Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 65–70

ЗАДАЧА УСПОКОЕНИЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ СМЕШАННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2015 г. **Е. П. ИВАНОВА**

1. Введение

В статье исследуется задача полного успокоения в системе, описываемой уравнениями, являющимися дифференциальными по одной переменной и разностными по другой. Начальные и краевые задачи для таких уравнений, названых смешанными, изучались А. Д. Мышкисом [5], Г. А. Каменским [6]. Задача полного успокоения управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием, исследована в работах Н. Н. Красовского [4], А. Л. Скубачевского [7] (линейная задача), Г. А. Каменского [6] (нелинейная задача). В данной статье доказан критерий управляемости системы, описываемой смешанным дифференциально-разностным уравнением, при управлении с помощью краевых функций. Ранее эта задача изучалась в работе [1], результаты сформулированы в тезисах конференции [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$x_t(t,s) = (Rx)(t,s), \quad (t,s) \in Q_T, \tag{2.1}$$

с управлением

$$x(t,s) = u(t,s), \quad (t,s) \in G_T \tag{2.2}$$

и начальными условиями

$$x(0,s) = x_0(s), \quad s \in (0,a). \tag{2.3}$$

Здесь $Q_T = (0,T)\times(0,a)$, $a = N+\theta$, N — натуральное число, $0 < \theta \leqslant 1$, $G_T = (0,T)\times((-N,0)\cup(a,\ a+N))$, $R : L_2(G_T \cup Q_T) \to L_2(Q_T)$ — разностный оператор, действующий по формуле

$$(Rx)(t,s) = \sum_{i=-N}^{N} a_i x(t, s+i),$$

a_i — вещественные постоянные, $x_0 \in L_2(0,a)$, $u \in L_2(G_T)$ — функция управления. Задачу (2.1)–(2.3) назовем *задачей управления* с помощью краевых функций u.

Решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $x \in H = \{y(t,s) \in L_2(Q_T \cup G_T) | y(t,s) \in H^{1,0}(Q_T), (t,s) \in (Q_T)\}$, если условия (2.1)–(2.3) выполнены почти всюду. Здесь $H^{1,0}(Q_T)$ — анизотропное пространство Соболева функций из $L_2(Q_T)$, у которых существует и принадлежит $L_2(Q_T)$ обобщенная производная по t.

Определение 2.1. Состояние $x_0 \in L_2(0,a)$ назовем *управляемым*, если существуют $T \in \mathbb{R}^1$, $u \in L_2(G_T)$ такие, что для функции $x \in H$, являющейся решением задачи (2.1)–(2.3) в области Q_T, $x(T,s) = 0$, $s \in (0,a)$.

Определение 2.2. Система, заданная уравнениями задачи (2.1)–(2.3), называется *полностью управляемой*, если каждое состояние $x_0 \in L_2(0,a)$ управляемо, т. е. $X = L_2(0,a)$.

Получим условия на коэффициенты разностного оператора R, гарантирующие управляемость системы (2.1)–(2.3).

3. Условия управляемости

Лемма 3.1. *Множество управляемых состояний X является подпространством $L_2(0,a)$.*

Доказательство. Из линейности системы следует, что если $x_0 \in X$ и ему соответствуют время T и управление u, то $\forall\alpha \in \mathbb{R}^1$ $\alpha x_0 \in X$ с тем же временем T и управлением αu. Пусть $x_1 \in X$ с параметрами управления (T_1, u_1) и $x_2 \in X$ с параметрами (T_2, u_2) (для определенности $T_1 \geqslant T_2$). Тогда $x_3 = x_1 + x_2 \in X$ с временем $T_3 = \max\{T_1, T_2\} = T_1$ и управлением $u_3(t,s) = u_1(t,s) + u_2(t,s)$, $t \in (0, T_2)$, $u_3(t,s) = u_1(t,s)$, $t \in [T_2, T_1)$. □

