

ТИПИЧНОСТЬ ФРАКТАЛЬНО-ХАОТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНОК В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© 2015 г. М. И. ЗЕЛИКИН, Л. В. ЛОКУЦИЕВСКИЙ, Р. ХИЛЬДЕБРАНД

Аннотация. В работе рассмотрена линейно-квадратичная задача оптимального управления, в которой управление принимает значения в некотором двумерном треугольнике. Фазовый портрет оптимального синтеза содержит особые экстремали второго порядка, а управление на любой оптимальной траектории имеет счетное число точек разрыва — так называемый чаттеринг-режим. Обнаружен абсолютно новый феномен, а именно, хаотическое поведение оптимальных траекторий на конечных промежутках времени. Оптимальная траектория при любых фиксированных начальных условиях, конечно же, фиксирована; тем не менее, картина оптимального синтеза в целом содержит хаотические структуры канторовского типа, наподобие подковы Смейла, генерируемые гомоклинической точкой. Динамика переключений управления описывается с помощью топологической цепи Маркова. Вычислены оценки размерности множества неблуждающих точек и энтропия. Во второй части работы доказано, что подобное поведение решений типично для кусочно гладких гамильтоновых систем в окрестности специальных особых точек на стыке трех гиперповерхностей разрыва правой части системы.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	7
2. Простейшие свойства модельной экстремальной задачи	8
2.1. Постановка задачи	8
2.2. Симметрии задачи	9
2.3. Теорема о переходе к сопряженным переменным	9
2.4. Фактор-пространства M/g и M/g	16
2.5. Одномерные задачи Фуллера внутри	17
2.6. Бариецентрические координаты в случае правильного треугольника	18
2.7. Важнейшие примеры периодических траекторий на M/g	19
2.8. Поведение оптимальных траекторий в окрестности периодических траекторий	22
3. Первая теорема о хаотичном поведении траекторий в интегральных воронках	23
3.1. Формулировка первой теоремы о хаотичном поведении траекторий в модельной задаче	23
3.2. Раздутие особенности в вершине интегральной воронки	24
3.3. Репараметризация времени	25
3.4. Грубость автомодельных траекторий	27
3.5. Гомоклиническая траектория на нулевом сечении цилиндра \mathcal{C}	29
3.6. Завершение доказательства первой теоремы о хаотичности	31
4. Топологические свойства отображения последования Пуанкаре	33
4.1. Топологическая структура поверхности переключения	34
4.2. Редукция по действию группы S_3	35
4.3. Известные элементы синтеза	35
4.4. Глобальная структура отображения Пуанкаре	36
4.5. Переходы циклического и осциллирующего типа	38
4.6. Аттрактор в обратном направлении времени	38
4.7. Промежуточные области	40

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00784).

4.8.	Разрешение динамики на области V	44
4.9.	Разрешение динамики отображений типа B	45
4.10.	Динамика отображений типа A и C	47
5.	Хаотическая динамика отображения Пуанкаре	49
5.1.	Билипшицевость отображения последования Пуанкаре	49
5.2.	Условия липшицевой гиперболичности	50
5.3.	Сопряженность с топологической марковской цепью	53
5.4.	Оценка размерностей	54
5.5.	Односторонняя марковская цепь	55
5.6.	Фрактальная структура отображения Пуанкаре	56
5.7.	Основная теорема о хаотичности оптимального синтеза в модельной задаче	58
6.	Хаотичность на конечных интервалах времени в гамильтоновых системах с разрывной правой частью	61
6.1.	Гамильтоновы системы с разрывной правой частью	61
6.2.	Формулировки теорем о хаосе в гамильтоновых системах с разрывной правой частью	62
6.3.	Ниспадающая система скобок Пуассона	64
6.4.	Раздутие особенности в странной точке	67
6.5.	Модельная задача оптимального управления на нулевом сечении C_0^H	69
6.6.	Нильпотентизация в окрестности странной точки	70
6.7.	Отображение последования Пуанкаре в гамильтоновой системе	72
6.8.	Окончание доказательства хаотического поведения траекторий в общей гамильтоновой системе	76
	Приложения	88
A.	Оптимальное управление и теория Галуа (М. И. Зеликин, Д. Д. Киселев, Л. В. Локуциевский)	88
A.1.	Введение	88
A.2.	Постановка задачи и ее симметрии	89
A.3.	Об оптимальном управлении в виде обмотки клиффордова тора	90
A.4.	Применение теории Галуа для доказательства иррациональности обмотки клиффордова тора	91
B.	Базовые свойства модельной задачи с правильным треугольником (М. И. Зеликин, Н. Б. Мельников, Р. Хильдебранд)	95
B.1.	Постановка задачи	95
B.2.	Оптимальный синтез в окрестности A_{ij}	96
B.3.	Элементы оптимального синтеза на фактор-многообразии	102
B.4.	Периодические траектории вне областей притяжения	103
B.	Гамильтоновость потока особых траекторий (Л. В. Локуциевский)	105
B.1.	Введение	106
B.2.	Гамильтоновы системы с негладким гамильтонианом	107
B.3.	Порядок особой траектории	108
B.4.	Гамильтоновость потока особых траекторий	110
B.5.	Метод упрощенных вычислений	111
B.6.	Ниспадающая система скобок Пуассона	112
B.7.	Теорема о сопряжении	113
B.8.	Задача управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле	114
Г.	Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника (Л. В. Локуциевский)	116
Г.1.	Введение	117
Г.2.	Особые по граням траектории	117
Г.3.	Аналитические формулы особых траекторий	118
Г.4.	Поверхности особых экстремалей	120
Г.5.	Голономный случай	121
Г.6.	Сведение к модельной задаче	122

Г.7. Модельная задача оптимального управления	124
Г.8. Структура выхода на особую траекторию и схода с нее	125
Список литературы	127

1. ВВЕДЕНИЕ

Основным инструментом для решения детерминированных задач оптимального управления является принцип максимума Понтрягина (см. [17]). Он позволяет свести задачу управления к отысканию решений гамильтоновой динамической системы. Предположим, управление u принимает значения в некотором множестве Ω . Тогда гамильтониан \mathcal{H} , определяющий динамику, задается как максимум

$$\mathcal{H}(x, p) = \max_{u \in \Omega} H(x, p, u)$$

по всем управлениям $u \in \Omega$ функции Понтрягина H , а оптимальное управление (если оно существует) доставляет максимум H .

На открытом всюду плотном подмножестве параметров (x, p) максимум функции H по $u \in \Omega$ достигается в единственной точке и гладко зависит от этих параметров. На этом подмножестве гамильтониан \mathcal{H} является гладким, однако на границе этого подмножества производные \mathcal{H} могут, вообще говоря, испытывать разрыв. Чаще всего гамильтониан \mathcal{H} является непрерывной кусочно гладкой функцией, причем кокасательное расслоение разбивается на непересекающиеся области A_1, \dots, A_k , на которых гамильтониан задается гладкими функциями H_1, \dots, H_k соответственно. Динамическая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. В статье рассмотрена ситуация, когда множество Ω является выпуклым многогранником, а области A_i — это в точности те области, где управление обязано находиться в соответствующей вершине v_i многогранника Ω . Множество точек, где производная \mathcal{H} разрывна, является стратифицированным многообразием, каждая страта которого отвечает некоторой грани многогранника Ω .

Траектория гамильтоновой системы, которая не покидает область гладкости гамильтониана, называется *регулярной*. Если траектория переходит из одной области гладкости A_i в другую A_j , тогда соответствующее оптимальное управление меняется скачком с вершины v_i многогранника Ω на вершину v_j . Этот процесс называется *переключением*, а поверхность разрыва правой части системы называется *поверхностью переключения*. Обычно оптимальная траектория пересекает поверхность переключения трансверсально, в этом случае оптимальное управление называют *бэнг-бэнг управлением*. Тем не менее, иногда возникают траектории,двигающиеся вдоль поверхности разрыва правой части системы. Их принято называть *особыми траекториями*. Обычно единственность решения теряется в окрестности особых траекторий и множество регулярных траекторий может соединиться с особой в одной и той же точке, или, наоборот, сойти с нее. Такая ситуация возможна из-за того, что правая часть гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений терпит разрыв.

Для особых траекторий, лежащих на гиперповерхности переключения¹, возможно определить *порядок*, в зависимости от того, какого порядка скобки Пуассона от присоединенных гладких частей H_i обращаются в нуль на особой траектории. Порядок может быть *локальным* или *глобальным*, в зависимости от того, обратились ли в нуль скобки на самой особой траектории или целиком в ее окрестности (см. [25]). Хорошее обобщение этих определений (так называемый *натуральный порядок*) приведено в [26] (краткий обзор можно найти в приложении В к настоящей статье). Если натуральный порядок траектории является четным числом, то регулярные траектории не могут соединяться с особой кусочно гладким образом. В этом случае регулярные траектории вращаются вокруг особой и пересекают поверхность переключения в счетном числе точек за конечное время таким образом, что точка соединения неособой траектории и особой является точкой накопления. Этот феномен называется *чаттерингом*; он достаточно хорошо изучен для случая, когда ровно две области гладкости гамильтониана смыкаются по гладкой гиперповерхности (см. [28, 30]).

¹Это эквивалентно рассмотрению задачи с одномерным управлением в окрестности особой траектории (см. [22]).

В настоящей работе рассматривается ситуация, когда три области гладкости A_1 , A_2 и A_3 смыкаются по многообразию \mathcal{S}_{123} коразмерности 2. Эта ситуация эквивалентна задаче оптимального управления с двумерным управлением из треугольника¹. В общем случае особые экстремали для n -мерного управления были изучены в [8]. В этом случае вместо порядка правильно говорить о флаге порядков. В настоящей работе мы рассматриваем особую траекторию полного второго порядка. Эту работу можно рассматривать как продолжение работы [10], в которой данная задача была впервые рассмотрена и было доказано наличие феномена чаттеринга². Здесь же мы рассматриваем еще один феномен, возникающий в данной задаче, а именно, хаотическое поведение ограниченных частей оптимальных траекторий системы. Данный феномен не был ранее обнаружен в задачах оптимального управления и является совершенно новым. Основным элементом доказательства является важный новый математический объект: система обыкновенных дифференциальных уравнений на все скобки Пуассона до четвертого порядка между ограничениями H_i гамильтониана \mathcal{H} на области гладкости A_j . Мы называем такую систему *ниспадающей системой* скобок Пуассона.

Наше исследование не ограничивается только задачами оптимального управления, но также включает в себя весь класс кусочно гладких гамильтоновых систем в случае, когда на стыке трех областей гладкости гамильтониана \mathcal{H} лежит особая траектория второго порядка³. В частности, будет рассмотрена максимально подробно линейно-квадратичная задача оптимального управления, оптимальный синтез в которой является прототипом для общего случая. Эта задача является модельной для общей гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом, потому что их ниспадающие системы совпадают.

В конце работы авторы сочли необходимым поместить в качестве приложений некоторые свои уже известные к настоящему времени результаты, касающиеся строения особых траекторий и возможных соединений неособых траекторий с особыми.

2. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЬНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

В данной главе будет дана постановка модельной задачи оптимального управления и описаны ее базовые свойства. Поведение оптимальных траекторий в этой задаче обладает хаотичной природой. Эта задача также примечательна тем, что, с одной стороны, обладает достаточно богатой группой симметрий, и потому ее оптимальный синтез может быть изучен достаточно полно; с другой стороны, она моделирует поведение траекторий в широком классе гамильтоновых систем с разрывной правой частью. В следующих главах будет доказано, что поведение траекторий в системах из этого класса сопряжено оптимальному синтезу в модельной задаче.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу:

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \quad (2.1)$$

$$\ddot{x} = u, \quad u \in \Omega \subset U,$$

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y_0. \quad (2.2)$$

Здесь x и u лежат в двумерном евклидовом пространстве $U \simeq \mathbb{R}^2$ со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а Ω является (замкнутым) треугольником, и $0 \in \text{Int } \Omega$ (такие треугольники мы будем называть допустимыми).

Замечание 2.1. Основное исследование задачи (2.1) мы будем проводить для случая, когда Ω является правильным треугольником с центром в начале координат, однако некоторые результаты, связанные с хаотическим поведением оптимальных траекторий, будут получены и для более общего случая, когда треугольник Ω не обязательно является правильным.

¹Случай, когда множество допустимых управлений Ω является шаром, удивительным образом оказался тесно связан с теорией Галуа (см. [7, 8] или приложение А к настоящей статье)

²Краткое изложение результатов статьи [10] можно найти в приложении Б к настоящей статье.

³О структуре окрестностей особых траекторий первого порядка см. [14] или приложении Г к настоящей статье.

Введем обозначение $y = \dot{x}$. Пусть ϕ, ψ — сопряженные к x и y переменные из принципа максимума Понтрягина. Иногда для сокращения записи мы будем писать $q = (x, y)$ и $p = (\phi, \psi)$. Для фазового пространства мы будем использовать обозначение $M = U \oplus U = \{(x, y)\}$, а для расширенного — $\mathcal{M} = T^*M = \{(p, q)\}$.

Гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda_0}{2}\langle x, x \rangle + \langle \phi, y \rangle + \langle \psi, u \rangle,$$

т.е. $\dot{\phi} = \lambda_0 x$ и $\dot{\psi} = -\phi$. Если $\lambda_0 = 0$, то функция ψ линейна, и мы немедленно приходим к противоречию с конечностью интеграла (2.1). Полагая $\lambda_0 = 1$, получаем гамильтонову систему с разрывной правой частью:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -\phi, & \dot{\phi} = x, & \dot{x} = y, & \dot{y} = u, \\ \langle \psi, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (2.3)$$

В задаче (2.3) существует ровно одна особая по Ω траектория: $x \equiv y \equiv \phi \equiv \psi \equiv u \equiv 0$. Она имеет второй порядок (см. [8]). Как будет показано во второй части работы, поведение оптимальных траекторий задачи (2.1) в окрестности этой траектории (начала координат) является типичным для гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Поэтому мы произведем максимально полный и подробный анализ оптимального синтеза для задачи (2.1).

2.2. Симметрии задачи. Гамильтонова система (2.3) обладает двумя важными группами симметрий. Первая масштабирующая группа $\mathbb{R} \setminus 0$ одномерна и позволяет уменьшить размерность фазового пространства системы. Вторая группа S_3 дискретна, имеется лишь в случае, когда Ω является правильным треугольником, и ведет к доказательству хаотичности.

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$. Рассмотрим следующее преобразование $g(\lambda) \in GL(8, \mathbb{R})$ расширенного фазового пространства \mathcal{M} :

$$x \mapsto \lambda^2 x, \quad y \mapsto \lambda y, \quad \phi \mapsto \lambda^3 \phi, \quad \psi \mapsto \lambda^4 \psi.$$

Преобразование $g(\lambda)$ изменяет гамильтониан \mathcal{H} в λ^4 раз и симплектическую форму

$$\omega = dp \wedge dq = d\phi \wedge dx + d\psi \wedge dy$$

в λ^5 раз. Поэтому $g(\lambda)$ переводит траектории системы (2.3) в траектории, однако меняет скорость движения по ним в λ раз. Если при этом $\lambda > 0$, то оптимальные траектории переходят в оптимальные, так как функционал J изменяется в λ^5 раз.

2. Если треугольник Ω является правильным, то в группе ортогональных преобразований плоскости U имеется дискретная подгруппа $S_3 \subset O(2, \mathbb{R})$ симметрий треугольника Ω . Одновременное действие S_3 на векторах x, y, ϕ и ψ определяет преобразование расширенного фазового пространства, сохраняющее оптимальные траектории, гамильтониан \mathcal{H} и симплектическую структуру ω .

2.3. Теорема о переходе к сопряженным переменным. Одним из основных инструментов при исследовании оптимального синтеза в задаче (2.1) является теорема 2.1 о переходе к сопряженным переменным. Эта теорема позволяет описать структуру поверхности $M_+ \subset \mathcal{M} = T^*M$, сотканной из траекторий системы (2.3), которые являются оптимальными в задаче (2.1).

Обозначим $q = (x, y) \in M = \mathbb{R}^4 = U \oplus U$ и $p = (\phi, \psi) \in T_0^*M = \mathbb{R}^4$.

Теорема 2.1. *Предположим, что Ω — выпуклое компактное множество (возможно, даже не треугольник) и $0 \in \text{Int} \Omega$. Тогда для любой начальной точки $q_0 = (x_0, y_0)$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует единственная оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (2.1). Сопряженная функция $\hat{p}(t, q_0)$ также единственна.*
2. *Найдется такой момент времени $T(q_0) \geq 0$, что*

$$\begin{aligned} \hat{q}(t, q_0) &= 0, & \hat{p}(t, q_0) &= 0 & \text{при } t \geq T(q_0), \\ q(t, q_0) &\neq 0, & p(t, q_0) &\neq 0 & \text{при } t < T(q_0). \end{aligned}$$

При этом функция $T(\cdot)$ непрерывна и

$$C_1 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\} \leq T(q_0) \leq C_2 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\}$$

для некоторых $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$.

3. Отображение $E : q_0 \mapsto \hat{p}(0, q_0) = (\phi_0, \psi_0)$ является локально липшицевым и биективным. Более того,

$$C_3 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\} \leq \max \left\{ \sqrt[3]{|\phi_0|}, \sqrt[4]{|\psi_0|} \right\} \leq C_4 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\}$$

для некоторых $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$.

Доказательство теоремы состоит из нескольких лемм.

Лемма 2.1. Для любого q_0 оптимальное решение $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (2.1) существует и единственно.

Доказательство. Поскольку каждому измеримому управлению $u(t) \in \Omega$ соответствует единственная траектория $q(t)$ с начальными условиями $q(0) = q_0$, мы можем рассматривать функционал J как функционал на пространстве управлений $L_\infty(0; +\infty)$. Множество всех допустимых управлений \mathbb{U} ограничено, замкнуто и выпукло в $L_\infty(0; +\infty)$ в силу ограниченности, замкнутости и выпуклости Ω . Следовательно, по теореме Банаха—Алаоглу множество \mathbb{U} слабо* предкомпактно ($L_\infty(0; +\infty) = L_1^*(0; +\infty)$). Слабая* замкнутость \mathbb{U} тривиально следует из выпуклости и компактности Ω . Покажем, что функционал J полунепрерывен снизу относительно слабой* топологии.

Рассмотрим оператор $K : L_\infty(0; +\infty) \rightarrow AC[0, +\infty)$ следующего вида:

$$x(t) = (Ku)(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Оператор K переводит управление $u(t)$ в соответствующее решение $x(t)$. Таким образом, необходимо доказать, что для любой последовательности управлений $u_n \xrightarrow{w^*} \hat{u}$ выполнено неравенство

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \langle (Ku_n)(t), (Ku_n)(t) \rangle dt \geq \int_0^{+\infty} \langle (K\hat{u})(t), (K\hat{u})(t) \rangle dt.$$

Можно переписать (2.4) в виде

$$(Ku)(t) = x_0 + y_0 t + \int_0^{+\infty} (t - \tau) u(\tau) \theta(t - \tau) d\tau,$$

где $\theta(\cdot)$ — функция Хевисайда. Поскольку $\theta(t - \tau) \in L_1(0; +\infty)$, то $(Ku_n)(t)$ сходится к $(K\hat{u})(t)$ поточечно. Искомое неравенство следует из теоремы Фату. Единственность оптимального решения немедленно следует из строгой выпуклости функционала J . \square

Обозначим через $\mathcal{B}(q_0)$ функцию Беллмана:

$$\mathcal{B}(q_0) = \mathcal{B}(x_0, y_0) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle x(t), x(t) \rangle dt, \text{ где } \ddot{x} \in \Omega \text{ и } x(0) = x_0, \dot{x}(0) = y_0 \right\}.$$

Очевидно, $0 \leq \mathcal{B}(q_0) < +\infty$ для любого q_0 .

Лемма 2.2. Функция Беллмана \mathcal{B} строго выпукла.

Доказательство. Пусть $x^1(t)$ и $x^2(t)$ — две произвольные траектории. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ с помощью прямой выкладки получаем:

$$J(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) = \lambda J(x^1) + (1 - \lambda)J(x^2) - \lambda(1 - \lambda)J(x^2 - x^1).$$

Если $x^1(t)$ и $x^2(t)$ — оптимальные траектории с начальными условиями в $q_0^1 = (x_0^1, y_0^1)$ и $q_0^2 = (x_0^2, y_0^2)$ соответственно, то, в силу неотрицательности J , для $0 < \lambda < 1$ получаем

$$\lambda \mathcal{B}(q_0^1) + (1 - \lambda) \mathcal{B}(q_0^2) \geq J(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \mathcal{B}(\lambda q_0^1 + (1 - \lambda)q_0^2),$$

причем равенство может выполняться только в случае $J(x^2 - x^1) = 0$, т.е. если $x^1 \equiv x^2$, что и требовалось. \square

Следствие 2.1. *Функция Беллмана \mathcal{B} непрерывна.*

Следствие 2.2. *Отображение $q_0 \mapsto \hat{u}(\cdot, q_0) \in L_\infty(0; +\infty)$, которое ставит в соответствие начальной точке q_0 оптимальное управление $\hat{u}(\cdot, q_0)$ из этой точки, является непрерывным в слабой* топологии.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность q_k , стремящуюся к точке q_0 . Обозначим через $u_k(\cdot) = \hat{u}(\cdot, q_k)$ оптимальное управление из точки q_k . Покажем, что последовательность $u_k(\cdot)$ слабо* сходится к оптимальному управлению в точке q_0 . Из последовательности u_k можно выбрать слабо* сходящуюся подпоследовательность u_{k_m} , так как множество \mathbb{U} слабо* компактно. Итак, $u_{k_m} \xrightarrow{w^*} u^0$. Докажем, что траектория $x_0(t) = \mathcal{K}(u_0, q_0)(t)$ является оптимальной для начальной точки q_0 . Действительно, обозначим через $x_k(t) = \mathcal{K}(u_k, q_k)(t)$ оптимальную траекторию из точки q_k . Тогда из непрерывности функции \mathcal{B} и теоремы Фату получаем

$$\mathcal{B}(q_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{B}(q_{k_m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} J(x_{k_m}) \geq J(x_0).$$

Поэтому траектория x_0 оптимальна. Следовательно, существует единственная предельная точка последовательности u_k — оптимальное управление u_0 в точке q_0 , т.е. последовательность u_k слабо* сходится к u_0 . \square

Следствие 2.3. *Отображение $q_0 \mapsto \hat{q}(\cdot, q_0) \in C[0; \tau]$ непрерывно при любой $\tau \geq 0$.*

Доказательство. Покажем, что отображение $q_0 \mapsto \hat{x}(\cdot, q_0) \in C[0; \tau]$ непрерывно. Рассмотрим последовательность $q_k \rightarrow q_0$. Тогда $\hat{u}(\cdot, q_k) \xrightarrow{w^*} \hat{u}(\cdot, q_0)$. Осталось заметить, что из формулы (2.4) немедленно следует, что $\hat{x}(t, q_k) \rightarrow \hat{x}(t, q_0)$ для всех t , и эта сходимостъ равномерна при $t \in [0; \tau]$. Аналогично доказывается сходимостъ $\hat{y}(\cdot, q_k) \rightarrow \hat{y}(\cdot, q_0)$. \square

Лемма 2.3. *Для любых начальных данных q_0 найдется такой момент времени $T(q_0)$, что $\hat{q}(t, q_0) = 0$ при всех $t \geq T(q_0)$, причем*

$$T(q_0) \leq C_2 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\}$$

для некоторой константы $C_2 > 0$.

