Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 31–64

УДК 517.984.48:532.135

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИ ИЛЬЮШИНА ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2015 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе исследована задача о малых движениях вязкоупругого тела параболического типа. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследован спектр и свойства корневых элементов возникающего операторного блока. Точнее, доказана теорема о существенном и дискретном спектре главного операторного блока. Найдена асимптотическая формула для серии собственных значений, сгущающихся в бесконечности. Доказаны утверждения о полноте и базисности системы корневых элементов главного оператора. Найдены представления решения исходного интегродифференциального уравнения второго порядка в виде контурных интегралов и в виде разложения по системе собственных элементов некоторого операторного пучка. Доказано одно утверждение о стабилизации решения эволюционной задачи. В последнем параграфе исследован частный случай рассматриваемой модели — случай синхронно-изотропной среды параболического типа.

1. Введение

Изучению моделей вязкоупругих сред посвящено много работ. Например, в монографии [9] рассматривается механика и термодинамика вязкоупругих сплошных сред при изотермических и неизотермических процессах деформирования. Областью применения этой теории является механика полимерных материалов и конструкций, а также металлов и других не вполне упругих тел. В случае изотермического процесса деформирования динамическое уравнение движения объемной сплошной среды из [9] является обобщением классического уравнения теории упругости и отличается от последнего наличием интегрального слагаемого специального вида. Одномерным и двумерным примерами таких сред являются, например, вязкоупругие балки и пластины (см. [9, 14]). Отметим монографию [23], где также обсуждаются задачи термовязкоупругости. В частности, изучаются вопросы разрешимости для задач о колебаниях вязкоупругих стержней и пластин, задачи о колебаниях термовязкоупругого тела.

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела, занимающего ограниченную область и закрепленного на границе. Эта модель возникает на описанном в [9] пути и содержит так называемое вязкое слагаемое. В настоящей работе такая модель вязкоупругого тела называется параболической (см. [8]).

Во втором разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом используется прием сведения задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором комплексе гильбертовых пространств. Главный оператор $\mathcal{A}$ последнего уравнения представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу. Хорошие свойства операторного блока $\mathcal{A}$ позволяют доказать требуемое утверждение. Описанный прием не единственный, однако позволяет эффективно исследовать вопросы спектрального анализа соответствующего интегродифференциального уравнения.

В третьем разделе проводится спектральный анализ интегродифференциального уравнения, возникающего в исследуемой модели. Точнее, исследуются вопросы о спектре и свойствах корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Доказаны утверждения о существенном и дискретном спектре оператора, установлена локализация спектра. Доказаны теоремы о полноте и базисности системы корневых

Исследования выполнены при финансовой поддержке фонда РНФ (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

элементов операторного блока $\mathcal{A}$. На основе доказанных утверждений строится разложение решения изучаемой задачи по системе собственных элементов некоторого операторного пучка.

В четвертом разделе исследуется частный случай описанной выше модели — синхронно-изотропная среда параболического типа. Эта модель описывается, кроме набора числовых параметров, одним оператором теории упругости. По этой причине удается полностью решить вопрос о локализации и асимптотике спектра главного операторного блока $\mathcal{A}$, а также в деталях разобрать вопрос о p-базисности системы корневых элементов этого оператора. При этом при исследовании свойств корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не используются методы пространств с индефинитной метрикой. По этой причине описанную процедуру можно будет применить и в модели синхронно-изотропной среды гиперболического типа.

Отметим, что спектральный анализ интегродифференциальных уравнений — активно развиваемое направление в последнее время (см. [3, 4, 12], а также указанную там литературу). Последняя работа посвящена анализу вопросов существования, единственности, а также спектральному анализу интегродифференциального уравнения Гуртина—Пипкина.

2. Задача о малых движениях вязкоупругого тела параболического типа

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)-(2.6), описывающая движения начально-изотропного вязкоупругого тела параболического типа, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (2.8) для некоторого интегродифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (2.8). Основное утверждение раздела — теорема 2.1.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Введем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega)$ — поле смещений в изотропном теле, тогда тензор деформации ε_{ij} будет выражаться через поле перемещений по формуле Коши. Разложим тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} на девиаторы и шаровые составляющие: $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$. Здесь e_{ij}, s_{ij} — девиаторы тензора деформации и напряжений соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\theta := 3\varepsilon$ — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое напряжение. В [9, с. 46] выводится общий вид связей девиаторов и шаровых составляющих тензоров деформаций и напряжений:

$$s_{ij}(t) = \int\limits_0^t \Gamma_1(t-s)e_{ij}(s)\,ds, \quad \sigma(t) = \int\limits_0^t \Gamma_2(t-s)\theta(s)\,ds, \tag{2.1}$$

где $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ — это ядра сдвиговой и объемной релаксации. Эти ядра имеют следующий вид:

$$\Gamma_1(t) := -c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) - \Gamma(t), \quad \Gamma(t) := \sum_{l=1}^m c_{-l}e^{-tb_l}, \tag{2.2}$$

$$\Gamma_2(t) := -\widetilde{c}_1\delta'(t) + \widetilde{c}_0\delta(t) - \widetilde{\Gamma}(t), \quad \widetilde{\Gamma}(t) := \sum_{l=1}^n \widetilde{c}_{-l}e^{-t\widetilde{b}_l}, \tag{2.3}$$

где $\delta(t)$ — δ-функция, c_k, $\widetilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, b_k^{-1}, $\widetilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$\begin{gathered} c_1, \widetilde{c}_1 \geqslant 0, \quad c_0, \widetilde{c}_0 > 0, \quad c_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{1,m}), \quad \widetilde{c}_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{1,n}), \\ 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m, \quad 0 < \widetilde{b}_1 < \widetilde{b}_2 < \dots \widetilde{b}_n. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.1) и уравнения движения сплошной среды в форме Коши получим уравнение движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое будем считать закрепленным на границе

$S := \partial\Omega$ области Ω:

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{c_1}{2}\Delta\vec{u} + \big(\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big) + \Big(\frac{c_0}{2}\Delta\vec{u} + \big(\widetilde{c}_0 + \frac{c_0}{6}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big) - \\ - \int\limits_0^t \Gamma(t-s)\Big(\frac{1}{2}\Delta\vec{u} + \frac{1}{6}\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big)\,ds - \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\,ds + \rho\vec{f}, \quad (2.5)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x) = \vec{u}^1, \quad (2.6)$$

где $\rho = \rho(x)$ — плотность тела $(0 < \rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2 < +\infty)$, $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил, $\vec{u}^0 = \vec{u}^0(x)$, $\vec{u}^1 = \vec{u}^1(x)$ — начальные смещения и скорости в вязкоупругом теле.

Назовем модель вязкоупругого тела *гиперболической*, если в (2.5) $c_1 = \widetilde{c}_1 = 0$ (см. [9, с. 46]); *параболической*, если в (2.5) $c_1 > 0$; *промежуточной*, если в (2.5) $c_1 = 0$, $\widetilde{c}_1 > 0$.

2.2. Вспомогательные операторы и их свойства. Переход к интегродифференциальному операторному уравнению. Введем векторное гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$ с весом $\rho(x)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} := \int\limits_\Omega \rho(x)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} = \int\limits_\Omega \rho(x)|\vec{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\Omega} := \{p \in L_2(\Omega) \mid (p,1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Будем считать далее, что граница S области Ω — класса C^2.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$-\rho^{-1}(\alpha\Delta\vec{u} + \beta\nabla\mathrm{div}\vec{u}) = \vec{v} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \alpha > 0, \ \beta \geqslant 0.$$

Эта задача, как известно (см. [17]), имеет единственное обобщенное решение $\vec{u} = A^{-1}(\alpha,\beta)\vec{v}$ для любого $\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho)$, где оператор $A(\alpha,\beta)$ является самосопряженным и положительно определенным в $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$. Энергетическое пространство $H_{A(\alpha,\beta)} = \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta)) = \{\vec{u} \in \vec{W}^1_2(\Omega) | \ \vec{u} = \vec{0} \ (\text{на } S)\}$ оператора $A(\alpha,\beta)$ компактно вложено в пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta)$ компактен и положителен в $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v} \in H_{A(\alpha,\beta)}$

$$(\vec{u},\vec{v})_{A(\alpha,\beta)} = (A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{u}, A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{v})_{\vec{L}(\Omega,\rho)} = \alpha\mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}) + \beta\mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}), \\ \mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}) := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^3 \nabla u_i\cdot\overline{\nabla v_i}\,d\Omega, \quad \mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}) := \int\limits_\Omega \mathrm{div}\vec{u}\ \overline{\mathrm{div}\vec{v}}\,d\Omega. \quad (2.7)$$

Кроме того, несложно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $H_{A(\alpha_1,\beta_1)}$ и $H_{A(\alpha_2,\beta_2)}$ эквивалентны между собой.

Введем оператор $B\vec{u} := \mathrm{div}\vec{u}$, $\mathcal{D}(B) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho) | \ \mathrm{div}\vec{u} \in L_2(\Omega), \ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \ (\text{на } S)\}$, тогда будем иметь $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta))$, $B : \mathcal{D}(B) \to L_{2,\Omega}$. Непосредственно проверяется, что $B^*p = -\rho^{-1}\nabla p$, $\mathcal{D}(B^*) = W^1_2(\Omega) \cap L_{2,\Omega}$.

Для модели вязкоупругого тела параболического типа введем операторы $A := A\Big(\frac{1}{2}c_1, \widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\Big)$, $A_{00} := A\Big(\frac{1}{2}c_0, \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0\Big)$, $A_1 := A\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\Big)$ и с их помощью запишем начально-краевую задачу (2.5)-(2.6) в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $H := \vec{L}_2(\Omega,\rho)$:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A\frac{d\vec{u}}{dt} - A_{00}\vec{u} + \int\limits_0^t \Big[\Gamma(t-s)A_1 + \widetilde{\Gamma}(t-s)B^*B\Big]\vec{u}(s)\,ds + \vec{f}(t), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{u}'(0) = \vec{u}^1. \quad (2.8)$$

Определение 2.1. *Сильным решением* задачи Коши (2.8) назовем такое поле $\vec{u}(t)$, что $\vec{u}(t) \in \mathcal{D}(A_{00})$, $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A)$ при $t \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, $A_{00}\vec{u}(t)$, $A\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, $\vec{u}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (2.8) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

2.3. Вывод основного дифференциально-операторного уравнения. Введем операторы

$$\begin{aligned} &Q_{00} := A_{00}^{1/2}A^{-1/2}, \quad Q_1 := A_1^{1/2}A^{-1/2}, \quad Q_B := BA^{-1/2}, \\ &Q_{00}^+ := A^{-1/2}A_{00}^{1/2}, \quad Q_1^+ := A^{-1/2}A_1^{1/2}, \quad Q_B^+ := A^{-1/2}B^*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. $Q_{00}, Q_1 \in \mathcal{L}(H)$, $Q_B \in \mathcal{L}(H, L_{2,\Omega})$. *Операторы* Q_{00}^+, Q_1^+, Q_B^+ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_{00}^*, Q_1^*, Q_B^* *соответственно. При этом* $Q_B^+ = Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{00}^+ = Q_{00}^*|_{\mathcal{D}(A_{00}^{1/2})}$, $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(A_1^{1/2})}$, *а операторы* $Q_{00}^*Q_{00}$ *и* $Q_1^*Q_1$ *положительно определены.*

Доказательство. Доказательство проведем только для оператора Q_{00}. Ограниченность оператора Q_{00} ($Q_{00}^* \in \mathcal{L}(H)$) следует из равенства $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_{00})$. Далее, для любых $\vec{u} \in H$ и $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_{00}^{1/2})$

$$\left(Q_{00}\vec{u}, \vec{v}\right)_H = \left(A_{00}^{1/2}A^{-1/2}\vec{u}, \vec{v}\right)_H = \left(\vec{u}, Q_{00}^+\vec{v}\right)_H = \left(\vec{u}, Q_{00}^*\vec{v}\right)_H,$$

откуда следует, что $Q_{00}^+ = Q_{00}^*|_{\mathcal{D}(A_{00}^{1/2})}$, $\overline{Q_{00}^+} = Q_{00}^*$. Далее, для любого $\vec{u} \in H$ с учетом (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \left(Q_{00}^*Q_{00}\vec{u}, \vec{u}\right)_H &= \left(Q_{00}\vec{u}, Q_{00}\vec{u}\right)_H = \left(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}\right)_{A_{00}} = \\ &= \frac{1}{2}c_0\mathcal{J}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) + \Big(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0\Big)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) \geqslant \\ &\geqslant \min\Big\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Big\}\Big[\frac{1}{2}c_1\mathcal{J}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) + \Big(\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\Big)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u})\Big] = \\ &= \min\Big\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Big\}\left(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}\right)_A = \min\Big\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Big\}\|\vec{u}\|_H^2, \end{aligned}$$

откуда следует положительная определенность оператора $Q_{00}^*Q_{00}$. Лемма доказана. □

Пусть $\vec{u}(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.8), тогда $\vec{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_{00}^+Q_{00}A^{1/2}\vec{u} - \int_0^t \Big[\Gamma(t-s)Q_1^+Q_1 + \widetilde{\Gamma}(t-s)Q_B^+Q_B\Big]A^{1/2}\vec{u}(s)\,ds\Big\} + \vec{f}(t),$$

а значит, с учетом леммы 2.1, — и следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} &+ Q_{00}^+Q_{00}A^{1/2}\vec{u} - \\ &- Q_1^*\int_0^t \Gamma(t-s)Q_1A^{1/2}\vec{u}(s)\,ds - Q_B^*\int_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s)Q_BA^{1/2}\vec{u}(s)\,ds\Big\} + \vec{f}(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Определим ядра $\Gamma_p(t)$ и $\widetilde{\Gamma}_p(t)$ так, что $\Gamma_p'(t) = -\Gamma(t)$, $\widetilde{\Gamma}_p'(t) = -\widetilde{\Gamma}(t)$, т. е.

$$\Gamma_p(t) := \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l}e^{-tb_l}, \quad \widetilde{\Gamma}_p(t) := \sum_{l=1}^n \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}e^{-t\widetilde{b}_l}. \tag{2.11}$$

Предположим, что $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(B^*B)$. Из (2.11) и свойства $(A^{1/2}\vec{u}(t))' = A^{1/2}\vec{u}'(t)$ (см. [13, с. 291]), которое является следствием непрерывности поля $A\vec{u}'(t)$, следует, что

$$\int_0^t \Gamma(t-s)Q_1A^{1/2}\vec{u}(s)\,ds = \Gamma_p(0)Q_1A^{1/2}\vec{u} - \Gamma_p(t)Q_1A^{1/2}\vec{u}^0 - \int_0^t \Gamma_p(t-s)Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds,$$

$$\int_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s)Q_BA^{1/2}\vec{u}(s)\,ds = \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_BA^{1/2}\vec{u} - \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_BA^{1/2}\vec{u}^0 - \int_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds.$$

С использованием этих соотношений преобразуем уравнение (2.10) к следующему виду:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + \Big[Q_{00}^{+}Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B\Big]A^{1/2}\vec{u} + \\ + Q_1^*\int\limits_0^t \Gamma_p(t-s)Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + Q_B^*\int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t), \tag{2.12}$$

$$\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \Gamma_p(t)A_1\vec{u}^0 - \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}^0.$$

Всюду далее, кроме условия (2.4) на числовые параметры задачи, будем считать выполненными следующие условия:

$$\begin{gathered} c_0 - \Gamma_p(0) = c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} > 0, \\ \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \Gamma_p(0)\Big] - \widetilde{\Gamma}_p(0) = \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l}\Big] - \sum_{l=1}^n \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l} \geqslant 0, \\ \{b_1,\ldots,b_m\} \cap \{\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\} = \varnothing. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Последнее условие вводится лишь для упрощения последующих формулировок и вычислений и не является принципиальным ограничением в рассматриваемой задаче. Если какое-то число из второй группы (с волной) попадет в первую группу, то это решается перегруппировкой слагаемых.

