

ОПТИМАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ n -ЗВЕННЫМ ПЕРЕВЕРНУТЫМ МАЯТНИКОМ НА ДВИЖУЩЕМСЯ ОСНОВАНИИ

© 2015 г. Л. А. МАНИТА, М. И. РОНЖИНА

Аннотация. Рассмотрена задача стабилизации n -звенного перевернутого маятника на движущемся основании (тележке), которое может перемещаться вдоль горизонтальной оси. Управление — сила, приложенная к тележке. Задача состоит в минимизации среднеквадратичного отклонения маятника от вертикальной оси. Для линеаризованной модели доказано, что для малых отклонений от верхнего неустойчивого положения равновесия оптимальный режим содержит траектории с учащающимися переключениями. Именно, доказано, что оптимальные траектории с бесконечным числом переключений за конечное время выходят на особую поверхность, а затем продолжают движение с особым управлением по особой поверхности, приближаясь к началу координат за бесконечное время. Показано, что построенные решения глобально оптимальны.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Постановка задачи	130
2. Переход к линеаризованной модели	131
3. Задача оптимального управления. Существование и единственность решения . . .	133
4. Необходимые условия оптимальности	133
5. Особые режимы. Выход экстремалей на особую поверхность	135
6. Движение по особой поверхности	137
7. Глобальная оптимальность решений	142
Список литературы	143

Задачами стабилизации перевернутого маятника занимались многие исследователи. Для него верхнее вертикальное положение, очевидно, является неустойчивым. Однако, оказалось, что можно это положение превратить в устойчивое, если, например, точка подвеса совершает вертикальные колебания (см. [8]). Впоследствии появилось большое количество работ о перевернутом маятнике, в которых изучались различные методы его стабилизации в вертикальном положении (см. [1, 11, 15, 16]).

В [14] рассматривается однозвенный нелинейный маятник. Изучается задача перевода за минимальное время маятника из нижнего (устойчивого) положения равновесия в верхнее (неустойчивое) положение равновесия. Оптимальный синтез строится на основе принципа максимума Понтрягина и численного моделирования.

Задаче стабилизации перевернутого двухзвенного маятника с неподвижной точкой подвеса посвящена работа [15]. Движением маятника можно управлять с помощью ограниченного момента, приложенного в шарнире, соединяющем точку подвеса и первое звено маятника, или в межзвенном шарнире. Для линеаризованной модели изучаются области управляемости. Предлагается управление, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость маятника.

Как и в [14], в [16] изучается задача перевода маятника из нижнего положения равновесия в неустойчивое верхнее. Маятник нелинейный, состоит из двух звеньев, точка подвеса неподвижна. Управление осуществляется с помощью ограниченного по абсолютной величине момента, приложенного во внутреннем межзвенном шарнире. Строится управление, которое переводит маятник

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00784).

в малую окрестность верхнего неустойчивого положения равновесия и обеспечивает асимптотическую устойчивость маятника. Приводятся численные исследования предложенного алгоритма управления.

Многозвенный маятник на движущемся основании исследуется в [11]. Управление — момент, приложенный к шарниру, соединяющему основание и первое звено маятника. Для системы с однозвенным маятником построены фазовые траектории системы при отсутствии управления. Построено управление, стабилизирующее систему в верхнем положении равновесия. Строится численное решение задачи быстрогодействия для однозвенного (нелинейного) маятника.

В настоящей работе рассматривается задача стабилизации на бесконечном интервале времени перевернутого n -звенного маятника на движущейся тележке. Управлением является ограниченная по модулю сила, приложенная к тележке. Мы докажем, что для малых начальных отклонений маятника от верхнего положения равновесия оптимальное решение существует и единственно, оптимальный синтез содержит особые участки и траектории с учащающимися переключениями. Неособые оптимальные траектории выходят на особую поверхность за конечное время с бесконечным числом переключений управления. Затем движение продолжается по особой поверхности с особым управлением, за бесконечное время оптимальная траектория попадает в начало координат.

Заметим, что синтез, содержащий особые траектории и траектории с учащающимися переключениями, достаточно типичное явление при управлении механическими системами [3–5, 7, 9, 10, 13, 17, 19]. Наличие режимов с учащающимися переключениями управления доказано для задач стабилизации твердого тела [3, 5], управления манипуляторами [3, 13], колебаниями струны [10], балок [4] и др.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу управления n -звенным перевернутым маятником. Маятник прикреплен к движущейся тележке, тележка может перемещаться вдоль некоторой прямой. По предположению звенья маятника абсолютно твердые, соединены между собой шарнирами, трение в шарнирах отсутствует. В качестве управления рассматриваем силу, приложенную к тележке.

Введем следующие обозначения: M — масса тележки, s — положение тележки, g — ускорение свободного падения, u — сила, приложенная к тележке, γ_i — угол отклонения i -го звена от вертикали (см. рис.), m_i — масса i -го звена, r_i — расстояние от нижнего конца i -го звена до его центра масс, I_i — момент инерции относительно центра масс i -го стержня, l_i — длина i -го стержня ($i = 1, \dots, n$).

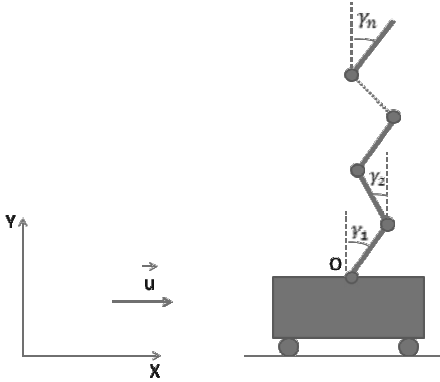
Кинетическая T и потенциальная U энергия системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \left[a_{11} \dot{s}^2 + \dot{s} \sum_{i=1}^n 2a_{1,i+1} \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i + \sum_{\substack{i,j=1, \\ i < j}}^n 2a_{i+1,j+1} \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \cos((-1)^{i+j+1} \gamma_i + \gamma_j) + \sum_{i=1}^n a_{i+1,i+1} \dot{\gamma}_i^2 \right],$$