Доказательство. Сначала покажем, что оптимальное решение $\hat{q}(t, q_0)$ стремится к 0 при $t \rightarrow +\infty$ в силу убывания функции \mathcal{B} . Действительно, предположим противное: пусть $|\hat{q}(t_k, q_0)| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку функция \mathcal{B} непрерывна,

$$M = \min_{|q|=\varepsilon} \mathcal{B}(q) > 0.$$

Поэтому $\mathcal{B}(q) \geq M$ для любого $|q| \geq \varepsilon$ в силу выпуклости функции \mathcal{B} (т.к. 0 — ее абсолютный минимум). Значит, $\mathcal{B}(\hat{q}(t_k, q_0)) \geq M > 0$ для любого k , противоречие.

Теперь докажем само утверждение леммы. Введем обозначение $\rho(x, y) = \max\{\sqrt{|x|/a}, |y|/b\}$, где константы $a > 0$ и $b > 0$ будут выбраны позже. Пусть $\rho(x_0, y_0) = \delta$. Так как оптимальная траектория стремится к началу координат, то за конечное время она пересечет границу шара $\rho(x, y) = \delta/2$. Оставшаяся часть доказательства леммы посвящена оценке этого времени. Точнее, наша цель — связать через оценки время уменьшения $\rho(x, y)$ вдвое на оптимальной траектории и значение функции Беллмана.

Начнем с оценки снизу интеграла от $\langle \hat{x}(t), \hat{x}(t) \rangle$ на оптимальной траектории $\hat{x}(t)$ на промежутке $[0; \delta]$. Воспользуемся формулой (2.4): если $|x_0| = a\delta^2$, то при $t \in [0; \delta]$ имеем

$$|\hat{x}(t)| \geq \max \left\{ 0, a\delta^2 - b\delta t - \frac{1}{2}\delta^2 \max_{u \in \Omega} |u| \right\},$$

а если $|y_0| = b\delta$, то

$$|\widehat{x}(t)| \geq \max \left\{ 0, b\delta t - a\delta^2 - \frac{1}{2}\delta^2 \max_{u \in \Omega} |u| \right\}.$$

Обозначим $c = \frac{1}{2} \max_{u \in \Omega} |u|$ и положим $a = 5c$, $b = 12c$ и $\tau = t/\delta \in [0; 1]$. Тогда выполнено одно из двух неравенств

$$|\widehat{x}(t)| = |\widehat{x}(\tau\delta)| \geq \begin{cases} c\delta^2 \max\{0, 4 - 12\tau\}, & \text{если } |x_0| = a\delta^2, \\ c\delta^2 \max\{0, 12\tau - 6\}, & \text{если } |y_0| = b\delta. \end{cases}$$

В любом случае либо при $\tau \in [0, 1/3]$, либо при $\tau \in [1/2, 1]$ получаем не вырождающуюся оценку снизу на $|\widehat{x}(t)|$. Поэтому для некоторой константы $c_1 > 0$ имеем

$$\int_0^\delta \langle \widehat{x}(t), \widehat{x}(t) \rangle dt = \delta \int_0^1 \langle \widehat{x}(\tau\delta), \widehat{x}(\tau\delta) \rangle d\tau \geq c_1 \delta^5. \quad (2.5)$$

Пусть теперь $\rho(q_0) = \rho(x_0, y_0) = \Delta$. Обозначим для краткости $\rho(t) = \rho(\widehat{x}(t), \widehat{y}(t))$. Пусть $t_{\frac{1}{2}}(q_0) > 0$ — такой минимальный момент времени, что $\rho(t_{\frac{1}{2}}(q_0)) = \frac{1}{2}\Delta = \delta$. Последовательно вычислим

$$\begin{aligned} t_0 &= 0, & t_1 &= t_0 + \tau_1, & t_2 &= t_1 + \tau_2, & \dots, & t_{n+1} &= t_n + \tau_{n+1}, & \dots, \\ \tau_1 &= \rho(t_0), & \tau_2 &= \rho(t_1), & \tau_3 &= \rho(t_2), & \dots, & \tau_{n+1} &= \rho(t_n), & \dots \end{aligned}$$

Пусть N — такой номер, что $t_{N-1} \leq t_{\frac{1}{2}}(q_0)$, но $t_N > t_{\frac{1}{2}}(q_0)$. Номер N конечен, так как $t_{n+1} - t_n \geq \delta$, если $t_n \leq t_{\frac{1}{2}}(q_0)$. Поскольку $\tau_n \geq \delta$ при $n \leq N$, то согласно неравенству (2.5) получаем

$$\mathcal{B}(q_0) \geq \int_0^{t_N} \langle \widehat{x}(t, q_0), \widehat{x}(t, q_0) \rangle dt \geq c_1 \sum_{k=1}^N \tau_k^5 = c_1 \delta^5 \sum_{k=1}^N \left(\frac{\tau_k}{\delta} \right)^5 \geq c_1 \delta^5 \sum_{k=1}^N \frac{\tau_k}{\delta} \geq c_1 \delta^4 t_{\frac{1}{2}}(q_0).$$

Поэтому

$$t_{\frac{1}{2}}(\Delta) \leq c_2 \frac{\beta(\Delta)}{\Delta^4},$$

где

$$t_{\frac{1}{2}}(\Delta) = \sup_{\rho(q_0)=\Delta} t_{\frac{1}{2}}(q_0), \quad \beta(\Delta) = \max_{\rho(q_0)=\Delta} \mathcal{B}(q_0).$$

Теперь заметим, что $t_{\frac{1}{2}}(\lambda\Delta) = \lambda t_{\frac{1}{2}}(\Delta)$ и $\beta(\lambda\Delta) = \lambda^5 \beta(\Delta)$ для любого $\lambda > 0$ в силу наличия симметрии g группы \mathbb{R}_+ . Поэтому

$$T(q_0) \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) t_{\frac{1}{2}}(\rho(q_0)) = c_3 \rho(q_0),$$

что и требовалось. \square

Далее через $T(q_0)$ будем обозначать такой минимальный момент времени, что $\widehat{q}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$.

Замечание 2.2. Оценка снизу вида $T(q_0) \geq C_1 \max\{\sqrt{|x_0|}, |y_0|\}$ на время прихода в начало координат немедленно получается из рассмотрения задачи быстрогодействия

$$T \rightarrow \inf \quad \text{при } \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in \widetilde{\Omega}, \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x(T) = y(T) = 0,$$

где $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$, а $\widetilde{\Omega}$ — квадрат с центром в начале координат и стороной $2 \operatorname{diam} \Omega$.

Следствие 2.4. Функция $T(q^0)$ непрерывна по q^0 .

Доказательство. Функция $T(q^0)$ непрерывна в точке $q^0 = 0$ по теореме о промежуточной функции («о двух милиционерах»). Покажем непрерывность в точке $q^0 \neq 0$. Рассмотрим последовательность $q^k \rightarrow q^0$. Введем обозначения

$$T^- = \liminf_{k \rightarrow \infty} T(q^k), \quad T^+ = \limsup_{k \rightarrow \infty} T(q^k).$$

Заметим, что $T(q^0) \leq T^-$. Действительно, если $t > T^-$, то согласно следствию 2.3 выполнено соотношение $\widehat{q}(t, q^0) = 0$.

Покажем, что $T(q^0) \geq T^+$. Согласно следствию 2.3 имеем $\widehat{q}(T(q^0), q^k) \rightarrow \widehat{q}(T(q^0), q^0) = 0$, т.е. за время $T(q^0)$ оптимальные траектории из точек q^k окажутся в сколь угодно малой окрестности начала координат. Но в начале координат функция $T(\cdot)$ непрерывна. Поэтому $T(\widehat{q}(T(q^0), q^k)) \rightarrow 0$. Осталось заметить, что для любого k имеем либо $T(q^k) \leq T(q^0)$, либо $T(q^k) = T(q^0) + T(\widehat{q}(T(q^0), q^k))$, что и завершает доказательство. \square

Следствие 2.5. Для любого q_0 сопряженная функция $\widehat{p}(t, q_0)$ единственна.

Доказательство. Поскольку $\widehat{u}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$, то $\langle \psi, u \rangle$ достигает максимума во внутренней точке Ω ($0 \in \text{Int } \Omega$). Поэтому $\widehat{\psi}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$, и, следовательно, $\widehat{\phi}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$. При $t < T(q_0)$ функция $\widehat{p}(t, q_0)$ может быть найдена единственным образом:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(t, q_0) &= - \int_t^{T(q_0)} \widehat{x}(\tau, q_0) d\tau, \\ \widehat{\psi}(t, q_0) &= \int_t^{T(q_0)} \widehat{\phi}(\tau, q_0) d\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Утверждение доказано. \square

Лемма 2.4. Функция Беллмана является функцией класса C^1 и $\mathcal{B}'(q_0) = -\widehat{p}(0, q_0)$.

Под $\mathcal{B}'(q_0) \in U^*$ здесь и далее подразумевается дифференциал функции Беллмана в точке q_0 .

Доказательство. Начнем со случая $q_0 \neq 0$. Мы докажем, что субдифференциал функции Беллмана состоит из одной точки: из этого факта немедленно будет следовать, что $\mathcal{B} \in C^1$. Рассмотрим задачу (2.1), в которой условие $q(0) = q_0$ заменено условием $q(0) \in l$, где l — любая опорная гиперплоскость в точке q_0 к множеству $\{q : \mathcal{B}(q) \leq \mathcal{B}(q_0)\}$. В силу строгой выпуклости функции $\mathcal{B}(q)$ траектория $\widehat{q}(t, q_0)$ является решением и новой задачи при любом выборе l . Согласно принципу максимума Понтрягина, должна существовать сопряженная функция $p^l(t)$, удовлетворяющая уравнениям (2.3) и условиям трансверсальности $p^l(0) \perp l$. Рассуждая, как в доказательстве следствия 2.5, мы немедленно получаем, что $p^l(t) = \widehat{p}(t, q_0)$. Поэтому вектор $\widehat{p}(0, q_0)$ ортогонален любой опорной гиперплоскости l . Если $\widehat{p}(0, q_0) \neq 0$, то поверхность уровня функции \mathcal{B} является гладкой, а дифференцируемость функции Беллмана \mathcal{B} вытекает из ее однородности: $\mathcal{B}(g(\lambda)q) = \lambda^5 \mathcal{B}(q)$ при $\lambda > 0$. В этом случае $\widehat{p}(0, q_0) = \lambda(q_0) \mathcal{B}'(q_0)$, где $\lambda(q_0)$ — коэффициент пропорциональности. Покажем, что $\widehat{p}(0, q_0) \neq 0$. В противном случае $0 \in \partial \mathcal{B}(q_0)$, так как субдифференциал выпуклой функции полунепрерывен сверху. Но функция Беллмана является строго выпуклой с минимумом в 0, противоречие.

Покажем теперь, что $\lambda(q_0) = -1$. Согласно уравнению Беллмана

$$\frac{1}{2} \langle x_0, x_0 \rangle + \langle \mathcal{B}'_x(q_0), \widehat{y}(0, q_0) \rangle + \langle \mathcal{B}'_y(q_0), \widehat{u}(0, q_0) \rangle = 0.$$

С другой стороны, поскольку $\dot{\mathcal{H}} = 0$, а $\widehat{q}(t, q_0)$ и $\widehat{p}(t, q_0)$ обращаются в нуль при $t > T(q_0)$, то $\mathcal{H} = 0$. Значит,

$$-\frac{1}{2} \langle x_0, x_0 \rangle + \langle \widehat{\phi}(0, q_0), \widehat{y}(0, q_0) \rangle + \langle \widehat{\psi}(0, q_0), \widehat{u}(0, q_0) \rangle = 0.$$

Поэтому $\lambda(q_0) = -1$ и $\mathcal{B}'(q_0) = -\widehat{p}(0, q_0)$ при $q_0 \neq 0$.

Покажем дифференцируемость в точке 0. Пусть

$$C = \max\{\mathcal{B}(x, y) \mid |x|^2 + |y|^4 = 1\}.$$

Тогда из равенства $\mathcal{B}(g(\lambda)q) = \lambda^5 \mathcal{B}(q)$ при $\lambda > 0$ получаем, что $0 \leq \mathcal{B}(q) \leq C(|x|^2 + |y|^4)^{\frac{5}{4}}$. \square

Лемма 2.5. Отображение $E : q_0 \mapsto \widehat{p}(0, q_0) = -\mathcal{B}'(q_0)$ является гомеоморфизмом (непрерывной биекцией).

Доказательство. Отображение E непрерывно, так как $\mathcal{B} \in C^1$. Инъективность отображения E немедленно следует из строгой выпуклости \mathcal{B} . Сюръективность вытекает из следующих соображений. Рассмотрим строго выпуклое множество $B_1 = \{q : \mathcal{B}(q) \leq 1\}$ с гладкой границей. Поскольку для каждого направления $v \in U^*$ существует ровно две различные перпендикулярные v касательные гиперплоскости к ∂B_1 , то дифференциалы функции $\mathcal{B}(q)$ в точках касания q_1 и q_2 параллельны и противоположно направлены. Следовательно, в одной из этих точек дифференциал к функции $\mathcal{B}(q)$ направлен противоположно v , скажем, $v = -\lambda \mathcal{B}'(q_1)$ для некоторого $\lambda > 0$. Значит, $v = -\mathcal{B}'(g(\sqrt[5]{\lambda})q_1)$. \square

Замечание 2.3. Согласно определению $T(q_0)$ при всех $t < T(q_0)$ имеет место неравенство $q(t, q_0) \neq 0$. Поскольку отображение E является гомеоморфизмом и $E(0, 0) = (0, 0)$, то $p(t, q_0) \neq 0$ при $t < T(q_0)$.

Следствие 2.6. Для значений сопряженных переменных в начальный момент времени выполнены оценки

$$C_3 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\} \leq \max \left\{ \sqrt[3]{|\phi_0|}, \sqrt[4]{|\psi_0|} \right\} \leq C_4 \max \left\{ \sqrt{|x_0|}, |y_0| \right\}$$

для некоторых $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что отображение $E : q_0 \mapsto \hat{p}(0, q_0)$ является непрерывным. Введем обозначения

$$C_3 = \min_{\max\{\sqrt{|x_0|}, |y_0|\}=1} \max \left\{ \sqrt[3]{|\phi_0|}, \sqrt[4]{|\psi_0|} \right\},$$

$$C_4 = \max_{\max\{\sqrt{|x_0|}, |y_0|\}=1} \max \left\{ \sqrt[3]{|\phi_0|}, \sqrt[4]{|\psi_0|} \right\}.$$

Очевидно, $C_4 \geq C_3 \geq 0$. Однако $E^{-1}(0, 0) = (0, 0)$ согласно лемме 2.5. Осталось воспользоваться действием g группы \mathbb{R}_+ :

$$C_3 \lambda \leq \max \left\{ \sqrt[3]{|\phi_0|}, \sqrt[4]{|\psi_0|} \right\} \leq C_4 \lambda,$$

если $\max\{\sqrt{|x_0|}, |y_0|\} = \lambda$, что и требовалось. \square

Осталось доказать липшицевость отображения E . Разобьем доказательство на две леммы.

Лемма 2.6. Для любой точки $q_0 \in U$ найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что для всех $\Delta q = (\Delta x, \Delta y)$, $|\Delta q| < \delta$ выполнены неравенства

$$0 \leq \mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q \leq C|\Delta q|^2.$$

При этом константы C и δ могут быть выбраны непрерывно зависящими от q_0 .

Доказательство. Определим $q(t) = (x(t), y(t))$ и $p(t) = (\phi(t), \psi(t))$ следующим образом: при $t \in [0; T(q_0)]$ они находятся из условий

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \hat{u}(t, q_0), & y(0) = y_0 + \Delta y, \\ \dot{x}(t) = y(t), & x(0) = x_0 + \Delta x, \\ \dot{\phi}(t) = x(t), & \phi(0) = \hat{\phi}(0, q_0), \\ \dot{\psi}(t) = -\phi(t), & \psi(0) = \hat{\psi}(0, q_0), \end{cases}$$

а после момента времени $t = T(q_0)$ траектория $q(t)$ совпадает с оптимальной из точки $q(T(q_0))$, т.е. $q(t) = \hat{q}(t - T(q_0), q(T(q_0)))$ (траектория $p(t)$ не важна при $t > T(q_0)$). Фактически траектория $q(t)$ начинается в $q_0 + \Delta q$ и движется с управлением, оптимальным для точки q_0 , пока оно не станет тождественным нулем, а потом переключается на настоящее оптимальное управление. Интегрируя два раза по частям, получаем

$$\mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) \leq \frac{1}{2} \int_0^{T(q_0)} \left\langle x(t) - \hat{x}(t, q_0), x(t) + \hat{x}(t, q_0) \right\rangle dt + \mathcal{B}(\Delta x + T(q_0)\Delta y, \Delta y) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left\langle \phi(t) + \hat{\phi}(t, q_0), \Delta x + t\Delta y \right\rangle \Big|_0^{T(q_0)} + \frac{1}{2} \left\langle \psi(t) + \hat{\psi}(t, q_0), \Delta y \right\rangle \Big|_0^{T(q_0)} + \mathcal{B}(\Delta x + T(q_0)\Delta y, \Delta y) = \\
 &= \frac{1}{2} \left\langle \phi(T(q_0)), \Delta x + T(q_0)\Delta y \right\rangle - \left\langle \hat{\phi}(0, q_0), \Delta x \right\rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \left\langle \psi(T(q_0)), \Delta y \right\rangle - \left\langle \hat{\psi}(0, q_0), \Delta y \right\rangle + \mathcal{B}(\Delta x + T(q_0)\Delta y, \Delta y) = \\
 &= \frac{T(q_0)}{2} \|\Delta x\|^2 + \frac{T^2(q_0)}{2} \langle \Delta y, \Delta x \rangle + \frac{T^3(q_0)}{6} \|\Delta y\|^2 + \left\langle \mathcal{B}'(q_0), \Delta q \right\rangle + \mathcal{B}(\Delta x + T(q_0)\Delta y, \Delta y).
 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали соотношения

$$\begin{aligned}
 \phi(0) = \hat{\phi}(0, q_0) = -\mathcal{B}'_x(q_0), \quad \phi(T(q_0)) = T(q_0)\Delta x + \frac{T^2(q_0)}{2}\Delta y, \quad \psi(0) = \hat{\psi}(0, q_0) = -\mathcal{B}'_y(q_0), \\
 \psi(T(q_0)) = -\frac{T^2(q_0)}{2}\Delta x - \frac{T^3(q_0)}{6}\Delta y, \quad \hat{\psi}(T(q_0), q_0) = 0.
 \end{aligned}$$

Введем константу

$$C_5 = \max \left\{ \mathcal{B}(q) \mid \|x\|^{5/2} + \|y\|^5 = 1 \right\}.$$

Тогда

$$\mathcal{B}(\Delta x + T(q_0)\Delta y, \Delta y) \leq C_5 \left(\|\Delta x + T(q_0)\Delta y\|^{5/2} + \|\Delta y\|^5 \right),$$

и мы получаем оценку

$$\mathcal{B}(q_0 + \Delta q) - \mathcal{B}(q_0) - \left\langle \mathcal{B}'(q_0), \Delta q \right\rangle \leq C_6 \|\Delta q\|^2 + C_5 \left(\|\Delta x\|^{5/2} + \|\Delta y\|^{5/2} + \|\Delta y\|^5 \right),$$

где константы $C'_5, C_6 > 0$, вообще говоря, зависят от $T(q_0)$. Полученное неравенство дает заявленную в условии леммы оценку сверху. Неотрицательность этого выражения следует из выпуклости функции Беллмана $\mathcal{B}(q)$. \square

Основная трудность в оставшемся доказательстве липшицевости $\mathcal{B}'(q)$ заключается в том, что функция Беллмана $\mathcal{B}(q)$ может не быть дважды дифференцируемой (и это по существу так, если, скажем, Ω — многогранник). Поэтому завершим доказательство теоремы 2.1 следующей леммой.