Сведем задачу (2.1)–(2.3) к эквивалентной задаче. Используем формализм, описанный в [7]. Введем операторы $I_{Q,T}, I_{G,T}, R_{Q,T}, R_{G,T}$ такие, что

$$I_{Q,T} : L_2(Q_T) \to L_2(Q_T \cup G_T); \quad (I_{Q,T}x)(t,s) = x(t,s), \quad (t,s) \in Q_T; (I_{Q,T}x)(t,s) = 0,\ (t,s) \in G_T;$$

$$I_{G,T} : L_2(G_T) \to L_2(Q_T \cup G_T);\ (I_{Q,T}x)(t,s) = x(t,s),\ (t,s) \in G_T; (I_{Q,T}x)(t,s) = 0,\ (t,s) \in Q_T;$$

$$R_{Q,T} : L_2(Q_T) \to L_2(Q_T);\ R_{Q,T} = RI_{Q,T};\ R_{G,T} : L_2(G_T) \to L_2(Q_T);\ R_{G,T} = RI_{G,T}.$$

Тогда уравнения (2.1)–(2.2) эквивалентны уравнению

$$x_t = R_{Q,T}x + R_{G,T}u, \tag{3.1}$$

$x \in H^{1,0}(Q_T)$, $u \in L_2(G_T)$.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_i Q_{\alpha i}^T\right)$ $\left(L_2\left(\bigcup\limits_k G_{\alpha k}^T\right)\right)$ подпространства функций в $L_2(Q_T)$ $(L_2(G_T))$, равных нулю вне $\bigcup\limits_i Q_{\alpha i}^T$ $\left(\bigcup\limits_k G_{\alpha k}^T\right)$. Здесь, если $\theta = 1$, то $\alpha = 1$; если $\theta < 1$, то $\alpha = 1, 2$;

$$Q_{1i}^T = (0,T) \times (i-1, i-1+\theta), \quad i = 1, ..., N+1;$$

$$Q_{2i}^T = (0,T) \times (i-1+\theta, i), \quad i = 1, ..., N;$$

$$G_{1k}^T = (0,T) \times (k-1-N, k-1-N+\theta), \quad k = 1, ..., N;$$

$$G_{1k}^T = (0,T) \times (k, k+\theta), \quad k = N+1, ..., 2N;$$

$$G_{2k}^T = (0,T) \times (k-1-N+\theta, k-N), \quad k = 1, ..., N;$$

$$G_{2k}^T = (0,T) \times (k+\theta, k+1), \quad k = N+1, ..., 2N.$$

Введем изометрические изоморфизмы гильбертовых пространств $U_\alpha : L_2\left(\bigcup\limits_{i=1}^r Q_{\alpha i}^T\right) \to L_2^r\left(Q_{\alpha 1}^T\right)$ и $V_\alpha : L_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2N} G_{\alpha k}^T\right) \to L_2^{2N}\left(Q_{\alpha 1}^T\right)$, где $L_2^r\left(Q_{\alpha 1}^T\right) = \prod\limits_{i=1}^r L_2\left(Q_{\alpha 1}^T\right)$, по формулам

$$(U_\alpha x)_i(t,s) = x(t, s+i-1),\ (t,s) \in Q_{\alpha 1}^T,\ i = 1, ..., r;\ r = N+1, \text{ если } \alpha = 1;\ r = N, \text{ если } \alpha = 2;$$

$$(V_\alpha x)_k(t,s) = x(t, s+k-N-1),\ (t,s) \in Q_{\alpha 1}^T,\ k = 1, ..., N,$$

$$(V_1 x)_k(t,s) = x(t, s+k),\ (t,s) \in Q_{11}^T,\ k = N+1, ..., 2N,$$

$$(V_2 x)_k(t,s) = x(t, s+k-1),\ (t,s) \in Q_{21}^T,\ k = N+1, ..., 2N.$$

Операторы $R_{Q,T}^\alpha = U_\alpha R_{Q,T} U_\alpha^{-1} : L_2^r(Q_{\alpha 1}^T) \to L_2^r(Q_{\alpha 1}^T)$ суть операторы умножения на матрицы A_α порядка $(r \times r)$ вида

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1-r} & a_{2-r} & a_{3-r} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Элементы $\tilde{a}_{ij}$ матриц A_α определяются по формулам

$$\tilde{a}_{ij} = a_{i-j},\ i, j = 1, \dots, r. \tag{3.2}$$

Введем также операторы $R^{\alpha}_{G,T} = U_\alpha R_{G,T} V_\alpha^{-1} : L_2^{2N}(Q^T_{\alpha 1}) \to L_2^r(Q^T_{\alpha 1})$. Операторы $R^1_{G,T}, R^2_{G,T}$ суть соответственно операторы умножения на матрицы B_1 порядка $((N+1)\times 2N)$ и B_2 порядка $(N \times 2N)$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{-N} & a_{-N+1} & a_{-N+2} & \dots & a_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{-N} & a_{-N+1} & \dots & a_{-2} & a_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{-N} & \dots & a_{-3} & a_{N-1} & a_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{-N} & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

Матрица B_2 — это матрица B_1 без последней строки. Элементы матрицы B_1 определяются по формуле

$$b_{ij} = \left\{ \begin{matrix} a_{j-i-N}, \ i = 1,\dots,N+1, \ j = 1,\dots,N, \\ a_{j-i+1}, \ i = 1,\dots,N+1, \ j = N+1,\dots,2N, \end{matrix} \right\}, \tag{3.3}$$

где $a_k = 0, \ k > N, \ k < -N$.