С учетом (2.13) определим оператор $A_0 := A\Big(\frac{1}{2}[c_0 - \Gamma_p(0)], \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}[c_0 - \Gamma_p(0)] - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)$. По аналогии с операторами из (2.9) определим операторы $Q_0 := A_0^{1/2}A^{-1/2}$ и $Q_0^+ := A^{-1/2}A_0^{1/2}$. При этом $\overline{Q_0^+} = Q_0^*$, $Q_0^+ = Q_0^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A^{1/2})}$. Относительно оператора Q_0 имеет место следующая лемма.

Лемма 2.2. *Оператор* $Q_0^*Q_0 = Q_{00}^*Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B$ *и положительно определен.*

Доказательство. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v} \in H = \vec{L}_2(\Omega,\rho)$, учитывая (2.7) и (2.9), вычислим

$$\big((Q_{00}^*Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B - Q_0^*Q_0)\vec{u},\vec{v}\big)_H = \big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_{00}} - \\ - \Gamma_p(0)\big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_1} - \widetilde{\Gamma}_p(0)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}) - \big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_0} = 0.$$

Отсюда следует формула для оператора $Q_0^*Q_0$.

Положительная определенность оператора $Q_0^*Q_0$ доказывается так же, как в лемме 2.1. □

Из леммы 2.2 и (2.12) следует, что если поле $\vec{u}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.12), то оно также удовлетворяет и следующему уравнению:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*Q_0A^{1/2}\vec{u} + \\ + Q_1^*\int\limits_0^t \Gamma_p(t-s)Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + Q_B^*\int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t).$$

Это уравнение с учетом (2.11) перепишется в следующем виде:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*Q_0A^{1/2}\vec{u} + \sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + \\ + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*\int\limits_0^t e^{-\widetilde{b}_l(t-s)}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t). \tag{2.14}$$

Введем по полю $\vec{u}$ следующие объекты:

$$Q_0 A^{1/2}\vec{u}(t) =: \frac{d\vec{v}(t)}{dt}, \quad \vec{v}(0) = 0 \quad (\vec{v}'(0) = A_0^{1/2}\vec{u}^0),$$
$$\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1 A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: \vec{v}_l(t), \quad l = \overline{1,m}, \tag{2.15}$$
$$\int_0^t e^{-\widetilde{b}_l(t-s)}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: p_l(t), \quad l = \overline{1,n}.$$

При этом поля $\vec{v}'(t)$, $\vec{v}_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ и функции $p_l(t)$ $(l = \overline{1,n})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \displaystyle\sum_{l=1}^m \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum_{l=1}^n \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^* p_l\Big\} + \vec{f}_0(t), \\ \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} = Q_0 A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt}, \\ \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} = \sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1 A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - b_l\vec{v}_l, \quad l = \overline{1,m}, \\ \dfrac{dp_l}{dt} = \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - \widetilde{b}_l p_l, \quad l = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Эту систему (с начальными условиями) далее мы будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором комплексе гильбертовых пространств. Точнее, запишем систему (2.16) в виде дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \mathcal{H}_0$ $(H = \vec{L}_2(\Omega,\rho), \mathcal{H}_0 := (\oplus_{l=1}^{m+1} H) \oplus (\oplus_{l=1}^n L_{2,\Omega}))$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{2.17}$$

Здесь $\xi := (\vec{u}'; w)^\tau$, $w := (\vec{v}'; \vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m; p_1; \ldots; p_n)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^1; w^0)^\tau$,

$$w^0 := (A_0^{1/2}\vec{u}^0; \underbrace{\vec{0}; \ldots; \vec{0}}_{m\text{ раз}}; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n\text{ раз}})^\tau, \qquad \mathcal{F}(t) := (\vec{f}_0(t); \underbrace{\vec{0}; \ldots; \vec{0}}_{m+1\text{ раз}}; \underbrace{0; \ldots; 0}_{n\text{ раз}})^\tau$$

(символ τ обозначает операцию транспонирования).

Для оператора $\mathcal{A}$, как можно проверить, справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0), \tag{2.18}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I}_0 \end{pmatrix}\operatorname{diag}(A, \mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)\begin{pmatrix} I & A^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}_0 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \big| \ \vec{u} + A^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A)\Big\}, \tag{2.20}$$

где I, $\mathcal{I}_0$ — единичные операторы в H и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$\mathcal{Q} := \Big(Q_0, \sqrt{\frac{c_{-1}}{b_1}}Q_1, \ldots, \sqrt{\frac{c_{-m}}{b_m}}Q_1, \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-1}}{\widetilde{b}_1}}Q_B, \ldots, \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-n}}{\widetilde{b}_n}}Q_B\Big)^\tau,$$
$$\mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I, \widetilde{b}_1 I, \ldots, \widetilde{b}_n I\big).$$

Дадим следующее определение.

Определение 2.2. *Сильным решением* задачи Коши (2.17) назовем такую функцию $\xi(t)$, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальное условие и уравнение из (2.17) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Из проведенных рассуждений следует вывод: если поле $\vec{u}(t)$ есть сильное решение задачи Коши (2.8) и $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A)$, то функция $\xi(t)$ есть сильное решение задачи Коши (2.17).

2.4. Теорема о разрешимости. Основываясь на задаче Коши (2.17), докажем теорему об однозначной сильной разрешимости для задачи (2.8). Прежде всего, установим следующую лемму.

Лемма 2.3. *Оператор $-\mathcal{A}$ — максимальный диссипативный.*

Доказательство. Докажем, что $-\mathcal{A}$ — диссипативный оператор. Для $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)) имеем

$$\operatorname{Re}\big(-\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}\left(\operatorname{diag}(I,\mathcal{G})\begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \leqslant 0.$$

Для того чтобы доказать, что оператор $-\mathcal{A}$ замкнут и максимален, достаточно показать, что положительные числа попадают в его резольвентное множество: $\{\lambda > 0\} \subset \rho(-\mathcal{A})$. Итак, пусть $\lambda > 0$. Положим $\xi_1 := (\vec{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\vec{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$, тогда уравнение $(-\mathcal{A}-\lambda)\xi_1 = \xi_2$, учитывая представление (2.18), можно переписать в векторно-матричной форме:

$$-\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I+\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}+\lambda\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0)\begin{pmatrix}\vec{u}_1 \\ w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_2 \\ w_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что оператор $-\mathcal{A}-\lambda$ будет иметь ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, если средний блок будет непрерывно обратим.

В самом деле, несложно проверить, что следующий оператор положительно определен:

$$L := I + \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q} = I + \lambda A^{-1} + \frac{1}{\lambda}Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l+\lambda}Q_1^*Q_1 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l+\lambda}Q_B^*Q_B \gg 0.$$

Следовательно, $L^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ и непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} I+\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}+\lambda\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & -L^{-1}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1} \\ (\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1} & (\mathcal{G}+\lambda)^{-1} - (\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Лемма доказана. □

Основываясь на [6, теорема 1.4, с. 130], лемме 2.3 и факторизации в форме Шура—Фробениуса (2.19), докажем лемму об однозначной сильной разрешимости задачи Коши (2.17).

Лемма 2.4. *Пусть функция $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера*: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+\ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, *что* $\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} \leqslant K|t-s|^k$ *при* $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. *Тогда для любого $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ существует и единственно* (*в смысле определения* 2.2) *сильное решение задачи Коши* (2.17).

Доказательство. Перепишем представление (2.19) оператора $-\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса в следующем виде с очевидными обозначениями: $-\mathcal{A} = -(\mathcal{I}-\mathcal{S})\mathcal{A}_0(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)$. Осуществим в задаче Коши (2.17) замену искомой функции $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi(t) =: \eta(t)$. В результате получим задачу Коши

$$\frac{d\eta}{dt} = -(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)(\mathcal{I}-\mathcal{S})\mathcal{A}_0\eta + (\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\mathcal{F}(t), \quad \eta(0) = \eta^0 = (\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi^0. \tag{2.21}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}(A, \mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)$, определенный на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{H}_0$, является самосопряженным и неотрицательным (и даже положительно определенным, см. лемму 3.1). Из компактности оператора $A^{-1/2}$ ($A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$) следует (см. (2.19)), что $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)(\mathcal{I}-\mathcal{S}) =: (\mathcal{I}+\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Следовательно, оператор $-(\mathcal{I}+\mathcal{T})\mathcal{A}_0$ является генератором сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов, голоморфной в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Из условия на функцию $\mathcal{F}(t)$ следует, что функция $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\mathcal{F}(t)$ локально гельдерова с константой $K_1 := K(\tau)\|(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\|_{\mathcal{H}_0}$. Из условия $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, факторизации (2.19) и формулы (2.20) следует, что $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi^0 = \eta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. В силу [6, теорема 1.4, с. 130] задача Коши (2.21) имеет единственное (в смысле определения 2.2) сильное решение. Осуществление обратной замены искомой функции в (2.21) завершает доказательство леммы. □

Теорема 2.1. *Пусть поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера*: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+\ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, *что* $\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} \leqslant K|t-s|^k$ *при* $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. *Тогда для любых $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$ существует и единственно* (*в смысле определения* 2.1) *сильное решение задачи Коши* (2.8).

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0, \vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, тогда $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\xi^0 := (\vec{u}^1; w^0)^\tau$, $w^0 := (A_0^{1/2}\vec{u}^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0}; 0; \ldots; 0)^\tau$. Действительно, согласно (2.20) имеем

$$\vec{u}^1 + A^{-1/2}\mathcal{Q}^* w^0 = \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^* A_0^{1/2}\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A^{1/2})} A_0^{1/2}\vec{u}^0 =$$
$$= \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^+ A_0^{1/2}\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1}A_0\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1}(A_0A^{-1})A\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A).$$

Из условия на поле $\vec{f}(t)$ следует, что поле $\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \Gamma_p(t)A_1\vec{u}^0 - \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}^0$, где ядра $\Gamma_p(t)$ и $\widetilde{\Gamma}_p(t)$ определены в (2.11), локально гельдерово. А значит, функция $\mathcal{F}(t)$ из (2.17) также локально гельдерова.

По лемме 2.4 задача Коши (2.17) имеет единственное (в смысле определения 2.2) сильное решение. Пусть $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). Запишем уравнение из (2.17) в виде системы (2.16). Проинтегрировав второе и последующие уравнения в системе (2.16), найдем, что поле $\vec{u}(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A\Big\{\frac{d\vec{u}}{dt} + \int_0^t A^{-1/2}Q_0^*Q_0A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + \int_0^t \Gamma_p(t-s)A^{-1/2}Q_1^*Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds +$$
$$+ \int_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)A^{-1/2}Q_B^*Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} - A_0\vec{u}^0 + \vec{f}_0(t), \qquad (2.22)$$

причем $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $A^{1/2}\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, выражение в фигурных скобках в уравнении (2.22) принимает значения из $\mathcal{D}(A)$ и $A\{\ldots\} \in C(\mathbb{R}_+; H)$.

Если удастся доказать, что $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A)$, $A\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, то фигурные скобки в (2.22) можно будет раскрыть, и уравнение (2.22) после ряда простых преобразований примет вид (2.8).

Обозначим $\vec{z}(t) := \vec{u}'(t)$, тогда из (2.22) имеем

$$\vec{z}(t) + \int_0^t R(t-s)\vec{z}(s)\,ds =: \vec{y}(t) \in \mathcal{D}(A), \quad A\vec{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; H),$$
$$R(t) := A^{-1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]A^{1/2}. \qquad (2.23)$$

Введем пространство $H(A) := (\mathcal{D}(A); \|\cdot\|_{H(A)})$, где $\|\vec{y}\|_{H(A)} := \|A\vec{y}\|_H$ при $\vec{y} \in \mathcal{D}(A)$, которое, как известно, является банаховым. Интегральное уравнение из (2.23) будем трактовать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в банаховом пространстве $H(A)$. Покажем, что $R(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H(A)))$, тогда из (2.23) будет следовать, что $\vec{z}(t) = \vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H(A) = \mathcal{D}(A))$ и теорема будет доказана. В самом деле, для любого $\vec{z} \in H(A) = \mathcal{D}(A)$ имеем

$$\|R(t)\vec{z}\|_{H(A)} = \|AR(t)A^{-1}(A\vec{z})\|_H = \|A^{1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]A^{-1/2}(A\vec{z})\|_H =$$
$$= \|A^{1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}(A\vec{z})\|_H =$$
$$= \|\big[A_0 + \Gamma_p(t)A_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\big]A^{-1}(A\vec{z})\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \big[\|A_0A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + \Gamma_p(t)\|A_1A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + \widetilde{\Gamma}_p(t)\|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\big]\cdot\|\vec{z}\|_{H(A)}.$$

Отсюда следует, что $R(t) \in \mathcal{L}(H(A))$ и для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\|R(t_1) - R(t_2)\|_{\mathcal{L}(H(A))} \leqslant |\Gamma_p(t_1) - \Gamma_p(t_2)|\cdot\|A_1A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + |\widetilde{\Gamma}_p(t_1) - \widetilde{\Gamma}_p(t_2)|\cdot\|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Отсюда и из (2.11) следует, что $R(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H(A)))$ и теорема доказана. □

3. Задача о спектре вязкоупругого тела параболического типа

В этом разделе проводится спектральный анализ операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (2.18)–(2.20)). В пункте 3.3 доказана теорема 3.1 о существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$.