Лемма 2.7. Пусть $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ — произвольная функция. Если для некоторых констант $0 \leq C' \leq C$ и для всех q_1, q_2 из некоторой открытой выпуклой области в \mathbb{R}^n выполнены неравенства

$$C' |\Delta q^2| \leq g(q_2) - g(q_1) - \left\langle g'(q_1), \Delta q \right\rangle \leq C |\Delta q^2|,$$

где $\Delta q = q_2 - q_1$, то $g' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n*}$ является липшицевым отображением в этой области с константой Липшица C . Если к тому же $C' > 0$, то отображение g' является билипшицевым в этой области.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что выпуклая открытая область из условия есть \mathbb{R}^n . Также будем считать, что в \mathbb{R}^n задано скалярное произведение, и, следовательно, $g'(q) \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\omega(q) \geq 0$ — «шапочка», т.е. ω — неотрицательная бесконечно гладкая функция с компактным носителем $\text{supp } \omega \subseteq \{|q| \leq 1\}$ и $\int \omega(q) dq = 1$. Введем обозначения $\omega_k(q) = k^n \omega(kq)$ и $g_k = g * \omega_k$ (свертка). Тогда g_k — бесконечно гладкая функция, $g'_k = g' * \omega_k$ и

$$\Lambda_n(q_1, q_2) = g_k(q_2) - g_k(q_1) - g'_k(q_1)\Delta q = \int_{\mathbb{R}^n} (g(q_2 - y) - g(q_1 - y) - g'(q_1 - y)\Delta q) \omega_k(y) dy.$$

Значит,

$$C' |\Delta q|^2 \leq \Lambda_k(q_1, q_2) = \frac{1}{2} g''_k(q_1) [\Delta q; \Delta q] + o(|\Delta q|^2) \leq C |\Delta q|^2.$$

Подставив $\lambda \Delta q$ вместо Δq в это неравенство и устремив λ к нулю, получаем, что для всех $k, q, \Delta q$ выполнены неравенства

$$C' |\Delta q|^2 \leq \frac{1}{2} g''_k(q) [\Delta q; \Delta q] \leq C |\Delta q|^2.$$

Итак, для всех k и q имеем $\|g_k''(q)\| \leq 2C$. Следовательно,

$$|g_k'(q_2) - g_k'(q_1)| \leq \sup_{\theta \in [0,1]} |g_k''(q_1 + \theta(q_2 - q_1))| \cdot |\Delta q| \leq 2C|\Delta q|.$$

Устремив k к бесконечности (при фиксированных q_1 и q_2) получаем искомое:

$$|g'(q_2) - g'(q_1)| \leq 2C|\Delta q|.$$

Пусть теперь $C' > 0$. Покажем билипшицевость отображения g :

$$g_k'(q_2) - g_k'(q_1) = \int_0^1 g_k''(q_1 + t\Delta q) \Delta q dt.$$

Поэтому

$$|\langle g_k'(q_2) - g_k'(q_1), \Delta q \rangle| = \left| \int_0^1 g_k''(q_1 + t\Delta q) [\Delta q, \Delta q] dt \right| = \int_0^1 g_k''(q_1 + t\Delta q) [\Delta q, \Delta q] dt \geq 2C'|\Delta q|^2.$$

Итак, при любых k, q_2, q_1 выполнено неравенство

$$|\langle g_k'(q_2) - g_k'(q_1), \Delta q \rangle| \geq 2C'|\Delta q|^2.$$

Устремив k к бесконечности (при фиксированных q_1 и q_2), получаем

$$|\langle g'(q_2) - g'(q_1), \Delta q \rangle| \geq 2C'|\Delta q|^2.$$

Учитывая, что

$$|g'(q_2) - g'(q_1)| \cdot |\Delta q| \geq |\langle g'(q_2) - g'(q_1), \Delta q \rangle|,$$

получаем

$$|g'(q_2) - g'(q_1)| \geq 2C'|\Delta q|,$$

что означает билипшицевость отображения g , если $C' > 0$. \square

Теорема 2.1 доказана. В качестве первого применения теоремы 2.1 мы немедленно получаем (здесь и далее $M = \{(x, y)\} = U \oplus U$ — фазовое пространство) следующее утверждение.

Следствие 2.7. *Множество всех пар $(q_0, E(q_0))$ образует в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ липшицево многообразие M_+ , однозначно проектирующееся на плоскость $\{p = 0\}$. Все оптимальные траектории (и только они) лежат в M_+ и приходят в начало координат за конечное время. Других попадающих в начало координат траекторий гамильтоновой системы (2.3) не существует, иначе они были бы оптимальны в силу выпуклости исходной задачи.*

Отметим, что не трудно найти траектории системы (2.3), выходящие из начала координат. Действительно, отображение $g(-1)$ сохраняет систему (2.3), но изменяет направление движения на противоположное. Поэтому траектории, выходящие из начала координат, образуют липшицево многообразие M_- :

$$M_- = g(-1)M_+.$$

2.4. Фактор-пространства M/g и \mathcal{M}/g . Основополагающую роль при изучении оптимального синтеза (существование которого доказано в теореме 2.1) играет переход к фактор-пространству по действию g группы \mathbb{R}_+ и перенос оптимального синтеза на него.

Замечание 2.4. Поскольку оба описанных выше действия групп \mathbb{R}_+ (для любого треугольника Ω) и S_3 (только в случае правильного треугольника) переводят оптимальные траектории в оптимальные, то отображение E , построенное в теореме 2.1, коммутирует с этими действиями:

$$E(x, y) = (\phi, \psi) \Rightarrow \begin{cases} E((\lambda^2 x, \lambda y)) = (\lambda^3 \phi, \lambda^4 \psi) & \forall \lambda > 0, \\ E(\alpha x, \alpha y) = (\alpha \phi, \alpha \psi) & \forall \alpha \in S_3. \end{cases}$$

После факторизации фазового пространства $M = \mathbb{R}^4$ (без начала координат) по действию g группы \mathbb{R}_+ получается трехмерная сфера S^3 , на которую корректно переносятся оптимальные траектории задачи (2.1) и направление движения по ним. Однако скорость движения теряется. После факторизации сферы $\{M \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+) = S^3$ по действию группы S_3 получается пространство типа линзового¹. По действию g группы \mathbb{R}_+ можно также профакторизовать расширенное фазовое пространство $\mathcal{M} = T^*M = \mathbb{R}^8$ без начала координат. Получится семимерная сфера $S^7 = \{\mathcal{M} \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+)$, на которую корректно переносятся траектории гамильтоновой системы (2.3) с сохранением направления движения.

Обозначим через π каноническую проекцию $M \setminus 0 \rightarrow \{M \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+)$, а через $\tilde{\pi}$ — каноническую проекцию $\mathcal{M} \setminus 0 \rightarrow \{\mathcal{M} \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+)$. В тех случаях, когда это не вызовет путаницы, мы будем писать π вместо $\tilde{\pi}$. Допуская некоторую вольность, в дальнейшем мы будем писать M/g вместо $\{M \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+)$ и \mathcal{M}/g вместо $\{\mathcal{M} \setminus 0\}/g(\mathbb{R}_+)$, всегда подразумевая, что начало координат не участвует в факторизации.

Теорема 2.1 позволяет перенести оптимальный синтез из пространства $M = \{(x, y)\}$ в пространство $N = \{(\phi, \psi)\}$. Более того, с помощью отображения E мы можем отождествить M , M_+ и N (или после факторизации M/g , M_+/g и N/g). Это оказывается очень полезным при изучении поверхности переключения управления \mathcal{S} , так как наиболее простой вид она принимает в пространстве сопряженных переменных N . Поскольку E коммутирует с $g(\lambda)$ при $\lambda > 0$, то пространства M/g , M_+/g и N/g также отождествляются.

2.5. Одномерные задачи Фуллера внутри. В этом пункте будет рассмотрен важный частный случай, когда начало координат лежит на одной из высот треугольника Ω . В этом случае в оптимальном синтезе задачи (2.1) удастся найти такую двумерную плоскость в M , что

- (1) оптимальная траектория системы, начавшись на этой плоскости, не может ее покинуть и
- (2) поведение оптимальных траекторий на этой плоскости эквивалентно одномерной задаче Фуллера с несимметричным отрезком управлений.

Лемма 2.8. Пусть аффинная прямая A , содержащая одну из высот Ω , проходит через начало координат. Предположим, что выполнено одно из двух условий:

1. начальные условия лежат в A : $x_0, y_0 \in A$;
2. значения сопряженных переменных в начальный момент времени лежат в A , т.е. $\phi^0, \psi^0 \in A$, где $(\phi^0, \psi^0) = E(x_0, y_0)$.

Тогда оптимальная траектория не покидает A при всех t :

$$\hat{x}(t, q_0) \in A, \quad \hat{y}(t, q_0) \in A, \quad \hat{\phi}(t, q_0) \in A, \quad \hat{\psi}(t, q_0) \in A, \quad \hat{u}(t, q_0) \in A$$

(напомним, что $q_0 = (x_0, y_0)$).

Доказательство. Пусть выполнено условие 1. По теореме 2.1 оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$ существует и единственна. Рассмотрим траекторию $q(t)$, которая получена из оптимальной с помощью ортогональной проекции на A . Траектория $q(t)$ допустима, так как A является высотой в Ω . Поскольку при проектировании на любое одномерное линейное подпространство длина вектора не может увеличиться, то $J(q) \leq J(\hat{q})$. Осталось заметить, что $q(t)$ и $\hat{q}(t, q_0)$ начинаются в одной точке, поэтому $\hat{q}(t, q_0) \equiv q(t)$ в силу единственности оптимального решения (по теореме 2.1). Следовательно, $\hat{q}(t, q_0) \in A$ при всех t . Траектории $\hat{\phi}(t, q_0)$ и $\hat{\psi}(t, q_0)$ лежат в A по формулам (2.6).

В ограничении на подпространство $A \oplus A \subset M$ мы получаем одномерную задачу Фуллера, отрезком управления в которой выступает высота треугольника Ω . Поэтому $E(A \oplus A) = A \oplus A$ (см. [30, § 3.5]).

Пусть теперь выполнено условие 2. По теореме 2.1 найдутся такие x_0 и y_0 (и притом единственные), что $E(x_0, y_0) = (\phi^0, \psi^0)$. При этом x_0 и y_0 должны лежать в A (так как отображение E биективно, а $E(A \oplus A) = A \oplus A$). Поэтому утверждение леммы при выполнении условия 2 следует из доказанного утверждения для условия 1. \square

Отметим, что в условиях леммы 2.8 особое управление по ребру (ij) , содержащему основание высоты A , может быть использовано только на оптимальной траектории, целиком лежащей в A .

¹Точнее, получится фактор линзового пространства $L(3; 1, 1)$ по несвободному действию \mathbb{Z}_2 .

Действительно, если максимум по u скалярного произведения $\langle \psi, u \rangle$ достигается одновременно во всех точках ребра (ij) , то вектор ψ перпендикулярен ребру (ij) . Следовательно, для особого управления необходимо, чтобы вектор ψ на оптимальной траектории был перпендикулярен ребру (ij) в течении некоторого промежутка времени $t \in (t_1, t_2)$. Дифференцируя $\psi(t)$ в силу системы (2.3), немедленно получаем, что векторы $\phi(t)$, $x(t)$, $y(t)$ и $u(t)$ также перпендикулярны ребру (ij) .

Определение 2.1. Будем называть оптимальную траекторию полуособой по ребру (ij) треугольника Ω , если в течении всего времени эта траектория лежит на прямой A , содержащей высоту Ω к ребру (ij) .

2.6. Бариецентрические координаты в случае правильного треугольника. Доказательство теорем о хаотичности опирается на ключевые элементы оптимального синтеза в задаче (2.1) в случае, когда треугольник Ω является правильным. Поэтому основной целью до конца главы будет являться выделение ключевых элементов оптимального синтеза в этом важном частном случае, а треугольник Ω будет предполагаться правильным и центрированным относительно начала координат (в дальнейшем для краткости этот случай мы будем называть «случай правильного треугольника»). Более подробное исследование ключевых элементов оптимального синтеза в модельной задаче (2.1) в случае правильного треугольника можно найти в [10] или в дополнении Б к настоящей статье.

Для того, чтобы в явном виде описать некоторые важные примеры оптимальных траекторий, нам потребуется удобная система координат. Поскольку множество Ω — правильный треугольник с центром в начале координат, то в этой задаче удобнее всего использовать бариецентрическую систему координат¹:

$$\begin{cases} x = (x^1, x^2, x^3), & x^1 + x^2 + x^3 = 0; & y = (y^1, y^2, y^3), & y^1 + y^2 + y^3 = 0; \\ \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3), & \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0; & \psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3), & \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0; \\ u = (u^1, u^2, u^3), & u^1 + u^2 + u^3 = 0; & u_i \leq 1, & i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Вершинами треугольника Ω являются точки² $(-2, 1, 1)$, $(1, -2, 1)$ и $(1, 1, -2)$. Мы будем их называть соответственно первой, второй и третьей вершинами треугольника Ω . Условие максимума (2.3) переписывается в бариецентрических координатах в виде

$$u^i = -2, \quad u^j = u^k = 1, \quad \text{если } \psi_i < \min(\psi_j, \psi_k), \quad \text{где } \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

за исключением случаев $\psi_i = \psi_j \leq \psi_k$.

Действие дискретной группы S_3 в бариецентрической системе координат — это просто перестановка индексов. Обозначим через A_{ij} прямую в U , симметричную относительно транспозиции $(ij) \in S_3$. Из леммы 2.8 следует, что в ограничении на каждую из трех прямых A_{12} , A_{13} и A_{23} мы получаем одномерную задачу Фуллера с несимметричным отрезком управления:

$$\int_0^{+\infty} x^2 dt \rightarrow \min,$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}/2].$$

Здесь x , y и u одномерны. Такие задачи очень хорошо изучены, оптимальный синтез построен и может быть явно выписан в координатах, функция Беллмана и отображение E выписаны в явном виде (см. [30]).

Опишем геометрические свойства оптимального синтеза. На плоскости \mathbb{R}^2 определено однопараметрическое семейство траекторий, переходящих друг в друга при действии g масштабной группы \mathbb{R}_+ . Каждая оптимальная траектория за конечное время попадает в начало координат. При этом оптимальное управление совершает счетное число переключений с левого конца отрезка на правый и обратно. После факторизации фазового пространства \mathbb{R}^2 (без начала координат) по действию масштабной группы g получается окружность S^1 , а все оптимальные траектории переходят

¹Вообще говоря, в бариецентрической системе сумма координат равна 1. Тем не менее, мы будем употреблять слово «бариецентрический» по аналогии, допуская некоторую вольность речи.

²Здесь рассмотрен случай, когда расстояние от вершин Ω до начала координат равно $\sqrt{6}$. Случай, когда треугольник Ω имеет другие размеры, сводится к рассмотренному очевидной линейной заменой.

в единственно возможный цикл $Z \simeq S^1$. При этом цикл Z разбивается точками переключения управления на два (открытых) интервала Z^l и Z^r ; управление на Z^l — левый конец отрезка, а на Z^r — правый. Счетное число переключений управления на оптимальной траектории соответствует счетному числу оборотов по циклу Z .

При отображении оптимального синтеза исходной задачи (2.1) на фактор-пространство $M/g \simeq S^3$ все оптимальные траектории из A_{ij} переходят в одну и ту же траекторию $Z_{ij} \simeq S^1$. Траектория Z_{ij} является циклом, который разбит точками переключения управления на два гладких интервала Z_{ij}^s и Z_{ij}^n . На Z_{ij}^n используется управление в k -й вершине треугольника Ω , т.е. $u_i = u_j = 1$, $u_k = -2$, $k \neq i, j$, а на Z_{ij}^s — середина ребра (ij) , $u_i = u_j = -1/2$, $u_k = 1$. Будем называть первое управление неособым, а второе — полусособым по ребру¹ (ij) треугольника Ω .

Таким образом, на фактор-пространстве M/g определены три взаимно зацепленных цикла Z_{ij} . Нетрудно подсчитать, что коэффициенты взаимного зацепления равны 1.

2.7. Важнейшие примеры периодических траекторий на M/g . Огромную роль при построении полного оптимального синтеза в задаче (2.1) играют автомодельные траектории — это такие траектории, которые являются периодическими, с точностью до подкрутки на действие g .

Определение 2.2. Мы будем называть траекторию $(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$ системы (2.3) *автомодельной*, если существуют такие момент времени $t_0 > 0$ и число $\lambda_0 > 0$, что

$$g(\lambda_0)(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t)) = (x(t_0 + \lambda_0 t), y(t_0 + \lambda_0 t), \phi(t_0 + \lambda_0 t), \psi(t_0 + \lambda_0 t)).$$

Замечание 2.5. Если $\lambda_0 < 1$, то автомодельная траектория за конечное время $\frac{1}{1 - \lambda_0} t_0$ попадает в начало координат и, следовательно, по теореме 2.1 лежит в M_+ и является оптимальной. Если $\lambda_0 > 1$, то автомодельная траектория лежит в M_- и выходит из начала координат за конечное время. Если же $\lambda_0 = 1$, то автомодельная траектория является настоящей периодической траекторией и не стремится в нуль ни при $t \rightarrow +\infty$, ни при $t \rightarrow -\infty$.

Поскольку действие g уважает оптимальный синтез в задаче, то $g(\lambda)$ при $\lambda > 0$ переводит любую автомодельную траекторию с $\lambda_0 < 1$ в автомодельную с тем же λ_0 , и все траектории из этого семейства проектируются в одну и ту же периодическую траекторию на фактор-пространстве M_+/g . Как будет доказано ниже, на M_+/g существует счетное число периодических траекторий; следовательно, в исходной задаче имеется счетное число типов семейств автомодельных траекторий.

В этом пункте будут найдены некоторые примеры периодических траекторий на M_+/g , описание которых лежит в основе доказательства хаотичности оптимального синтеза на M_+/g . Начнем с точного определения отображения последования Пуанкаре и поверхности переключения. Под поверхностью переключения обычно подразумевают множество точек, на которых управление на траекториях системы принципа максимума Понтрягина терпит разрыв. Однако, ввиду наличия траекторий с полусособым управлением в середине ребра, мы расширим это определение.

Определение 2.3. *Поверхностью переключения \mathcal{S}* в задаче (2.1) будем называть множество точек расширенного фазового пространства $\mathcal{M} = T^*M$, на которых максимум по u скалярного произведения $\langle \psi, u \rangle$ из (2.3) достигается не в единственной точке треугольника Ω , т.е.

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{23} \cup \mathcal{S}_{13} \subset \mathcal{M}.$$

Здесь $\mathcal{S}_{ij} \subset \mathcal{M}$ — множество тех точек, на которых $\arg \max_{u \in \Omega} \langle \psi, u \rangle$ содержит ребро (ij) треугольника Ω (в этом случае ковектор ψ необходимо перпендикулярен ребру (ij) треугольника Ω). Через \mathcal{S}_{123} будем обозначать пересечение

$$\mathcal{S}_{123} = \mathcal{S}_{12} \cap \mathcal{S}_{23} \cap \mathcal{S}_{13} = \{\psi = 0\} \subset \mathcal{M}.$$

Если треугольник Ω является правильным, то в барицентрических координатах

$$\mathcal{S}_{ij} = \{\psi_i = \psi_j \leq \psi_k\}, \quad k \neq i, j.$$

¹Символы s и n в Z_{ij}^s и Z_{ij}^n выбраны по ассоциации с singular и nonsingular

Множество $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ является гладким некомпактным многообразием без края коразмерности 1. В любой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ скорость системы (2.3) терпит касательный скачок, т.е. в любой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ разность пределов скоростей системы (2.3) с обеих сторон от $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ является касательным вектором к $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$. Если скорость в некоторой точке $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ трансверсальна $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ (с обеих сторон), то траектория системы (2.3), начинающаяся в этой точке, в течение некоторого промежутка времени не пересекает \mathcal{S} . Рассмотрим те точки многообразия $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$, в которых определено отображение последования Пуанкаре, переводящее точку $q \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ в первое пересечение с \mathcal{S} траектории гамильтоновой системы (2.3), начинающейся в q . Обозначим образ q через $\Phi(q) \in \mathcal{S}$, а Φ будем называть отображением последования Пуанкаре поверхности переключения на себя. Если точка q лежит на оптимальной траектории, то и образ $\Phi(q)$ тоже лежит на оптимальной траектории. Отметим, что отображение Φ определено не во всех точках $(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}) \cap M_+$.

Исследуем теперь периодические оптимальные траектории на M_+/g для случая правильного треугольника. Конечно, траектории Z_{ij} являются периодическими на M_+/g . Все остальные оптимальные траектории системы пересекают поверхность переключения $\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_{123}$ трансверсально. Точнее, если в момент $t_1 \in (0; T(q_0))$ в точке $(x_1, y_1, \phi^1, \psi^1)$ пересечения некоторой оптимальной траектории с поверхностью переключения \mathcal{S}_{ij} выполнено не только условие пересечения $\psi_i^1 = \psi_j^1$, но и условие касания $\phi_i^1 = \phi_j^1$, то согласно лемме 2.8 часть этой траектории при $t \geq t_1$ целиком лежит в A_{ij} . Поэтому, если оптимальная траектория не пересекается с \mathcal{S}_{123} вплоть до момента выхода в начало координат, то она обязана пересекать поверхности \mathcal{S}_{ij} с обеих сторон только трансверсально. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2.9. *Все периодические оптимальные траектории на M_+/g системы (2.3), не пересекающие \mathcal{S}_{123}/g , являются периодическими точками отображения Пуанкаре поверхности переключения на себя. Более того, каждая такая траектория в каждой точке пересечения с поверхностью переключения¹ \mathcal{S}_{ij}/g управления трансверсальна ей с обеих сторон.*

Отметим, что отрезок траектории γ , соединяющий q и $\Phi(q)$, является гладкой кривой, а векторы $x(t)$, $y(t)$, $\phi(t)$ и $\psi(t)$ на траектории γ являются полиномами степеней 2, 1, 3 и 4 по t соответственно.

Поскольку действие g уважает гамильтонову систему (2.3), то оно коммутирует с отображением последования Пуанкаре Φ и индуцирует отображение $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$ в себя, которое мы будем обозначать так же: $\Phi : (\mathcal{S} \cap M_+)/g \rightarrow (\mathcal{S} \cap M_+)/g$.

Рассмотрим периодическую траекторию (цикл) на M_+/g , имеющую k звеньев гладкости, т.е. пересекающую \mathcal{S}/g последовательно в точках $z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k = z_0$. Такую траекторию можно найти из следующих очевидных соображений:

$$\Phi(z_0) = z_1, \quad \dots, \quad \Phi(z_{k-1}) = z_0 \quad \iff \quad \Phi^k(z_0) = z_0.$$

Лемма 2.10 (см. [10]). *На M_+/g существуют следующие периодические траектории:*

1. два трехзвенных цикла Z^\pm ; управление на каждом из них чередует по очереди все вершины треугольника Ω по часовой стрелке $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ и против часовой стрелки $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ соответственно;
2. три четырехзвенных цикла Q^i , $i = 1, 2, 3$; управление на Q^i чередует все вершины треугольника Ω в порядке $i \rightarrow j \rightarrow i \rightarrow k \rightarrow i$, где $j, k \neq i$;
3. два шестизвенных цикла R^\pm ; управление на R^+ чередует все вершины треугольника Ω в порядке $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, а на R^- — в обратном порядке.

Доказательство. Сначала докажем пункт 1. Уравнение $\Phi^3(z) = z$, $z \in \mathcal{S}/g$, решать в явном виде неудобно, так как возникающие в результате полиномы имеют высокую степень. Для упрощения вычислений воспользуемся дискретной группой симметрий S_3 оптимального синтеза, описанной в п. 2.2. Пусть $\alpha = (123) \in S_3$. Найдем решение упрощенного уравнения

$$(\alpha \circ \Phi)(z) = z. \tag{2.7}$$

¹Мы опять для удобства пишем \mathcal{S}_{ij}/g вместо $(\mathcal{S}_{ij} \setminus 0)/g$.