Используя введенные обозначения, запишем уравнение (3.1) в виде

$$U_\alpha x_t = A_\alpha U_\alpha x + B_\alpha V_\alpha u, \quad \alpha = 1,2, \tag{3.4}$$

а условие (2.3) в виде

$$(U_\alpha x)(0,s) = U_\alpha x_0(s), \quad \alpha = 1,2. \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение матрицу E_1 порядка $(N+1)\times(2N(N+1))$ и матрицу E_2 порядка $N \times 2N^2$: $E_1 = (B_1|\, A_1B_1|\, A_1^2B_1\big|\dots\big|A_1^N B_1), \ E_2 = (B_2|\, A_2B_2|\, A_2^2B_2\big|\dots\big|A_2^{N-1}B_2)$.

Лемма 3.2. *Система, заданная уравнениями* (2.1)–(2.3)*, полностью управляема тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$.

Доказательство. Необходимость. Если $x(t,s)$ является решением задачи (2.1)–(2.3), а следовательно, задачи (3.4)–(3.5), то для почти всех $s_1 \in (0,\theta)$ функция $x^1(t) = (U_1x)(t,s_1)$ $\left(x^1(t) \in \prod\limits_{i=1}^{N+1} H^1(0,T)\right)$ является решением задачи

$$x^1_t = A_1x^1 + B_1u^1, \tag{3.6}$$

$$x^1(0) = \mu_1 \tag{3.7}$$

для почти всех $s_2 \in (\theta,1)$, а функция $x^2(t) = (U_2x)(t,s_2)$ $\left(x^2(t) \in \prod\limits_{i=1}^{N} H^1(0,T)\right)$ является решением задачи

$$x^2_t = A_2x^2 + B_2u^2, \tag{3.8}$$

$$x^2(0) = \mu_2 \tag{3.9}$$

где $u^\alpha(t) = (V_\alpha u)(t,s_\alpha)$, $u^\alpha(t) \in L_2^{2N}(0,T)$, $\mu_\alpha = (U_\alpha x_0)(s_\alpha)$, $\alpha = 1,2$; $\mu_1 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^N$, $H^1(0,T)$ — подпространство Соболева функций из $L_2(0,T)$ у которых существует и принадлежит $L_2(0,T)$ обобщенная производная.

Для систем (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9) стандартным образом вводится понятие управляемости (см. [3, гл. 2]). Если система, заданная уравнениями (2.1)–(2.3), управляема, то системы, заданные уравнениями (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9), управляемы и в силу критерия управляемости (см. [3, гл. 2, теорема 3.4]) $\operatorname{rang} E_1 = N+1, \ \operatorname{rang} E_2 = N$.

Достаточность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.4 в [3].

В силу леммы 2.1 множество управляемых состояний U_1X является подпространством в $L_2^{N+1}(0,\theta)$, а множество U_2X — подпространством в $L_2^N(\theta,1)$. Предположим противное, что система неуправляема. Тогда $U_1X \neq L_2^{N+1}(0,\theta)$ или $U_2X \neq L_2^N(\theta,1)$. Пусть для определенности $U_1X \neq L_2^{N+1}(0,\theta)$. Тогда найдется $\nu \in L_2^{N+1}(0,\theta)$, $\nu \neq 0$, такое, что $(\nu, U_1x_0) = 0 \ \forall x_0 \in X$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^{N+1}(0,\theta)$.