В пункте 3.4 исследована локализация и, частично, асимптотическое поведение спектра. Точнее, в теореме 3.2 установлена асимптотическая формула для ветви изолированных конечнократных собственных значений оператора $\mathcal{A}$ с предельной точкой в бесконечности и грубая локализация этой ветви. В теореме 3.3 доказано, что невещественных собственных значений у оператора $\mathcal{A}$ может быть лишь конечное количество. В теореме 3.4 установлена область комплексной плоскости, где может располагаться невещественный спектр этого оператора, а также получено достаточное условие отсутствия невещественного спектра.

В пункте 3.5 в теореме 3.5 найдено представление решения задачи Коши (2.8) в виде некоторых контурных интегралов. В теореме 3.6 исследован вопрос стабилизации решения задачи (2.8). Доказано, что если внешнее поле, действующее на систему, стабилизируется, то вязкоупругое тело со временем принимает новое положение, удовлетворяющее стационарному уравнению теории упругости $A_0\vec{u} \equiv A\Big(\dfrac{1}{2}[c_0 - \Gamma_p(0)], \widetilde{c}_0 + \dfrac{1}{6}[c_0 - \Gamma_p(0)] - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)\vec{u} = \vec{f}$ с измененными параметрами.

В пункте 3.7 исследуются свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. В частности, в теореме 3.9 с использованием методов индефинитной метрики доказаны достаточные условия того, чтобы система корневых элементов (собственных элементов) оператора $\mathcal{A}$ была p-базисом при $p > 3$ ($\mathcal{J}$-ортонормированным p-базисом) основного гильбертова пространства. В пункте 3.8 в случае существования $\mathcal{J}$-ортонормированного p-базиса из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ строится представление решения задачи Коши (2.8) в виде некоторого ряда.

3.1. Основная спектральная задача и операторный пучок. Будем разыскивать решения однородного уравнения из (2.17) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{3.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругого тела параболического типа или, что то же, с задачей о спектре однородного интегродифференциального уравнения второго порядка из (2.8).

Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществим с учетом факторизации (2.18) в спектральной задаче (3.1) замену искомого элемента $\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\xi = \eta =: (\vec{z}; w)^\tau$. Получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \tag{3.2}$$

Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (3.2) найдем, что

$$L(\lambda)\vec{z} := \big[I - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H.$$

Эту задачу, вспоминая определения операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$, можно переписать в следующем виде:

$$L(\lambda)\vec{z} := \Big[I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l - \lambda}Q_1^*Q_1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l - \lambda}Q_B^*Q_B\Big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H. \tag{3.3}$$

Ясно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (3.1) и (3.3)) совпадают между собой при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Прежде чем исследовать существенный и дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$, докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. *Если $c_1 > 0$ достаточно велико, то точка $\lambda = \widetilde{b}_q$ не является собственным значением спектральной задачи* (3.1) (*с.з. оператора* $\mathcal{A}$) *при* $q = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Докажем, что $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Учитывая факторизацию (2.19), достаточно установить, что оператор $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ положительно определен. Для любого $w \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\big((\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w\big)_{\mathcal{H}_0} = \big(\mathcal{G}w, w\big)_{\mathcal{H}_0} + \|\mathcal{Q}^*w\|_{\mathcal{H}_0}^2 = \sum_{l=1}^{m} b_l\|\vec{v}_l\|_H^2 + \sum_{l=1}^{n} \widetilde{b}_l\|p_l\|_{L_{2,\Omega}}^2 +$$
$$+ \Big\|Q_0^*\vec{v} + \sum_{l=1}^{m} \sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum_{l=1}^{n} \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_l\Big\|_H^2 = \|\mathcal{S}w\|_{\mathcal{H}_0}^2 \geqslant \|\mathcal{S}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)}^{-2} \cdot \|w\|_{\mathcal{H}_0}^2.$$

Здесь $\mathcal{S}$ — это верхний треугольный операторный блок с непрерывно обратимой главной диагональю $\operatorname{diag}\big(Q_0^*, b_1I, \ldots, b_mI, \widetilde{b}_1I, \ldots, \widetilde{b}_nI\big)$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Пусть $\lambda = b_q$ $(q = \overline{1,m})$. Запишем резольвентное уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы:

$$\begin{cases} A^{1/2}\Big[A^{1/2}\vec{u} + Q_0^*\vec{v} + \sum\limits_{l=1}^{m}\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_l\Big] - \lambda\vec{u} = \vec{u}_0, \\ -Q_0A^{1/2}\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{v}_0, \\ -\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\vec{u} + b_l\vec{v}_l - \lambda\vec{v}_l = \vec{v}_{l0}, \quad l = \overline{1,m}, \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\vec{u} + \widetilde{b}_lp_l - \lambda p_l = p_{l0}, \quad l = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Полагая здесь $\lambda = b_q$, из третьей строчки при $l = q$ найдем, что $A^{1/2}\vec{u} = -\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}Q_1^{-1}\vec{v}_{q0}$. Учитывая (2.4) и третье условие в (2.13), теперь из второй, третьей и четвертой строчки в (3.4) имеем

$$\vec{v} = \frac{1}{b_q}\Big[\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}Q_0Q_1^{-1}\vec{v}_{q0} - \vec{v}_0\Big], \quad \vec{u} = -\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}A^{-1/2}Q_1^{-1}\vec{v}_{q0}$$
$$\vec{v}_l = \frac{1}{b_l - b_q}\Big[-\sqrt{c_{-l}b_l^{-1}c_{-q}^{-1}b_q}\vec{v}_{q0} + \vec{v}_{l0}\Big], \quad l = \overline{1,m}, \ l \neq q,$$
$$p_l = \frac{1}{\widetilde{b}_l - b_q}\Big[-\sqrt{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}c_{-q}^{-1}b_q}Q_BQ_1^{-1}\vec{v}_{q0} + p_{l0}\Big], \quad l = \overline{1,n}.$$

Отсюда и из первой строчки в (3.4) с помощью ограниченных операторов теперь можно легко найти $\vec{v}_q$. Следовательно, $(\mathcal{A} - b_q)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Пусть $\lambda = \widetilde{b}_q$ $(q = \overline{1,n})$. Из четвертой строчки в (3.4) при $l = q$ $(\lambda = \widetilde{b}_q, \ \xi_0 = 0)$ получим, что $Q_BA^{1/2}\vec{u} = 0$. Умножим первое уравнение в (3.4) скалярно на $\vec{u}$ и преобразуем полученное выражение с помощью последнего соотношения, второй и последующих строчек в (3.4):

$$\|A^{1/2}\vec{u}\|_H^2 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\|A_1^{1/2}\vec{u}\|_H^2 - \widetilde{b}_q\|\vec{u}\|_H^2 = 0.$$

Отсюда, из определения операторов A, A_0, A_1 и из (2.7) имеем

$$\Big[\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\widetilde{b}_q}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]\mathcal{J}(\vec{u}) - \widetilde{b}_q\|\vec{u}\|_H^2 +$$
$$+ \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\Big(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]\mathcal{D}(\vec{u}) = 0. \tag{3.5}$$

Пусть $C_F > 0$ — константа из неравенства Фридрихса $\mathcal{J}(\vec{u}) \geqslant C_F\|\vec{u}\|_H^2$, верного для любого $\vec{u} \in H_{A(\alpha,\beta)}$ $(\alpha > 0, \ \beta \geqslant 0)$. Допустим, что $c_1 > 0$ настолько велико, что

$$\Big[\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\widetilde{b}_q}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]C_F - \widetilde{b}_q > 0,$$
$$\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\Big(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \widetilde{b}_q)} \geqslant 0,$$

тогда из (3.5) получим, что $\vec{u} = \vec{0}$. Из второй, третьей и четвертой строчки в (3.4) тогда следует, что $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v}_l = \vec{0}$ $(l = \overline{1,m})$, $p_l = 0$ $(l = \overline{1,n}, \ l \neq q)$. Из первого уравнения в (3.4) теперь получим, что $A^{1/2}Q_B^*p_q = 0$. Последнее вместе с $\mathrm{Ker}B^* = \{0\}$ влечет $p_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $\lambda = \widetilde{b}_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана. □

3.2. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведем необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [5, 11, 18, 21]), необходимые для дальнейшего. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.6}$$

где $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$, $D := (D_1; D_2; D_3) := \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x_1}; -i\dfrac{\partial}{\partial x_2}; -i\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big)^\tau$, $u(x) := (u_1(x); \ldots; u_n(x))^\tau$, $f(x) := (f_1(x); \ldots; f_n(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x, \xi)$ ($\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$) — полиномиальная матрица, получаемая из (3.6) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (3.6) определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [5, с. 375], а также [18]).

Определение 3.1 (см. [5])**.** Оператор $\mathcal{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi\mathcal{L}(x, \xi)$, где $\pi\mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$ (о выделении главной части системы Дуглиса—Ниренберга см. [5, с. 377]).

Возьмем произвольную точку $z_0 \in S$ и введем, следуя [11, 21], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница S задается бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i = const$ есть линии кривизны. В векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1; y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к S. В окрестности границы S введем координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до S. Тогда $x = z(y') + y_3 N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задается так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1 \times \partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$. Пусть $E_i(y')$ $(i = 1, 2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, тогда $\partial z/\partial y_i \cdot \partial z/\partial y_j = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Рассмотрим теперь систему краевых условий

$$\mathcal{B}(x, D)u(x) = g(x), \quad x \in S, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{B}(x, D)$ — матрица размером $3 \times n$, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (3.6), (3.7) во введенной выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\big) = \pi\mathcal{L}\big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\big), \quad \pi\mathcal{B}\big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\big) = \pi\mathcal{B}\big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\big).$$

Определение 3.2 (см. [5, с. 380], а также [11, с. 12])**.** Краевая задача (3.6), (3.7) называется *эллиптической*, если выполнено определение 3.1 и условие Шапиро—Лопатинского:

$$\operatorname{rang} \int\limits_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}\big((y', 0), \xi', \xi_3\big) \big[\pi\mathcal{L}\big((y', 0), \xi', \xi_3\big)\big]^{-1} \big(I_n, \xi_3 I_n\big)\, d\xi_3 = 3$$

для любого y' из области определения параметров локальной системы координат, для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ и $\xi_3 \in \mathbb{R}$. Здесь I_n — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$, а через $(I_n, \xi_3 I_n)$ обозначена матрица размера $n \times 2n$; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро—Лопатинского (условия дополнительности) понадобятся также следующие леммы и обозначения из [11].

Лемма 3.2 (см. [11, с. 14])**.** *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \big(1 - K_j y_3\big)^{-1} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_i}{\partial y_j}\, \frac{\partial}{\partial y_j} + N_i \frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j = 1, 2)$ — главные кривизны поверхности S.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^{2} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_l}{\partial y_j} \xi_j \ \ (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \tag{3.8}$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau \beta = 0$, $N^\tau N = 1$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 := \beta^\tau\beta = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать выражение $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2$.

Лемма 3.3 (см. [11, с. 15])**.** *Во введенной выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов*:

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\mathrm{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -(|\xi'|^2 + \xi_3^2).$$

Лемма 3.4 (см. [11, с. 16])**.** *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$*:

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{2\pi}{2|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{2\pi i}{2}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\frac{2\pi|\xi'|}{2}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi}{4|\xi'|^3},$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi}{4|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi i}{2}, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

Основываясь на приведенных утверждениях, докажем следующие две леммы.

Лемма 3.5. *Пусть $c \neq 0$. Тогда следующая краевая задача эллиптична при $a \neq 0$*:

$$\begin{cases} -a\Delta\vec{u}(x) - b\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) + c\nabla p(x) = \vec{v}(x), \\ \ c\,\mathrm{div}\vec{u}(x) = q(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{g}(x), \quad x \in S. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(x, D)$ — дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x, D) = \begin{pmatrix} -a\Delta - b\nabla\mathrm{div} & c\nabla \\ c\,\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi\mathcal{L}(x, \xi) = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\xi\xi^\tau & ic\xi \\ ic\xi^\tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Обозначим через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$ матрицу, где вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ ($|a^\perp| = |b^\perp| = 1$) ортогональны ξ и между собой. Просто проверяются следующие формулы:

$$\Gamma_\xi^\tau \Gamma_\xi = I_3, \quad \Gamma_\xi^\tau \xi = (|\xi|, 0, 0)^\tau =: |\xi| e_1, \quad \Gamma_\xi^\tau \xi\xi^\tau \Gamma_\xi = \mathrm{diag}(|\xi|^2, 0, 0) =: |\xi|^2 P_1. \tag{3.10}$$

Обозначим $\mathcal{S} := \mathrm{diag}(\Gamma_\xi, 1)$ и, используя (3.10), проведем следующие вычисления:

$$\pi\mathrm{det}\mathcal{L}(x, \xi) = \mathrm{det}\pi\mathcal{L}(x, \xi) = \mathrm{det}\mathcal{S}^\tau\pi\mathcal{L}(x, \xi)\mathcal{S} = \det\begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + bP_1 & ic|\xi|e_1 \\ ic|\xi|e_1^\tau & 0 \end{pmatrix} = a^2c^2|\xi|^6 \neq 0 \tag{3.11}$$

для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. То есть оператор $\mathcal{L}(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро—Лопатинского. Зафиксируем $z_0 \in S$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (3.9) с заменой ξ на α. При этом $\mathrm{det}\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (3.11) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$, где $|\xi'|^2 = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\mathrm{det}\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3-корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