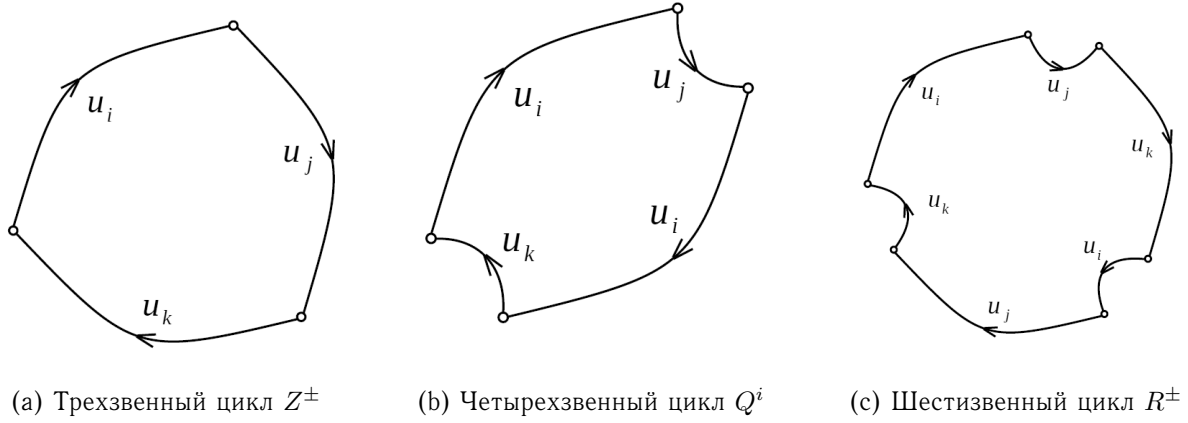


Рис. 1. Схематичное изображение периодических траекторий Z^\pm , Q^i и R^\pm на сфере M_+/g

Очевидно, решение упрощенного уравнения будет и решением исходного уравнения $\Phi^3(z) = z$, так как α и Φ коммутируют.

Пусть прообраз $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)$ имеет координаты $\tilde{z} = (x_0, y_0, \phi^0, \psi^0)$ и $\tilde{\gamma}$ — траектория системы (2.3) в \mathcal{M} , выходящая из \tilde{z} , $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{z}$. Опишем теперь переключения управления. Пусть в точке \tilde{z} управление переключается с третьей вершины треугольника Ω на первую. Это означает, что

$$\psi_1^0 = \psi_3^0 < \psi_2^0, \quad \phi_1^0 > \phi_3^0. \quad (2.8)$$

Поскольку управление постоянно от точки z до точки $\Phi(z)$ и $u_0 = (u_0^1, u_0^2, u_0^3) = (-2, 1, 1)$, то $\tilde{\gamma}$ имеет вид (до первого переключения управления)

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + u_0 t, \\ x(t) = x_0 + y_0 t + \frac{1}{2} u_0 t^2, \\ \phi(t) = \phi^0 + x_0 t + \frac{1}{2} y_0 t^2 + \frac{1}{6} u_0 t^3, \\ \psi(t) = \psi^0 - \phi^0 t - \frac{1}{2} x_0 t - \frac{1}{6} y_0 t^2 - \frac{1}{24} u_0 t^3. \end{cases} \quad (2.9)$$

Если траектория $\tilde{\gamma}$ пересекает поверхность переключения управления в момент времени $t_0 > 0$, то $\alpha(\pi(\tilde{\gamma}(t_0))) = z$, поскольку z удовлетворяет уравнению (2.7). Другими словами, существует такое число $\lambda_0 > 0$, что $\alpha(\tilde{\gamma}(t_0)) = g(\lambda_0)\tilde{z}$. Последнее условие можно переписать с помощью (2.9) в виде системы алгебраических уравнений, линейных по x^0 , y^0 , ϕ^0 и ψ^0 и полиномиальных по t_0 и λ_0 . Решение этой системы определено не однозначно, а лишь с точностью до действия g . Это связано с тем, что точка $\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)$ определена тоже с точностью до действия g . Поэтому без ограничения общности можем положить $t_0 = 1$. Разрешая полученную систему относительно линейно входящих x^0 , y^0 , ϕ^0 и ψ^0 и подставляя в равенство $\psi_1^0 = \psi_3^0$ из (2.8), получаем полиномиальное уравнение на λ_0 :

$$P_Z(\lambda_0) = \lambda_0^6 - 4\lambda_0^4 - 7\lambda_0^3 - 4\lambda_0^2 + 1 = 0.$$

Методом Штурма немедленно получаем, что полином $P_Z(\lambda_0)$ имеет ровно один корень на промежутке $(0, 1)$. Этому корню отвечает такая точка z , что выполняются неравенства (2.8). Таким образом, на M_+/g определена ровно одна периодическая траектория Z^+ . Вторая траектория $Z^- \in M_+/g$ получается из Z^+ с помощью отражения $(12) \in S_3$, или заменой цикла $\alpha = (123)$ на $\alpha = (132)$.

Пункты 2 и 3 доказываются аналогично пункту 1. Для получения четырехзвенных циклов на M_+/g необходимо решать уравнение $(\alpha \circ \Phi^2)(z) = z$, где α — одна из трех транспозиций (12) , (23) или (13) из S_3 . Описанный выше метод приводит к полиному

$$P_Q(\lambda_0) = 1 + 4\lambda + 60\lambda^2 + 220\lambda^3 - 607\lambda^4 - 5080\lambda^5 - 19700\lambda^6 - 73944\lambda^7 - 192258\lambda^8 -$$

$$\begin{aligned}
& - 416272\lambda^9 - 918956\lambda^{10} - 1609184\lambda^{11} - 2528300\lambda^{12} - 4868880\lambda^{13} - 5019696\lambda^{14} - \\
& - 10839184\lambda^{15} - 8659545\lambda^{16} - 18568404\lambda^{17} - 12399696\lambda^{18} - 27180572\lambda^{19} - \\
& - 14695579\lambda^{20} - 31988656\lambda^{21} - 16556344\lambda^{22} - 31988656\lambda^{23} - 14695579\lambda^{24} - \\
& - 27180572\lambda^{25} - 12399696\lambda^{26} - 18568404\lambda^{27} - 8659545\lambda^{28} - 10839184\lambda^{29} - \\
& - 5019696\lambda^{30} - 4868880\lambda^{31} - 2528300\lambda^{32} - 1609184\lambda^{33} - 918956\lambda^{34} - 416272\lambda^{35} - \\
& - 192258\lambda^{36} - 73944\lambda^{37} - 19700\lambda^{38} - 5080\lambda^{39} - 607\lambda^{40} + 220\lambda^{41} + 60\lambda^{42} + \\
& + 4\lambda^{43} + \lambda^{44} = 0,
\end{aligned}$$

который имеет единственный корень на промежутке $(0, 1)$. Координаты точек z и $\Phi(z)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным (2.8); следовательно, на M_+/g определены три четырехзвенных периодических траектории.

Для получения шестизвенных циклов на M_+/g необходимо решить уравнение $(\alpha \circ \Phi^2)(z) = z$, где α — перестановка (123) или (132) из S_3 . В результате получаем

$$\begin{aligned}
P_R(\lambda_0) = & \lambda^{20} - 12\lambda^{19} + 30\lambda^{18} + 66\lambda^{17} - 117\lambda^{16} - 504\lambda^{15} - 207\lambda^{14} + \\
& + 942\lambda^{13} + 1271\lambda^{12} - 390\lambda^{11} - 1599\lambda^{10} - 390\lambda^9 + 1271\lambda^8 + 942\lambda^7 - \\
& - 207\lambda^6 - 504\lambda^5 - 117\lambda^4 + 66\lambda^3 + 30\lambda^2 - 12\lambda + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Этот полином также имеет единственный корень на промежутке $(0, 1)$, а координаты точек z и $\Phi(z)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным (2.8); следовательно, на M_+/g определены две шестизвенных периодических траектории. \square

Полиномы P_Z , P_Q и P_R получились возвратными, так как примененный метод фактически позволял находить автомодельные траектории на M без учета условия $\lambda_0 < 1$. Осталось лишь сказать, что отображение $g(-1)$ переводит любую автомодельную траекторию на M в автомодельную, но меняет направление течения времени, поэтому λ_0 переходит в $1/\lambda_0$.

2.8. Поведение оптимальных траекторий в окрестности периодических траекторий. Покажем, что почти все оптимальные траектории задачи (2.1) в обратном времени притягиваются к одному из двух найденных в предыдущем пункте трехзвенных циклов Z^\pm , а в прямом времени выходят за конечное время со счетным числом переключений на один из трех двузвенных циклов Z_{ij} . Выражение «почти все» означает, что на M/g определено множество точек полной лебеговской меры X , удовлетворяющих описанным свойствам. Циклы Q^i и R^\pm не лежат в множестве X . Более того, существует счетное число периодических траекторий, не лежащих в X , само множество $(M/g) \setminus X$ имеет нецелую размерность, а поведение траекторий на нем является хаотическим.

Чтобы получить эти результаты, необходимо воспользоваться результатами статьи [10]. В этом пункте мы опишем полученные в [10] результаты, снабдив их необходимыми пояснениями.

Начнем с изучения поведения оптимальных траекторий в окрестности циклов Z^\pm и Z_{ij} . Найденные в предыдущем пункте циклы Z^\pm оказываются отталкивающими на сфере M/g . Дадим точную формулировку этого утверждения. Рассмотрим отображение Пуанкаре Φ поверхности переключения на себя. Каждый из циклов Z^\pm пересекает поверхность переключения в трех точках z_i^\pm , $i = 1, 2, 3$, и каждая из этих точек является неподвижной точкой отображения Φ^3 . В [10] вычислены в явном виде собственные значения дифференциала отображения Φ^3 в точках z_i^\pm (конечно, эти числа не зависят от выбора точки z_i^\pm), и все эти числа по модулю строго больше 1. Поэтому любая оптимальная траектория, оказавшись в окрестности Z^\pm , при движении в попятном времени будет на M/g приближаться к одному из циклов Z^\pm . Отметим, что это не доказывает, вообще говоря, что почти любая траектория на M/g в попятном времени стремится к Z^\pm .

Поведение оптимальных траекторий в окрестности циклов Z_{ij} устроено совершенно иначе. Как уже отмечалось выше, каждый двузвенный цикл Z_{ij} состоит из двух частей Z_{ij}^n и Z_{ij}^s . Управление на интервале Z_{ij}^n не особое и находится в k -ой вершине треугольника Ω , $k \neq i, j$. Управление на интервале Z_{ij}^s является особым по противоположному ребру (ij) и находится в его середине.

Рассмотрим точку $(x_0, y_0) \in M$ на A_{ij} , т.е. $x_0, y_0 \in A_{ij}$. Следовательно, согласно лемме 2.8, $\pi(x_0, y_0) \in Z_{ij}$. Предположим сначала, что точка (x_0, y_0) не является точкой переключения и

$\pi(x_0, y_0)$ лежит на Z_{ij}^n , т.е. управление — k -я вершина треугольника Ω , $k \neq i, j$. Тогда, если точка $(x_1, y_1) \in M$ достаточно близка к (x_0, y_0) , то точка $E(x_1, y_1)$ близка к $E(x_0, y_0)$ по теореме 2.1, и, следовательно, управление на оптимальной траектории, начинающейся в (x_1, y_1) , в течение некоторого промежутка времени совпадает с неособым управлением на Z_{ij}^n .

Предположим теперь, что $\pi(x_0, y_0)$ лежит на Z_{ij}^s , и, следовательно, оптимальное управление на Z_{ij}^s является серединой ребра (ij) треугольника Ω . Положим $(\phi^0, \psi^0) = E(x_0, y_0)$. Тогда $\psi_i^0 = \psi_j^0 > \psi_k^0$. Если точка (x_1, y_1) лежит в окрестности (x_0, y_0) , $(\phi^1, \psi^1) = E(x_1, y_1)$ и $\psi_i^1 \neq \psi_j^1$, то в силу непрерывности отображения E управление на оптимальной траектории, проходящей через точку x_1, y_1 , должно быть либо i -й, либо j -й вершиной треугольника Ω .

Более того, в [10] показано, что существует такая окрестность V интервала Z_{ij}^s в M/g , что оптимальная траектория, проходящая через любую точку (x_1, y_1) , образ которой $\pi(x_1, y_1)$ лежит в V , за конечное время выходит на $\pi^{-1}(Z_{ij}^s)$, не покидая V . Оптимальное управление при этом совершает счетное число переключений между i -й и j -й вершинами треугольника Ω . Этот процесс аналогичен чаттеринг-режиму в одномерной задаче Фуллера с той лишь разницей, что в качестве отрезка допустимых управлений выступает ребро (ij) треугольника Ω . Подробное доказательство этого факта, а также точные аналитические формулы, описывающие этот процесс, можно найти в [10].

3. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА О ХАОТИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ТРАЕКТОРИЙ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ВОРОНКАХ

В этой главе будет доказана теорема 3.1 о наличии хаотического поведения траекторий в интегральной воронке гамильтоновой системы (2.3) для случая, когда треугольник Ω в модельной задаче (2.1) не слишком сильно отличается от правильного треугольника. Эта теорема является первой из доказанной в этой работе серии теорем о наличии хаотического поведения траекторий в гамильтоновых системах с разрывной правой частью. Более того, основные результаты о структуре оптимального синтеза задачи (2.1), которые будут получены в этой главе, также лягут в основу доказательства теоремы о том, что подобное хаотическое поведение траекторий в интегральных воронках является общим для гамильтоновых систем высоких размерностей с разрывной правой частью. Для случая правильного треугольника в следующих главах будет доказана теорема 5.4, включающая в себя теорему 3.1, в которой помимо прочего будут найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств неблуждающих точек и соответствующая топологическая энтропия.

3.1. Формулировка первой теоремы о хаотичном поведении траекторий в модельной задаче. Начнем с формулировки теоремы о хаотичном поведении оптимальных траекторий в экстремальной задаче (2.1), снабдив ее всеми необходимыми пояснениями. Первые три пункта теоремы описывают исследуемое множество точек Ξ на M_+ , сотканное из траекторий гамильтоновой системы (2.3), а в последнем пункте теоремы описана хаотическая динамика траекторий на этом множестве. Множество Ξ является аналогом множества неблуждающих траекторий, естественным для интегральных воронок.

Поскольку любая траектория из множества Ξ пересекает стратифицированное многообразие $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{13} \cup \mathcal{S}_{23}$ разрыва правой части системы (2.3) счетное число раз, то хаотическая динамика поведения этих траекторий описана в теореме 3.1 в терминах последовательности пересечения страт S_{ij} . А именно, последовательность пересечения страт кодируется с помощью пространства Σ_{01} бесконечных в обе стороны слов из 0 и 1, снабженного стандартной топологией прямого произведения. Пространство Σ_{01} гомеоморфно подкове Смейла. Через $l : \Sigma_{01} \rightarrow \Sigma_{01}$ обозначена топологическая цепь Маркова бернуллиевского сдвига, т.е. l — отображение, сдвигающее каждое слово на одну позицию влево.

Теорема 3.1. *Существует такое число $\varepsilon > 0$, что если углы треугольника Ω в задаче (2.1) отличаются от $\pi/3$ не более чем на ε и расстояние от центра Ω до начала координат¹ не*

¹В качестве центра треугольника Ω можно выбрать, например, любую из точек пересечения высот, биссектрис, медиан или серединных перпендикуляров, поскольку треугольник Ω близок к правильному и расстояния между ними не превосходят $\varepsilon C \text{diam } \Omega$ для некоторого фиксированного $C > 0$.

превосходит $\varepsilon \operatorname{diam} \Omega$, то в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M = \{(x, y, \phi, \psi)\}$ гамильтоновой системы (2.3) определено множество точек Ξ , обладающее следующими свойствами:

1. Для любой точки $z \in \Xi$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$ гамильтоновой системы (2.3), проходящая через z , существует и единственна при $t \in [-\infty; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в начало координат за время $T(z)$, $X(T(z), z) = 0$.
2. Множество Ξ соткано из траекторий гамильтоновой системы (2.3) и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \Xi$, то $X(t, z)$ лежит в Ξ при всех $t \in [-\infty; T(z)]$.
3. Проекция траектории $X(t, z)$ на фазовое пространство M , продолженная нулем при $t > T(z)$, является оптимальной при любом $z \in \Xi$ (т.е. $\Xi \subset M_+$). Более того, траектория $X(t, z)$ пересекает поверхность переключения \mathcal{S} счетное (бесконечное) число раз в моменты $\dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 \dots < T(z)$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}$ и $t_0 \leq 0 < t_1$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$ и $t_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow -\infty$.
4. Рассмотрим динамическую систему $\Phi : \Xi \cap \mathcal{S} \rightarrow \Xi \cap \mathcal{S}$, переводящую точку $z \in \Xi$ на \mathcal{S} в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с \mathcal{S} , т.е. $\Phi(z) = X(t_1, z)$. Существует такое натуральное $n > 0$ (одинаковое для всех треугольников Ω), что отображение Φ^n полусопряжено с топологической марковской цепью бернуллиевского сдвига на несвязном объединении двух экземпляров подковы Смейла. Другими словами, существует такое непрерывное сюръективное отображение Ψ_{01} из $\Xi \cap \mathcal{S}$ в пространство $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Xi \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi^n} & \Xi \cap \mathcal{S} \\ \Psi_{01} \downarrow & & \downarrow \Psi_{01} \\ \bigsqcup^2 \Sigma_{01} & \xrightarrow{l} & \bigsqcup^2 \Sigma_{01} \end{array}$$

где l обозначает сдвиг влево на каждом экземпляре Σ_{01} .

3.2. Раздутие особенности в вершине интегральной воронки. Для доказательства теоремы 3.1 нам потребуется произвести модифицированную процедуру раздутия начала координат. С топологической точки зрения это означает вклеивание сферы S^7 в начале координат. При построении процедуры раздутия мы никак не будем использовать тот факт, что Ω является правильным треугольником: подойдет любой выпуклое компактное множество, лишь бы $0 \in \operatorname{Int} \Omega$ (т.е. должны выполняться условия теоремы 2.1).

Однако отметим, что оптимальные траектории задачи (2.1) попадают в начало координат за конечное время, поэтому после раздутия начала координат векторное поле (2.3) будет вырождаться при приближении ко вклеенной сфере.

Определение 3.1. Раздутием особенности в начале координат будем называть отображение \mathbf{B} , устроенное следующим образом:

$$\mathbf{B} : (x, y, \phi, \psi) \mapsto (\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}),$$

где $\mu \in \mathbb{R}_+$, а $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\phi} \in \mathbb{R}^2$ и $\tilde{\psi} \in \mathbb{R}^2$ лежат на многообразии

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ |\tilde{y}|^{24} + |\tilde{x}|^{12} + |\tilde{\phi}|^8 + |\tilde{\psi}|^6 = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^8. \quad (3.1)$$

Отображение \mathbf{B} задается следующими формулами:

$$\tilde{y} = \frac{y}{\mu}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{\mu^2}, \quad \tilde{\phi} = \frac{\phi}{\mu^3}, \quad \tilde{\psi} = \frac{\psi}{\mu^4}, \quad (3.2)$$

где

$$\mu = (|y|^{24} + |x|^{12} + |\phi|^8 + |\psi|^6)^{\frac{1}{24}}. \quad (3.3)$$

Перенесем действие g группы \mathbb{R}_+ на цилиндр $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ естественным образом так, чтобы отображение \mathbf{B} было эквивариантным относительно действия g :

$$\mathbf{B} \circ g(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} g(\lambda) \circ \mathbf{B} \implies g(\lambda)(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\lambda\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \quad \forall \lambda > 0.$$

Мы задали процедуру раздутия особенности системы (2.3) в начале координат именно формулами (3.2), 3.3 потому, что в этом случае действие g группы \mathbb{R}_+ записывается в наиболее простом виде.

Определение 3.2. Через \mathcal{C} будем обозначать цилиндр $\mathcal{C}_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ над \mathcal{C}_0 . Само многообразие \mathcal{C}_0 будем отождествлять с нулевым сечением: $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \{\mu = 0\}$. Поверхности переключения \mathcal{S}_{ij} мы продолжим на \mathcal{C}_0 естественным образом. Под вертикальным направлением будем понимать направление по вектору $\partial/\partial\mu$.

Лемма 3.1. *Отображение раздутия \mathbf{B} представляет собой диффеоморфизм $\mathcal{M} \setminus 0$ на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$.*

Доказательство. Из формул (3.2) и 3.3 легко видеть, что отображение \mathbf{B} корректно определено на $\mathcal{M} \setminus 0$ и биективно отображает $\mathcal{M} \setminus 0$ на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$. Более того, отображение \mathbf{B} является гладким на $\mathcal{M} \setminus 0$.

Покажем, что дифференциал $d\mathbf{B}$ невырожден в точках сферы

$$\{|y|^{24} + |x|^{12} + |\phi|^8 + |\psi|^6 = 1\} = \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}.$$

В остальных точках невырожденность $d\mathbf{B}$ следует из эквивариантности \mathbf{B} относительно действия g . Ограничение отображения \mathbf{B} на сфероид $\mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$ является диффеоморфизмом согласно (3.2); следовательно, ограничение дифференциала $d\mathbf{B}|_{T_z \mathbf{B}^{-1}\{\mu=1\}}$ невырождено в любой точке $z \in \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$. С другой стороны, если $z \in \mathcal{M} \setminus 0$, то

$$\frac{d}{d\lambda}(\mathbf{B}(g(\lambda)z)) \Big|_{\lambda=1} = \mu \frac{\partial}{\partial\mu} \Big|_{\mathbf{B}(z)} \in T_{\mathbf{B}(z)}\mathcal{C}.$$

Если $z \in \mathbf{B}^{-1}\{\mu = 1\}$, то касательный вектор $\partial/\partial\mu|_{\mathbf{B}(z)}$ не лежит в касательном пространстве $T(\mathcal{C} \cap \{\mu = 1\})$. Поэтому отображение $d\mathbf{B}|_z$ является сюръективным, и, следовательно невырожденно. \square

Отметим, что формально отображение \mathbf{B}^{-1} определено только на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$, однако мы доопределим его естественным образом на $\mathcal{C} \cap \{\mu < 0\}$ теми же формулами:

$$\mathbf{B}^{-1} : (\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) \mapsto (x, y, \phi, \psi), \quad \text{где } y = \mu\tilde{y}, x = \mu^2\tilde{x}, \phi = \mu^3\tilde{\phi}, \psi = \mu^4\tilde{\psi}.$$

В этом случае \mathbf{B}^{-1} становится двулиственным накрытием над $\mathcal{M} \setminus 0$.