Нетрудно убедиться, что решение $x(t,s)$ задачи (3.4), (3.5) описывается формулой

$$U_1x(t,s) = e^{tA_1}U_1x_0(s) + \int\limits_0^t e^{(t-\xi)A_1}B_1V_1u(\xi,s)d\xi.$$

В силу определения 2.1, $x_0 \in X$, если найдутся T и u такие, что

$$0 = e^{TA_1}U_1x_0(s) + \int\limits_0^T e^{(T-\xi)A_1}B_1V_1u(\xi,s)d\xi. \tag{3.10}$$

Положим $x_0 = 0$, $V_1u(\xi,s) = B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)$, где $B_1{}^\top, A_1^\top$ — транспонированные матрицы B_1, A_1 соответственно. Тогда

$$U_1x(t,s) = \int\limits_0^t e^{(t-\xi)A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi$$

и для любого T;

$$0 = -e^{TA_1}e^{-TA_1}U_1x(T,s) + \int\limits_0^T e^{(T-\xi)A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi,$$

следовательно, в силу (3.10) $-U_1^{-1}e^{-TA_1}U_1x(T,s) \in X$. Тогда

$$0 = (\nu(s), e^{-TA_1}U_1x(T,s)) = (\nu(s), \int\limits_0^T e^{-\xi A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi) =$$

$$= \int\limits_0^T \|B\,{}_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)\|^2 d\xi = 0,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^{N+1}(0,\theta)$. Следовательно,

$$\nu^\top(s)e^{-\xi A_1}B_1 = 0 \tag{3.11}$$

для почти всех $s \in (0,\theta)$ и для почти всех $\xi \in (0,T)$. Дифференцируя последовательно формулу (3.11) по ξ, получаем $\nu^\top(s)A_1^kB_1 = 0$ для почти всех $s \in (0,\theta)$, $k = 0,...,N$. Так как $\nu \neq 0$, найдется $y \in \mathbb{R}^{N+1}$ такое, что $y^\top A_1^kB_1 = 0$, $k = 0,...,N$. Следовательно, $\operatorname{rang} E_1 < N+1$, и лемма доказана. □

Определение 3.1. Назовем оператор R *существенно разностным*, если среди a_i, $i = -N,\dots,N$, $i \neq 0$ найдется $a_i \neq 0$.

Лемма 3.3. *Для того, чтобы* $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* R *был существенно разностным.*

Доказательство. Необходимость. Если оператор R не является существенно разностным, матрица B_1 нулевая (следовательно, и E_1, E_2 нулевые).

Достаточность. Пусть оператор R существенно разностный. Докажем, что $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$. Пусть среди a_i, $(i = -N,\dots,-1)$ найдутся $a_i \neq 0$ (для положительных i доказательство проводится аналогично). Обозначим $m := \max\{-i |\, a_i \neq 0\}$, $c_{i,j}^l$ — элементы матриц $A_1^lB_1$ порядка $(N+1)\times 2N$.

1. Покажем, что

$$c_{lm+i,N-m+i}^l = a_{-m}^{l+1}, \tag{3.12}$$

$$c_{lm+i+q,N-m+i}^l = 0, \tag{3.13}$$

$l = 1,..., \left[\dfrac{N}{m}\right], i = 1,\dots,p_l,\ p_l = \min\{(N+1-lm), m\}, q > 0$. Здесь $\left[\dfrac{N}{m}\right]$ — целая часть $\dfrac{N}{m}$. Если $l = 1,\dots, \left[\dfrac{N}{m}\right] - 1$, то $m < N+1-lm$ и $p_l = m$. Выбор верхних границ изменения индексов обусловлен порядком матриц $A_1^l B_1$. Проведем доказательство индукцией по l.

а). Докажем справедливость утверждения для $l = 1$. В силу (3.2), (3.3)

$$c^1_{m+i,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{a}_{m+i,j} b_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i} a_{N-m+i-j-N} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i} a_{-m+i-j} = a_{i-m-i} a_{-m-i+i} = a^2_{-m},$$

$$i = 1,\dots,m,$$

так как $a_{-n} = 0$ для $n > m$ и, следовательно, $a_{j-m-i} = 0$ для $i > j$ и $a_{-m+i-j} = 0$ для $j > i$. Кроме того,

$$c^1_{m+i+q,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{a}_{m+i+q,j} b_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i-q} a_{N-m+i-j-N} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i-q} a_{-m+i-j} = 0,$$

$$i = 1,\dots,m,\ q > 0,$$

так как $a_{j-m-i-q} = 0$ для $i \geqslant j$ и $a_{-m+i-j} = 0$ для $j > i$.