$$U = \sum_{i=1}^n b_i \cos \gamma_i,$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= M + m_1 + \dots + m_n, \\ a_{ii} &= m_{i-1} r_{i-1}^2 + m_i l_{i-1}^2 + \dots + m_n l_{i-1}^2 + I_{i-1}, \quad 2 \leq i \leq n, \\ a_{n+1,n+1} &= m_n r_n^2 + I_n, \\ a_{1i} &= (-1)^i (m_{i-1} r_{i-1} + m_i l_{i-1} + \dots + m_n l_{i-1}), \quad 2 \leq i \leq n, \\ a_{1,n+1} &= (-1)^{n+1} m_n r_n, \\ a_{ij} &= (-1)^{i+j} (m_{j-1} l_{i-1} r_{j-1} + m_j l_{i-1} l_{j-1} + \dots + m_n l_{i-1} l_{j-1}), \quad 2 \leq i < j \leq n, \\ a_{i,n+1} &= (-1)^{i+n+1} m_n l_{i-1} r_n, \quad 2 \leq i \leq n, \end{aligned}$$



$$b_i = g(m_i r_i + m_{i+1} l_i + \dots + m_n l_i), \quad 1 \leq i < n, \quad b_n = g m_n r_n.$$

Запишем уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{s} + \sum_{i=1}^n a_{1,i+1} \ddot{\gamma}_i \cos \gamma_i - \sum_{i=1}^n a_{1,i+1} \dot{\gamma}_i^2 \sin \gamma_i &= u, \\ a_{1,i+1} \ddot{s} \cos \gamma_i + a_{i+1,i+1} \ddot{\gamma}_i + \sum_{j=1}^n a_{i+1,j+1} \ddot{\gamma}_j \cos((-1)^{i+j+1} \gamma_i + \gamma_j) - \\ - \sum_{j=1}^n a_{i+1,j+1} \dot{\gamma}_j^2 \sin((-1)^{i+j+1} \gamma_i + \gamma_j) - b_i \sin \gamma_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Считаем, что в начальный момент времени система находится в достаточно малой окрестности верхнего неустойчивого положения равновесия

$$\gamma_1 = \dot{\gamma}_1 = \dots = \gamma_n = \dot{\gamma}_n \equiv 0. \quad (1.2)$$

Будем изучать задачу стабилизации маятника в окрестности положения (1.2) в смысле минимизации квадратичного функционала:

$$\int_0^{\infty} \langle \gamma, \gamma \rangle dt \rightarrow \min, \quad (1.3)$$

где $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T \in \mathbb{R}^n$; угловыми скобками обозначено скалярное произведение.

2. Переход к линеаризованной модели. Линеаризуя систему (1.1) в окрестности (1.2), получим:

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{s} + \sum_{j=1}^n a_{1,j+1} \ddot{\gamma}_j &= u, \\ a_{1,i+1} \ddot{s} + \sum_{j=1}^n a_{i+1,j+1} \ddot{\gamma}_j - b_i \gamma_i &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Заметим, что можно исключить переменную s , выразив ее из 1-го уравнения системы (2.1):

$$\ddot{s} = - \sum_{i=1}^n \frac{a_{1,i+1}}{a_{11}} \ddot{\gamma}_i + \frac{u}{a_{11}}$$

и подставив во все остальные уравнения полученное выражение. Далее будем рассматривать последние n уравнений из системы (2.1), в которые входят только переменные γ_i :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \ddot{\gamma}_j - b_i \gamma_i = c_i u, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{ij} &= a_{i+1,j+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{1,i+1} a_{1,j+1}, \quad i, j = 1, \dots, n, \\ c_i &= - \frac{a_{1,i+1}}{a_{11}}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Запишем линеаризованную систему в матричной форме:

$$A \ddot{\gamma} - B \gamma = c u, \quad (2.3)$$

где $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n$, B — диагональная матрица размера $n \times n$, $B = \text{diag}\{b_1, \dots, b_n\}$, все $b_i > 0$.

Утверждение 2.1. Матрица $A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ симметрична и положительно определена.

Доказательство. Симметричность вытекает из определения (2.2) матрицы A и симметричности матрицы квадратичной формы кинетической энергии $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n+1}$. Покажем, что A — положительно определенная матрица. Так как матрица \mathcal{A} положительно определена, то для любого ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ выполняется неравенство $\langle \mathcal{A}v, v \rangle > 0$. Запишем это в координатной форме:

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} v_i v_j = a_{11} v_1^2 + 2v_1 \left(\sum_{j=2}^{n+1} a_{1j} v_j \right) + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} a_{ij} v_i v_j. \quad (2.4)$$

Рассмотрим выражение (2.4) как квадратный трехчлен по переменной v_1 . Так как $\langle \mathcal{A}v, v \rangle > 0$, то соответствующий дискриминант должен быть отрицательным:

$$4 \left(\sum_{j=2}^{n+1} a_{1j} v_j \right)^2 - 4a_{11} \left(\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} a_{ij} v_i v_j \right) < 0.$$

Отсюда

$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} a_{ij} v_i v_j > \left(\sum_{j=2}^{n+1} a_{1j} v_j \right)^2 / a_{11}. \quad (2.5)$$

Теперь покажем, что $\langle Ap, p \rangle > 0$ для всех ненулевых $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \langle Ap, p \rangle &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} p_i p_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{i+1, j+1} - \frac{1}{a_{11}} a_{1, i+1} a_{1, j+1} \right) p_i p_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i+1, j+1} p_i p_j - \frac{1}{a_{11}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{1, i+1} a_{1, j+1} p_i p_j = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i+1, j+1} p_i p_j - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=1}^n a_{1, j+1} p_j \right)^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Определим вектор $v \in \mathbb{R}^{n+1}$: $v_1 = 0$, $v_{i+1} = p_i$, $i = 1, \dots, n$, и перепишем выражение (2.6):

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i+1, j+1} p_i p_j - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=1}^n a_{1, j+1} p_j \right)^2 = \sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=2}^{n+1} a_{ij} v_i v_j - \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{j=2}^{n+1} a_{1j} v_j \right)^2 > 0$$

в силу (2.5). \square

Утверждение 2.2. *Существует такая невырожденная замена координат, что система (2.3) приводится к виду*

$$\ddot{x} - \Lambda x = ud, \quad (2.7)$$

где $x, d \in \mathbb{R}^n$, Λ — матрица размера $n \times n$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$.