Найдем матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$:

$$\big[\pi\mathcal{L}\big((y', 0), \xi', \xi_3\big)\big]^{-1} = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau & ic\alpha \\ ic\alpha^\tau & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4} & -\dfrac{i\alpha}{c|\xi|^2} \\ -\dfrac{i\alpha^\tau}{c|\xi|^2} & \dfrac{a+b}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\pi\mathcal{B}((y',0),\xi',\xi_3) = (I_3, 0_{3\times 1})$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\int\limits_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}\big(I_4,\xi_3 I_4\big)\,d\xi_3 = \int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4}, \frac{-i\alpha}{c|\xi|^2}\Big)\big(I_4,\xi_3 I_4\big)\,d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4}, \frac{-i\alpha}{c|\xi|^2}, \frac{\xi_3|\xi|^2 I_3 - \xi_3\alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4}, \frac{-i\xi_3\alpha}{c|\xi|^2}\Big)\,d\xi_3. \quad (3.12)$$

Используя формулы (3.8), а также контурные интегралы из леммы 3.4, вычислим матрицу

$$M := \int\limits_{\gamma_+} \frac{|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4}\,d\xi_3 = \frac{\pi}{2a|\xi'|^3}\Big(2|\xi'|^2 I_3 - \beta\beta^\tau - |\xi'|^2 NN^\tau\Big). \quad (3.13)$$

Обозначим через $\Gamma_\alpha := (|\xi'|^{-1}\beta, a^\perp, N)$ матрицу, где вектор-столбец $a^\perp$ ($|a^\perp| = 1$) ортогонален β и N. Непосредственно проверяются следующие формулы:

$$\Gamma_\alpha^\tau\Gamma_\alpha = I_3, \quad \Gamma_\alpha^\tau\beta = (|\xi'|,0,0)^\tau =: |\xi'|e_1, \quad \Gamma_\alpha^\tau N = (0,0,1)^\tau =: e_3, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_\alpha^\tau\beta\beta^\tau\Gamma_\alpha = \mathrm{diag}(|\xi'|^2,0,0) =: |\xi'|^2 P_1, \quad \Gamma_\alpha^\tau NN^\tau\Gamma_\alpha = \mathrm{diag}(0,0,1) =: P_3. \quad (3.15)$$

Используя (3.14)-(3.15) в (3.13), получим, что

$$\det M = \det\Gamma_\alpha^\tau M\Gamma_\alpha = \frac{\pi^3}{8a^3|\xi'|^9}\det\Big(2|\xi'|^2 I_3 - |\xi'|^2 P_1 - |\xi'|^2 P_3\Big) = \frac{\pi^3}{4a^3|\xi'|^3} \neq 0$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (3.12) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 3.2 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. □

Лемма 3.6. *Следующая краевая задача эллиптична при $a \neq 0$, $a+b \neq 0$ и $2a+b \neq 0$:*

$$-a\Delta\vec{u}(x) - b\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) = \vec{v}(x), \quad x\in\Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{g}(x), \quad x\in S.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(x,D)$ — дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x,D) = -a\Delta - b\nabla\mathrm{div}, \quad \pi\mathcal{L}(x,\xi) = a|\xi|^2 I_3 + b\xi\xi^\tau. \quad (3.16)$$

Используя (3.10), проведем следующие вычисления:

$$\pi\det\mathcal{L}(x,\xi) = \det\pi\mathcal{L}(x,\xi) = \det\Gamma_\xi^\tau\pi\mathcal{L}(x,\xi)\Gamma_\xi = \det\big(a|\xi|^2 I_3 + b|\xi|^2 P_1\big) = a^2(a+b)|\xi|^6 \neq 0 \quad (3.17)$$

для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, то есть оператор $\mathcal{L}(x,D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро—Лопатинского. Зафиксируем $z_0 \in S$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (3.16) с заменой ξ на α. При этом $\det\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (3.17) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$, где $|\xi'|^2 = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\det\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3-корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

Найдем матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)$:

$$\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1} = \big(a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau\big)^{-1} = \frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}.$$

Учитывая, что $\pi\mathcal{B}((y',0),\xi',\xi_3) = I_3$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\int\limits_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}\big(I_3,\xi_3 I_3\big)\,d\xi_3 =$$

$$= \int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}, \frac{(a+b)\xi_3|\xi|^2 I_3 - b\xi_3\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}\Big)\,d\xi_3. \quad (3.18)$$

Используя формулы (3.8), а также контурные интегралы из леммы 3.4, вычислим матрицу

$$M := \int\limits_{\gamma_+} \frac{(a+b)|\xi|^2 I_3 - b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}\,d\xi_3 = \frac{\pi}{2a|\xi'|^3}\Big(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b}{a+b}\beta\beta^\tau - \frac{b}{a+b}|\xi'|^2 NN^\tau\Big).$$

Отсюда и из (3.14)-(3.15) получим, что

$$\det M = \det\Gamma_\alpha^\tau M\Gamma_\alpha = \frac{\pi^3}{8a^3|\xi'|^9}\det\Big(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b}{a+b}\big(|\xi'|^2P_1 + |\xi'|^2P_3\big)\Big) = \frac{\pi^3(2a+b)^2}{4a^3(a+b)^2|\xi'|^3} \neq 0$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (3.18) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 3.2 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. □

3.3. О существенном и дискретном спектре задачи.

Определение 3.3. Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (3.1)) назовем множество $\sigma_{ess} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda) - \text{нефредгольмов}\}$.

Для описания существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ определим две функции:

$$\begin{gathered}\varphi(\lambda) := \lambda c_1 - \Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l-\lambda}\Big],\\ \psi(\lambda) := \lambda\big(\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\big) - \Big[\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6(b_l-\lambda)} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l-\lambda}\Big].\end{gathered} \tag{3.19}$$

Следующие две леммы опираются на работу [19], из которой следует, что если оператор определяется эллиптической по Дуглису—Ниренбергу системой, то он фредгольмов в точности тогда, когда эллиптична соответствующая краевая задача. Последнее эквивалентно тому, что эллиптичен соответствующий дифференциальный оператор и краевые условия удовлетворяют условию дополнительности (условию Шапиро—Лопатинского).

Лемма 3.7. $\widetilde{b}_q \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ $(q=\overline{1,n})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$.

Доказательство. Докажем, что оператор $(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ фредгольмов в точности тогда, когда $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$. Пусть $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$, тогда из (3.4) при $\lambda = \widetilde{b}_q$, $\xi_0 = 0$ найдем, что $(\vec{u}; p_q)^\tau \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}_q$,

$$\mathcal{A}_q := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - \widetilde{b}_qA^{-1} - \dfrac{Q_0^*Q_0}{\widetilde{b}_q} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}Q_1^*Q_1}{b_l(b_l-\widetilde{b}_q)} + \sum_{l=1,l\neq q}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}Q_B^*Q_B}{\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l-\widetilde{b}_q)} & \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}Q_B^* \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}Q_B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}.$$

Верно и обратное утверждение. Таким образом, $\operatorname{dimKer}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{dimKer}\mathcal{A}_q < +\infty$. Далее, можно проверить, что

$$\mathcal{A}^* = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^* \\ \mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \Big\{\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}\big|\ \vec{u} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^*w \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Отсюда, проведя вычисления как и выше, получим, что $\operatorname{dimKer}(\mathcal{A}^* - \widetilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{dimKer}\mathcal{A}_q^* < +\infty$. Таким образом, оператор $(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ фредгольмов или нет одновременно с оператором $\mathcal{A}_q$.

Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $\mathcal{A}_q(\vec{u}; p_q)^\tau = (\vec{u}_0; p_{q0})^\tau$, имеет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\widetilde{b}_q}\varphi(\widetilde{b}_q)\Delta\vec{u}(x) - \dfrac{1}{\lambda}\Big[\psi(\lambda) - \dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q - \lambda}\Big]\Big|_{\lambda=\widetilde{b}_q}\nabla\operatorname{div}\vec{u}(x) - \widetilde{b}_q\rho(x)\vec{u}(x) - \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}\nabla p_q(x) = \rho(x)\vec{u}_0(x), \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}\operatorname{div}\vec{u}(x) = p_{q0}(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{0}, \quad x \in S.\end{cases}$$

Эта краевая задача при $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$ определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга и, согласно лемме 3.5, является эллиптической. Из работы [19] следует, что $\mathcal{A}_q$ фредгольмов. □

Из леммы 3.1 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$, кроме спектра пучка $L(\lambda)$, может содержать в себе еще некоторые точки из множества $\{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$. Если $c_1 > 0$ достаточно велико, то из доказанной леммы и леммы 3.1 следует, что спектры оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (3.1) и (3.3)) совпадают.

Лемма 3.8. $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(\lambda) \neq 0, \quad \frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) \neq 0, \quad \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \neq \infty.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda \notin \{0, b_1, \dots, b_m, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n\}$ (см. леммы 3.1, 3.7). Как и в лемме 3.7, здесь можно установить, что оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ фредгольмов одновременно с оператором $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ (см. определение пучка $L(\lambda)$ в (3.3)). Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}\vec{u} = \vec{u}_0$, имеет вид

$$-\frac{1}{2\lambda}\varphi(\lambda)\Delta\vec{u}(x) - \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) - \lambda\rho(x)\vec{u}(x) = \rho(x)\vec{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{0}, \quad x \in S.$$

Эта краевая задача при выполнении условий леммы определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга и согласно лемме 3.6 является эллиптической. Из работы [19] следует, что оператор $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ фредгольмов. □

Следствием лемм 3.1, 3.7 и 3.8 является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существенным спектром оператора* $\mathcal{A}$ *является множество*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big\{\varphi(\lambda) = 0\big\} \cup \big\{\frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\big\} \cup \big\{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\big\} \cup \{\infty\},$$

где функции $\varphi(\lambda)$ *и* $\psi(\lambda)$ *определены в* (3.19). *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений* (*с.з.*) *конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Из определения 3.3, лемм 3.1, 3.7, 3.8 следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 2.3 доказано, что оператор $-\mathcal{A}$ является максимальным диссипативным оператором. Следовательно, оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ непрерывно обратим при отрицательных λ, и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из [10, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. □

Отметим здесь еще раз, что для упрощения вычислений и формулировок некоторых утверждений предполагается выполненным условие $\{b_1, \dots, b_m\} \cap \{\widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_n\} = \varnothing$ (см. (2.13)). Из условий (2.13) также следует, что $\varphi(0) < 0$, $\psi(0) \leqslant 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что конечный существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из не более чем $3m + 2n + 3$ действительных положительных точек. Если уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ и $\psi(\lambda) = 0$ не имеют одинаковых корней, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит в точности из $3m + 2n + 3$ действительных положительных точек.

3.4. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности. Изучим вопрос о локализации спектра оператора $\mathcal{A}$ или, что то же, пучка $L(\lambda)$ (см. (3.3)). Прежде всего, из леммы 2.3 следует, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\}$. Далее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для любого как угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует* $R = R(\varepsilon) > 0$ *такое, что весь спектр задачи* (3.3) *принадлежит множеству* $\Lambda_\varepsilon \cup C_R$, *где* $\Lambda_\varepsilon := \{\,|\arg\lambda| < \varepsilon\}$, $C_R := \{\,|\lambda| < R\}$. *Более того, спектральная задача* (3.3) *имеет ветвь собственных значений* $\{\lambda_k^{(+\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенных в* Λ_ε *со следующей асимптотикой*:

$$\lambda_k^{(+\infty)} = \lambda_k(A)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty),$$

$$\lambda_k(A) = \Big\{\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2}\Big)\int\limits_{\Omega}\rho^{3/2}(x)\,d\Omega\Big\}^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$

Доказательство. Из представления

$$L(\lambda) = (I - \lambda A^{-1})(I - (I - \lambda A^{-1})^{-1}F(\lambda)), \quad F(\lambda) \to 0 \quad (\lambda \to \infty, \quad \lambda \notin \Lambda_\varepsilon)$$

следует, что существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что пучок $L(\lambda)$ (см. (3.3)) непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon \cup C_R)$. Наличие соответствующей ветви собственных значений и ее асимптотика следует из степенной асимптотики с.з. оператора A и теоремы А. С. Маркуса—В. И. Мацаева (см. [16]).

Асимптотика с.з. оператора A следует из [2, с. 10]. Точнее, согласно [2] собственные значения оператора A имеют асимптотику $\lambda_k(A) = C_A^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1))$ $(k \to +\infty)$, где

$$C_A := \frac{1}{24\pi^3} \int\limits_{\Omega} \rho^{3/2}(x)\, d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \mathrm{Tr}\Big\{ \Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 I_3 + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\Big] \xi\xi^\tau \Big)^{-3/2} \Big\}\, dS(\xi). \tag{3.20}$$

Как и в лемме 3.5, введем матрицу $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$, где вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ $(|a^\perp| = |b^\perp| = 1)$ ортогональны ξ и между собой. Используя формулы (3.10), найдем собственные значения матрицы в круглых скобках из (3.20):

$$\begin{aligned} \det\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\Big] \xi\xi^\tau \Big) = \det \Gamma_\xi^\tau \Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\Big] \xi\xi^\tau \Big) \Gamma_\xi = \\ = \det\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 I_3 - \lambda I_3 + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\Big] |\xi|^2 P_1 \Big) = \Big(\Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big] |\xi|^2 - \lambda \Big) \Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 - \lambda \Big)^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = 1/2 c_1 |\xi|^2$, $\lambda_3 = (\widetilde{c}_1 + 2/3 c_1)|\xi|^2$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{|\xi|=1} \mathrm{Tr}\Big\{ \Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big] |\xi|^2 I_3 + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\Big] \xi\xi^\tau \Big)^{-3/2} \Big\}\, dS(\xi) = \\ = \int\limits_{|\xi|=1} \Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2} \Big) |\xi|^{-3}\, dS(\xi) = 4\pi \Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2} \Big). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.20) следует асимптотика собственных значений оператора A. Теорема доказана. $\square$

В следующих двух теоремах установим более точную локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассуждения теоремы 3.3 будут основаны на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1, 20]. В связи с этим обстоятельством будем рассматривать задачу (3.1) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := H$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_0$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I, -\mathcal{I}_0)$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1, w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$.

Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi, \xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in L_+$ и *максимальным неотрицательным* $(L_+ \in \mathfrak{M}^+)$, если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-.

