetilde{C}_k^{-1}\widetilde{\varphi}_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)},\\ \mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k),\end{gathered}$$

а η и w — соответствующие решения задач (3.50) либо (3.51). Таким образом, пространства $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задачам (3.50), (3.51).

Отметим, наконец, и такой очевидный факт: пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ дуальны по задаче Неймана

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \ \ (\text{на } \Gamma) \tag{3.52}$$

и соответствующей задаче Дирихле

$$w - \Delta w = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \ \ w = \varphi \ \ (\text{на } \Gamma), \tag{3.53}$$

причем связь между ψ и φ дается классическим оператором Стеклова:

$$\varphi = C\psi,\ \xi = C\zeta,\ \mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C) = H^{1/2}(\Gamma),\ \mathcal{R}(C^{-1}) = \mathcal{D}(C) = H^{-1/2}(\Gamma),$$
$$\langle \xi, \psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \zeta, C^{-1}\varphi\rangle_{L_2(\Gamma)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, w \in H^1_h(\Omega). \tag{3.54}$$

Опираясь на установленные факты, приведем примеры операторов проектирования в пространствах $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, а также их представления в виде (3.39) и (3.40), использованные при доказательстве общей теоремы 3.4. Эти примеры основаны на результатах рассмотрения вспомогательных краевых задач, изученных выше.

Как и ранее, будем считать, что липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ разбита на части Γ_k с липшицевыми $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Введем ограниченные операторы $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ (лемма 3.2) сужения функции из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H^{1/2}(\Gamma_k)$, $\|\rho_k\| \leqslant 1$, а также его сопряженный

$$\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma),$$

который является ограниченным оператором *продолжения нулем*:

$$\rho_k^*\psi_k =: \widehat{\psi}_k := \begin{cases} \psi_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \end{cases} \qquad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.55}$$

Введем еще ограниченный оператор продолжения

$$\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma),$$

например, оператор В. С. Рычкова (см. лемму 3.3) $\omega_k = \mathcal{E}_k$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$$

— ограниченный оператор сужения.

Введем, наконец, пространство

$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{q} \breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.56}$$
$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\widehat{\psi}_k = \rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\}, \quad k = \overline{1,q}, \tag{3.57}$$

и потому в пространстве $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2, \quad p_k^*p_j^* = 0 \ \ (k \neq j), \quad \sum_{k=1}^{q} p_k^* = (\breve{I}_-), \tag{3.58}$$

где $\breve{I}_-$ — единичный оператор в $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, для пространства $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (3.38)–(3.40), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad G_k = L_2(\Gamma_k), \quad (G_+)_k^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q}.$$

Приведем теперь более сложный пример оператора проектирования, относящийся к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть

$$\varphi \in \breve{H}^{1/2}(\Gamma) := C\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.59}$$

где $C : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор Стеклова, возникающий в задаче (3.52) (см. также (3.53)–(3.54)). Тогда $\psi = C^{-1}\varphi \in \breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и потому $\psi_k := \widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \omega_k^*\psi$ и $\widehat{\psi}_k := \rho_k^*\psi_k$ (см. (3.55)).

Решая теперь задачу Неймана (3.52) с $\psi = \widehat{\psi}_k$, а затем находя след слабого решения w этой задачи на Γ, получаем

$$w|_\Gamma = C\widehat{\psi}_k = C\rho_k^*\omega_k^*C^{-1}\varphi =: p_k\varphi \in \breve{H}^{1/2}(\Gamma), \quad k = \overline{1,q}. \tag{3.60}$$

Таким образом, оператор p_k действует в пространстве $\breve{H}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Можно формально считать, что

$$\begin{gathered} p_k = \widetilde{\omega}_k\widetilde{\rho}_k, \quad \widetilde{\rho}_k := \omega_k^*C^{-1}, \quad \widetilde{\omega}_k := C\rho_k^*, \\ \widetilde{\rho}_k : \breve{H}^{1/2}(\Gamma) \to \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \widetilde{\omega}_k : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to \breve{H}^{1/2}(\Gamma), \end{gathered} \tag{3.61}$$