Если множество Ω является треугольником, то на цилиндре \mathcal{C} определена поверхность переключения $\tilde{\mathcal{S}}$. А именно, обозначим через $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$ замыкание множества тех точек из \mathcal{C} , которые при отображении \mathbf{B}^{-1} переходят в \mathcal{S}_{ij} . Другими словами, множество $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$ состоит из таких точек $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, что $\arg \max_{u \in \Omega} \langle \tilde{\psi}, u \rangle$ содержит ребро (ij) треугольника Ω . Положим также

$$\tilde{\mathcal{S}}_{123} = \tilde{\mathcal{S}}_{12} \cap \tilde{\mathcal{S}}_{23} \cap \tilde{\mathcal{S}}_{13}, \quad \tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{S}}_{12} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{23} \cup \tilde{\mathcal{S}}_{13}.$$

Для упрощения записи мы будем опускать тильду в $\tilde{\mathcal{S}}_{ij}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{123}$ и $\tilde{\mathcal{S}}$, так как это никогда не приводит к путанице.

3.3. Репараметризация времени. Разрывное векторное поле в правой части системы (2.3) записывается в координатах $(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ следующим образом (треугольник Ω не обязан быть

правильным):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mu} = \Upsilon(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}, u) = \frac{1}{24} \left(24|\tilde{y}|^{22} \langle \tilde{y}, u \rangle + 12|\tilde{x}|^{10} \langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle + 8|\tilde{\phi}|^6 \langle \tilde{\phi}, \tilde{x} \rangle - 6|\tilde{\psi}|^4 \langle \tilde{\psi}, \tilde{\phi} \rangle \right), \\ \dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{\mu} (-\tilde{\phi} - 4\Upsilon\tilde{\psi}), \\ \dot{\tilde{\phi}} = \frac{1}{\mu} (\tilde{x} - 3\Upsilon\tilde{\phi}), \\ \dot{\tilde{x}} = \frac{1}{\mu} (\tilde{y} - 2\Upsilon\tilde{x}), \\ \dot{\tilde{y}} = \frac{1}{\mu} (u - \Upsilon\tilde{y}), \\ \langle \tilde{\psi}, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Решение систем (3.4) и (2.3) определяется классическим образом по Филиппову (см. [18]) как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

Обозначим векторное поле на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$ в правой части (3.4) через ξ . Формально поле ξ определено при $\mu > 0$, однако мы его продолжим теми же формулами на нижнюю половину цилиндра $\mathcal{C} \cap \{\mu < 0\}$. В этом случае отображение \mathbf{B}^{-1} отображает поле ξ в векторное поле системы (2.3) и при $\mu > 0$, и при $\mu < 0$.

Отметим, что при $\mu \rightarrow 0$ поле ξ растет как $1/\mu$. Однако поле $\mu\xi$ уже может быть продолжено на сечение цилиндра $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C} \cap \{\mu = 0\}$ во всех точках, в которых ковектор $\tilde{\psi}$ не перпендикулярен ни одному из ребер треугольника Ω . Траектории поля $\mu\xi$ либо не пересекают сечение \mathcal{C}_0 , либо лежат в нем, так как вдоль поля $\mu\xi$ имеем $\dot{\mu} = \mu\Upsilon$ и Υ не зависит от μ . Более того, компоненты поля $\mu\xi$, отвечающие переменным $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$, не зависят от μ . Поэтому любая траектория поля $\mu\xi$ на \mathcal{C}_0 может быть единственным образом поднята на $\mathcal{C} \cap \{\mu \neq 0\}$ при задании μ в начальный момент времени и наоборот.

Таким образом, интегральные кривые полей ξ и $\mu\xi$ совпадают на $\mathcal{C} \cap \{\mu \neq 0\}$, отличается лишь скорость движения по ним. Если обозначить через s параметр времени движения по траектории поля $\mu\xi$, то s и t связаны соотношением

$$ds = \frac{1}{\mu} dt.$$

Параметр s движения по траектории оказывается удобен тем, что оптимальные траектории легко отслеживаются по стремлению к сечению \mathcal{C}_0 благодаря следующим двум леммам. В первой лемме доказано, что функция $\mu(s)$ экспоненциально быстро стремится к нулю на любой оптимальной траектории, а во второй доказано достаточное условие оптимальности в терминах стремления к нулю функции $\mu(s)$.

Лемма 3.2. *Рассмотрим образ оптимальной траектории $(\hat{x}(t, q_0), \hat{y}(t, q_0), \hat{\phi}(t, q_0), \hat{\psi}(t, q_0))$ на $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$ при $t < T(q_0)$. Зафиксируем моменты времени $t_0 = t(s_0) < T(q_0)$ и $t_1 = t(s_1) < T(q_0)$. Тогда для некоторых положительных констант γ_1 и γ_2 (не зависящих от выбора траектории и времен t_0 и t_1) выполнено*

$$D_1 \mu_0 e^{-\gamma_1(s_1 - s_0)} \leq \mu_1 \leq D_2 \mu_0 e^{-\gamma_2(s_1 - s_0)},$$

где $\mu_k = \mu(\hat{x}(t_k, q_0), \hat{y}(t_k, q_0), \hat{\phi}(t_k, q_0), \hat{\psi}(t_k, q_0))$, $k = 0, 1$, и

$$D_1 = \frac{1}{D_2} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Доказательство. Введем обозначение $\mu(t) = \mu(\hat{x}(t, q_0), \hat{y}(t, q_0), \hat{\phi}(t, q_0), \hat{\psi}(t, q_0))$. Из оценок, полученных в теореме 2.1, немедленно следует, что существуют такие $\gamma_1 > 0$ и $\gamma_2 > 0$, что для любой начальной точки q_0 на оптимальной траектории выполнены неравенства

$$\gamma_2(T(q_0) - t) \leq \mu(t) \leq \gamma_1(T(q_0) - t). \quad (3.5)$$

Поэтому

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu(t)} dt \quad \begin{cases} \leq \frac{1}{\gamma_2} \ln \frac{T(q_0) - t_0}{T(q_0) - t_1}, \\ \geq \frac{1}{\gamma_1} \ln \frac{T(q_0) - t_0}{T(q_0) - t_1}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$e^{-\gamma_1(s_1-s_0)} \leq \frac{T(q_0) - t_1}{T(q_0) - t_0} \leq e^{-\gamma_2(s_1-s_0)}.$$

Для получения заявленных в условии леммы неравенств осталось еще раз воспользоваться оценками (3.5). \square

Следствие 3.1. На оптимальной траектории при $t \rightarrow T(q_0) - 0$ имеем $\mu \rightarrow +0$ и $s \rightarrow +\infty$.

Лемма 3.3. Рассмотрим траекторию $\tilde{z}(s)$, $s \in \mathbb{R}$, поля $\mu\xi$ на верхней половине цилиндра $\mathcal{C} \cap \{\mu > 0\}$. Если $\mu(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$ и

$$T = \int_0^{+\infty} \mu(s) ds < \infty,$$

то на траектории $\tilde{z}(s)$ имеем $s(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow T - 0$ и $s(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$. Более того, траектория $\mathbf{B}^{-1}(\tilde{z}(s(t)))$ лежит в M_+ и является оптимальной, если ее продолжить 0 при $t \geq T$.

Доказательство. Так как $dt = \mu ds$, то на траектории $\tilde{z}(s)$ выполнено соотношение

$$t = \int_0^s \mu(\sigma) d\sigma.$$

В силу положительности $\mu(s)$ получаем, что $t \rightarrow T - 0$ тогда и только тогда, когда $s \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим теперь траекторию $z(t) = \mathbf{B}^{-1}(\tilde{z}(s(t)))$, определенную при $t < T$. Согласно (3.3) получаем, что $x, y, \phi, \psi \rightarrow 0$ при $t \rightarrow T - 0$. Так как траектория $z(t)$ является траекторией гамильтоновой системы (2.3) то, согласно следствию 2.7, будучи продолженной нулем при $t \geq T$, является оптимальной.

По теореме 2.1 время достижения начала координат на оптимальной траектории оценивается сверху через расстояние до начала координат. Следовательно, существует окрестность нуля в \mathcal{M} , в которую не заходит траектория $z(t)$ при $t < 0$. Поэтому функция $\mu(s)$ отделена от нуля при $s < 0$; следовательно,

$$\int_0^{-\infty} \mu(s) ds = -\infty,$$

т.е. $t(s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow -\infty$. \square

Замечание 3.1. Отметим, что сечение \mathcal{C}_0 может быть отождествлено с фактор-пространством $(\mathcal{M} \setminus 0)/g$, а траектории поля $\mu\xi$ могут рассматриваться как образы траекторий системы (2.3) при естественном проектировании $(\mathcal{M} \setminus 0) \rightarrow (\mathcal{M} \setminus 0)/g$. Однако конкретная реализация $(\mathcal{M} \setminus 0)/g$ как сечения \mathcal{C}_0 дает принципиальные улучшения: дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений поля $\mu\xi$ на всем цилиндре \mathcal{C} , равномерное стремление к \mathcal{C}_0 оптимальных траекторий и возможность определения оптимальности траектории за счет предыдущих лемм.

3.4. Грубость автомодельных траекторий. В этом пункте мы рассмотрим изменения, которые претерпевает гамильтонова система (2.3) при замене треугольника Ω на близкий треугольник Ω' .

Итак, пусть каждая вершина треугольника Ω' находится в ε -окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , а $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда $0 \in \text{Int } \Omega'$ и Ω' является допустимым треугольником в задаче (2.1). Все описанные ранее объекты, отвечающие системе (2.3) с треугольником Ω' , будем снабжать штрихами. Например, поле (3.4), отвечающее треугольнику Ω' , будем обозначать через ξ' .

Поскольку при любых $i \neq j$ ребра (ij) и $(ij)'$ треугольников Ω и Ω' близки, то гиперплоскости переключения \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}'_{ij} образуют в \mathcal{M} угол α_{ij} , близкий к нулевому. Поэтому, когда нам потребуется говорить о близости отображений, заданных на \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}'_{ij} , мы будем отождествлять гиперплоскости \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}'_{ij} с помощью отображения pr , устроенного следующим образом:

$$\text{pr}(x, y, \phi, \psi) = (x, y, \phi, O_{\alpha_{ij}}\psi) \in \mathcal{S}'_{ij}, \quad \text{где } (x, y, \phi, \psi) \in \mathcal{S}_{ij},$$

а $O_{\alpha_{ij}} \in O(2, \mathbb{R})$ обозначает поворот в плоскости на угол α_{ij} . Отображение pr коммутирует с действием g группы \mathbb{R}_+ и гладко продолжается на пересечение с нулевым сечением $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{C}_0$.

Лемма 3.4. *Предположим, что на \mathcal{C}_0 некоторая траектория поля $\mu\xi$ с треугольником Ω пересекает последовательно поверхности $\mathcal{S}_{ij} \cap \mathcal{C}_0$ и $\mathcal{S}_{jk} \cap \mathcal{C}_0$ в точках A и B соответственно, $A, B \notin \mathcal{S}_{123}$, и эти пересечения трансверсальны¹ (возможно $k = i$, но $j \neq i, k$). Тогда для любых $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что если каждая вершина некоторого треугольника Ω' находится в ε -окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , то отображения последования Пуанкаре Φ и Φ' полей $\mu\xi$ и $\mu\xi'$ являются α -близкими диффеоморфизмами окрестностей A и $A' = \text{pr} A$ в метрике \mathcal{C}^r .*

Доказательство. Для того, чтобы работать в окрестностях \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}_{jk} , мы продолжим поле $\mu\xi$ гладким образом в их окрестность, например, удалив в (3.4) последнее условие, заменив управление u на постоянное в j -й вершине Ω . Полученное поле обозначим через $\tilde{\mu\xi}$. Прделав аналогичную процедуру для треугольника Ω' , получим поле $\tilde{\mu\xi}'$.

В силу замкнутости поверхностей переключения и трансверсальности поля $\mu\xi$ к \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}_{jk} в точках A и B , любая траектория, начинающаяся на \mathcal{S}_{ij} в окрестности A , в первый раз пересечет \mathcal{S} в окрестности точки B . Поэтому можно заменить поле $\mu\xi$ полем $\tilde{\mu\xi}$. При этом интересующие нас траектории, идущие без переключений из окрестности A на \mathcal{S}_{ij} в окрестность B на \mathcal{S}_{jk} , не изменятся. Аналогичное утверждение верно при замене поля $\mu\xi'$ полем $\tilde{\mu\xi}'$.

Поскольку поля $\tilde{\mu\xi}$ и $\tilde{\mu\xi}'$ являются гладкими, то утверждение леммы немедленно следует из трансверсальности поля $\mu\xi$ в точках A и B поверхностям \mathcal{S}_{ij} и \mathcal{S}_{jk} соответственно. \square

Любой траектории $z(t)$ системы (2.3) мы можем поставить в соответствие ее образ $\pi(z(t))$ на $\mathcal{C}_0 = \mathcal{M}/g$ при канонической проекции $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/g$. Явно этот образ можно найти так: отправить траекторию $z(t)$ в цилиндр \mathcal{C} с помощью отображения \mathbf{B} и игнорировать координату μ . При этом автомодельные траектории перейдут в периодические траектории поля $\mu\xi$ на \mathcal{C}_0 .

В этом пункте мы изучим грубые периодические траектории на \mathcal{C}_0 . Полученные результаты будем применять к найденным в лемме 2.10 шестизвенным траекториям R^\pm .

Определение 3.3. Будем называть оптимальную автомодельную траекторию $z(t)$ системы (2.3) *грубой*, если она не является полусобой траекторией, не пересекается с \mathcal{S}_{123} , а ее образ $\pi(z(t))$ на \mathcal{C}_0 является грубой периодической траекторией, т.е.

- (1) состоит из конечного числа гладких участков (звеньев), трансверсальных \mathcal{S} ;
- (2) дифференциал соответствующей степени отображения последования Пуанкаре Φ/g в точках $\pi(z(t)) \cap \mathcal{S}$ не имеет единичных собственных значений.

Предыдущее определение корректно в том смысле, что отображение последования Пуанкаре вдоль такой периодической траектории является гладким диффеоморфизмом, в силу лемм 2.9 и 3.4. Оказывается, что грубые автомодельные оптимальные траектории не могут разрушаться при малом изменении треугольника Ω :

Лемма 3.5. *Пусть $z(t) \in \mathcal{M}$ — некоторая грубая оптимальная автомодельная траектория задачи (2.1). Тогда для любых $r \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что если каждая вершина некоторого треугольника Ω' находится в ε -окрестности соответствующей вершины треугольника Ω , то для задачи (2.1) с треугольником Ω' найдется такая грубая оптимальная*

¹Трансверсальность в данном случае формально можно понимать так: скорость слева в точке A трансверсальна \mathcal{S}_{ij} , а скорость справа в точке B трансверсальна \mathcal{S}_{jk} . Хотя на самом деле скачок поля $\mu\xi$, например, в точке A (или в B) на гиперповерхности \mathcal{S}_{ij} (соответственно, \mathcal{S}_{jk}) является тангенциальным к этой поверхности. Поэтому для определения трансверсальности не имеет значения, с какой стороны брать предел скоростей.

автомодельная траектория $z'(t)$, что периодические траектории $\pi(z(t))$ и $\pi(z'(t))$ являются α -близкими в метрике C^0 , а отображения последования Пуанкаре на цилиндре \mathcal{C} вдоль обеих систем (2.3) с треугольниками Ω и Ω' в точках траекторий $\pi(z(t))$ и $\pi(z'(t))$ являются α -близкими в метрике C^r .

Доказательство. Рассмотрим периодическую траекторию $\tilde{z}(s)$ поля $\mu\xi$, являющуюся вертикальной проекцией образа $\mathbf{B}(z(t))$ на \mathcal{C}_0 . Пусть s_0 — такой момент времени, что траектория $\tilde{z}(s)$ является гладкой в окрестности $s = s_0$, а $L \ni \tilde{z}(s_0)$ — малая гладкая площадка коразмерности 1 в \mathcal{C} , трансверсальная $\tilde{z}(s)$. Так как $\tilde{z}(s) \in T_{\tilde{z}(s)}\mathcal{C}_0$, то площадка L также трансверсальна \mathcal{C}_0 . Обозначим через $\hat{\Phi}$ отображение последования Пуанкаре $\hat{\Phi} : L \rightarrow L$ вдоль траекторий поля $\mu\xi$. Точка $\tilde{z}(s_0)$ является неподвижной точкой отображения $\hat{\Phi}$.

Пусть также $s_1 < \dots < s_m$ — все точки негладкости траектории $\tilde{z}(s)$, пронумерованные так, что s_1 — первая точка негладкости после s_0 . Обозначим через L_i пересечение малой δ -окрестности точки $\tilde{z}(s_i)$ с соответствующей поверхностью разрыва \mathcal{S}_{ij} поля $\mu\xi$. Тогда отображение последования Пуанкаре $\hat{\Phi} : L \rightarrow L$ является композицией отображений последования

$$\hat{\Phi} : L \xrightarrow{\Phi_0} L_1 \xrightarrow{\Phi_1} L_2 \xrightarrow{\Phi_2} \dots \xrightarrow{\Phi_{m-1}} L_m \xrightarrow{\Phi_m} L.$$

Из этой схемы и леммы 3.4 вытекает, что отображение $\hat{\Phi}$ является гладким диффеоморфизмом.

Обозначим через $\tilde{\Phi}$ ограничение $\hat{\Phi}$ на \mathcal{C}_0 . По определению грубости автомодельной траектории $z(t)$ дифференциал $d\tilde{\Phi}$ в точке $\tilde{z}(s_0)$ является грубым, т.е. не имеет единичных собственных значений. Отображение $\hat{\Phi}$ явно выражается через $\tilde{\Phi}$ следующим образом:

$$\hat{\Phi}(\mu, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}) = (\lambda_0\mu, \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})), \quad (3.6)$$

где λ_0 из определения автомодельности 2.2. Поэтому дифференциал $d\hat{\Phi}|_{z(s_0)}$ по сравнению с $d\tilde{\Phi}|_{z(s_0)}$ содержит одно дополнительное собственное значение λ_0 . В силу оптимальности $z(t)$ имеем $0 < \lambda_0 < 1$ (см. замечание 2.5). Таким образом, $d\hat{\Phi}|_{z(s_0)}$ является грубым.

Опишем теперь, как изменяется отображение $\hat{\Phi}$ при замене треугольника Ω на близкий треугольник Ω' . Рассмотрим поле $\mu\xi'$, полученное на \mathcal{C} из системы (2.3) с треугольником Ω' . Поскольку треугольники Ω и Ω' близки, немедленно получаем, что отображения Φ_k и Φ'_k близки в метрике C^r ; следовательно, близки и отображения $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}'$. Поскольку точка $z(s_0) \in L$ является грубой неподвижной точкой отображения $\hat{\Phi}$, то она не разрушается при малом шевелении $\hat{\Phi}$ в C^1 метрике (см., например, [12, предложение 1.1.4]). \square

Добавим еще, что если треугольник Ω сжать в λ раз ($\lambda > 0$), то траектории системы (2.3) не изменятся; изменится в λ раз скорость движения по ним. Поворот треугольника Ω вокруг начала координат приводит к повороту всего оптимального синтеза на тот же угол. Поэтому условие предыдущей леммы можно переформулировать в терминах близости углов и центров треугольников Ω и Ω' (как это сделано для правильного треугольника в формулировке теоремы 3.1).

3.5. Гомоклиническая траектория на нулевом сечении цилиндра \mathcal{C} . В данном пункте мы построим гомоклиническую траекторию в раздутой системе (3.4) для случая, когда треугольник Ω является правильным, и покажем, что она не разрушается при малом шевелении треугольника Ω .

Итак, пусть Ω — правильный треугольник с центром в начале координат. В [10] показано, что автомодельные траектории Z^\pm , Q^i и R^\pm , найденные в лемме 2.10, являются грубыми (см. [10, утверждения 6.3–6.5]). Более того, показано, что цикл Z^\pm является отталкивающим (точнее, все собственные значения $d\tilde{\Phi}$ вещественны и по модулю строго больше 1), а циклы Q^i и R^\pm являются гиперболическими (точнее, ровно одно собственное значение $d\tilde{\Phi}$ по модулю строго меньше 1, а остальные — больше). Таким образом, если треугольник Ω близок к правильному и его центр близок к началу координат, то по лемме 3.5 для системы (2.3) на \mathcal{C}_0 по-прежнему определены циклы, близкие к Z^\pm , Q^i и R^\pm (которые мы будем обозначать так же). Кроме того, близки отображения последования Пуанкаре вдоль этих циклов.

Таким образом, в окрестности каждой точки $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$ на $\mathcal{S} \cap \mathcal{C}_0$ определено одномерное гладкое устойчивое многообразие и пятимерное гладкое неустойчивое многообразие отображения

последования Пуанкаре $\tilde{\Phi} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$. Действительно, $\tilde{\Phi} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ является гладким в окрестности точек $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$ по лемме 3.4. Однако, вообще говоря, отображение $\tilde{\Phi}$ является разрывным на \mathcal{S} . Более того, если продолжать одномерное устойчивое многообразие $\tilde{\Phi}$ за пределы окрестностей точек $Q^i \cap \mathcal{S}$ и $R^\pm \cap \mathcal{S}$, оно неизбежно встречается с поверхностью разрыва $\tilde{\Phi}$. Тем не менее, верна следующая лемма.

Лемма 3.6. *Предположим, что треугольник Ω достаточно близок к правильному треугольнику с центром в начале координат. Тогда существует такая гомоклиническая точка $z_0 \in C_0$ на поверхности разрыва \mathcal{S} , что итерации $\tilde{\Phi}^n(z_0)$ стремятся к шестизвенному циклу $R^+ \cap \mathcal{S}$ при $n \rightarrow \pm\infty$ (см. рис. 2). Более того, для любой достаточно малой ε -окрестности $V \subset C_0$ точек $R^+ \cap \mathcal{S}$ найдется такая δ -окрестность $W \subset C_0$ точки z_0 и целые числа $m > 0$ и $l < 0$, что*

- (1) образы $\tilde{\Phi}^m(W)$ и $\tilde{\Phi}^l(W)$ содержатся в одной связной компоненте V ;
- (2) отображения $\tilde{\Phi}^m$ и $\tilde{\Phi}^l$ являются диффеоморфизмами в ограничении на W ;
- (3) образ устойчивого многообразия периодической орбиты $R^+ \cap \mathcal{S}$ в области $\tilde{\Phi}^m(W)$ при отображении $\tilde{\Phi}^{-m}$ и образ неустойчивого многообразия в $\tilde{\Phi}^l(W)$ при отображении $\tilde{\Phi}^{-l}$ пересекаются в гомоклинической точке z_0 , и это пересечение трансверсально.