Известно (см. [1, с. 70]), что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ $(\|K_+\| \leqslant 1)$ такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, с. 84]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) $(\mathcal{A} \in (H))$, если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Теорема 3.3. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества с.з., расположенных симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Из факторизации (2.19) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса и положительной определенности оператора $\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\gg 0$ (см. лемму 3.1) найдем

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{-1}&=\begin{pmatrix}I & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^*\\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{-1},(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1})\begin{pmatrix}I & 0\\ \mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}=\\ &=\begin{pmatrix}A^{-1}-A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\\ (\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & (\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных с.з. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $\mathcal{A}^{-1}\in(H)$ (см. [1, следствие 5.21, с. 245]). В самом деле, из компактности оператора $A^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, с. 287]) оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+(\mathcal{A}^{-1}),L_-(\mathcal{A}^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $K_+:\mathcal{H}_+\to\mathcal{H}_-$, $\|K_+\|\leqslant 1$ и

$$L_+(\mathcal{A}^{-1})=\bigl\{(\vec{u};w)^\tau\in\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-|\ \ (\vec{u};w)^\tau=(\vec{u};K_+\vec{u})^\tau,\ \ \vec{u}\in\mathcal{H}_+\bigr\}.$$

Пусть $(\vec{u}_1;w_1)^\tau=(\vec{u}_1;K_+\vec{u}_1)^\tau\in L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\vec{u}_1;K_+\vec{u}_1)^\tau=(\vec{u}_2;K_+\vec{u}_2)^\tau$. Отсюда и из формулы (3.21) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$\begin{aligned}(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+&=-(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2}+\\ &+K_+\bigl(A^{-1}-A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2}\bigr)-K_+A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Отсюда и из $A^{-1/2}\in\mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+\in\mathfrak{S}_\infty$. Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Пусть λ_0 — невещественное с.з. оператора $\mathcal{A}$ (задачи* (3.1)*), тогда*

$$\gamma_1:=\bigl[2\|A^{-1/2}\|^2\bigr]^{-1}<\mathrm{Re}\lambda_0<\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2+\|Q_{00}\|\bigl(\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2\bigr)^{1/2}=:\gamma_2,$$
$$|\lambda_0|^2<2\mathrm{Re}\lambda_0\bigl(\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2\bigr).$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ — действительный, если выполнено условие

$$2\|A^{-1/2}\|^2\leqslant\bigl(\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2+\|Q_{00}\|\bigl(\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2\bigr)^{1/2}\bigr)^{-1}.\tag{3.23}$$

Доказательство. Пусть $\lambda\notin\{0,b_1,\ldots,b_m,\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\}$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ (задачи (3.1)). Тогда существует $0\neq\vec{z}\in H$ такой, что $L(\lambda)\vec{z}=0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\vec{z}$, с использованием (3.1) и леммы 2.2 получим, что

$$\begin{aligned}0=\bigl(L(\lambda)\vec{z},\vec{z}\bigr)_H&=\|\vec{z}\|_H^2-\lambda\|A^{-1/2}\vec{z}\|_H^2-\frac{1}{\lambda}\bigl(Q_0^*Q_0\vec{z},\vec{z}\bigr)_H+\sum_{l=1}^m\frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l-\lambda}\|Q_1\vec{z}\|_H^2+\sum_{l=1}^n\frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l-\lambda}\|Q_B\vec{z}\|_H^2=\\ &=\|\vec{z}\|_H^2-\lambda\|A^{-1/2}\vec{z}\|_H^2-\frac{1}{\lambda}\Bigl[\|Q_{00}\vec{z}\|_H^2-\sum_{l=1}^m\frac{c_{-l}}{b_l-\lambda}\|Q_1\vec{z}\|_H^2-\sum_{l=1}^n\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l-\lambda}\|Q_B\vec{z}\|_H^2\Bigr].\end{aligned}\tag{3.24}$$

Пусть $s:=m+n$. Обозначим через $\widehat{b}_l$ $(l=\overline{1,s})$ упорядоченные в порядке возрастания числа из множества $\{b_1,\ldots,b_m,\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\}$ (см. условия (2.4) и (2.13)), тогда соотношение (3.24) примет вид

$$1-\lambda p-\frac{1}{\lambda}\Bigl(q-\sum_{l=1}^s\frac{q_l}{\widehat{b}_l-\lambda}\Bigr)=0,\tag{3.25}$$

где $p:=\|A^{-1/2}\vec{z}\|^2\|\vec{z}\|^{-2}>0$, $q:=\|Q_{00}\vec{z}\|^2\|\vec{z}\|^{-2}$, а числа q_l определяются аналогичным образом в соответствии с перестановкой во множестве $\{b_1,\ldots,b_m,\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\}$.

Пусть λ_0 — невещественное с.з. оператора $\mathcal{A}$ (задачи (3.1)), тогда λ_0 есть корень уравнения (3.25) при некотором фиксированном $\vec{z}=\vec{z}_0$. Перепишем уравнение (3.25) в следующей форме:

$$0=(\lambda-\lambda^2p-q)\prod_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda)+\sum_{l=1}^{s}q_l\prod_{k\neq l}^{s}(\widehat{b}_k-\lambda)=$$
$$=-p(-1)^s\lambda^{s+2}+(-1)^s\lambda^{s+1}\Big[1+p\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l\Big]-(-1)^s\lambda^s\Big[q+\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l+p\sum_{i<j}\widehat{b}_i\widehat{b}_j\Big]+\ldots. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.25) имеет s действительных корней, которые мы обозначим через λ_l ($\lambda_l\in(\widehat{b}_{l-1},\widehat{b}_l)$, $l=\overline{1,s}$, $\widehat{b}_0:=0$), и еще два корня — λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0:=\mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0:=\mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0=-p\prod_{l=1}^{s}(\lambda_l-\lambda)\big((\lambda-\xi_0)^2+\eta_0^2\big)=-p(-1)^s\lambda^{s+2}+(-1)^s\lambda^{s+1}p\Big[2\xi_0+\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\Big]-$$
$$-(-1)^s\lambda^sp\Big[(\xi_0^2+\eta_0^2)+2\xi_0\sum_{l=1}^{s}\lambda_l+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\Big]+\ldots. \quad (3.27)$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{s+1} и λ^s из (3.26) и (3.27), получим

$$2\xi_0+\sum_{l=1}^{s}\lambda_l=\frac{1}{p}+\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l, \quad (3.28)$$

$$(\xi_0^2+\eta_0^2)+2\xi_0\sum_{l=1}^{s}\lambda_l+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{q}{p}+\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l+\sum_{i<j}\widehat{b}_i\widehat{b}_j. \quad (3.29)$$

Из (3.28) следует, что $2\mathrm{Re}\lambda_0=2\xi_0=p^{-1}+\sum\limits_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda_l)>p^{-1}\geqslant\|A^{-1/2}\|^{-2}$, и оценка снизу на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Далее мы следуем идеям из [20, т. 2, с. 378]. Обозначим $\delta:=2^{-1}\sum\limits_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda_l)$, $\omega:=(2p)^{-1}$, тогда $\xi_0=\omega+\delta$ (см. (3.28)). Выразим из (3.28) $\sum\limits_{l=1}^{s}\lambda_l$ и подставим его в (3.29). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2+2\delta\sum_{l=1}^{s}\lambda_l-\sum_{i<j}(\widehat{b}_i\widehat{b}_j-\lambda_i\lambda_j)=-\omega^2+2\omega(\delta+q)-\delta^2. \quad (3.30)$$

Из условия $\lambda_l\in(\widehat{b}_{l-1},\widehat{b}_l)$, $l=\overline{1,s}$ ($\widehat{b}_0:=0$) можно вывести следующую оценку (см. [20, т. 2, с. 380, формула (5.24)]):

$$\sum_{i<j}(\widehat{b}_i\widehat{b}_j-\lambda_i\lambda_j)<\sum_{j=1}^{s}(\widehat{b}_j-\lambda_j)\Big(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\Big)=2\delta\sum_{l=1}^{s}\lambda_l. \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует положительность правой части в (3.30), значит, $\omega<\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0=\xi_0<2\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}\leqslant\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2+\|Q_{00}\|\big[\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2\big]^{1/2}$, поскольку $\widehat{b}_s=\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (3.23), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее выразим из (3.29) $(\xi_0^2+\eta_0^2)=|\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (3.28). С использованием оценки (3.31) получим, что $|\lambda_0|^2<p^{-1}(q+\widehat{b}_s)$. Отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. □

Отметим здесь, что вместо условия (3.23) можно получить более компактное, однако более грубое достаточное условие: $\|A^{-1/2}\|\leqslant(3\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+4\|Q_{00}\|^2)^{-1/2}$.

3.5. О представлении решения эволюционной задачи в виде контурных интегралов и асимптотическом поведении решения. Из леммы 2.3, теорем 3.2, 3.3 и 3.4 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы и эта полугруппа имеет отрицательный тип, так как $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$ (см., например, [22, с. 118]). Это обстоятельство позволяет применить к задаче (2.17) (а затем и к задаче (2.8)) соответствующие теоремы о представлении решения эволюционного уравнения и об асимптотическом поведении этого решения.

Теорема 3.5. *Пусть* $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда решение задачи Коши* (2.8) *представимо в виде*

$$\vec{u}(t) = \mathcal{C}(t)\vec{u}^0 + \mathcal{S}(t)\vec{u}^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\Big[I - \lambda A^{-1} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l(b_l-\lambda)} e^{-(b_l-\lambda)t} Q_1^* Q_1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l-\lambda)} e^{-(\widetilde{b}_l-\lambda)t} Q_B^* Q_B\Big] A^{1/2}\vec{u}^0\,d\lambda,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\vec{u}^1\,d\lambda,$$

где контур Γ *является границей сектора* $\Lambda_{\omega,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda-\omega)| < \theta\}$ *и ориентирован так, что* $\mathrm{Im}\lambda$ *убывает при его обходе. Числа* $\omega \in (0, \big[2\|A^{-1/2}\|^2\big]^{-1})$ *и* $\theta \in (0, \pi/2)$ *выбраны так, чтобы* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega,\theta}$ (*см. теорему* 3.4).

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (2.8) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda t}(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\xi^0\,d\lambda, \tag{3.32}$$

где контур Γ выбирается, как описано в условии теоремы.

Проводя вычисления, как и в лемме 2.3, можно найти следующую формулу для резольвенты:

$$(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1} \\ (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & (\mathcal{G}-\lambda)^{-1} - (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Дальнейшее доказательство состоит в простых вычислениях с использованием в (3.32) формулы (3.33), формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$, связи $\vec{u}(t) = A_0^{-1/2}\vec{v}'(t)$ и формулы для пучка $L(\lambda)$. □

Теорема 3.6. *Пусть* $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и* $\vec{u}(t)$ *единственное* (*в силу теоремы* 2.1) *сильное решение задачи Коши* (2.8). *Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty}\vec{f}(t) = \vec{f} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty}\vec{u}(t) =: \vec{u} = A_0^{-1}\vec{f}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (2.8) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). При этом $\mathcal{F}(t) \to \mathcal{F} := (\vec{f}; \vec{0}; \ldots; \vec{0}; 0; \ldots; 0)^\tau$ при $t \to +\infty$.

По теореме 3.4 справедливо включение $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Вместе с тем, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор голоморфной полугруппы, это включение влечет отрицательный тип соответствующей полугруппы (см., например, [22, с. 118]). Тогда по теореме 4.4 из [22] $\xi(t) \to \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ при $t \to +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}\mathcal{X}=\mathcal{F}$. Полагая в (3.4) $\lambda=0$, $\xi=\mathcal{X}$, $\xi_0=\mathcal{F}$, найдем, что $\vec{v}=(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f}$. Отсюда следует, что $\vec{u}=A_0^{-1/2}(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f}$. Далее имеем

$$\vec{u}=A_0^{-1/2}(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f}=A_0^{-1/2}(Q_0^{-1})^*A^{-1/2}\vec{f}=A_0^{-1/2}(A^{1/2}A_0^{-1/2})^*A^{-1/2}\vec{f}=$$
$$=A_0^{-1/2}(A^{1/2}A_0^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}\vec{f}=A_0^{-1/2}(A_0^{-1/2}A^{1/2})|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}\vec{f}=A_0^{-1}\vec{f}.$$

Теорема доказана. □

Доказанная теорема показывает, что если внешнее поле, действующее на систему, стабилизируется, то вязкоупругое тело со временем принимает новое положение, удовлетворяющее стационарному уравнению теории упругости $A_0\vec{u}\equiv A\Big(\dfrac{1}{2}[c_0-\Gamma_p(0)],\widetilde{c}_0+\dfrac{1}{6}[c_0-\Gamma_p(0)]-\widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)\vec{u}=\vec{f}$ с измененными параметрами.

3.6. Леммы о пересчете корневых элементов. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Определение 3.4 (см. [15, с. 61]). Пусть λ_0 — собственное значение (с.з.), а η_0 — отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, т. е. $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0=0$. Элементы $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. η_0, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0)\eta_{j-k}=0$ $(j=1,2,\dots,n-1)$. Число n называют *длиной* цепочки $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Лемма 3.9 (см. [15, лемма 11.3, с. 62]). *Элементы $\eta_0,\eta_1,\dots,\eta_{n-1}$ образуют цепочку из с.п.э. $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0, тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0, такая, что $\eta(\lambda_0)\neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0)=k!\eta_k$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ и $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n.*

Определение 3.5 (см. [15, с. 62]). Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, для которой $\eta(\lambda_0)\neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0)=0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из с.п.э. $\{(k!)^{-1}\eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Для выяснения связи собственных и присоединенных элементов операторных пучков $\mathcal{A}(\lambda)$ и $L(\lambda)$ запишем пучок $\mathcal{A}(\lambda)$ в следующей форме:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta:=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda)\\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{z}\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad (\vec{z};w)^\tau\in\mathcal{H}=H\oplus\mathcal{H}_0,$$

где компоненты $\mathcal{A}_{ij}(\lambda)$ $(i,j=1,2)$ определяются естественным образом из (3.2). Тогда (см. (3.3))

$$L(\lambda)\vec{z}=\big[\mathcal{A}_{11}(\lambda)-\mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]\vec{z}=0,\quad \vec{z}\in H=\vec{L}_2(\Omega,\rho).$$

Лемма 3.10. *Пусть $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda):=(\vec{z}(\lambda);w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $\vec{z}(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$w(\lambda)=-\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)+(\lambda-\lambda_0)^n\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \tag{3.34}$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности λ_0 $(p(\lambda_0)\neq 0)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [15, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $\vec{z}(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0\in\mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (3.34). Поскольку $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, то из вида $L(\lambda)$ получим:

$$L(\lambda)\vec{z}(\lambda)=\big[\mathcal{A}_{11}(\lambda)-\mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]\vec{z}(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^n q(\lambda), \tag{3.35}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция $(q(\lambda_0) \neq 0)$. Подставим (3.34) в (3.35) и запишем полученное соотношение вместе с (3.34) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$, после простых преобразований получим:

$$\mathcal{A}(\lambda)\big(\vec{z}(\lambda); w(\lambda)\big)^\tau = (\lambda - \lambda_0)^n \big(q(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda)\big)^\tau.$$

Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (\vec{z}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (\vec{z}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, следовательно:

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)\vec{z}(\lambda) + \mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \tag{3.36}$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda) + \mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \tag{3.37}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции $(r(\lambda_0) \neq 0,\ p(\lambda_0) \neq 0)$. Из (3.37) следует (3.34). Подставив (3.34) в (3.36) получим, что

$$L(\lambda)\vec{z}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n \big(r(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\big).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. Из этого факта и формулы (3.34), рассуждая, как при доказательстве достаточности, получаем, что $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка n. Значит, $\vec{z}(\lambda)$ есть производящая функция ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. □

Как следствие из леммы 3.10 получаем следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (3.1)) и пучка $L(\lambda)$.