$\widetilde{\rho}_k\widetilde{\omega}_k = \widetilde{\omega}_k^*\widetilde{\rho}_k^*$ — единичный оператор в $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ (см. (3.57)). Наконец, выполнены свойства

$$(p_k)^2 = C\rho_k^*(\omega_k^*\rho_k^*)\omega_k^*C^{-1} = C\rho_k^*\omega_k^*C^{-1} = p_k, \quad k = \overline{1,q},$$

а также условие

$$\sum_{k=1}^q p_k = C\Big(\sum_{k=1}^q \rho_k^*\omega_k^*\Big)C^{-1} = \breve{I}_+,$$

где $\breve{I}_+$ — единичный оператор в пространстве $\breve{H}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. (Здесь при выводе использовано последнее свойство (3.58).)

Итак, для оператора p_k из (3.60), (3.61), справедливы общие требования (3.38)–(3.40).

Введем теперь по аналогии с (3.35), (3.36) классы функций, связанных с вспомогательными задачами (3.41), (3.42) Неймана и Зарембы. Именно, введем пространства (3.56), (3.59), т. е.

$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^q\breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \breve{H}^{1/2}(\Gamma) := C\breve{H}^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.62}$$

а также пространство

$$\begin{gathered} \breve{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^q\breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ \breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega), \end{gathered} \tag{3.63}$$

где $H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega)$ — подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, для которых выполнено однородное условие Неймана на $\Gamma\backslash\Gamma_k$ (см. (3.41)).

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа* (порожденным задачами (3.41), (3.2)), если для любого $k \in \overline{1,q}$ элемент

$$\partial_k u = \omega_k^*\partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (3.62)–(3.63) элементы из $\breve{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \breve{H}^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &u = u_0 + \sum_{k=1}^q u_q, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_k \in \breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad k = \overline{1,q}, \\ &\gamma u_0 = 0, \quad \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} =: \widetilde{\psi}_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \\ &\partial_k u_j = 0, \quad (k \neq j), \quad j,k = \overline{1,q}. \end{aligned}$$

В качестве следствия из разобранных примеров операторов проектирования, а также из теоремы 3.4 приходим к такому выводу.

Теорема 3.6. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $\breve{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, *и оператора следа* $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,q}$, *справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \eta, u \in \breve{H}^1(\Omega), \tag{3.64}$$

$$\gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), k = \overline{1,q},$$
$$u - \Delta u \in (\breve{H}^1(\Omega))^*.$$

□

Формула Грина (3.64), таким образом, приспособлена не только к исследованию с ее помощью слабых решений краевых задач в области Ω с условиями Дирихле на части Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ (см. теорему 3.3), но также и с краевыми условиями Неймана либо Ньютона.

Рассмотрим теперь такой простейший вариант. Будем считать, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω состоит из нескольких односвязных частей, находящихся на положительном расстоянии друг от друга, т. е.

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k, \quad \operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0, \quad j,k = \overline{1,q}. \tag{3.65}$$

(Например, при $q = 2$ в качестве Ω можно взять область в виде шарового слоя в $\mathbb{R}^3$, расположенного между радиусами r_1 и $r_2 < r_1$. Тогда Γ_1 — сфера радиуса r_1, Γ_2 — сфера радиуса r_2 и $d = r_1 - r_2 > 0$. Данный вариант уже обсуждался в пункте 3.1, см. формулы (3.5)–(3.8) и лемму 3.1.)

В этом случае, как и для (односвязной) границы $\Gamma = \partial\Omega$, имеют место свойства

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q},$$

аналогичные свойству (1.43). При этом

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) = \breve{H}^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{q} H^{1/2}(\Gamma_k)$$

(см. определения (3.35), (3.56), (3.59)) и потому в силу предыдущего

$$\widehat{H}^1(\Omega) = \breve{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Отсюда, а также из теорем 3.5, 3.6 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.7. *Пусть для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с неодносвязной липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ выполнены условия* (3.65). *Тогда справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega),$$
$$\gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q},$$
$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*.$$

□

Рассмотрения этого параграфа (см. теоремы 3.5–3.7) показывают, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач в классических задачах следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

4. Заключительные замечания

Наметим теперь, какие проблемы естественным образом исследуются на основе доказанных теорем о существовании абстрактных формул Грина (2.50), (2.54), (2.55). Все эти проблемы рассматриваются на базе соответствующих формул Грина с уже выбранным дифференциальным выражением Lu (см., например, [18, с. 237]).