б). Пусть утверждение справедливо для $l-1$:

$$c^{l-1}_{(l-1)m+i,N-m+i} = a^{l+1}_{-m}, \tag{3.14}$$

$$c^{l-1}_{(l-1)m+i+q,N-m+i} = 0, \tag{3.15}$$

$i = 1,\dots,m,\ q > 0, l \leqslant \left[\dfrac{N}{m}\right]$. Покажем справедливость формул (3.12), (3.13). Учитывая, что $a_{j-lm-i} = 0$ для $j < (l-1)m+i$, и, используя формулу (3.14), получим

$$c^l_{lm+i,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{a}_{lm+i,j} c^{l-1}_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-lm-i} c^{l-1}_{j,N-m+i} = a_{(l-1)m+i-lm-i} c^{l-1}_{(l-1)m+i,N-m+i} =$$

$$= a_{-m} a^l_{-m} = a^{l+1}_{-m},\ i = 1,\dots,p_l = \min\{(N+1-lm), m\}$$

Кроме того,

$$c^l_{m+i+q,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde{a}_{lm+i+q,j} c^{l-1}_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-lm-i-q} c^{l-1}_{j,N-m+i} = 0,$$

$$i = 1,\dots,p_l,\ q > 0,$$

так как $a_{j-lm-i-q} = 0$ для $j < (l-1)m+i+q$ и $c^{l-1}_{j,N-m+i} = 0$ для $j \geqslant (l-1)m+i+q$ в силу формулы (3.15).

2. Покажем, что $\operatorname{rang} E_1 = N+1$. Выберем из матрицы E_1 $N+1$ столбец и образуем из них матрицу $D = \|d_{i,j}\|^{N+1}_{i,j=1}$. Из каждой матрицы $A_1^l B_1$ берем m столбцов с номерами $j = N-m+1,..., N$. Из последней матрицы при $l = \left[\dfrac{N}{m}\right]$ берем оставшиеся $N+1-\left[\dfrac{N}{m}\right] m$ столбцов. Для $i = 1,\dots,N+1$ положим

$$d_{i,p} = d_{i,lm+j} = \begin{cases} b_{i,N-m+j},\ l = 0, j = 1,\dots,m; \\ c^l_{i,N-m+j},\ l = 1,\dots,\left[\dfrac{N}{m}\right] - 1,\ j = 1,\dots,m; \\ c^l_{i,N-m+j}, l = \left[\dfrac{N}{m}\right], j = 1,\dots,(N+1-\left[\dfrac{N}{m}\right] m). \end{cases}$$

В силу формул (3.2), (3.12) для $i=1,\dots,N+1$

$$d_{i,i}=d_{lm+j,lm+j}=\begin{cases} a_{-m}^{l+1},\ l=0,\dots,\left[\dfrac{N}{m}\right]-1,\ j=1,\dots,m;\\ a_{-m}^{l+1},\ l=\left[\dfrac{N}{m}\right],\ j=1,\dots,(N+1-\left[\dfrac{N}{m}\right]m). \end{cases}$$

В силу формул (3.3), (3.12) $d_{i,p}=0$ для $i=1,\dots,N+1$, $p<i$, т. е. матрица D является треугольной и $\det D=a_{-m}^{k}\neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rang} E_1=N+1$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{rang} E_2=N$. □

Из лемм 2.2, 2.3 следует

Теорема 3.1. *Для управляемости системы, описываемой уравнениями* (2.1)–(2.3)*, необходимо и достаточно, чтобы оператор R был существенно разностным.*

Обозначим $G_T^d=(0,T)\times(a,a+d)$, $G_T^{-d}=(0,T)\times(-d,0)$, $d>0$. Из леммы 2.2 и доказательства леммы 2.3 вытекает

Теорема 3.2. *Если среди a_i, $i=1,\dots,[d]$ $(i=-1,\dots,-[d])$ найдется $a_i\neq 0$, то система* (2.1)–(2.3) *управляема относительно области G_T^d (G_T^{-d}).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е. П.* Управляемость системы, описываемой дифференциальным уравнением с отклоняющимся параметром. — М.: ВИНИТИ, 1985. — № 2596-85 Деп.
2. *Иванова Е. П.* Управляемость системы, описываемой смешанным дифференциально-разностным уравнением// Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции. — 2013. — М.: РУДН. — С. 581–590.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
5. *Мышкис А. Д.* Начальная задача для смешанных дифференциально-разностных уравнений// Автоматика и телемеханика. — 1999. — *10*, № 3. — С. 170–180.
6. *Kamenskii G.* Extrema of nonlocal functionals and boundary value problems for functional differentional equations. — New York: Nova Science Publishers, 2007.
7. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
E-mail: elpaliv@yandex.ru