Доказательство. Так как A и B — симметричные положительно определенные матрицы, то существует (см. [6]) такая невырожденная матрица $L = (l_{ij})_{i,j=1}^n$, что $L^T A L = E$ и $L^T B L = \Lambda$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Рассмотрим невырожденное преобразование $\gamma = Lx$. В координатах γ система (2.3) будет иметь вид

$$\ddot{\gamma} - \Lambda \gamma = ud, \quad d = L^T c.$$

По определению $\Lambda = L^T B L$; отсюда

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n l_{ji}^2 b_j.$$

Следовательно, $\lambda_i > 0$, так как $b_j > 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. \square

Замечание. Если найдется $d_i = 0$ или $\lambda_k = \lambda_l$, $k \neq l$, то система (2.7) будет неуправляемой. В дальнейшем будем предполагать, что $d_1 \dots d_n \neq 0$ и все λ_i , $i = 1, \dots, n$, различны. Без ограничения общности, в дальнейшем будем полагать, что $d_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

При замене координат $\gamma = Lx$ квадратичная форма в целевом функционале (1.3) примет вид $\langle Kx, x \rangle$, где $K = (L)^T L$ — симметричная положительно определенная матрица.

Таким образом, будем исследовать решения следующей задачи оптимального управления.

3. Задача оптимального управления. Существование и единственность решения. Минимизировать функционал

$$\int_0^{\infty} \langle Kx(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \min \quad (3.1)$$

на траекториях системы

$$\ddot{x}(t) - \Lambda x(t) = Iu(t), \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (3.3)$$

Здесь управление $u(t)$ — ограниченная скалярная управляющая функция:

$$|u(t)| \leq 1, \quad (3.4)$$

фазовые переменные $x \in \mathbb{R}^n$, I — вектор, состоящий из единиц, K — постоянная симметричная положительно определенная матрица размера $n \times n$, Λ — постоянная диагональная положительно определенная $(n \times n)$ -матрица, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.

Утверждение 3.1. *Существует такая окрестность начала координат в пространстве \mathbb{R}^{2n} , что для всех начальных условий (x_0, y_0) из этой окрестности оптимальное решение в задаче (3.1)–(3.4) существует и единственно и обладает следующим свойством:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Перепишем систему (3.2) следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \Lambda x + Iu. \end{cases} \quad (3.6)$$

Заметим, что для системы (3.6) выполнено свойство полной локальной управляемости, а именно,

$$\text{rk} \left(b, Db, \dots, D^{(2n-1)}b \right) = 2n, \quad (3.7)$$

где $b \in \mathbb{R}^{2n}$, D — $(2n \times 2n)$ -матрица:

$$b = (0, \dots, 0, I)^T, \quad D = \begin{pmatrix} O & E \\ \Lambda & O \end{pmatrix}; \quad (3.8)$$

здесь O — нулевая, а E — единичная $(n \times n)$ -матрицы. Тогда найдется (см. [2]) такая окрестность \mathcal{B}_0 начала координат пространства \mathbb{R}^{2n} , что для всех точек (x_0, y_0) из этой окрестности существует допустимое управление, которое переводит точку (x_0, y_0) в начало координат за конечное время. Повторяя рассуждения, проведенные в [19] для задачи минимизации интегрального функционала на траекториях линейной управляемой системы, обладающей группой симметрий, получаем требуемое утверждение. \square

4. Необходимые условия оптимальности. Применим к задаче (3.1)–(3.4) принцип максимума Понтрягина. Если $(x(t), y(t), u(t))$ — оптимальное решение, то существуют такие постоянная $\lambda_0 \geq 0$ и непрерывные функции $\phi(t), \psi(t)$ со значениями в \mathbb{R}^n (сопряженные переменные), что для почти всех u выполняется

$$H(x(t), \phi(t), \psi(t), u(t)) = \max_{-1 \leq u \leq 1} H(x(t), \phi(t), \psi(t), u), \quad (4.1)$$

где H — функция Понтрягина:

$$H(x, y, \phi, \psi) = -\frac{\lambda_0}{2} \langle Kx, x \rangle + \langle y, \phi \rangle + \langle \Lambda x, \psi \rangle + \langle I, \psi \rangle u.$$

При этом сопряженные функции ϕ, ψ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \lambda_0 Kx - \Lambda^T \psi, \\ \dot{\psi} = -\phi. \end{cases} \quad (4.2)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что матрицы K и Λ симметричны, и знак транспонирования опустим.

Так как время T не фиксировано, то на оптимальной траектории

$$H(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) = 0.$$

Введем обозначения

$$H_0 = -\frac{\lambda_0}{2} \langle Kx, x \rangle + \langle y, \phi \rangle + \langle \Lambda x, \psi \rangle, \quad H_1 = \langle I, \psi \rangle.$$

Тогда

$$H = H_0 + uH_1.$$

Так как функция Понтрягина H линейна по управлению, то из условия максимума (4.1) следует, что оптимальное управление принимает значение -1 или $+1$ в зависимости от знака коэффициента H_1 при управлении в функции Понтрягина. Если же найдется такой интервал времени (t_1, t_2) , $t_1 < t_2$, на котором $H_1 \equiv 0$, то соответствующее управление называется особым и для его определения необходимы дополнительные вычисления.

Таким образом, наша задача — исследовать решения системы принципа максимума Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \phi} = y, \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} = \Lambda x + Iu, \\ \dot{\phi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = \lambda_0 Kx - \Lambda \psi \\ \dot{\psi} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -\phi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где

$$u(t) = \operatorname{sgn} H_1(t) = \operatorname{sgn} \langle I, \psi(t) \rangle. \quad (4.4)$$

Утверждение 4.1. В задаче (3.1)–(3.4) множитель $\lambda_0 \neq 0$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Выпишем систему принципа максимума Понтрягина (4.3):

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \Lambda x + Iu, \\ \dot{\phi} = -\Lambda \psi, \\ \dot{\psi} = -\phi. \end{cases} \quad (4.5)$$

Если оптимальное решение не содержит особых участков, то оптимальное управление принимает значения ± 1 и соответствующие траектории имеют вид

$$x^\pm(t) = c^+(t) + c^-(t) \mp \Lambda^{-1}I,$$

где

$$c^\pm(t) = \left(c_1^\pm e^{\pm\sqrt{\lambda_1}t}, c_2^\pm e^{\pm\sqrt{\lambda_2}t}, \dots, c_n^\pm e^{\pm\sqrt{\lambda_n}t} \right)^T$$

и $c_i^\pm \in \mathbb{R}$. Но тогда не выполняются условия (3.5) утверждения 3.1.