Аналогичное утверждение выполнено для орбиты $R^- \cap \mathcal{S}$.

Доказательство. Ввиду вышесказанного, достаточно показать существование трансверсальной гомоклинической точки z_0 для случая правильного треугольника Ω и убедиться в том, что траектория, на которой она лежит, отделена от поверхности разрыва \mathcal{S}_{123} . Оба условия были проверены посредством численного анализа системы (3.4) для случая правильного треугольника.

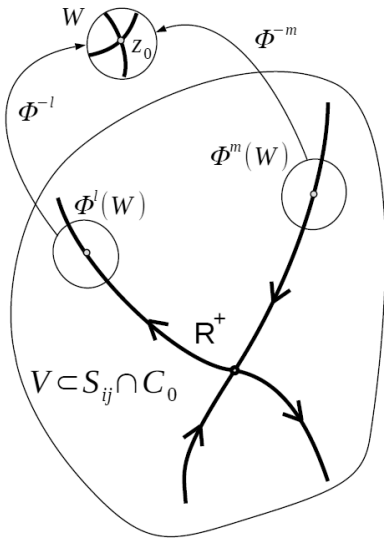
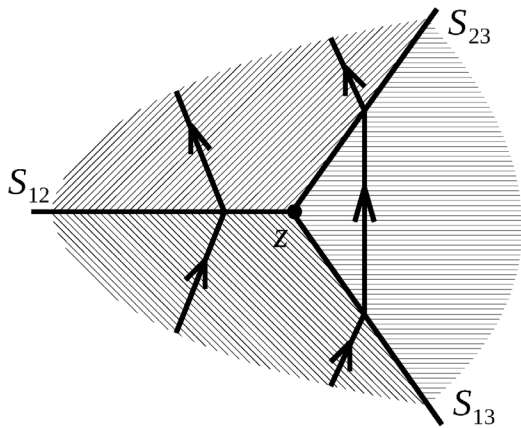


Рис. 2. Схематичное изображение результатов леммы 3.6

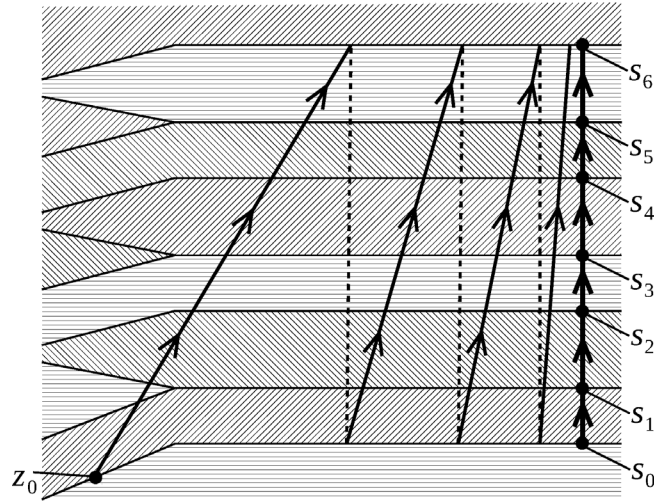
Рассмотрим поведение кривой σ_k в случае, когда она встречается с поверхностью разрыва \mathcal{S}_{123} отображения $\tilde{\Phi}$. Напомним, что \mathcal{S}_{123} является пересечением трех страт \mathcal{S}_{12} , \mathcal{S}_{13} , \mathcal{S}_{23} поверхности переключения \mathcal{S} . Если траектории системы (3.4) пересекают поверхность переключения \mathcal{S} трансверсально в некоторой точке $z \in \mathcal{S}_{123}$, то в окрестности этой точки они претерпевают одно переключение по одну сторону от \mathcal{S}_{123} и два последовательных переключения по другую сторону. Эта ситуация схематически изображена на рис. 3а. Поэтому при пересечении поверхности кривая σ_k либо разветвляется на две ветви, либо две ветви сливаются в одну. Получаемая сетка кривых по-прежнему лежит на цилиндрической поверхности Σ и является ее пересечением с \mathcal{S} . Отметим, что прообразы точек ветвления при отображении $\tilde{\Phi}$ являются точками излома кривых, из которых состоит множество $\Sigma \cap \mathcal{S}$.

Пусть $H_5 \subset C_0 \cap \mathcal{S}$ — пятимерное неустойчивое многообразие отображения $\tilde{\Phi}^6$ в окрестности некоторой точки переключения $\tilde{z}(s_0)$ цикла R^+ , а H_5^0 — компонента связности множества $H_5 \setminus \mathcal{S}_{123}$, в которой лежит точка $\tilde{z}(s_0)$. Тогда ограничение $\tilde{\Phi}^{-6}|_{H_5^0}$ будет гладким, $\tilde{\Phi}^{-6}[H_5^0] \subset H_5^0$, и $\tilde{z}(s_0) \in H_5^0$ будет единственной неподвижной точкой и аттрактором отображения $\tilde{\Phi}^{-6}$.

Обозначим через $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_6 = \sigma_0$ одномерные устойчивые многообразия отображения $\tilde{\Phi}^6$, исходящие из точек переключения $\tilde{z}(s_0), \tilde{z}(s_1), \dots, \tilde{z}(s_6) = \tilde{z}(s_0)$ цикла R^+ соответственно. Отметим, что отображение $\tilde{\Phi}$ переводит кривую σ_k в кривую σ_{k+1} , одновременно прижимая образ к точке переключения $\tilde{z}(s_{k+1})$. Множество траекторий системы (3.4), проходящие через кривые σ_k , образуют некоторую цилиндрическую двумерную поверхность Σ , содержащую периодическую траекторию R^+ . Кривые σ_k являются подмножеством пересечения $\Sigma \cap \mathcal{S}$.



(a) Поведение траекторий в окрестности S_{123}



(b) Цилиндрическая поверхность Σ , кривые σ_k , гомоклиническая точка z_0 и проходящая через z_0 траектория системы (3.4)

Рис. 3. Схематичное изображение кривых σ_k

Проследивая кривые σ_k по направлению от точек переключения $\tilde{z}(s_k)$ цикла R^+ , находим, что кривые σ_k с нечетным индексом k проходят через точку ветвления, а кривые σ_k с четным индексом k — через точку излома, которая является прообразом вышеназванных точек ветвления. Пройдя точку излома, кривая σ_0 трансверсально пересекает многообразие H_5^0 , таким образом определяя искомую гомоклиническую точку z_0 . Данная ситуация схематически изображена на рис. 3б. На рисунке изображена цилиндрическая поверхность Σ . При этом следует отождествить верх и низ рисунка. Штриховкой закодировано управление u в системе (3.4), принимающее значения в вершинах правильного треугольника Ω . Периодическая траектория R^+ соответствует жирной вертикальной кривой, ветки σ_k — горизонтальным жирным кривым. Тонкая линия обозначает траекторию, проходящую через точку z_0 , штриховые линии символизируют отождествление точек на этой траектории на кривых σ_0 и σ_6 . Периодичность всей картины есть следствие инвариантности периодической траектории R^+ по отношению к циклической перестановке порядка 3 группы симметрии S_3 .

Из вышесказанного ясно, что числа m и l можно, например, положить равными $m = 7$ и $l = 0$. Более того, ясно, что траектория, проходящая через z_0 , отделена от поверхности разрыва S_{123} .

Для цикла R^- доказательство аналогично. □

Отметим, что окрестность W в лемме 3.6 можно заменить на любую сколь угодно малую окрестность, в ней содержащуюся.

3.6. Завершение доказательства первой теоремы о хаотичности. Хорошо известно, что гомоклиническая точка генерирует подкову в окрестности периодической точки. В нашей ситуации отображение последования формально не является гладким, но лемма 3.6 позволяет полностью игнорировать разрывы отображения Пуанкаре и напрямую воспользоваться классической теоремой о том, что трансверсальная гомоклиническая точка генерирует подкову в любой сколь угодно малой окрестности периодической точки.

Доказательство теоремы 3.1. Начнем с построения множества Ξ . Для этого необходимо перенести подкову в окрестности 6-периодической точки $R_+ \cap \mathcal{S}$ отображения $\tilde{\Phi}$ из нулевого сечения \mathcal{C}_0 на весь цилиндр \mathcal{C} и показать, что все полученные траектории будут стремиться к \mathcal{C}_0 и удовлетворять условиям леммы 3.3.

Рассмотрим отображение Φ^6 , определенное на $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ в окрестности точек $R_+ \cap \mathcal{S}$. Поскольку цикл R_+ получен из автомодельной траектории с $\lambda_0 < 1$, то из (3.6) получаем

$$d\Phi^6\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right) = \lambda_0 \frac{\partial}{\partial\mu}$$

в точках $R_+ \cap \mathcal{S}$. Зафиксируем любую из шести точек $R_+ \cap \mathcal{S}$ и рассмотрим ее окрестность, в которой отображение Φ^6 является сжимающим в вертикальном направлении. Эту окрестность можно выбрать как цилиндр над окрестностью в \mathcal{C}_0 , так как согласно (3.6) свойство сжатия не зависит от выбора μ .

Итак, пусть $V_0 \subset V$ — такая открытая окрестность одной из шести точек $R_+ \cap \mathcal{S}$ в \mathcal{C}_0 , что отображение Φ^6 в $V_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$ является сжимающим в $\tilde{\lambda}_0 < 1$ раз. Для окрестности V_0 , ввиду леммы 3.6, существует подкова Λ_0 для некоторой итерации $(\tilde{\Phi}^6)^{N'}$ (см., например, [12, теорема 6.5.5]). Обозначим $N = 6N'$.

Подкова Λ_0 разделена на две части следующим образом. В окрестности V определены два открытых множества W_0 и W_1 . Множество W_0 есть $\Phi^l(W)$, где окрестность $W \ni z_0$ и степень l из леммы 3.6 (см. рис. 2). Таким образом, для любой точки $z \in W_0$ выполнено $\Phi^{m-l}(z) \in V$, и отображение $\Phi^{m-l}|_{W_0}$ является диффеоморфизмом. Множество W_1 состоит из точек $z \in V$, не покидающих окрестность $R_+ \cap \mathcal{S}$ при итерациях Φ^k , $0 \leq k \leq m-l$, $W_1 = \bigcap_{k=0}^{m-l} \Phi^{-k}(V)$. Отображение $\Phi^{m-l}|_{W_1}$ является диффеоморфизмом. Очевидно, $W_0 \cap W_1 = \emptyset$. Подкова Λ_0 состоит из двух частей: $\Lambda_0 = (\Lambda_0 \cap W_0) \sqcup (\Lambda_0 \cap W_1)$.

Пусть $z \in (W_0 \sqcup W_1) \cap \Phi^{-N}(W_0 \sqcup W_1)$. Обозначим через $S(z)$ время (по параметру s) движения по траектории поля $\mu\xi$ (см. систему (3.4)) из точки z при последовательном пересечении N страт \mathcal{S}_{ij} . Поскольку отображение Φ^{m-l} является диффеоморфизмом в ограничении на W_0 и W_1 и траектории поля $\mu\xi$ из $(W_0 \sqcup W_1) \cap \Phi^{-N}(W_0 \sqcup W_1)$ пересекают поверхность переключения \mathcal{S} трансверсально, то для некоторых констант S_{\min} и S_{\max} выполнена оценка

$$0 < S_{\min} \leq S(z) \leq S_{\max}. \quad (3.7)$$

Отметим, что для любой точки подковы Λ_0 существует и единственна траектория поля $\mu\xi$ при всех $s \in (-\infty; +\infty)$. Действительно, любая степень Φ^n отображения последования Пуанкаре корректно определена в точках Λ_0 , так как $\Lambda_0 \subset V_0 \cap \Phi^{-N}(V_0)$ и $\Phi^N(\Lambda_0) = \Lambda_0$. Более того, траектория поля $\mu\xi$, выпущенная из любой точки подковы Λ_0 , пересекает поверхность переключения только трансверсально и, следовательно, единственна. Существование при $s \in (-\infty; +\infty)$ следует из полученных оценок на время перехода (3.7).

Любой точке подковы $z \in \Lambda_0$ мы стандартным образом поставим в соответствие бесконечную последовательность $\Psi(z) \in \Sigma_{01}$ из нулей и единиц. На позиции с номером $j \in \mathbb{Z}$ в $\Psi(z)$ стоит нуль, если все итерации $\Phi^k(z)$ при k между jN и $(j+1)N$ лежат в V_0 , и единица в противном случае (т.е. если $\Phi^k(z)$ окажется в окрестности гомоклинической точки z_0 при каком-либо $k \in (jN, (j+1)N)$). Заметим, что итерации $\Phi^{jN}(z)$ в любом случае лежат в V_0 .

Ограничение Φ^N на цилиндр в \mathcal{C} над основанием $\Lambda_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$, вообще говоря, может не являться сжимающим в вертикальном направлении (несмотря на то, что Φ^6 является сжимающим в окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$). Это связано с тем, что при N итерациях Φ^N точки из подковы Λ_0 могут покинуть окрестность $R_+ \cap \mathcal{S}$ и побывать в окрестности гомоклинической точки z_0 .

Обозначим через λ_{\max} максимально возможное растяжение в вертикальном направлении отображения Φ^N в точках этого цилиндра:

$$\lambda_{\max} = \max_{z \in \Lambda_0 \times \mathbb{R} \setminus \{0\}} \frac{\mu(\tilde{\Phi}^N(z))}{\mu(z)}.$$

Максимум здесь корректно определен, так как множество Λ_0 компактно, а непрерывная функция $\mu(\tilde{\Phi}^N(z))/\mu(z)$ не изменяется, если заменить z на $g(\lambda)z$ при любом $\lambda \neq 0$.

Таким образом, если в последовательности $\Psi(z)$ на j -й позиции стоит нуль, то отображение Φ^N является сжимающим в вертикальном направлении в окрестности точки $\Phi^{jN}(z)$ в $\tilde{\lambda}_0^{N/6}$ раз, так

как итерации $\Phi^k(z)$ при $k \in [jN; (j+1)N]$ не покидают окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$. Если же в последовательности $\Psi(z)$ на j -й позиции стоит единица, то отображение Φ^N растягивает в вертикальном направлении в окрестности $\Phi^{jN}(z)$ не более чем в λ_{\max} раз.

Выберем $K \in \mathbb{N}$, $K > 2$ так, чтобы $\tilde{\lambda}_0^{KN/6} \lambda_{\max} < 1$. Рассмотрим подкову $\Lambda_1 \subset \Lambda_0$, состоящую из тех точек $z \in \Lambda_0$, для которых в последовательности $\Psi(z)$ на позициях с номерами, не кратными K , стоят нули (на позициях с номерами, кратными K , могут стоять как нули, так и единицы). Тогда отображение Φ^{KN} , в ограничении на $\Lambda_1 \times \{\mu \in \mathbb{R}\}$, является сжимающим как минимум в $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_0^{KN/6} \lambda_{\max} < 1$ раз. Обозначим $n = KN$ (здесь n из пункта 4 теоремы 3.1).

Множество Ξ_1 определим так: необходимо рассмотреть верхнюю половину цилиндра $\Lambda_1 \times \mathbb{R}_+$, выпустить из каждой точки полученного множества траекторию поля $\mu\xi$ при $s \in (-\infty; +\infty)$ и перенести полученное множество с помощью отображения \mathbf{B}^{-1} на исходное расширенное фазовое пространство \mathcal{M} .

В окрестности траектории R_- тоже существует подкова Λ_2 для отображения Φ^n (без ограничения общности можно считать степени отображения Φ для подков Λ_1 и Λ_2 совпадающими). Определим множество Ξ_2 аналогично множеству Ξ_1 . Эти множества не пересекаются. Действительно, для любой точки $z \in \Lambda_1$ большая часть итераций $\Phi^k(z)$ лежит в окрестности $R_+ \cap \mathcal{S}$ (а именно, каждые $(K-1)N$ из каждых KN и $K > 2$). Поскольку аналогичное утверждение верно для подковы Λ_2 в окрестности $R_- \cap \mathcal{S}$, мы немедленно получаем, что $\Xi_1 \cap \Xi_2 = \emptyset$.

Определим $\Xi = \Xi_1 \sqcup \Xi_2$.

Существование времени $T(y)$ из пункта 1 теоремы 3.1 выполняется ввиду леммы 3.3. Действительно, при отображении $\Phi^n : \Lambda_1 \times \{\mu > 0\} \rightarrow \Lambda_1 \times \{\mu > 0\}$ координата $\mu(z)$ любой точки $z \in \Lambda_1 \times \{\mu > 0\}$ уменьшается не менее, чем в $\lambda_1 = \tilde{\lambda}_0^{(K-1)N/6} \lambda_{\max} < 1$ раз, а параметр s на траектории $X(z, s(t))$ увеличивается на $KS(z) \in [KS_{\min}, KS_{\max}]$. Поэтому на траектории из точки z параметр $\mu(z(s))$ экспоненциально убывает, и, следовательно, выполняются условия леммы 3.3. Единственность следует из определения отображения последования Пуанкаре.

Пункты 2 и 3 теоремы 3.1 выполняются по построению множества Ξ (оптимальность также следует из леммы 3.3). Для доказательства пункта 4 теоремы необходимо для $z \in \Xi_1$ в качестве последовательности $\Psi_{01}(z) \in \Sigma_{01}$ рассмотреть элементы $\Psi(\pi(z))$ на позициях с кратными K номерами: $\Psi_{01}(z)_j = \Psi(z)_{jK}$ при всех $j \in \mathbb{Z}$. Для $z \in \Xi_2$ последовательность $\Psi_{01}(z)$ лежит во втором экземпляре подковы Σ_{01} и определяется аналогично. \square

Доказанная теорема 3.1 позволяет отыскивать в исходной модельной задаче (2.1) элементы динамической системы бернуллиевского сдвига $l : \Sigma_{01} \rightarrow \Sigma_{01}$ с положительной энтропией. Например, верно следующее утверждение.

Следствие 3.2. *Если треугольник Ω удовлетворяет условию теоремы 3.1, то в задаче (2.1) существует бесконечное (счетное) число различных однопараметрических семейств автомодельных траекторий.*

Доказательство. Рассмотрим любую периодическую траекторию бернуллиевского сдвига l . Очевидно, их бесконечное счетное число. Прообраз любой такой траектории при отображении Ψ_{01} дает однопараметрическое (относительно действия g группы \mathbb{R}_+) семейство автомодельных траекторий. \square

4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ ПОСЛЕДОВАНИЯ ПУАНКАРЕ

В доказанной теореме 3.1 получен полулокальный результат о существовании хаоса в оптимальном синтезе задачи (2.1) с произвольным треугольником Ω , не сильно отличающимся от правильного треугольника с центром в начале координат. Для случая правильного треугольника оптимальный синтез может быть описан точно: в теореме 5.4 найдено множество всех неблуждающих траекторий, описан точный граф топологической марковской цепи, полусопряженной с отображением последования Пуанкаре Φ , найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих траекторий и соответствующая топологическая энтропия. Для получения этих результатов необходимо начать с точного изучения глобальных топологических свойств отображения Φ последовательности переключения \mathcal{S} на себя.

В этой главе мы будем предполагать (если не оговорено противного), что треугольник Ω является правильным и центрирован в начале координат.

4.1. Топологическая структура поверхности переключения. В основе изучения глобальной структуры оптимального синтеза в модельной задаче (2.1) с правильным треугольником Ω лежит подробное изучение отображения последования Пуанкаре Φ . Как было сказано выше, отображение Φ определено на некотором подмножестве поверхности переключения. Поэтому в данном пункте мы дадим точное топологическое описание самой поверхности переключения и подмножества точек, на котором определено отображение Φ .

Поскольку поверхность переключения \mathcal{S} описывается через переменные ψ_i , то пересечение $M_+ \cap \mathcal{S}$ проще всего описывать в пространстве сопряженных переменных $N = \{(\phi, \psi)\}$, отождествив его с M и M_+ при помощи отображения E . Пусть $\varepsilon : N/g \rightarrow N$ — правое обратное отображение к канонической проекции $\pi : N \setminus 0 \rightarrow N/g$. Зададим для удобства вложение ε следующим образом:

$$(\varepsilon \circ \pi)(\phi, \psi) = (\mu^{-3}\phi, \mu^{-4}\psi), \quad \text{где } \mu = \sqrt[12]{|\phi|^4 + |\psi|^3}.$$

Мы выбрали именно такой способ задания ε , так как ε коммутирует с действием g , и проекцию π можно себе представлять как отображение точки $(\phi_0, \psi_0) \in N \setminus 0$ в пересечение ее орбиты $g(\mathbb{R}_+)(\phi_0, \psi_0)$ со сфероидом

$$\varepsilon(N/g) = \{(\phi, \psi) : |\phi|^4 + |\psi|^3 = 1\}.$$

Пространство N/g автоматически наделяется структурой гладкого риманова многообразия, отображение π становится гладкой сюръекцией, а ε — гладким вложением.

Пересечение $\mathcal{S} \cap M_+$ состоит из трех двумерных полусфер D_k , определяемых соотношениями $\psi_i = \psi_j \leq \psi_k$, пересекающихся по окружности $\psi = 0$:

$$D_k = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi_i = \psi_j \leq \psi_k\},$$

$$D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi = 0\}.$$

В свою очередь, каждая полусфера D_k делится плоскостью $\phi_i = \phi_j$ на два диска: $D_k = D_{ij} \cup D_{ji}$, где

$$D_{ij} = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) \in N : \psi_i = \psi_j \geq \psi_k, \phi_i \leq \phi_j\}.$$

Введем обозначение

$$\tilde{d}_k = D_{ij} \cap D_{ji} = D_k \cap \{\phi_i = \phi_j\}.$$

В любой оптимальной траектории, проходящей через точку D_{ij} , не лежащую на \tilde{d}_k , управление совершает переключение с i -й вершины треугольника Ω на j -ю.