Теорема 3.7. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\vec{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. задачи* (3.1)*, отвечающей с.з. λ_0 $(\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots \widetilde{b}_n)$, тогда $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}\vec{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи* (3.3)*, отвечающая с.з. λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (3.3)*, отвечающая с.з. λ_0, тогда $\{\xi_k = (A^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum\limits_{l=0}^{k}(\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (3.1).

Доказательство. Пусть λ_0 $(\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots \widetilde{b}_n)$ — с.з. задачи (3.1) и $\xi(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из с.п.э. $\{\xi_k := (k!)^{-1}\xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$. Из равенства $(\mathcal{A} - \lambda))\xi = \mathcal{B}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}\xi$, где $\mathcal{B} := \mathrm{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)$, верного для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, следует, что $\mathcal{B}\xi(\lambda) = (A^{1/2}\vec{u}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 3.10, $\vec{z}(\lambda) := A^{1/2}\vec{u}(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$, и первое утверждение в теореме доказано.

Пусть теперь λ_0 — с.з. спектральной задачи (3.3) и $\vec{z}(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из с.п.э. $\{\vec{z}_k := (k!)^{-1}\vec{z}^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с (3.34) получим, что

$$\big(\vec{z}_k; w_k\big)^\tau := \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\big(\vec{z}(\lambda); -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)\big)^\tau\Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k = \overline{0, n-1} \tag{3.38}$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0. Для вторых компонент из (3.38) имеем с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$:

$$w_k = -\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{l=0}^{k}(\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l.$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей с.з. λ_0. Учитывая линейность оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$ и ее связь с задачей (3.1), можно показать, что набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (3.1). Теорема доказана. □

3.7. Свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Установим некоторые свойства системы корневых элементов, отвечающих собственным значениям из ветви с точкой сгущения в бесконечности. Следующее утверждение будет доказано для задачи (3.3) и без труда может быть сформулировано для задачи (3.1) в силу теоремы 3.7.

Теорема 3.8. *Система с.п.э. задачи* (3.3)*, отвечающих с.з., лежащим вне круга* $\{|\lambda| \leqslant R\}$*, при некотором* $R > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$ *образует* p*-базис* $(p > 3/2)$ *в* $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho)$ *с точностью до конечного дефекта. Если* $c_1 > 0$ *достаточно велико, то система с.э. задачи* (3.3)*, отвечающих с.з., лежащим вне круга* $\{|\lambda| \leqslant R\}$*, при некотором* $R > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$ *образует в* H p*-базис* $(p > 3/2)$.

Доказательство. Осуществим в задаче (3.3) замену спектрального параметра $\mu := \lambda^{-1}$ и преобразуем ее к следующему виду:

$$M(\mu)\vec{z} := \mu L(\mu^{-1})\vec{z} = \left[\mu I - A^{-1} + \mu^2 \mathcal{Q}^*(\mu\mathcal{G} - \mathcal{I}_0)^{-1}\mathcal{Q}\right]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho).$$

Оператор-функция $M(\mu)$ является самосопряженной. Кроме того, $M(0) = -A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ при $p > 3/2$ (см. теорему 3.2), а $M'(0) = I \gg 0$. Из [7] следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ система с.э. пучка $M(\mu)$, отвечающих с.з. из $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образует p-базис $(p > 3/2)$ в H с точностью до конечного дефекта. Отсюда следует первое утверждение в теореме при $R = \varepsilon^{-1} > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$.

Будем считать для простоты, что $\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} > 1$. Выберем отрезок $[0, r_1] \subset [0, [\max\{b_m, \widetilde{b}_n\}]^{-1})$, тогда $\|2\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - r_1\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)} \leqslant 2\|\mathcal{Q}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)}(1 - r_1 \max\{b_m, \widetilde{b}_n\})^{-1} \leqslant r_2$, где $r_2^{-1} \leqslant r_1$. Тогда при достаточно малом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\mu \in [-\varepsilon, r_2^{-1}]$

$$M'(\mu) = I - 2\mu\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} + \mu^2\mathcal{Q}^*\mathcal{G}(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} \gg I - 2\mu\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} \gg 0. \tag{3.39}$$

Пусть $\|A^{-1}\| < (2r_2)^{-1}$, тогда

$$M(r_2^{-1}) = \mu\Big[I - \frac{1}{\mu}A^{-1} - \frac{\mu}{2}\cdot 2\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big|_{\mu = r_2^{-1}} \gg \frac{1}{r_2}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2r_2}\cdot 2\|A^{-1}\|\Big]I \gg 0. \tag{3.40}$$

Легко видеть, что $M(-\varepsilon) \ll 0$. Отсюда, из (3.39), (3.40) и [7] следует, что система собственных элементов пучка $M(\mu)$, отвечающих собственным значениям из $[-\varepsilon, r_2^{-1}]$, образует p-базис $(p > 3/2)$ в H без дефекта. Отсюда следует второе утверждение в теореме при $R = r_2 > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$. □

Для доказательства следующего основного утверждения о свойствах системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ во всем пространстве $\mathcal{H}$ нам понадобятся некоторые понятия и обозначения из теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой (см. [1]).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с индефинитным скалярным произведением (см. перед теоремой 3.3). Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}, \quad \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda) |\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}.$$

Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Г. К. Лангера (см. [1, теорема 2.12, с. 271]), установим следующую теорему.

Теорема 3.9. *Имеют место следующие утверждения*:

1. $\mathrm{codim}\, \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{codim}\, \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ *— невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 *— числа, определенные в теореме* 3.4.
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$*. Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$*, то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4. *Если $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (соответственно $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), то в $\mathcal{H}$ существует почти $\mathcal{J}$-ортонормированный p-базис (при $p > 3$), составленный из собственных (соответственно корневых) элементов оператора $\mathcal{A}$. Если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то указанный базис из собственных элементов будет $\mathcal{J}$-ортонормированным.*

Доказательство. В теореме 3.3 установлено, что $\mathcal{A}^{-1} \in H$. Кроме того, из (3.22) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$, поскольку $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$, согласно теореме 3.2. Из теоремы 3.1 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более $3m+2n+4$ точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Г. К. Лангера. Применим эту теорему к оператору $\mathcal{A}^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует утверждение пункта 1.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H} \iff \mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) | \lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, замечание 3.8, с. 271] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A})$ $(\lambda \neq 0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n)$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено. В силу теоремы 3.7 это эквивалентно тому, что в $\mathrm{Ker}L(\lambda)$ существует такой элемент $\vec{z}_0$, что элемент $\xi_0 = (A^{-1/2}\vec{z}_0; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi = (A^{-1/2}\vec{z}; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z})^\tau$, где $\vec{z} \in \mathrm{Ker}L(\lambda)$, т. е. $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}\big)_H = 0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$, $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$. Таким образом, λ есть кратный корень уравнения (3.24) при $\vec{z} = \vec{z}_0$. Полагая в формуле (3.27) теоремы 3.4 $\eta_0 = 0$ и считая, что ξ_0 и есть этот кратный корень, найдем, что $\lambda \in (\gamma_1, \gamma_2)$.

Из леммы 3.1 следует, что $0, b_1, \ldots, b_m \notin \sigma_p(\mathcal{A})$, а значит $0, b_1, \ldots, b_m \notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $\widetilde{b}_q \notin (\gamma_1, \gamma_2)$ при некотором $q = \overline{1, n}$, тогда $\widetilde{b}_q \leqslant \gamma_1$, поскольку $\widetilde{b}_q \leqslant \max\{b_m, \widetilde{b}_n\} < \gamma_2$. Допустим, что $\widetilde{b}_q \leqslant \gamma_1$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ вырождено, т. е. существует $\xi_0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$. В частности, $[\xi_0, \xi_0] = 0$.

Пусть $\xi_0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$, тогда из (3.4) имеем

$$\begin{cases} A^{1/2}\Big[A^{1/2}\vec{u}_0 + Q_0^*\vec{v}_0 + \sum\limits_{l=1}^{m}\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_{l0} + \sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^* p_{l0}\Big] - \widetilde{b}_q\vec{u}_0 = 0, \\ -Q_0A^{1/2}\vec{u}_0 - \widetilde{b}_q\vec{v}_0 = 0, \\ -\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\vec{u}_0 + (b_l - \widetilde{b}_q)\vec{v}_{l0} = 0, \quad l = \overline{1, m}, \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\vec{u}_0 + (\widetilde{b}_l - \widetilde{b}_q)p_{l0} = 0, \quad l = \overline{1, n}, \quad l \neq q, \\ Q_BA^{1/2}\vec{u}_0 = 0. \end{cases} \tag{3.41}$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на $\vec{u}_0$ и преобразуем его с помощью оставшихся уравнений. В результате получим следующее соотношение:

$$1 - \widetilde{b}_q\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} = 0, \quad z_0 := A^{1/2}\vec{u}_0. \tag{3.42}$$

Далее из соотношения $[\xi_0, \xi_0] = \|\vec{u}_0\|_H^2 - \|\vec{v}_0\|_H^2 - \sum\limits_{l=1}^{m}\|\vec{v}_{l0}\|_H^2 - \sum\limits_{l=1}^{n}\|p_{l0}\|_{L_{2,\Omega}}^2 = 0$ и (3.41) имеем

$$-\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} + \frac{1}{\widetilde{b}_q^2}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \widetilde{b}_q)^2}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} = -\|p_{q0}\|_{L_{2,\Omega}}^2. \tag{3.43}$$

Определим функцию

$$f(\lambda) := 1 - \lambda\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} - \frac{1}{\lambda}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \lambda)}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2},$$

тогда из (3.42) и (3.43) получим, что $f(\widetilde{b}_q)=0$, $f'(\widetilde{b}_q)\leqslant 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $f'(\widetilde{b}_q)\geqslant 0$. Следовательно, $p_{q0}=0$ и $f'(\widetilde{b}_q)=0$ и, таким образом, точка $\widetilde{b}_q$ есть кратный корень уравнения $f(\lambda)=0$. Рассуждая далее, как в теореме 3.4 при исследовании уравнения (3.24), найдем, что $\widetilde{b}_q>\gamma_1$, что противоречит предположению $\widetilde{b}_q\leqslant\gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A})\subset(\gamma_1,\gamma_2)$ и утверждение 2 доказано.

3. Первые части утверждений 3 и 4 — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Г. К. Лангера. Если $\gamma_2\leqslant\gamma_1$, то $s(\mathcal{A})=\varnothing$ и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A})=\mathcal{H}$ и соответствующий p-базис (при $p>3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. □

3.8. О представлении решения эволюционной задачи в виде ряда. Будем считать, что $\gamma_2\leqslant\gamma_1$, т. е. выполнено условие (3.23), тогда по теореме 3.9 существует $\mathcal{J}$-ортонормированный p-базис (при $p>3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По теореме 3.7 этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{gathered}\bigl\{\xi_k^{\pm}:=\bigl(A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm};(\mathcal{G}-\lambda_k^{\pm})^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)^{\tau}\bigr\}_{k=1}^{\infty},\\ \xi_k^{\pm}\in L_{\pm}(\mathcal{A}^{-1}),\quad [\xi_k^+,\xi_j^+]=\delta_{kj},\quad [\xi_k^-,\xi_j^-]=-\delta_{kj},\quad [\xi_k^+,\xi_j^-]=0.\end{gathered}\tag{3.44}$$

Собственные значения λ_k^+ составляют ветвь из теоремы 3.2, а с.з. λ_k^- — оставшийся спектр.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (2.17) в форме

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^+(t)\xi_k^++\sum_{j=1}^{\infty}c_j^-(t)\xi_j^-,\quad c_k^+(0)=[\xi^0,\xi_k^+],\quad c_j^-(0)=-[\xi^0,\xi_j^-].\tag{3.45}$$