Предположим, что имеется особый участок с особым управлением $u_{oc}(t)$. В этом случае

$$H_1(t) = \langle I, \psi(t) \rangle = 0, \quad t \in (t_1, t_2), \quad t_1 < t_2.$$

Заметим, что систему (4.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + ub, \\ \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} &= -D^T \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где b и D определены в (3.8). Поэтому условие $\langle I, \psi(t) \rangle = 0$ эквивалентно условию

$$\left\langle b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

Так как на (t_1, t_2) все производные $H_1(t)$ в силу системы (4.5) обращаются в нуль, получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle &= \left\langle b, -D^T \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = - \left\langle Db, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} \left\langle b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle &= - \frac{d}{dt} \left\langle Db, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= - \left\langle Db, -D^T \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle D^2b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \\ &\vdots \\ \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} \left\langle b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle D^{(2n-2)}b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle D^{(2n-2)}b, -D^T \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = - \left\langle D^{(2n-1)}b, \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

В силу условия локальной управляемости (3.7) получаем

$$\phi(t) = \psi(t) = 0, \quad t \in (t_1, t_2),$$

противоречие с принципом максимума Понтрягина. Следовательно, наше предположение не выполнено, и потому на оптимальной траектории $\lambda_0 \neq 0$. \square

В дальнейшем полагаем $\lambda_0 = 1$.

5. Особые режимы. Выход экстремалей на особую поверхность. Покажем, что в задаче (3.1)–(3.4) имеются особые экстремали второго порядка. Напомним, что экстремаль $z(t) = (x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$, т.е. решение системы (4.3) с управлением, удовлетворяющим условию максимума (4.4), является особой на интервале (t_1, t_2) , если $H_1(z(t)) = 0$, при всех $t \in (t_1, t_2)$. Для того чтобы найти управление на особой экстремали (особое управление), будем дифференцировать тождество $H_1(z(t)) = H_1(t) = 0$, $t \in (t_1, t_2)$ в силу системы (4.3) до первого появления управления:

$$\frac{dH_1}{dt} = -\langle I, \phi \rangle, \quad \frac{d^2H_1}{dt^2} = -\langle I, Kx - \Lambda\psi \rangle, \quad \frac{d^3H_1}{dt^3} = -\langle I, Ky + \Lambda\phi \rangle,$$

$$\frac{d^4H_1}{dt^4} = -\langle I, K(\Lambda x + Iu) + \Lambda(Kx - \Lambda\psi) \rangle = -\langle I, (K\Lambda + \Lambda K)x \rangle + \langle I, \Lambda^2\psi \rangle - u\langle KI, I \rangle. \quad (5.1)$$

Управление с ненулевым коэффициентом появилось на четвертом шаге дифференцирования, следовательно, [19] особая экстремаль имеет порядок 2. Заметим, что коэффициент при управлении строго отрицателен, так как матрица K положительно определена. Поэтому выполнено необходимое условие Келли—Коппа—Мойера оптимальности особых экстремалей (см. [18]):

$$k(z(t)) = (-1)^q \left. \frac{\partial}{\partial u} \frac{d^{2q}}{dt^{2q}} \right|_{(4.3)} H_1(z(t)) \leq 0,$$

где q — порядок особой траектории.

Обозначим через S поверхность особых экстремалей второго порядка в задаче (3.1)–(3.4):

$$S = \{ \langle I, \psi \rangle = 0, \langle I, \phi \rangle = 0, \langle I, Kx - \Lambda\psi \rangle = 0, \langle I, Ky + \Lambda\phi \rangle = 0 \}. \quad (5.2)$$

Из последнего уравнения (5.1) определим управление на особых экстремалях:

$$u_{oc}(t) = \frac{-\langle I, (K\Lambda + \Lambda K)x(t) \rangle + \langle I, \Lambda^2 \psi(t) \rangle}{\sigma},$$

где $\sigma = \langle KI, I \rangle$. Особое управление должно удовлетворять ограничению $|u(t)| \leq 1$, поэтому будем рассматривать только ту часть особой поверхности S , для которой

$$|-\langle I, (K\Lambda + \Lambda K)x \rangle + \langle I, \Lambda^2 \psi \rangle| \leq \sigma. \quad (5.3)$$

Заметим, что в окрестности начала координат условие (5.3) выполнено.

Известно следующее утверждение о типе сопряжения особых и неособых экстремалей.

Теорема 5.1 (Келли, Копп, Мойер [18]). *Пусть особая экстремаль $z(t)$ системы (4.3) имеет порядок 2 и выполнено условие Келли—Коппа—Мойера в строгой форме: $k(z(t)) < 0$. Если управление $u(t)$ на экстремали $z(t)$ является C^∞ -гладкой функцией, то экстремаль $z(t)$ не может сопрягаться с неособой кусочно-гладкой траекторией системы (4.3), если управление разрывно в точке сопряжения особого и неособого участков.*

Для задачи (3.1)–(3.4) все условия теоремы Келли—Коппа—Мойера выполняются, следовательно, если неособая и особая экстремали сопрягаются, то неособая дуга должна содержать бесконечное число точек переключения управления.

Покажем, что для начальных условий из некоторой окрестности начала координат неособые оптимальные траектории задачи (3.1)–(3.4) выходят на особую поверхность.

Предположим, что систему уравнений принципа максимума (4.3) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_3 &= z_4, \\ \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{z}_4 &= \alpha(z, w) + u\beta(z, w), \\ \dot{w} &= F(z, w, u), & u &= \operatorname{sgn} z_1, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где система функций z_1, z_2, z_3, z_4, w функционально независима.