Отметим, что глубокие результаты исследования смешанных краевых задач в липшицевых областях для сильно эллиптических систем второго порядка, а также соответствующих спектральных задач получены в последнее время в работах М. С. Аграновича, см. [3–5].

4.1. Абстрактные краевые задачи. К числу таких задач относятся следующие проблемы:

4.1.1. Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона.

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G).$$

Для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f \in F_0^*, \quad \psi \in (G_+)^*, \tag{4.1}$$

а слабое решение выражается формулой

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{4.2}$$

где $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$ — оператор формы $\Phi(\eta, u)$, а $T_M : (G_+)^* \to M \subset F_0$ — оператор вспомогательной задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G).$$

4.1.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = \varphi \quad (\text{в } G).$$

Здесь при выполнении необходимых и достаточных условий

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+,$$

задача имеет слабое решение

$$u = A_{00}^{-1} f + \gamma_M^{-1} \varphi,$$

где $A_{00} = P_N^* A P_N : N \to N^*$ — оператор, отвечающий сужению формы $\Phi(\eta, u)$ на подпространство N (для η и u), а γ_M — сужение оператора следа γ на M.

4.1.3. Третья краевая задача (задача Ньютона—Неймана).

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \psi \quad (\text{в } G), \tag{4.3}$$

где $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ — неотрицательный оператор, т. е.

$$\langle \varphi, \alpha\varphi \rangle_G \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in G_+.$$

Эта задача исследуется так же, как и задача 4.1.1, однако взамен нормы $\|u\|_{F_0}^2 = \Phi_R(u, u)$ здесь используется эквивалентная норма

$$\|u\|_{eq,F_0}^2 := \|u\|_{F_0}^2 + \langle \gamma u, \alpha\gamma u \rangle_G.$$

Если выполнены условия (4.1), то задача (4.3) имеет единственное слабое решение $u \in F_0$, выражаемое формулой вида (4.2) (с измененными A и T_M).

4.2. Абстрактные смешанные краевые задачи. Теорема 3.4, доказывающая существование абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач в случае симметрической формы — скалярного произведения в пространстве F — справедлива и в случае несимметрической формы $\Phi(\eta, u)$, если выполнены предположения (3.38)–(3.40). Такая формула Грина теперь имеет вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{4.4}$$

На ее основе изучаются абстрактные смешанные краевые задачи, когда на разных частях «границы», т. е. в граничном пространстве G, задаются различные краевые условия типа Дирихле, Неймана либо Ньютона—Неймана. В симметрическом случае и для классической тройки гильбертовых пространств подобный подход описан в пункте 3.4.

Здесь отметим еще раз, что в смешанных краевых задачах выбор пространства, в котором ищется слабое решение, в значительной мере определяется характером краевых условий, заданных на различных частях (подпространствах) границы (граничного пространства).

4.3. Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина. На основе абстрактной формулы Грина (2.50), а также формулы (4.4) для смешанных краевых задач исследуются спектральные проблемы, возникающие в приложениях. Перечислим кратко некоторые из них. Отметим, что рассмотрение этих проблем приводит к изучению некоторых нестандартных спектральных задач, в частности, несамосопряженных (см. [8, 15]).

4.3.1. Задача Дирихле, Неймана, Ньютона. Это задачи соответственно вида

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{в } G);$$
$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u = 0 \quad (\text{в } G);$$
$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = 0 \quad (\text{в } G).$$

4.3.2. Задача Стеклова.

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial w + \alpha\gamma w = \lambda\gamma w \quad (\text{в } G).$$

4.3.3. Задача Стефана.

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.3.4. Задача М. С. Аграновича.

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \mu\gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.5}$$

Здесь один из параметров (λ или μ) является спектральным, а другой — фиксированным.

4.3.5. Задача С. Крейна.