Из (2.17), (3.44), (3.45), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\begin{gathered}\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(e^{-\lambda_k^+t}[\xi^0,\xi_k^+]+\int_0^t e^{-\lambda_k^+(t-s)}[\mathcal{F}(s),\xi_k^+]\,ds\Bigr)\xi_k^+-\\ -\sum_{j=1}^{\infty}\Bigl(e^{-\lambda_j^-t}[\xi^0,\xi_j^-]+\int_0^t e^{-\lambda_j^-(t-s)}[\mathcal{F}(s),\xi_j^-]\,ds\Bigr)\xi_j^-,\end{gathered}\tag{3.46}$$

$$[\xi^0,\xi_k^{\pm}]=\bigl(\vec{u}^1,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)_H+\frac{1}{\lambda_k^{\pm}}\bigl(A_0\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)_H,\quad k\in\mathbb{N},$$

$$[\mathcal{F}(t),\xi_k^{\pm}]=\bigl(\vec{f}(t)-\Gamma_p(t)A_1\vec{u}_0-\widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}_0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)_H,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Из (3.46), учитывая, что $\xi(t)=(\vec{u}'(t);w(t))^{\tau}$, $w(t)=(\vec{v}'(t);\dots)^{\tau}$, $\vec{u}(t)=A_0^{-1/2}\vec{v}'(t)$, получим в явном виде разложение решения $\vec{u}(t)$ задачи (2.8) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\vec{z}_k^{\,\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.3), связанных с $\mathcal{J}$-ортонормированным базисом (3.44):

$$\vec{u}(t)=\bigl(\mathcal{C}_+(t)-\mathcal{C}_-(t)\bigr)\vec{u}^0+\bigl(\mathcal{S}_+(t)-\mathcal{S}_-(t)\bigr)\vec{u}^1+\int_0^t\bigl(\mathcal{S}_+(t-s)-\mathcal{S}_-(t-s)\bigr)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\begin{aligned}C_{\pm}(t)\vec{u}^0:=\sum_{k=1}^{+\infty}\Bigl[&-\frac{1}{(\lambda_k^{\pm})^2}\,e^{-\lambda_k^{\pm}t}\bigl(A_0\vec{u}^0,A^{-1/2}z_k^{\pm}\bigr)_H+\\ &+\sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{\lambda_k^{\pm}b_l(b_l-\lambda_k^{\pm})}\bigl(e^{-\lambda_k^{\pm}t}-e^{-b_lt}\bigr)\bigl(A_1\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)_H+\\ &+\sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\lambda_k^{\pm}\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l-\lambda_k^{\pm})}\bigl(e^{-\lambda_k^{\pm}t}-e^{-\widetilde{b}_lt}\bigr)\bigl(B^*B\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\bigr)_H\Bigr]A^{-1/2}z_k^{\pm},\end{aligned}$$

$$S_{\pm}(t)\vec{u}^1:=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k^{\pm}}\,e^{-\lambda_k^{\pm}t}\bigl(\vec{u}^1,A^{-1/2}z_k^{\pm}\bigr)_HA^{-1/2}z_k^{\pm}.$$

4. О малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа

В этом разделе исследуется задача о малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа — частный случай задачи (2.5)-(2.6). В пункте 4.1 кратко обсуждается постановка задачи (см. (4.1)) и ее сведение к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка с главным оператором $\mathcal{A}$. В пункте 4.2 выводится спектральная задача, связанный с ней операторный пучок и характеристическое уравнение. Вводятся характеристические функции (4.8), играющие важную роль в дальнейших построениях. Приводится теорема 4.1 о структуре спектра и асимптотике всех ветвей спектра оператора $\mathcal{A}$.

В пункте 4.4 в теоремах 4.2 и 4.3 доказывается, что в невырожденном случае система собственных элементов, а в вырожденном — корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис при $p > 3$ основного гильбертова пространства. При этом не используются методы индефинитной метрики. Построения, описанные в пунктах 4.3-4.4, можно будет применить при исследовании синхронно-изотропной среды гиперболического типа.

В пункте 4.5 в теореме 4.4 в невырожденном случае строится система, биортогональная к системе собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. В теореме 4.5 приводится представление решения задачи (4.1) в виде ряда по системе собственных элементов исходного оператора теории упругости.

4.1. Постановка задачи, основные операторные уравнения и теорема о разрешимости. Рассмотрим специальный частный случай задачи (2.2)–(2.6). Будем считать, что в задаче (2.2)–(2.6), описывающей движения начально-изотропного вязкоупругого тела, выполнены следующие условия на коэффициенты:

$$m = n, \quad b_l = \widetilde{b}_l \ \ (l = \overline{1, m = n}), \quad c_{-l} = 2\mu\alpha_{-l}, \ \ \widetilde{c}_{-l} = \eta\alpha_{-l}, \ \ \alpha_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{-1, m}), \ \ \mu > 0, \ \ \eta \geqslant 0,$$

тогда соответствующая система уравнений и граничных условий будет описывать малые движения синхронно-изотропной среды параболического типа. Задача Коши (2.8) примет вид

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -\alpha_1 A\frac{d\vec{u}}{dt} - \alpha_0 A\vec{u} + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\alpha_{-l}A\vec{u}(s)\,ds + \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \ \ \vec{u}'(0) = \vec{u}^1, \tag{4.1}$$

где $A := A\Big(\mu, \eta + \dfrac{1}{3}\mu\Big)$. В этом пункте обозначения операторов могут не совпадать с соответствующими операторами из разделов 2 и 3, что, впрочем, ясно из контекста.

Рассуждая, как в пункте 2.3, можно задачу Коши (4.1) свести к задаче Коши

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{\alpha_1 A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + \beta A^{1/2}\vec{u} + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\beta_l A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t), \ \ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \ \vec{u}'(0) = \vec{u}^1,$$

$$\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l}e^{-b_l t}A\vec{u}_0, \quad \beta := \alpha_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l} > 0, \quad \beta_l := \frac{\alpha_{-l}}{b_l} \ \ (l = \overline{1, m}). \tag{4.2}$$

Введем по полю $\vec{u}$ объекты

$$\beta^{1/2}A^{1/2}\vec{u}(t) =: \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \big(\vec{v}(0) = 0\big), \qquad \int_0^t e^{-b_l(t-s)}\beta_l^{1/2}A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: \vec{v}_l(t), \quad l = \overline{1, m},$$

и перепишем уравнение из (4.2) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{\alpha_1 A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \beta^{1/2}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\beta_l^{1/2}\vec{v}_l\Big\} + \vec{f}_0(t), \\ \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \beta^{1/2}A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt}, \quad \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} = \beta_l^{1/2}A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - b_l\vec{v}_l, \ \ l = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Эту систему (с начальными условиями) будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \mathcal{H}_0$

$(H = \vec{L}_2(\Omega,\rho), \mathcal{H}_0 := \oplus_{l=1}^{m+1} H)$:
$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{4.3}$$
Здесь обозначено $\xi := (\vec{u}'; w)^\tau$, $w := (\vec{v}'; \vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^1; w^0)^\tau$, $w^0 := (\beta^{1/2} A^{1/2} \vec{u}^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\vec{f}_0(t); \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, а для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы:
$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \big| \; \alpha_1 \vec{u} + A^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A) \Big\},$$
где I, $\mathcal{I}_0$ — единичные операторы в H и $\mathcal{H}_0$ соответственно,
$$\mathcal{Q} := \big(\beta^{1/2} I, \beta_1^{1/2} I, \ldots, \beta_m^{1/2} I\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Можно доказать, как и в лемме 2.3, что оператор $-\mathcal{A}$ — максимальный диссипативный. Основываясь на задаче Коши (4.3) и факторизации оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса, можно доказать теорему об однозначной сильной разрешимости задачи (4.1) (см. теорему 2.1).

4.2. Основная спектральная задача, операторный пучок и асимптотика спектра. Будем разыскивать решения однородного уравнения из (4.3) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:
$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.4}$$
которую будем ассоциировать с задачей о спектре синхронно-изотропного вязкоупругого тела параболического типа или, что то же, с задачей о спектре однородного интегродифференциального уравнения второго порядка из (4.1).

Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществив в спектральной задаче (4.4) замену искомого элемента $\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\xi = \eta =: (\vec{z}; w)^\tau$, получим спектральную задачу
$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \alpha_1 I - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \tag{4.5}$$

Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (4.5) найдем, что
$$L(\lambda)\vec{z} := \Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\Big]\vec{z} \equiv \Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\beta I + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} I\Big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H. \tag{4.6}$$

Можно проверить, как и в лемме 3.1, что $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает со спектром пучка $L(\lambda)$ (спектром задачи (4.6)).

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $\vec{u}_k = \vec{u}_k(A^{-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ — k-е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1}, тогда $\vec{z}_k := \vec{u}_k$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$ и спектр задачи (4.6) может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:
$$\alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Определим характеристические функции
$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^{m} \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \end{aligned} \tag{4.8}$$
и обозначим через γ_p $(p = \overline{1, m+1})$ корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1, m},\ b_0 := 0)$, $\gamma_{m+1} > b_m$ и $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ $(p = \overline{1, m+1})$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$ корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что $\gamma_p < \lambda_k^{(p)} \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1, m},\ b_0 := 0)$. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m})$, то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$.

Если $\lambda_k^{(m+1)} \neq \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, то $g_k'(\lambda_k^{(m+1)}) > 0$, $g_k'(\lambda_k^{(m+2)}) < 0$. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$, при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (4.7) приводит к следующей теореме.

Теорема 4.1. *За исключением точек* $\{\gamma_l\}_{l=1}^{m+1}$, *спектр оператора* $\mathcal{A}$ (*или пучка* $L(\lambda)$) *состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены на действительной положительной полуоси, за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных собственных значений. Все собственные значения можно разбить на* $m+2$ *серии* $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(p=\overline{1,m+2})$ *со следующим асимптотическим поведением*:

$$\lambda_k^{(p)} = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g_\infty'(\gamma_p)}\lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1}))\ \ (k\to+\infty), \qquad p=1,2,\dots,m+1,$$

$$\lambda_k^{(+\infty)} := \lambda_k^{(m+2)} = \frac{\alpha_1}{\lambda_k(A^{-1})} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \Big[\sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^3}\Big]\lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1}))\ \ (k\to+\infty),$$

где (*см. теорему* 3.2)

$$\lambda_k(A^{-1}) = \Big[\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\mu^{-3/2} + \big(\eta+\frac{4}{3}\mu\big)^{-3/2}\Big)\int\limits_\Omega \rho^{3/2}(x)\,d\Omega\Big]^{2/3} k^{-2/3}(1+o(1))\ \ (k\to+\infty).$$

4.3. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$. В соответствии с теоремой 3.7 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 4.1) могут быть записаны следующим образом:

$$\widetilde{\xi}_k^{(p)} = \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k \equiv \Big(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1-\lambda_k^{(p)}}; \dots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m-\lambda_k^{(p)}}\Big)^\tau \vec{u}_k,\ \ p=\overline{1,m+2},\ \ k\in\mathbb{N}. \tag{4.9}$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. *Пусть* $J := \operatorname{diag}(1,-I)$ — *каноническая симметрия в* $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{m+1}$,

$$\begin{gathered}\varphi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau, \quad p=\overline{1,m+2}, \quad k\in\mathbb{N},\\ R_{k,p} := \begin{cases}\big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p=\overline{1,m+1}, \quad k\in\mathbb{N},\\ \lambda_k^{-1/2}, & p=m+2, \quad k\in\mathbb{N}.\end{cases}\end{gathered} \tag{4.10}$$

При всех $p,q=\overline{1,m+2}$, $k\in\mathbb{N}$ *имеют место следующие формулы*:

$$\big(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0,\ \ \lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}, \qquad \big(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \tag{4.11}$$

Доказательство. При $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (4.8), $g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$ и тождества Гильберта найдем

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \big((\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G}-\lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}\Big] =\\ &= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big] = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q}-\\ &- \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big] = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}}-\lambda_k^{(p)}}\Big[\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \alpha_1 + \alpha_1 - \lambda_k^{(p)}\lambda_k\Big]\Big] = 0.\end{aligned}$$

Далее из (4.8) имеем

$$\big(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\Big] = -g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть* $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \dots, \varphi_k^{(m+2)})$ $(k\in\mathbb{N})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_k^{(p)}$ $(p=\overline{1,m+2})$. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Существует* $C_1 > 0$ *такое, что* $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_1$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Если* $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$, *то* $\det M_k \neq 0$.
3. *В условиях пункта* 2 *существует* $C_2 > 0$ *такое, что* $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_2$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу теоремы 4.1 очевидно, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены при $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Далее с помощью формул (4.10), (4.11) из леммы 4.1 найдем, что

$$M_k^\tau J M_k = -\mathrm{diag}\big(g_k'(\lambda_k^{(1)})R_{k,1}^2, g_k'(\lambda_k^{(2)})R_{k,2}^2, \ldots, g_k'(\lambda_k^{(m+2)})R_{k,m+2}^2\big).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_k\big)^2 = \det M_k^\tau J M_k = (-1)^{m+2}\prod_{p=1}^{m+2} g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (4.10) и $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$, что

$$\big(\det M_k\big)^2 = \frac{-1}{\big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{m+1}\lambda_k}\prod_{p=1}^{m+2} g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0.$$

Далее с использованием (4.8) и теоремы 4.1 вычислим

$$\lim_{k\to+\infty}\big(\det M_k\big)^2 = \frac{1}{\big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{m+1}}\prod_{p=1}^{m+1}\lim_{k\to+\infty} g_k'(\lambda_k^{(p)}) \cdot \lim_{k\to+\infty}\frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{\lambda_k} = 1.$$

Отсюда и из оценки $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant |\det M_k|^{-1}\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$ (см. [10, с. 42, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. Лемма доказана. □

Лемма 4.3. *Система векторов*

$$\varphi_\infty^{(p)} := \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}\Big(0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1}\mathcal{Q}\Big)^\tau,\ \ p = \overline{1, m+1}, \quad \varphi_\infty^{(m+2)} := \big(1; 0_{m+1}\big)^\tau \tag{4.12}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой с учетом (4.8) и $g_\infty(\gamma_p) = 0$. □

Лемма 4.4. *Пусть* $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \ldots, \varphi_\infty^{(m+2)})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_\infty^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$. *Тогда матрица* M_∞ *ортогональна*: $M_\infty^* = M_\infty^\tau = M_\infty^{-1}$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 4.3. □

Лемма 4.5. *Существует* $C > 0$ *такое, что* $\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{1/2}$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство следует из лемм 4.1, 4.3 и асимптотик из теоремы 4.1. □

4.4. О p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Следствием лемм 4.3 и 4.4 является следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Система элементов* $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)}\vec{u}_k\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$ *является ортонормированным базисом пространства* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 4.3 и ортонормированности системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует $\xi = (\vec{z}; \vec{v}; \vec{v}_1 \ldots; \vec{v}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что $\big(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $M_\infty^\tau\big((\vec{u}_k, \vec{z})_H; (\vec{u}_k, \vec{v})_H; (\vec{u}_k, \vec{v}_1)_H; \ldots; (\vec{u}_k, \vec{v}_m)_H\big) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 4.4 и из полноты системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$ тогда получим, что $\vec{z} = \vec{v} = \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_m = \vec{0}$. То есть, $\xi = 0$. □

С помощью набора матриц S_k ($k \in \mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(\xi^{(1)}_{k,\infty};\ldots;\xi^{(m+2)}_{k,\infty}\Big) S_k \begin{pmatrix} \big(\xi,\xi^{(1)}_{k,\infty}\big)_{\mathcal{H}} \\ \vdots \\ \big(\xi,\xi^{(m+2)}_{k,\infty}\big)_{\mathcal{H}} \end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{p=1}^{m+2}\xi^{(p)}_{k,\infty}\sum_{q=1}^{m+2}S_k^{pq}\big(\xi,\xi^{(q)}_{k,\infty}\big)_{\mathcal{H}}\right] \tag{4.13}$$

и будем писать при этом $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$.