Теорема 5.2 (о расслоении, [7]). *Пусть в окрестности особой траектории второго порядка система уравнений принципа максимума Понтрягина может быть приведена к виду (5.4). Пусть в некоторой области выполнены неравенства*

$$\beta(0, w_0) < 0, \quad |\alpha(0, w_0)| < -\beta(w_0).$$

Тогда существует такая открытая окрестность \mathcal{O} точки w_0 , что для любого $w \in \mathcal{O}$ через точку $(0, w)$ проходит некоторое однопараметрическое семейство решений системы (5.4). Траектории этого семейства заполняют двумерное многообразие N_w^+ , гомеоморфное \mathbb{R}^2 . Каждая траектория внутри N_w^+ приходит в точку $(0, w)$ за конечное время после счетного числа пересечений с поверхностью разрыва $z_1 = 0$. Кроме того, другое семейство N_w^- решений (5.4) выходит из точки $(0, w_0)$, также имея счетное число переключений на конечном интервале времени.

Точки переключения N_w^\pm заполняют две кусочно-гладкие кривые Γ_w^\pm . Объединение всех подмногообразий $\bigcup_{w \in \mathcal{O}} N_w^\pm$ наделено структурой расслоения с базой \mathcal{O} и двумерными кусочно-гладкими слоями.

Покажем, что задача (3.1)–(3.4) удовлетворяет условиям теоремы о расслоении.

Введем следующие переменные:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{i=1}^n \psi_i, & z_3 &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i, \\ z_2 &= -\sum_{i=1}^n \phi_i, & z_4 &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= x_1, & \omega_{2n-1} &= \lambda_1^2 \psi_1, \\
&\vdots & &\vdots \\
\omega_{n-1} &= x_{n-1}, & \omega_{3n-3} &= \lambda_{n-1}^2 \psi_{n-1}, \\
\omega_n &= y_1, & \omega_{3n-2} &= -\lambda_1^2 \phi_1, \\
&\vdots & &\vdots \\
\omega_{2n-2} &= y_{n-1}, & \omega_{4n-4} &= -\lambda_{n-1}^2 \phi_{n-1}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Функции z_i , $i = 1, 2, 3, 4$, функционально независимы в окрестности особого решения второго порядка, а ω_j , $j = 1, \dots, 4n - 4$, дополняют z_1, z_2, z_3, z_4 так, чтобы матрица Якоби отображения $(x, y, \phi, \psi) \rightarrow (z, \omega)$ была невырожденной.

В координатах (z, ω) система (4.3)-(4.4) переписется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2, & \dot{z}_2 &= z_3, & \dot{z}_3 &= z_4, \\
\dot{z}_4 &= \sum_{i=1}^{n-1} (c_i \omega_i + c_{2n-2+i} \omega_{2n-2+i}) + s_1 z_1 + s_3 z_3 - \sigma u, \\
\dot{\omega}_i &= \omega_{n-1+i}, & \dot{\omega}_{n-1+i} &= \lambda_i \omega_i + u, & i &= 1, \dots, n-1, \\
\dot{\omega}_{2n-2+i} &= \omega_{3n-3+i}, & i &= 1, \dots, n-1, \\
\dot{\omega}_{3n-3+i} &= \sum_{j=1}^{n-1} (\tilde{c}_{ij} \omega_j + \tilde{c}_{i(2n-2+j)} \omega_{2n-2+j}) + \tilde{s}_{i1} z_1 + \tilde{s}_{i3} z_3, & i &= 1, \dots, n-1, \\
u &= \operatorname{sgn} z_1,
\end{aligned}$$

где постоянные

$$c_i, c_{2n-2+i}, s_1, s_3, \tilde{c}_{ij}, \tilde{c}_{i(2n-2+j)}, \tilde{s}_{i1}, \tilde{s}_{i3}, \quad i, j = 1, \dots, n-1,$$

определяются из (5.5)–(5.6). Обозначим

$$\alpha(z, \omega) = \sum_{i=1}^{n-1} (c_i \omega_i + c_{2n-2+i} \omega_{2n-2+i}) + s_1 z_1 + s_3 z_3, \quad \beta(z, \omega) = -\sigma.$$

При ω_0 , достаточно близком к нулю, выполняется

$$|\alpha(0, \omega_0)| = \left| \sum_{i=1}^{n-1} (c_i \omega_{0,i} + c_{2n-2+i} \omega_{0,2n-2+i}) \right| < \sigma = -\beta(0, \omega_0).$$

Поэтому применима теорема 5.2 о расслоении. Следовательно, в некоторой окрестности начала координат пространства (z, ω) существует расслоение с базой S с двумерными кусочно гладкими слоями, заполненными траекториями с учащающимися переключениями, т.е. в достаточно малой окрестности начала координат решения системы уравнений принципа максимума за конечное время с бесконечным числом переключений выходят на особую поверхность.

6. Движение по особой поверхности. Перепишем уравнения, определяющие особую поверхность S , в координатной форме:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \psi_i &= 0, & \sum_{i=1}^n \phi_i &= 0, \\
-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} x_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i \psi_i &= 0, \\
-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} y_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i &= 0.
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Выразим из системы (6.1) $\psi_{1,2}$ и $\phi_{1,2}$:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=3}^n (\lambda_2 - \lambda_i) \psi_i + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} x_i, \\ \psi_2 &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=3}^n (\lambda_1 - \lambda_i) \psi_i - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} x_i, \\ \phi_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=3}^n (\lambda_2 - \lambda_i) \phi_i - \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} y_i, \\ \phi_2 &= -\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i=3}^n (\lambda_1 - \lambda_i) \phi_i + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} y_i.\end{aligned}\tag{6.2}$$

Подставим полученные выражения в формулу для особого управления:

$$u_{oc} = \frac{1}{\sigma} \left(-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} (\lambda_i + \lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2)) x_i + \sum_{i=3}^n (\lambda_1 - \lambda_i) (\lambda_2 - \lambda_i) \psi_i \right).\tag{6.3}$$

Запишем гамильтонову систему (4.3) на особой поверхности, используя (6.2)–(6.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_k = y_k, \\ \dot{y}_k = \lambda_k x_k + \frac{1}{\sigma} \left(-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n k_{ij} (\lambda_i + \lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2)) x_i + \sum_{i=3}^n (\lambda_1 - \lambda_i) (\lambda_2 - \lambda_i) \psi_i \right), \\ \dot{\psi}_k = -\phi_k, \\ \dot{\phi}_k = \sum_{j=1}^n k_{kj} x_j - \lambda_k \psi_k, \quad k = 3, \dots, n. \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,\tag{6.4}$$