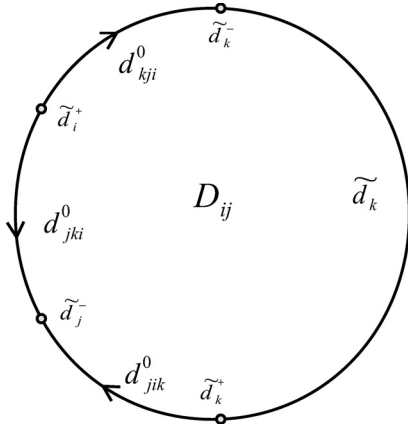


Рис. 4. Диск D_{ij} поверхности переключения $\pi(\mathcal{S})$

Окружность $\varepsilon(N/g) \cap \{\psi = 0\}$ разбивается на шесть отрезков (см. рис. 4)

$$d_{ijk}^0 = \varepsilon(N/g) \cap \{(\phi, \psi) : \psi = 0, \phi_i \leq \phi_j \leq \phi_k\}$$

точками

$$\tilde{d}_k^+ = \varepsilon(N/g) \cap \{\phi_k > \phi_i = \phi_j\}, \quad \tilde{d}_k^- = \varepsilon(N/g) \cap \{\phi_k < \phi_i = \phi_j\}.$$

Итак, образ поверхности переключения $\pi(\mathcal{S})$ на фактор-пространстве N/g является двумерным конечным CW-комплексом с клетками D_{ij} , d_{ijk}^0 , \tilde{d}_k и d_k^\pm . Нетрудно заметить, что поверхность $\pi(\mathcal{S})$ гомотопически эквивалентна букету двух двумерных сфер. Ориентации отрезков d_{ijk}^0 выберем в зависимости от четности перестановки (ijk) , как показано на рис. 4 (их ориентации пригодятся при факторизации по дискретной группе S_3).

Как уже неоднократно отмечалось выше, отображение последования Пуанкаре Φ определено для всех точек $\pi(\mathcal{S})$, кроме точек, лежащих на \tilde{d}_k .

Поскольку отображение последования Φ коммутирует с действием группы S_3 , для изучения различных его асимптотических свойств можно ограничиться рассмотрением одного диска D_{ij} . Действие группы S_3 на $\pi(\mathcal{S})$ является клеточным и устроено следующим образом:

1. группа S_3 свободно и транзитивно действует на нульмерных клетках d_i^+ и d_i^- ;

2. группа S_3 свободно и транзитивно действует на одномерных клетках d_{ijk}^0 , сохраняя ориентацию;
3. нормальная подгруппа S_3 свободно и транзитивно действует на одномерных клетках \tilde{d}_k . Стабилизатором клетки \tilde{d}_k является подгруппа, порожденная транспозицией $(ij) \in S_3$;
4. группа S_3 свободно и транзитивно действует на двумерных клетках D_{ij} .

4.2. Редукция по действию группы S_3 . Прежде чем приступить к описанию свойств отображения Φ , мы введем несколько соглашений, которые позволят сделать текст значительно более легким для восприятия. Образ $\Phi(z)$ любой точки $z \in D_{ij}$ лежит в D_{jk} или в D_{ji} . Применением соответствующей перестановки из $\sigma \in S_3$ можно получить $(\sigma \circ \Phi)(z) \in D_{ij}$. Поэтому траекторию $\Phi^n(z)$ любой точки $z \in D_{ij}$ можно изображать только на D_{ij} . Более того, говоря, что образ точки $z \in D_{ij}$ при отображении Φ есть точка $z' \in D_{ij}$, в этом разделе мы всегда будем подразумевать применение соответствующей перестановки $\sigma \in S_3$ и писать, допуская некоторую вольность, $\Phi(z) = z'$.

Вместо этого можно было бы перейти к фактор-пространству \mathcal{S}/S_3 . Отображение Пуанкаре Φ корректно переносится на \mathcal{S}/S_3 , так как оно коммутирует с действием S_3 . Однако описанный выше способ нам кажется более предпочтительным (хотя по сути эквивалентен), потому что не нарушает исходной топологии диска D_{ij} .

Мы будем производить вычисления в пространстве N/g , отождествив его с M/g и M_+/g по теореме 2.1 с помощью отображения E . В этом случае диск $D_{ij} \subset (N/g)$ может быть задан как подмножество N , описываемое следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} |\psi|^2 + |\phi|^2 = 1; \\ \psi_i = \psi_j \leq \psi_k; \\ \phi_i \leq \phi_j; \\ \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0; \\ \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0. \end{cases}$$

Отметим, что в предыдущем пункте использовалась нормировка $|\psi|^3 + |\phi|^4 = 1$, которая удобна тем, что согласована с действием g группы \mathbb{R}_+ . Однако численные расчеты будет удобнее проводить именно в нормировке $|\psi|^2 + |\phi|^2 = 1$.

Введем следующие координаты на диске D_{ij} :

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\phi_i - \phi_j) - \sqrt{3}\psi_i, \quad \chi_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\phi_k.$$

Тогда диск D_{ij} отображается в эллипсоид $2\chi_1^2 + \chi_2^2 \leq 1$, а координаты ϕ и ψ могут быть восстановлены по формулам

$$\begin{cases} \phi_i = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_2 - \chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2} \right), & \psi_i = -\frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{2\sqrt{3}}, \\ \phi_j = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\chi_2 - \chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2} \right), & \psi_j = -\frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{2\sqrt{3}}, \\ \phi_k = \sqrt{\frac{2}{3}}\chi_2, & \psi_k = \frac{\chi_1 + \sqrt{1 - \chi_1^2 - \chi_2^2}}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

4.3. Известные элементы синтеза. В этом разделе мы опишем области в D_{31} , соответствующие элементам синтеза, наличие которых было установлено в [10].

К дуге \tilde{d}_2 примыкает такая область C , что из каждой соответствующей точки переключения с управления 3 на управление 1 траектория в прямом направлении времени, через бесконечное число переключений с управления 1 на управления 3 и обратно, попадает на особый режим по ребру $[A_1A_3]$ (см. рис. 5). Эта область ограничена дугой \tilde{d}_2 , частью дуги d_{132}^0 и некоторой кривой c , соединяющей точку \tilde{d}_2 и дугу d_{132}^0 . Отображение Пуанкаре в прямом направлении времени переводит область C в подмножество \tilde{C} самой себя; при этом точки дуги \tilde{d}_2 остаются неподвижными, а кривая c переходит в отрезок \tilde{c} самой себя, примыкающий к точке \tilde{d}_2 . Кривая,

отделяющая область \tilde{C} от комплемента $C \setminus \tilde{C}$, примыкает к точке \tilde{d}_2^+ . Эта кривая является образом пересечения дуги d_{132}^0 с границей C при отображении Пуанкаре в прямом времени.

Комплемент $C \setminus \tilde{C}$ на рис. 5 в обратном направлении времени переводится отображением Пуанкаре последовательно в области, изображенные на рис. 5. Напомним, что при отображении Пуанкаре в исходном пространстве дуги d_{132}^0 и d_{123}^0 отождествляются. Поэтому граница области $C \setminus \tilde{C}$ при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени следующим образом переходит в границу области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$. Кривая, отделяющая область \tilde{C} от комплемента $C \setminus \tilde{C}$, переходит в отрезок дуги d_{123}^0 . Отрезок дуги d_{132}^0 переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а пересечение границы $C \setminus \tilde{C}$ с D_{31} переходит в пересечение границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ с D_{31} .

Отображение Пуанкаре из области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ в область $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ в обратном направлении времени или из области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ в область $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ в прямом направлении времени претерпевает разрыв в топологии D_{31} . Точнее, пересечения дуг d_{132}^0 и d_{123}^0 с границей области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ сшиваются и переводятся в прямом направлении времени в штрихованную кривую в области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, а пересечения дуг d_{213}^0 и d_{123}^0 с границей области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ в обратном направлении времени сшиваются и переводятся в штрихованную кривую в области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$.

Граница области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени следующим образом переходит в границу области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$. Отрезок дуги d_{132}^0 переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а отрезок дуги d_{123}^0 переходит в штрихованный отрезок границы области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$.

Заметим еще, что в любой окрестности точки \tilde{d}_2^- существуют точки, не принадлежащие областям $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2, 3$. Из результатов [10] следует (см. приложение Б к настоящей работе), что все такие точки, лежащие в достаточно малой окрестности \tilde{d}_2^- , в прямом направлении времени конечным числом итераций отображения Пуанкаре переводятся в область $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$. Эти отображения соответствуют переключениям, в которых попеременно чередуются управления 1 и 3. Число переключений для каждой точки конечно, но по мере приближения к границе области C неограниченно возрастает.

Таким образом, поведение отображения Пуанкаре в некоторой окрестности замыкания дуги \tilde{d}_2 полностью описано. Опишем связь с областями фактора по группе Фуллера поверхности переключения, обозначенных на рис. 4 в статье [10]. Страта C_{ij}^{ij} на указанном рисунке соответствует области C , части области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ и другим точкам достаточно малой окрестности точки \tilde{d}_2^- .

4.4. Глобальная структура отображения Пуанкаре. Рассмотрим теперь образ окрестности дуг d_{132}^0 и d_{123}^0 при отображении Пуанкаре в прямом направлении времени. Напомним, что при этом отображении данные окрестности сшиваются по этим дугам, а образ дуг представляет собой некоторую кривую σ_b , соединяющую точки \tilde{d}_2^+ и \tilde{d}_3^+ . Штрихованная линия в области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ и граница между областями $C \setminus \tilde{C}$ и \tilde{C} являются частями этой кривой. Кривая σ_b разделяет область D_{31} на две части. Обозначим ту часть, которая содержит область \tilde{C} , через T_b , а ту часть, которая содержит область $C \setminus \tilde{C}$, — через R_b .

Рассмотрим образ окрестности дуг d_{213}^0 и d_{123}^0 при отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом отображении данные окрестности сшиваются по этим дугам, а образ дуг представляет собой некоторую кривую σ_f , соединяющую точки \tilde{d}_1^- и \tilde{d}_2^- . Штрихованная линия в области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ и штрихованная часть границы области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ являются частями этой кривой. Кривая σ_f разделяет область D_{31} на две части. Обозначим ту часть, которая содержит область C , через T_f , а ту часть, которая содержит область $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, — через R_f .

Таким образом, отображение Пуанкаре непрерывно на областях T_f и R_f и переводит их биективно в области T_b и R_b соответственно. Если продолжить отображение непрерывным образом на границу области T_f , то эта граница следующим образом переходит в границу области T_b . Дуга \tilde{d}_2 остается неподвижной, дуга d_{132}^0 переходит в кривую σ_b , а кривая σ_f — в дугу d_{213}^0 . Если продолжить отображение непрерывным образом на границу области R_f , то эта граница следующим образом переходит в границу области R_b . Дуга d_{213}^0 переходит в дугу d_{132}^0 , дуга d_{123}^0 переходит в кривую σ_b , а кривая σ_f — в дугу d_{123}^0 . Схематически структура отображения Пуанкаре изображена на рис. 6.

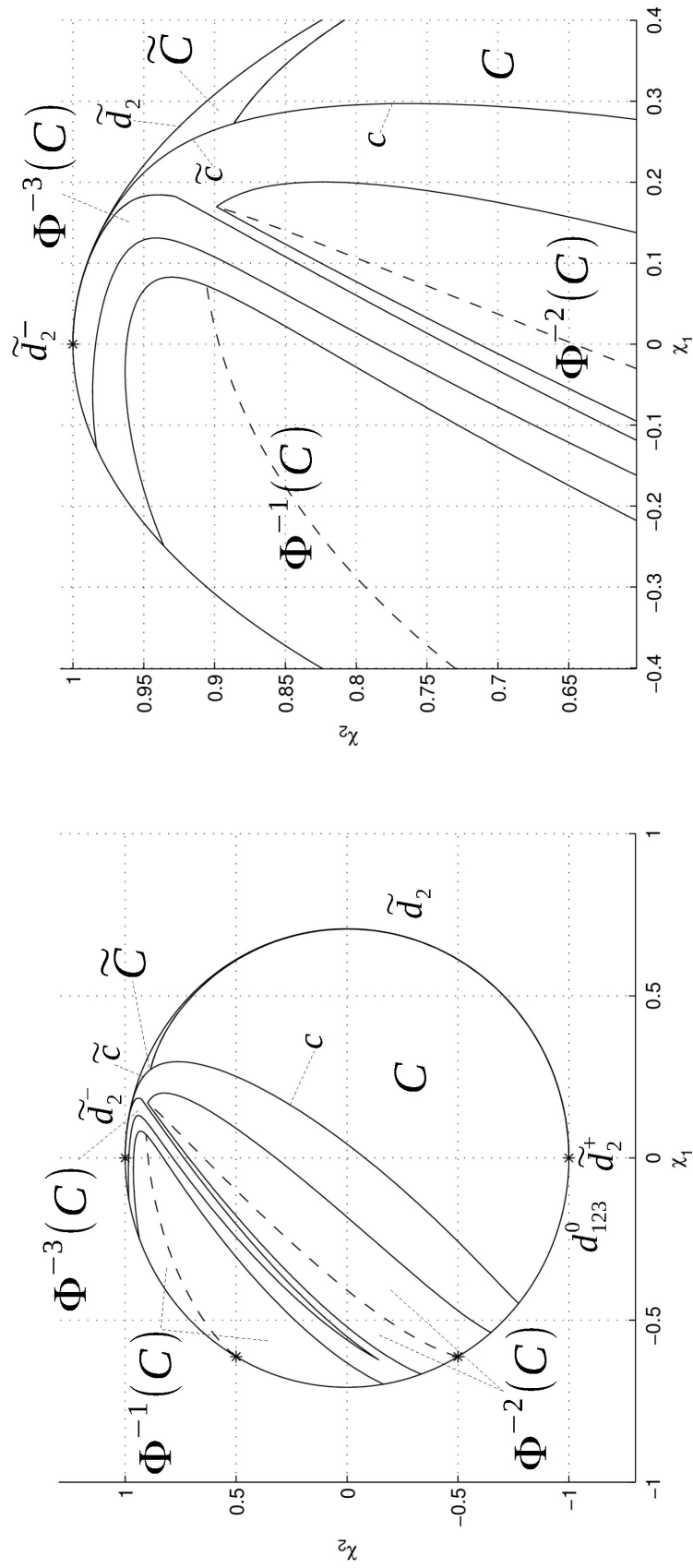


Рис. 5. Известные области

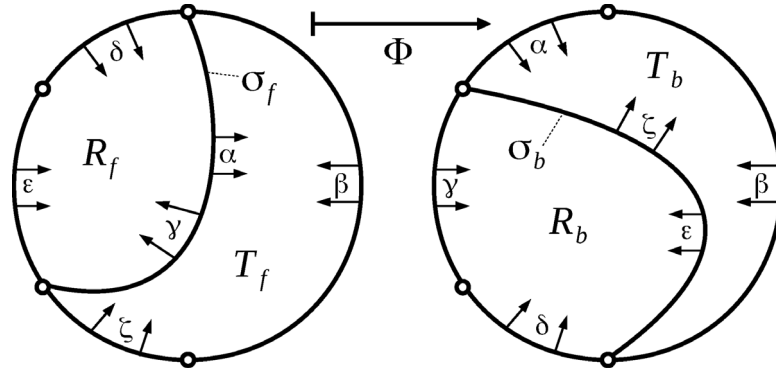


Рис. 6. Глобальная структура отображения Пуанкаре

Кривые σ_f и σ_b пересекаются в одной точке. Координаты этой точки являются решением некоторой системы алгебраических уравнений, так как эта точка трехкратным применением отображения Пуанкаре переходит в область $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$. Численные значения координат равны $\chi_1 \approx 0.174146349178$, $\chi_2 \approx 0.907326683652$.

4.5. Переходы циклического и осциллирующего типа. Рассмотрим отображение Пуанкаре, переводящее точку переключения с управления i на управление j в точку переключения с управления j на управление k . Введем следующее определение.

Если $i = k$, то будем называть данный переход *осциллирующим*; если же $i \neq k$ (и, таким образом, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$), то будем называть данный переход *циклическим*. Введем для этих переходов обозначения T (transposition) и R (rotation).

Преимущество описания последовательности управлений на какой-либо конкретной траектории в терминах этого определения заключается в том, что оно инвариантно по отношению действия группы перестановок S_3 , переставляющей вершины множества допустимых управлений Ω .

Заметим, что отображение Пуанкаре области T_f в T_b осуществляется переходом осциллирующего типа, а отображение Пуанкаре области R_f в R_b — переходом циклического типа. Индексы b и f обозначают сокращения от английских слов backward и forward. Заметим также, что любая точка области C в ходе эволюции в прямом направлении времени претерпевает исключительно переходы осциллирующего типа, пока через бесконечное число переключений не попадает на особый режим.

4.6. Аттрактор в обратном направлении времени. В [10] (см. также приложение Б) установлено наличие отталкивающей неподвижной точки F_R отображения Пуанкаре на области D_{31} , соответствующей трехзвенным автомодельным циклам в факторпространстве по группе Фуллера (теорема 3), а также гиперболической периодической траектории, состоящей из двух точек F_R^1 и F_R^2 , и соответствующей шестизвенным автомодельным циклам (теорема 5). Расположения точки F_R и пары точек F_R^1, F_R^2 изображены на рис. 7.

На всех вышеназванных автомодельных траекториях имеет место циклическая последовательность всех трех управлений. Таким образом, соответствующие переходы имеют циклический тип, и все три точки F_R, F_R^1, F_R^2 лежат в пересечении областей R_f и R_b .

В силу того факта, что точка F_R — отталкивающая в прямом направлении времени, а значит, притягивающая в обратном направлении времени, существует такая (связная) окрестность точки F_R , что любая точка из этой окрестности стремится к F_R в обратном направлении времени и при этом претерпевает исключительно переходы циклического типа. Определим область I как наибольшую из этих окрестностей. Ясно, что область I является подмножеством области R_b .

Численными расчетами установлено, что одна из ветвей устойчивого уса гиперболической периодической траектории (F_R^1, F_R^2) принадлежит области I . Из этого следует, что F_R^1, F_R^2 лежат на границе области I , а эта граница определяется неустойчивым усом периодической траектории (F_R^1, F_R^2) . Таким образом, область I является пересечением полосы, находящейся между устойчивыми усами периодической траектории (F_R^1, F_R^2) , с областью R_b . Наряду с этими усами, ее граница состоит из отрезков дуги d_{123}^0 и кривой σ_b .

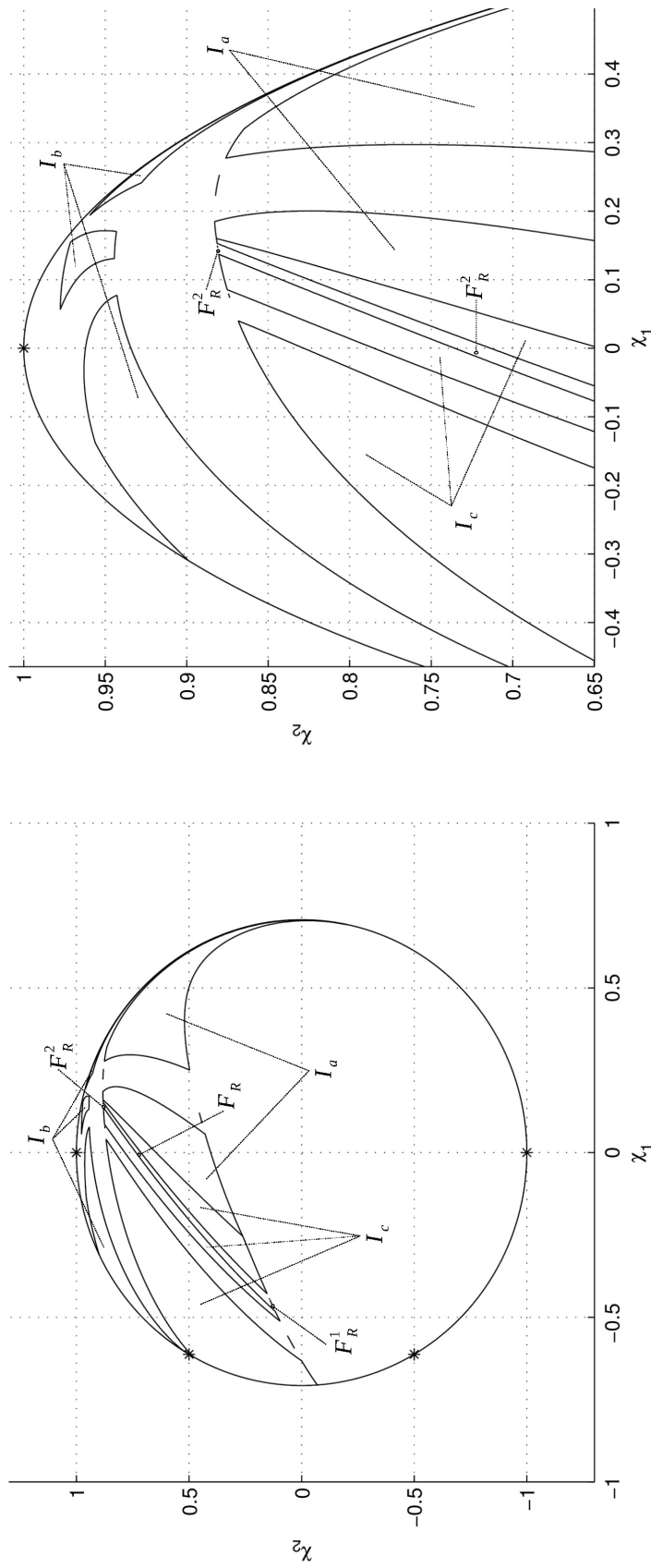


Рис. 7. Пересечение областей $I = I_a \cup I_b \cup I_c$ с областями S , \tilde{S} и $\Phi^{-r}(S \setminus \tilde{S})$, $r = 1, 2, 3$

Пересечения области I с областями $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2, 3$, изображены на рис. 7 следующим образом. Обозначим прообраз области I при отображении Пуанкаре через I_c . Поскольку неподвижная точка является притягивающей в обратном направлении времени, то область I_c является подмножеством области I . Пересечения области I_c с областями $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2, 3$, изображены на рис. 7. Обозначим комплемент области I_c в области I через I_a . Пересечения области I_a с областями $C \setminus \tilde{C}$ и $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ также изображены на рис. 7. В качестве границы между областями I_a и I_c выступает отрезок кривой σ_f . Этот отрезок при отображении Пуанкаре области I_c в прямом направлении времени отображается на границу области I , а именно, в отрезок дуги d_{123}^0 . Этот отрезок одновременно лежит на границе области I_c и при отображении Пуанкаре в прямом направлении времени отображается на границу области I , а именно, в отрезок кривой σ_b .