Лемма 4.7. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2. *Пусть* $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Если* $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k$, *то* $\mathcal{S}^* \longleftrightarrow S_k^*$.
3. *Пусть* $\mathcal{S},\mathcal{T} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, *тогда* $\mathcal{S}\mathcal{T} \longleftrightarrow S_kT_k$. *В частности,* $\mathcal{S}^{-1} \longleftrightarrow S_k^{-1}$.

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi^{(p)}_{k,\infty}\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$. □

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы: о p-базисности специальным образом нормированной системы (4.9) собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае и о p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Теорема 4.2. *Пусть* $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1,m+2}$, $k \in \mathbb{N}$). *Тогда система собственных элементов* $\{\xi_k^{(p)} := \varphi_k^{(p)}\vec{u}_k\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует* p-*базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p > 3$.

Доказательство. Положим $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi^{(q)}_{l,\infty} = \xi^{(q)}_l$ при $q = \overline{1,m+2}$, $l \in \mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq} = \overline{\big(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}}$ и $\big(\xi_l^{(q)},\xi^{(p)}_{k,\infty}\big)_{\mathcal{H}} = 0$ при $l \neq k$, вычислим

$$\mathcal{S}\xi^{(q)}_{l,\infty} = \big(\xi^{(1)}_{l,\infty};\ldots;\xi^{(m+2)}_{l,\infty}\big)M_\infty^*M_l\big(0;\ldots;0;1_q;0;\ldots;0\big)^\tau =$$

$$= \big(\xi^{(1)}_{l,\infty};\ldots;\xi^{(m+2)}_{l,\infty}\big)\Big(\overline{\big(\varphi_\infty^{(1)},\varphi_l^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}};\ldots;\overline{\big(\varphi_\infty^{(m+2)},\varphi_l^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}}\Big)^\tau = \sum_{p=1}^{m+2}\overline{\big(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_l^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}}\,\xi^{(p)}_{l,\infty} =$$

$$= \sum_{p=1}^{m+2}\big(\varphi_l^{(q)},\varphi_\infty^{(p)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}\xi^{(p)}_{l,\infty} = \sum_{p=1}^{m+2}\big(\xi_l^{(q)},\xi^{(p)}_{l,\infty}\big)_{\mathcal{H}}\xi^{(p)}_{l,\infty} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\big(\xi_l^{(q)},\xi^{(p)}_{k,\infty}\big)_{\mathcal{H}}\xi^{(p)}_{k,\infty} = \xi_l^{(q)}.$$

Из леммы 4.7, условия $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ ($p = \overline{1,m+2}$, $k \in \mathbb{N}$), лемм 4.2 и 4.4 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 4.6 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p > 3$.

Положим $T_k := M_k - M_\infty$, тогда с учетом лемм 4.4 и 4.7 получим, что

$$\mathcal{S} \longleftrightarrow M_\infty^*M_k = M_\infty^*(M_\infty + T_k) = I + M_\infty^*T_k \longleftrightarrow \mathcal{I} + \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}^*\mathcal{T} \longleftrightarrow (T_k^*M_\infty)(M_\infty^*T_k) = T_k^*T_k.$$

Обозначим через $\lambda_k\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big)$ и $\lambda_k\big((T^*T)^{1/2}\big)$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T^*T)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 4.5 получим, что

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\lambda_r^p\big((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\lambda_l^p\big((T_k^*T_k)^{1/2}\big) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\big[\lambda_l\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2} \leqslant$$

$$\leqslant (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\big[\lambda_{\max}\big(T_k^*T_k\big)\big]^{p/2} = (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k^*T_k\|^{p/2}_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant$$

$$\leqslant (m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k\|^p_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant (m+2)C^p\sum_{k=1}^{+\infty}\big[\lambda_k(A^{-1})\big]^{p/2} < +\infty$$

при $p/2 > 3/2$ (см. теорему 3.2). Следовательно, $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p > 3$. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. Этот корень может находиться в зоне $\lambda > b_m$ и быть двукратным. Точнее, в этом случае при некотором $k \in \mathbb{N}$ будет $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\vec{z}$ — это первый присоединенный элемент к собственному элементу $\vec{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$. Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к $\vec{u}_k$ элемента можно взять его же.

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = \big(\lambda_k^{1/2}\vec{u}_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\vec{u}_k\big)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(m+2)}$. Вычислим в соответствии с теоремой 3.7 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = \big(0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\vec{u}_k\big)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)}\vec{u}_k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. Этот корень может быть лишь в зоне $0 < \lambda < b_m$. В этом случае при указанном k и некотором $p \in \{1, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\vec{z}$ — это второй присоединенный элемент к собственному элементу $\vec{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_k''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = 0$, $L'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_k'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = 0$ и

$$2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = 2^{-1}g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + g_k'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = 0.$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к $\vec{u}_k$ элемента можно взять элемент $\vec{u}_k$.

Вычислим в соответствии с теоремой 3.7 первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k0}^{(p)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k1}^{(p)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= \big(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k2}^{(p)}\vec{u}_k. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из теоремы 4.2. Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (4.14) или (4.15) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента, может быть лишь конечное количество.

Теорема 4.3. *Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов.

Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (4.14). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi = (\vec{z}; \vec{v}; \vec{v}_1 \ldots; \vec{v}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\big(\xi_k^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m+2}, \ \ k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, \\ &\big(\xi_s^{(p)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m}, \quad \big(\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \big(\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi\big)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Первая строчка в (4.16) означает, что $M_k^\tau\big((\vec{u}_k,\vec{z})_H;(\vec{u}_k,\vec{v})_H;(\vec{u}_k,\vec{v}_1)_H;\ldots;(\vec{u}_k,\vec{v}_m)_H\big)=0$ при $k=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots$ (см. лемму 4.2). Отсюда следует, что

$$(\vec{u}_k,\vec{z})_H=(\vec{u}_k,\vec{v})_H=(\vec{u}_k,\vec{v}_1)_H=\cdots=(\vec{u}_k,\vec{v}_m)_H=0,\quad k=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots. \tag{4.17}$$

Вторая строчка в (4.16) означает, что $M_{s,1}^\tau\big((\vec{u}_s,\vec{z})_H;(\vec{u}_s,\vec{v})_H;(\vec{u}_s,\vec{v}_1)_H;\ldots;(\vec{u}_s,\vec{v}_m)_H\big)=0$, где $M_{s,1}=M_{s,1}(\varphi_s^{(1)},\varphi_s^{(2)},\ldots,\varphi_s^{(m)},\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (4.17) и полноты в H системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $\vec{z}=\vec{v}=\vec{v}_1=\cdots=\vec{v}_m=\vec{0}$, то есть, $\xi=0$.

Пусть, как и в лемме 4.1, $J=\operatorname{diag}(1,-I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}\big(J\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s0}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad \big(J\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{2}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\neq 0,\\ \big(J\varphi_{s1}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}).\end{gathered}\tag{4.18}$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G}-\lambda)^{-n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{k+1}}(\mathcal{G}-\lambda)^{-(n-k)},\quad \mu,\lambda\in\rho(\mathcal{G}),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{4.19}$$

С использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)})=0$ $(p=\overline{1,m})$, $g_s(\lambda_s^{(m+2)})=g_s'(\lambda_s^{(m+2)})=0$ и формулы (4.19) при $n=2$ можно найти, что при всех $p=1,2,\ldots,m$

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}&=-R_{s,p}\big((\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}=\\ &=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}=\\ &=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]\mathcal{Q}=\\ &=-R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k-\alpha_1}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k-\alpha_1}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]=0.\end{aligned}\tag{4.20}$$

Из (4.18) и (4.20) найдем, что

$$M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=\begin{pmatrix}-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)})\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,1}\big)^2=\det M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=(-1)^{m+1}\Big[\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\Big]^2\prod_{p=1}^m g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2\neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,1}\neq 0$.

Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (4.15). Не ограничивая общности, можно считать, что $p=m$. Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi=(\vec{z};\vec{v};\vec{v}_1\ldots;\vec{v}_m)^\tau\in\mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned}&\big(\xi_k^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad p=\overline{1,m+2},\quad k=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,\\ &\big(\xi_s^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad p=\overline{1,m-1},\quad \big(\xi_{s0}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s1}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s2}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Первая строчка в (4.21), как и выше, влечет (4.17). Вторая строчка в (4.21) означает, что $M_{s,2}^\tau\big((\vec{u}_s,\vec{z})_H;(\vec{u}_s,\vec{v})_H;(\vec{u}_s,\vec{v}_1)_H;\ldots\big)=0$, где $M_{s,2}=M_{s,2}(\varphi_s^{(1)},\ldots,\varphi_s^{(m-1)},\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (4.17) и полноты в H системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ получим, как и выше, что $\vec{z} = \vec{v} = \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_m = \vec{0}$ и, значит, $\xi = 0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}
\big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \\
\big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = \big(J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!} g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \neq 0, \\
\big(J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{4!} g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}), \quad \big(J\varphi_{s2}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{5!} g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}), \\
\big(J\varphi_{s}^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m-1.
\end{gathered} \tag{4.22}$$

Здесь последнее соотношение выводится так же как в (4.20). Далее с использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ $(p = \overline{1, m-1})$, $g_s(\lambda_s^{(m)}) = g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$ и формулы (4.19) при $n = 3$ можно найти, что при всех $p = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned}
\big(J\varphi_{s}^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}\big((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3}\Big]\mathcal{Q} = \\
&= -R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k - \alpha_1}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)}\lambda_k - \alpha_1}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3}\Big] = 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Из (4.22) и (4.23) найдем, что

$$M_{s,2}^{\tau} J M_{s,2} = \begin{pmatrix}
-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \\
0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) \\
0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)})
\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,2}\big)^2 = \det M_{s,2}^{\tau} J M_{s,2} = (-1)^{m-1}\Big[\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\Big]^3 \prod_{p=1}^{m-1} g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,2} \neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

Построим теперь, как и в теореме 4.2, оператор $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_{\infty}^* M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие-либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ $(p > 3)$, так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ есть p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что если интегродифференциальное уравнение (4.1) рассматривать как абстрактное с положительно определенным оператором A таким, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$, то свойство систем из теорем 4.2 и 4.3 быть p-базисами будет иметь место при $p > 2q$.

4.5. Построение биортогональной системы в невырожденном случае и представление решения задачи Коши в виде ряда. В качестве следствия из леммы 4.1 и теоремы 4.2 сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть* $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$. *Тогда система*

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\vec{u}_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g'_{\infty}(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p = \overline{1, m+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k^{-1/2}, & p = m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ *образует p-базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p > 3$ *согласно теореме* 4.2 *и имеет следующую биортогональную систему*:

$$\zeta_k^{(p)} := -\big[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}\big]^{-1}\big(\lambda_k^{1/2}; -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\vec{u}_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этой теоремы можно получить формулу для решения задачи Коши (4.1) в виде ряда по системе собственных элементов оператора A. Точнее, имеет место

Теорема 4.5. *Пусть в задаче Коши* (4.1) $\vec{u}^0,\ \vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда решение задачи Коши* (4.1) *представимо в виде*

$$\vec{u}(t) = \mathcal{C}(t)\vec{u}^0 + \mathcal{S}(t)\vec{u}^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})}\Big[\alpha_1 - \lambda_k^{(p)}\lambda_k + \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l(b_l - \lambda_k^{(p)})}\,e^{-(b_l - \lambda_k^{(p)})t}\Big]\big(A\vec{u}^0, \vec{u}_k\big)_H \vec{u}_k,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})}\big(\vec{u}^1, \vec{u}_k\big)_H \vec{u}_k.$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0,\ \vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (4.1) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (4.3). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\xi^0, \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}\,\xi_k^{(p)}, \tag{4.24}$$

который вычисляется с помощью теоремы 4.4.

Дальнейшее доказательство состоит в громоздких, но несложных вычислениях с использованием в (4.24) формул из теоремы 4.4, формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$ и связи $\vec{u}(t) = \beta^{-1/2}A^{-1/2}\vec{v}'(t)$. □

Отметим, что формулы для оператор-функций $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$ в теореме могут быть найдены в рассматриваемом случае с помощью теории вычетов и представлений, аналогичных приведенным в теореме 3.5:

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} + \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l(b_l - \lambda)}\,e^{-(b_l - \lambda)t}I\Big]A\vec{u}^0\,d\lambda,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\vec{u}^1\,d\lambda,$$

где операторный пучок $L(\lambda)$ определен в (4.6).

Автор приносит благодарность Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы и А. Н. Кожевникову за материалы по спектру Коссера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
3. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
5. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68* (*110*), № 3. — С. 373–416.
6. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989.
7. *Гринштейн В. А.* Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции// Мат. заметки. — 1991. — *50*, Вып. 1. — С. 142–144.
8. *Закора Д. А.* Операторный подход к моделям Ильюшина вязкоупругих сред при изотермических процессах деформирования// Укр. мат. вестн. — 2013. — *10*, № 3. — С. 412–432.
9. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. — М.: Наука, 1970.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
11. *Кожевников А. Н.* Функциональные методы математической физики. Учебное пособие. — М.: МАИ, 1991.
12. *Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С.* О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *17*. — С. 88–109.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
14. *Ларионов Г. С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения// Механика полимеров. — 1969. — № 4.
15. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
16. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123* (*165*), № 3. — С. 391–406.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса и Л. Ниренберга. II// Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1966. — С. 233–297.
19. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227*. — С. 247–276.
20. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems of an Ideal Fluid. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
21. *Kozhevnikov A., Skubachevskaya T.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity// Hokkaido Math. J. — 1997. — *26*. — С. 297–322.
22. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — N. Y.: Springer, 1983.
23. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Switzerland: Birkhäuser, 1993.

Д. А. Закора
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, пр. Вернадского 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry_@crimea.edu, dmitry.zkr@gmail.com