Можно записать матрицу системы (6.4) в виде

$$\begin{pmatrix} O_{n \times n} & E_n & O_{n \times (n-2)} & O_{n \times (n-2)} \\ \Omega & O_{n \times n} & Y & O_{n \times (n-2)} \\ O_{(n-2) \times n} & O_{(n-2) \times n} & O_{(n-2) \times (n-2)} & -E_{n-2} \\ \bar{K} & O_{(n-2) \times n} & -\bar{\Lambda} & O_{(n-2) \times (n-2)} \end{pmatrix},\tag{6.5}$$

где $O_{i \times j}$ — нулевая матрица размера $i \times j$, E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица,

$$\Omega = \begin{pmatrix} \lambda_1 + b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ b_1 & \lambda_2 + b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & \lambda_n + b_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \end{pmatrix},$$

$$b_i = -\frac{1}{\sigma} \sum_{j=1}^n k_{ij} (\lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_i),$$

$$\bar{K} = \begin{pmatrix} k_{13} & \dots & k_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & \dots & k_{nn} \end{pmatrix}, \quad -\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\lambda_3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Утверждение 6.1. Характеристический многочлен матрицы (6.5) имеет вид

$$P(\mu) = \frac{1}{\sigma} \langle K m(\mu), m(\mu) \rangle,$$

где

$$m(\mu) = \left(\prod_{k=2}^n (\lambda_k - \mu^2), \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n (\lambda_k - \mu^2), \dots, \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \mu^2) \right)^T.$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \begin{vmatrix} -\mu E_n & E_n & O_{n \times (n-2)} & O_{n \times (n-2)} \\ \Omega & -\mu E_n & Y & O_{n \times (n-2)} \\ O_{(n-2) \times n} & O_{(n-2) \times n} & -\mu E_{n-2} & -E_{n-2} \\ \bar{K} & O_{(n-2) \times n} & -\bar{\Lambda} & -\mu E_{n-2} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -\mu E_n & E_n & O_{n \times (n-2)} & O_{n \times (n-2)} \\ \Omega - \mu^2 E_n & O_{n \times n} & Y & O_{n \times (n-2)} \\ O_{(n-2) \times n} & O_{(n-2) \times n} & -\mu E_{n-2} & -E_{n-2} \\ \bar{K} & O_{(n-2) \times n} & \mu^2 E_{n-2} - \bar{\Lambda} & O_{(n-2) \times (n-2)} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} \Omega - \mu^2 E_n & Y & O_{n \times (n-2)} \\ O_{(n-2) \times n} & -\mu E_{n-2} & -E_{n-2} \\ \bar{K} & \mu^2 E_{n-2} - \bar{\Lambda} & O_{(n-2) \times (n-2)} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \Omega - \mu^2 E_n & Y \\ \bar{K} & \mu^2 E_{n-2} - \bar{\Lambda} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, с точностью до знака, определитель $P(\mu)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + b_1 - \mu^2 & b_2 & \dots & b_n & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ b_1 & \lambda_2 + b_2 - \mu^2 & \dots & b_n & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & \lambda_n + b_n - \mu^2 & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ k_{13} & k_{23} & \dots & k_{3n} & \mu^2 - \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Вычтем n -ю строку из первых $n-1$ строк; получим

$$P(\mu) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu^2 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & b_2 & \dots & \lambda_n + b_n - \mu^2 & \frac{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)}{\sigma} & \dots & \frac{(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)}{\sigma} \\ k_{13} & k_{23} & \dots & k_{3n} & \mu^2 - \lambda_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{1n} & k_{2n} & \dots & k_{nn} & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Применим теорему Лапласа о вычислении определителей (см. [12]):

$$P(\mu) = |M_0| \prod_{j=3}^n (\mu^2 - \lambda_j) - \sum_{i=3}^n |M_i| \frac{(\lambda_1 - \lambda_i)(\lambda_2 - \lambda_i)}{\sigma} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\mu^2 - \lambda_j), \quad (6.6)$$

где

$$|M_0| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu^2 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ 0 & \lambda_2 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ b_1 & b_2 & \dots & \lambda_n + b_n - \mu^2 \end{vmatrix}, \quad |M_i| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu^2 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ 0 & \lambda_2 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{in} \end{vmatrix}.$$

Вычислим $|M_i|$, последовательно раскладывая по первому столбцу:

$$\begin{aligned} |M_i| &= (\lambda_1 - \mu^2) \begin{vmatrix} \lambda_2 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ k_{i2} & \dots & k_{in} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} k_{i1} \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & \mu^2 - \lambda_n \\ \lambda_2 - \mu^2 & \dots & 0 & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_{n-1} - \mu^2 & \mu^2 - \lambda_n \end{vmatrix} = \\ &= (\lambda_1 - \mu^2) \begin{vmatrix} \lambda_2 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ k_{i2} & \dots & k_{in} \end{vmatrix} + k_{i1} (\lambda_2 - \mu^2) \dots (\lambda_n - \mu^2) = \\ &= (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_2 - \mu^2) \begin{vmatrix} \lambda_3 - \mu^2 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu^2 - \lambda_n \\ k_{i3} & \dots & k_{in} \end{vmatrix} + k_{i2} (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_3 - \mu^2) \dots (\lambda_n - \mu^2) + \\ &+ k_{i1} (\lambda_2 - \mu^2) \dots (\lambda_n - \mu^2) = \dots = k_{in} (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_2 - \mu^2) \dots (\lambda_{n-1} - \mu^2) + \\ &+ \dots + k_{i2} (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_3 - \mu^2) \dots (\lambda_n - \mu^2) + k_{i1} (\lambda_2 - \mu^2) \dots (\lambda_n - \mu^2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|M_i| = \sum_{j=1}^n k_{ij} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (\lambda_l - \mu^2).$$

Так как M_0 и M_i отличаются только последней строкой, то $|M_0|$ получается из $|M_i|$ заменой k_{ij} на

$$b_j = -\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n k_{ij} (\lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_i), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