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \lambda(\partial u + \alpha\gamma u) = \gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.3.6. Задача Чуешова.

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.4. Спектральные задачи сопряжения. Подробное изучение этого класса задач для конкретных приложений проведено М. С. Аграновичем с его учениками и коллегами (см. например, [25]). В абстрактной форме такие проблемы обсуждаются в [8].

Приведем краткое словесное описание постановки спектральных задач сопряжения. Пусть имеется набор пространств E_j, F_j и G_j и операторов следа γ_j, $j = \overline{1, q}$, таких, что для каждого набора справедлива абстрактная формула Грина в форме (1.10), т. е.

$$\langle \eta_j, L_j u_j \rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \partial_j u_j \rangle_{G_j} \quad \forall \eta_j, u_j \in F_j, \quad j = \overline{1, q}.$$

Будем считать также, что каждое граничное пространство G_j является ортогональной суммой пространств $G_j = \oplus_{kl} G_{jkl}$, причем каждое G_{jkl} имеет оснащение:

$$(G_+)_{jkl} \hookrightarrow G_{jkl} \hookrightarrow (G_+)^*_{jkl}.$$

При этом оснащения совпадают при перемене мест индексов k и j.

В этих обозначениях спектральная задача сопряжения формулируется следующим образом. Необходимо найти набор $u = (u_1, \ldots, u_q)$ элементов $u_j \in F_j$ из уравнений

$$L_j u_j + \lambda u_j = 0 \quad (\text{в } E_j), \quad j = \overline{1, q},$$

а также «краевых» условий сопряжения, которые разбиваются на следующие категории.

При $k > j$:

1. Это условия первой задачи сопряжения с параметром μ, когда приравниваются следы на G_{jkl}, а сумма производных по нормали равна спектральному параметру μ, умноженному на след элемента u_j либо u_k.
2. Аналогичное условие без параметра μ (т. е. $\mu = 0$).
3. Условия второй задачи сопряжения (когда приравнивается нулю сумма производных по нормали) с параметром μ.
4. Условия второй задачи сопряжения без параметра μ.

При $k = j$ имеются три типа условий:

1. Условие Ньютона—Неймана с параметром μ.
2. Условие Ньютона—Неймана без параметра ($\mu = 0$).
3. Однородное условие Дирихле.

Оказывается, для таких задач можно доказать существование формулы Грина в форме (1.5) применительно к некоторому подпространству F_0 пространства $F = \oplus_{k=1}^{q} F_j$, учитывающему «главные» краевые условия. На этой основе проблему можно снова свести к задаче вида (4.5) и исследовать ее уже разработанными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агошков В. И., Лебедев В. И.* Операторы Пуанкаре—Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах// Вычисл. проц. и сист. — 1985. — *2.* — С. 173–226.
2. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
3. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка// Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 2. — С. 1-–22.
4. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липшицевых областях// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 11—35.
5. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
7. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала// В сб.: «Избранные труды. Математика и теоретическая физика». — М.: Наука, 1984. — С. 275–307.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34.* — С. 5–44. Англ. перевод: *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D., Starkov P. A.* Multicomponent conjugation (transmission) problems and auxillary abstract boundary-value problems// J. Math. Sci. — 2010. — *170*, № 2. — С. 131–172.
9. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Наука, 1994.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Таврический вестн. информ. и мат. — 2004. — *2.* — С. 52–80.
12. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач// Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2007. — *20*, № 2. — С. 3–12.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
14. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
17. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре—Стеклова и их приложения в анализе. — М.: Отд. вычисл. матем. АН СССР, 1983.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
19. *Пальцев Б. В.* О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 4. — С. 59–116.
20. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
21. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.
22. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
23. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.

24. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
25. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. — Berlin ... Toronto: Wiley-VCH, 1999.
26. *Aubin J.-P.* Abstract boundary-value operators and their adjoint// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1970. — *43*. — С. 1–33.
27. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in «n» variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — С. 284–305.
28. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge University Press, 2000.
29. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. Lond. Math. Soc. — 1999. — *60*, № 1. — С. 237–257.
30. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 1994. — *1*.

Н. Д. Копачевский
E-mail: kopachevsky@list.ru

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4