и k_{in} на

$$\lambda_n + b_n - \mu^2 = \lambda_n - \mu^2 - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n k_{ij} (\lambda_n - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_i).$$

Следовательно,

$$|M_0| = \prod_{l=1}^n (\lambda_l - \mu^2) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i,j=1}^n k_{ij} (\lambda_j - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n (\lambda_l - \mu^2).$$

Подставляя в (6.6) выражения для $|M_0|$ и $|M_i|$ и домножая все на $\sigma = \sum_{i,j=1}^n k_{ij}$, получим

$$\sigma P(\mu) = \sum_{i,j=1}^n k_{ij} (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_2 - \mu^2) \prod_{k=3}^n (\lambda_k - \mu^2)^2 -$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^n k_{ij} (\lambda_j + \lambda_i - (\lambda_1 + \lambda_2)) (\lambda_1 - \mu^2) (\lambda_2 - \mu^2) (\lambda_i - \mu^2) \prod_{\substack{k=3 \\ k \neq i}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2 - \\
 & - \sum_{j=1}^n k_{2j} (\lambda_j - \lambda_1) (\lambda_1 - \mu^2) \prod_{k=3}^n (\lambda_k - \mu^2)^2 - \sum_{j=1}^n k_{1j} (\lambda_j - \lambda_2) (\lambda_2 - \mu^2) \prod_{k=3}^n (\lambda_k - \mu^2)^2 + \\
 & + \sum_{j=1}^n \sum_{i=3}^n k_{ij} (\lambda_1 - \lambda_i) (\lambda_2 - \lambda_i) (\lambda_i - \mu^2) (\lambda_j - \mu^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Заметим, что выражение (6.7) можно представить в виде

$$\sum_{i, j=1}^n k_{ij} r_{ij},$$

где r_{ij} — некоторые коэффициенты, зависящие от $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и μ^2 . Прямые вычисления дают

$$r_{ii} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2, \quad r_{ij} = (\lambda_i - \mu^2) (\lambda_j - \mu^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2.$$

Так как матрица K симметрична, то можно записать

$$\sigma P(\mu) = \sum_{i=1}^n k_{ii} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2 + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i < j}}^n k_{ij} (\lambda_i - \mu^2) (\lambda_j - \mu^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n (\lambda_k - \mu^2)^2. \quad (6.8)$$

Положим

$$m(\mu) = \left(\prod_{k=2}^n (\lambda_k - \mu^2), \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n (\lambda_k - \mu^2), \dots, \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k - \mu^2) \right)^T.$$

Тогда $\sigma P(\mu) = \langle K m(\mu), m(\mu) \rangle$. □

Утверждение 6.2. *У матрицы системы (6.5) собственные значения симметричны относительно мнимой оси, среди собственных значений нет чисто мнимых и чисто вещественных.*

Доказательство. Рассмотрим характеристическое уравнение для матрицы (6.5): $P(\mu) = 0$. Если $\mu \in \mathbb{R}$, то $m(\mu) \in \mathbb{R}^n$ и $m(\mu) \neq 0$, так как все λ_k различны. В силу утверждения 6.1 и положительной определенности матрицы K имеем

$$P(\mu) = \langle K m(\mu), m(\mu) \rangle > 0,$$

т.е. у характеристического уравнения нет вещественных корней.

Покажем, что нет и чисто мнимых корней. Пусть $\mu = i\nu, \nu \in \mathbb{R}$; тогда

$$m(\mu) = \left(\prod_{k=2}^n (\lambda_k + \nu^2), \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^n (\lambda_k + \nu^2), \dots, \prod_{k=1}^{n-1} (\lambda_k + \nu^2) \right) \in \mathbb{R}^n$$

и $m(\mu) \neq 0$, так как все $\lambda_k > 0$. Отсюда, аналогично предыдущему,

$$P(\mu) = \langle K m(\mu), m(\mu) \rangle > 0$$

т.е. у характеристического уравнения нет чисто мнимых корней.

Симметричность собственных значений относительно мнимой оси очевидна из представления (6.8). □

Таким образом, ровно $2n-2$ собственных значений имеют строго положительную вещественную часть и $2n-2$ собственных значений имеют строго отрицательную вещественную часть (мнимые части отличны от нуля). Рассмотрим только те собственные значения, которым соответствуют устойчивые решения (6.4), т.е. с отрицательной вещественной частью.

Обозначим через h_i^+ , $i = 1, \dots, 2n-2$, собственные векторы системы (6.4), соответствующие собственным значениям с положительной вещественной частью, а через h_i^- , $i = 1, \dots, 2n-2$, — собственные векторы системы (6.4), соответствующие собственным значениям с отрицательной вещественной частью.

Пусть N_-^* — $(2n-2)$ -мерное инвариантное подпространство, порожденное собственными векторами $\{h_i^-\}_{i=1}^{2n-2}$. Подпространство N_-^* заполнено траекториями системы (6.4), которые имеют вид спиралей и при возрастании времени асимптотически приближаются к началу координат.

Инвариантное подпространство N_+^* , порожденное собственными векторами $\{h_i^+\}_{i=1}^{2n-2}$, также имеет размерность $2n-2$ и заполнено траекториями системы (6.4), которые при возрастании времени удаляются от начала координат.

Таким образом, для начальных условий, достаточно близких к нулю, мы построили траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина и стремящиеся к началу координат при $t \rightarrow +\infty$. Допустимые экстремали состоят из неособого участка, который за конечное время с бесконечным числом переключений управления выходит на особую поверхность, а затем движение продолжается по особому участку.

7. Глобальная оптимальность решений. Покажем, что для задачи (3.1)–(3.4) при дополнительном предположении принцип максимума Понтрягина является достаточным условием. Всюду ниже мы предполагаем, что для рассматриваемых начальных условий оптимальное решение существует.

Утверждение 7.1. Если $(x^*(t), y^*(t), \phi^*(t), \psi^*(t), u^*(t))$ — решение системы уравнений принципа максимума Понтрягина, $x^*(0) = x_0$, $y^*(0) = y_0$ и при $t \rightarrow +\infty$

$$x^*(t) \rightarrow 0, \quad y^*(t) \rightarrow 0, \quad \phi^*(t) \rightarrow 0, \quad \psi^*(t) \rightarrow 0,$$

то $(x^*(t), y^*(t), u^*(t))$ — оптимальное решение задачи (3.1)–(3.4).

Доказательство. Предположим, что для начальной точки (x_0, y_0) оптимальным является решение $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{u}(t))$. Докажем, что

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\langle K\hat{x}, \hat{x} \rangle - \langle Kx^*, x^* \rangle) dt \geq 0.$$

Легко видеть, что

$$\langle K\hat{x}, \hat{x} \rangle - \langle Kx^*, x^* \rangle \geq 2\langle Kx^*, \hat{x} - x^* \rangle.$$

Поэтому

$$\Delta \geq \int_0^\infty \langle Kx^*, \hat{x} - x^* \rangle dt = \int_0^\infty \langle \dot{\phi}^* + \Lambda\psi^*, \hat{x} - x^* \rangle dt.$$

Интегрируем по частям:

$$\Delta \geq \langle \phi^*, \hat{x} - x^* \rangle \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \langle \phi^*, \hat{y} - y^* \rangle dt + \int_0^\infty \langle \Lambda\psi^*, \hat{x} - x^* \rangle dt.$$

Внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $x^*(0) = \hat{x}(0) = x_0$ и функции $x^*(t)$, $\hat{x}(t)$, $\phi^*(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Теперь воспользуемся тем, что $\dot{\psi}^* = -\phi^*$, и вычислим первый интеграл по частям:

$$\Delta \geq \langle \psi^*, \hat{y} - y^* \rangle \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \langle \psi^*, \Lambda(\hat{x} - x^*) + (\hat{u} - u^*)I \rangle dt + \int_0^\infty \langle \Lambda\psi^*, \hat{x} - x^* \rangle dt.$$

Внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, поскольку $y^*(0) = \widehat{y}(0) = y_0$ и функции $y^*(t)$, $\widehat{y}(t)$, $\psi^*(t)$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$. Отсюда получаем

$$\Delta \geq \int_0^{\infty} \langle \psi^*, (u^* - \widehat{u})I \rangle dt.$$

Так как $u^*(t)$ удовлетворяет условию максимума (4.4) для экстремали $(x^*(t), y^*(t), \phi^*(t), \psi^*(t))$, то $\Delta \geq 0$. Таким образом, значение функционала (3.1) на траектории $(x^*(t), y^*(t))$ не хуже, чем на оптимальной траектории $(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$.

В силу утверждения 3.1 решение $(x^*(t), y^*(t), u^*(t))$ является оптимальным для задачи (3.1)–(3.4). \square

Результаты, полученные в разделах 3–7, приводят к следующей теореме.

Теорема 7.1. *Для начальных положений из малой окрестности начала координат оптимальные решения в задаче (3.1)–(3.4) устроены следующим образом: за конечное время неособые траектории с бесконечным числом переключений управления за конечное время выходят на особую поверхность второго порядка, затем траектория с особым управлением остается на особой поверхности, асимптотически приближаясь к началу координат, когда время стремится к бесконечности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврейтевич Я., Василевский Г., Кудра Г., Решмин С. А. Эксперимент по раскачиванию двойного маятника управлением с обратной связью// Изв. РАН. Сер. Теор. и сист. управл. — 2012. — 2. — С. 10–16.
2. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.
3. Борисов В. Ф., Зеликин М. И. Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления// Тр. МИАН. — 1991. — 197. — С. 85–166.
4. Борисов В. Ф., Зеликин М. И., Манита Л. А. Оптимальный синтез в бесконечномерном пространстве. Дифференциальные уравнения и топология. II// Тр. МИАН. — 2010. — 271. — С. 40–58.
5. Боршевский М. З., Иослович И. В. К задаче оптимального по быстродействию торможения осесимметричного твердого тела около центра масс// Прикл. мат. мех. — 1985. — 49, вып. 1. — С. 35–42.
6. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. — М.: Наука, 1971.
7. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики// Совр. мат. и ее прилож. — 2003. — 11. — С. 3–161.
8. Капица П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом// Усп. физ. наук. — 1951. — 44, вып. 5. — С. 7–20.
9. Локуцевский Л. В. Гамильтоновость потока особых траекторий// Мат. сб. — 2014. — 205, № 3. — С. 133–160.
10. Манита Л. А. Оптимальный особый режим и режим с учащающимися переключениями в задаче управления колебаниями струны с закрепленными концами// Прикл. мат. мех. — 2010. — 74, № 5. — С. 873–880.
11. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. Управляемый маятник на подвижном основании// Изв. РАН. Сер. Мех. тв. тела. — 2013. — 1. — С. 9–23.
12. Михалев А. ., Михалев А. В. Начала алгебры. Ч. I. — М., 2009.
13. Осипов С. Н., Формальский А. М. Задача о быстрейшем повороте манипулятора// Прикл. мат. мех. — 1988. — 52, вып. 6. — С. 929–933.
14. Решмин С. А., Черноусько Ф. Л. Оптимальное по быстродействию управление перевернутым маятником в форме синтеза// Изв. РАН. Сер. Теор. сист. управл. — 2006. — 3. — С. 51–62.
15. Формальский А. М. О стабилизации двойного перевернутого маятника при помощи одного управляющего момента// Изв. РАН. Сер. Теор. сист. управ. — 2006. — 3. — С. 5–12.
16. Формальский А. М. О глобальной стабилизации двойного перевернутого маятника с управлением в межзвенном шарнире// Изв. РАН. Сер. Мех. тв. тела. — 2008. — 5. — С. 3–14.
17. Cherkasov O. Yu., Yakushev A. G. Singular arcs in the optimal evasion against a proportional navigation vehicle// J. Optim. Theory Appl. — 2002. — 113, № 2. — С. 211–226.
18. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals// В сб.: «Topics in optimization». — N.Y.: Acad. Press, 1967. — С. 63–103.
19. Zelikin M. I., Borisov V. F. Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics and engineering. — Boston—Basel—Berlin: Birkhäuser, 1994.

Л. А. Манита

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»;

Московский институт электроники и математики, Москва

E-mail: lmanita@hse.ru

М. И. Ронжина

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

E-mail: maryaronzhina@gmail.com