В силу вышесказанного образом области I при отображении Пуанкаре (в прямом направлении времени) является объединение области I с образом области I_a . Обозначим образ области I_a через I_b . Пересечения области I_b с областью $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, частью области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ и областью C также изображены на рис. 7. При отображении Пуанкаре в прямом направлении времени области I_a отрезок кривой σ_f переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , а отрезок кривой σ_b — во внутреннюю часть области \tilde{C} . Обратим внимание на то, что пересечение кривой σ_f с областью I_b полностью лежит на границе области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$, но граница области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ не содержит пересечения кривых σ_f и σ_b .

4.7. Промежуточные области. В предыдущих разделах мы установили, что точки, лежащие в областях $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ и $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$, через одно или два переключения, соответственно, переходят в область C , а оттуда через бесконечное число переходов осциллирующего типа попадают на особый режим. С другой стороны, точки, лежащие в области I_b , (в обратном направлении времени) через одно переключение попадают в область I и далее стремятся к неподвижной точке F_R , при этом претерпевая переходы исключительно циклического типа. В этом разделе мы рассмотрим остальные точки множества D_{31} .

Любая точка из D_{31} , не лежащая в замыкании областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2, 3$, или одной из областей I , I_b , должна лежать в замыкании одной из следующих четырех областей.

Область II ограничивается отрезком дуги d_{132}^0 , отрезком границы области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$, отрезком границы области I_c , и отрезком границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$. Область III ограничивается отрезком границы области I , отрезком границы C , отрезком границы области I_b , и отрезком границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$. Область IV ограничивается отрезком дуги d_{123}^0 , отрезком границы области C , отрезком границы области I_a и отрезком границы области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$. Область V ограничивается отрезком границы области I_b , отрезком границы области C и отрезком дуги d_{213}^0 . Взаимное расположение областей схематически изображено на рис. 8 (см. также рис. 9).

Рассмотрим сейчас динамику системы, задаваемой отображением Пуанкаре, на промежуточных областях. Заметим, что обе кривые σ_f и σ_b разделяют область III на две части. Обозначим части области III, определяемые кривой σ_f , через III и IIIг, а части, определяемые кривой σ_b , — через IIIи и IIIд. При этом область III примыкает к области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, область IIIг — к области C , область IIIи — к области I_b , а область IIIд — к области I . Заметим также, что кривая σ_f разделяет область V на две части. Обозначим эти части через VI и VIг, при этом область VI примыкает к дуге d_{213}^0 , а область VIг — к области C .

Тогда отображение Пуанкаре биективно отображает область II на область IIIд; при этом отрезок границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ переходит в отрезок границы области C , отрезок границы области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ переходит в отрезок границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, отрезок границы области I_c переходит в отрезок границы области I , а отрезок дуги d_{132}^0 — в отрезок кривой σ_b . Соответствующий переход имеет циклический тип.

Отображение Пуанкаре также биективно отображает область IV на область IIIи, при этом отрезок границы области $C \setminus \tilde{C}$ переходит в отрезок границы области \tilde{C} , отрезок границы области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ переходит в отрезок границы области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$, отрезок границы области I_a переходит в отрезок границы области I_b , а отрезок дуги d_{123}^0 — в отрезок кривой σ_b . Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

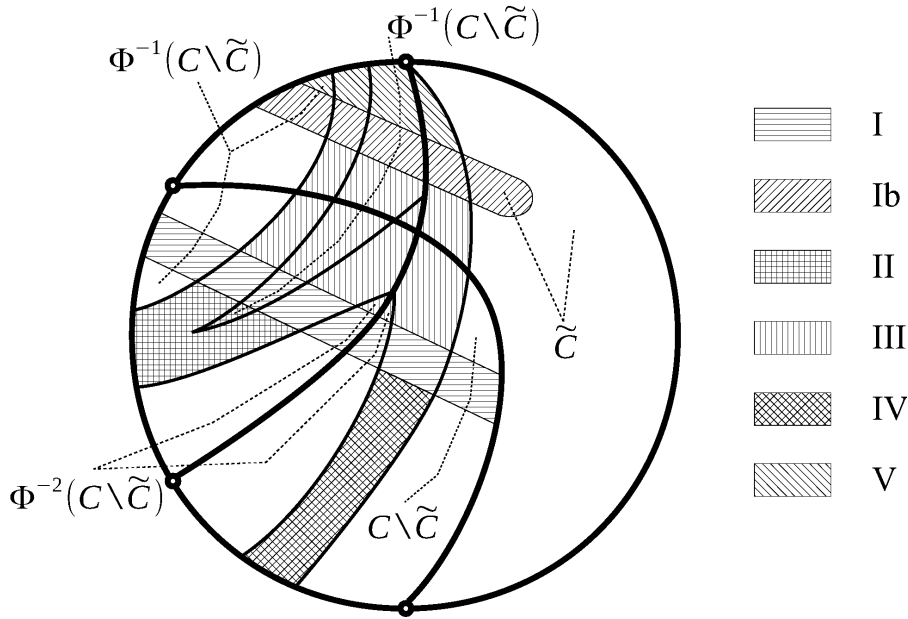


Рис. 8. Схематическое расположение областей

Как явствует из рис. 6, образ области VI примыкает к дугам d_{132}^0 и d_{123}^0 . При этом пересечение границы областей Ib и VI переходит в кривую, соединяющую эти дуги. Эта кривая не может пересекать область I, поскольку прообраз области I не пересекается с областью VI. Концы этой кривой лежат соответственно в областях $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 3$, поэтому концы ее образа должны лежать соответственно в областях $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 0, 2$. Таким образом, отображение Пуанкаре переводит область VI в объединение подмножеств замыканий областей C и $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ и подмножества области IV. Соответствующий переход имеет циклический тип.

Для того чтобы выяснить, как отображается область Vг, рассмотрим прообраз области V при отображении Пуанкаре. Из вышесказанного следует, что этот прообраз ограничен границей области C , кривой σ_f , и границей области Ia. В частности, он содержит область Vг. Поэтому отображение Пуанкаре переводит область Vг в подмножество области V. Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Из предыдущего абзаца следует, что область IIIг содержится в прообразе области V, поэтому она переводится в подмножество области V. Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Рассмотрим теперь образ области III. Пересечение границ области III и области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ переводится в отрезок границы области C . Пересечение границ областей III и Ic переводится в отрезок границы области I. Отрезок кривой σ_f , граничащий с областью III, переводится в отрезок дуги d_{123}^0 . Так как концы этого отрезка кривой σ_f находятся соответственно в областях $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 2, 3$, то концы отрезка дуги d_{123}^0 должны находиться соответственно в областях $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2$. Из этого следует, что образ области III является объединением подмножеств замыканий областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 2$, области II и подмножества области IV. Соответствующий переход имеет циклический тип.

Образы областей II, III, IIIг, IV, VI и Vг схематически изображены на рис. 10. На рис. 10 справа видно, что область IV делится образами областей III и V на три полосы IVa, IVb, и IVc. При этом определим множество IVa как пересечение области IV с образом замыкания области III, множество IVc — как пересечение области IV с образом замыкания области V, а множество IVb — как комплемент множеств IVa и IVc в области IV.

Перейдем сейчас к прообразам областей II–V. При отображении Пуанкаре в обратном направлении времени область II переходит в подмножество области III. При этом отрезок дуги d_{123}^0 , примыкающий к области II, переходит в отрезок кривой σ_f , отрезки границ областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$,

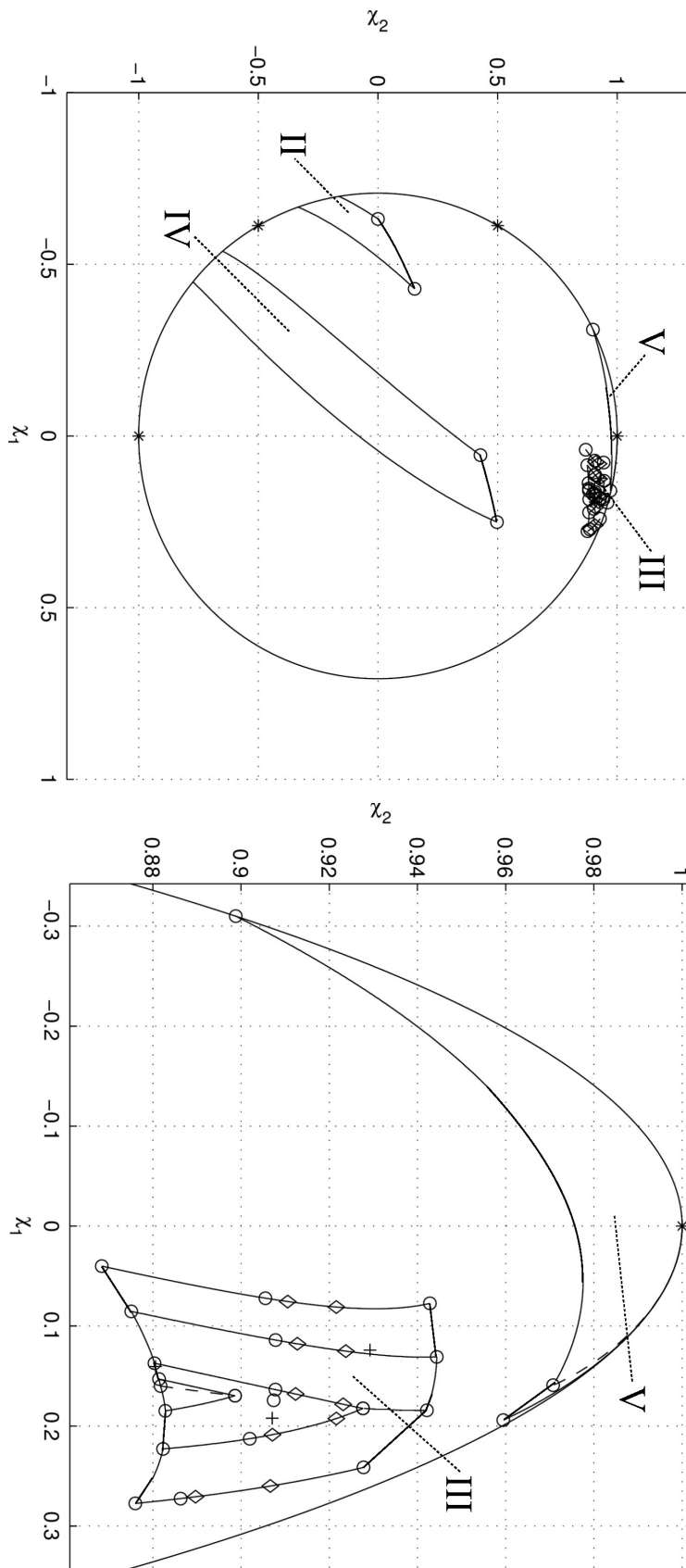


Рис. 9. Области II, III, IV, V

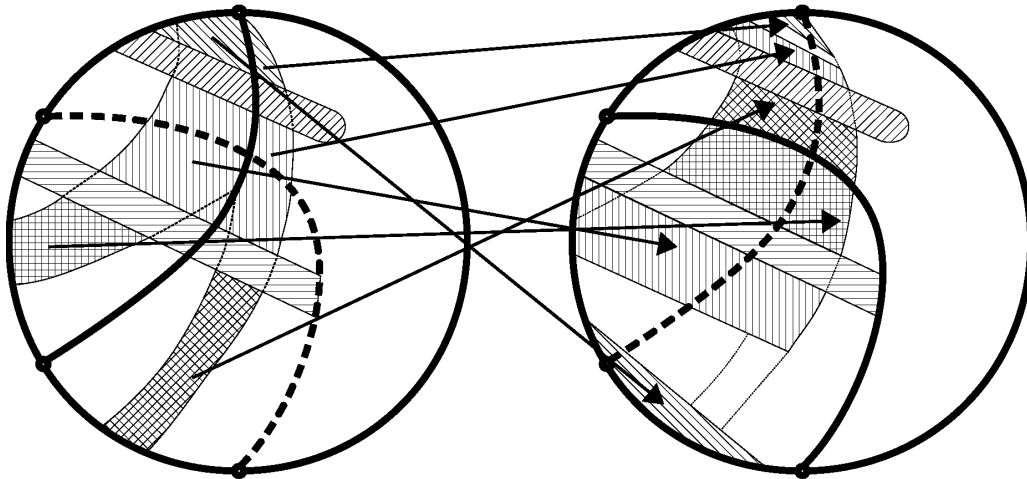


Рис. 10. Образы областей II, III, IV, V

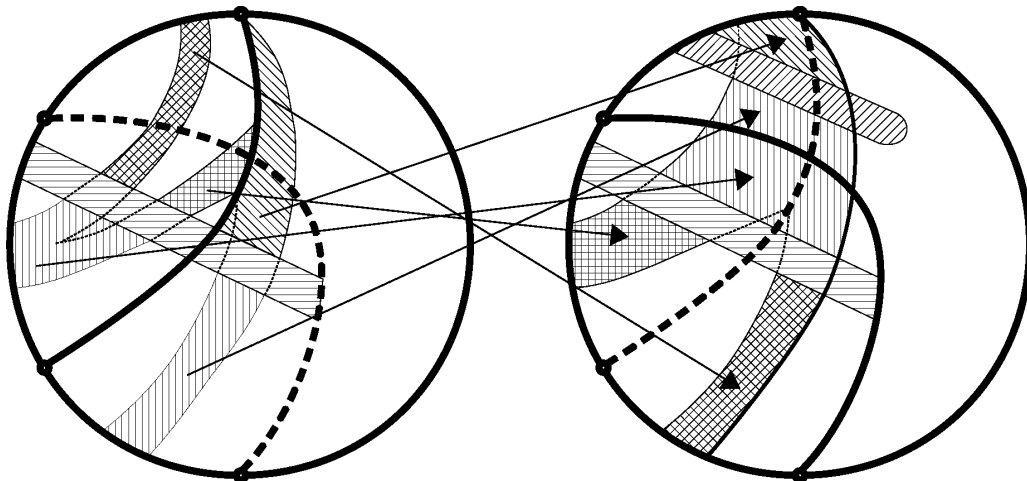


Рис. 11. Прообразы областей II, III, IV, V

$r = 1, 2$, переходят соответственно в отрезки границ областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 2, 3$, а отрезок границы области I_c — в отрезок границы области I_c . Соответствующий переход имеет циклический тип.

Рассмотрим прообраз области IV. Отрезок дуги d_{132}^0 , примыкающий к области II, переходит в отрезок дуги d_{213}^0 , отрезки границ областей C и $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ переходят соответственно в отрезки границ областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 3$, а отрезок границы области I_a — в отрезок границы области I_c . Таким образом, прообраз области IV является объединением замыканий подмножеств областей III и VI и подмножеством области Ib. Обозначим замыкание этого подмножества области VI через Va. Соответствующий переход имеет циклический тип.

Прообразами областей IIIu и IIId являются области IV и II, соответственно, а соответствующие переходы имеют осциллирующий и циклический тип соответственно.

Наконец, прообраз области V был описан выше. Он является объединением областей IIIг и VIг и подмножеством замыкания области Ib. Соответствующий переход имеет осциллирующий тип.

Прообразы областей II, IIId, IIIu, IV и V схематически изображены на рис. 11.

Динамику отображения Пуанкаре на замыканиях областей II–V можно описать ориентированным графом, представленным на рис. 12. При этом выходящие стрелки соответствуют переходам в точки областей $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 0, 1, 2$, откуда они попадают в область притяжения особого режима, а входящие стрелки — переходам из точек областей I или Ib, откуда они в обратном времени

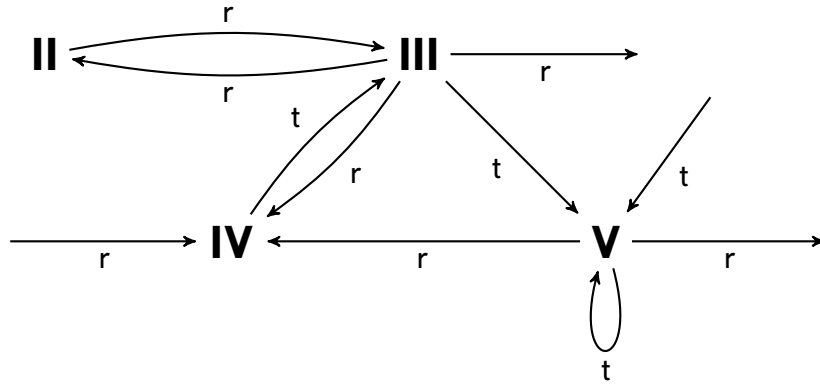


Рис. 12. Граф переходов

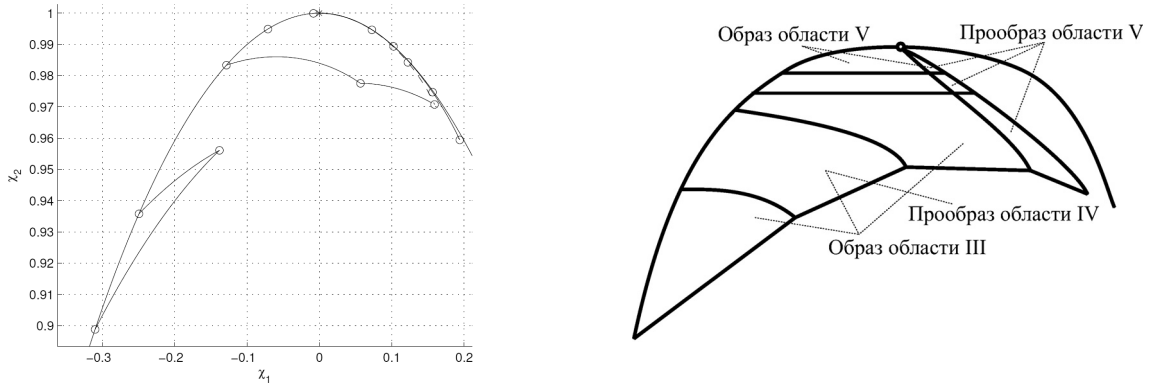


Рис. 13. Динамика на области V

падают в область притяжения неподвижной точки F_R . Буквы t и r соответственно обозначают осциллирующий или циклический тип перехода.

4.8. Разрешение динамики на области V. Рассмотрим пересечения области V с образами областей III и V, с одной стороны, и с прообразами областей IV и V, с другой стороны. Эти пересечения схематически изображены на рис. 13 справа.

Из рис. 13 явствует, что множество V_a является подмножеством замыкания пересечения образа области III с областью V. Поэтому любая точка, приходящая в область V не из области III, уже никогда не может вернуться в одну из областей II, III или IV. Такая точка, если она не лежит в пересечении области V с областями $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 3$, обязательно через конечное число переходов осциллирующего типа попадает в область $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$, из которой через три перехода попадает в область C, т.е. область притяжения особого режима.

Из графа, изображенного на рис. 12, тогда следует, что любая траектория, не попадающая в прямом направлении времени в область притяжения особого режима, а в обратном направлении времени — в область притяжения неподвижной точки F_R , должна бесконечно много раз проходить через замыкание области III. Поэтому при изучении этих траекторий мы можем ограничиться изучением отображения замыкания области III на себя.

Из графа 12 следует, что это отображение может происходить тремя способами: двумя переходами циклического типа через область II, двумя переходами, циклического и осциллирующего типа соответственно, через область IV, и наконец, тремя переходами, осциллирующего, циклического и снова осциллирующего типа соответственно, через области V и IV. Обозначим эти способы отображения замыкания области III на себя через A, B, C, соответственно. Таким образом, любая траектория, не попадающая в прямом направлении времени в область притяжения

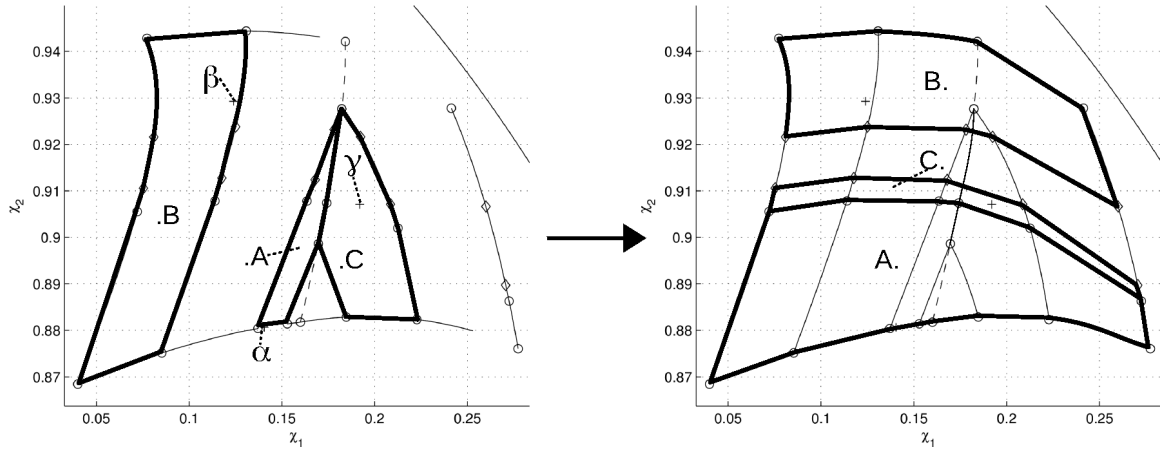


Рис. 14. Динамика на области III

особого режима, а в обратном направлении времени — в область притяжения неподвижной точки F_R , может быть представлена двусторонне бесконечной последовательностью символов A, B, C . Точке замыкания области III, которая в прямом направлении времени претерпевает отображения $i_1, i_2, \dots, i_{n_f} \in \{A, B, C\}$, а в обратном направлении времени — отображения j_1, j_2, \dots, j_{n_b} , где n_f, n_b могут быть конечными или бесконечными, поставим в соответствие последовательность символов $j_{n_b}, j_{n_b-1}, \dots, j_1, i_1, i_2, \dots, i_{n_f}$. Здесь точка отделяет переходы, лежащие в будущем, от переходов, лежащих в прошлом.

С другой стороны, последовательности $j_{n_b}, j_{n_b-1}, \dots, j_1, i_1, i_2, \dots, i_{n_f}$ поставим в соответствие множество точек замыкания области III, которые в прямом направлении времени претерпевают отображения $i_1, i_2, \dots, i_{n_f} \in \{A, B, C\}$, а в обратном направлении времени — отображения j_1, j_2, \dots, j_{n_b} . Таким образом, например, $A.B$ соответствует пересечению замыкания области III с прообразом отображения B и образом отображения A .

Таким образом, множество A совпадает с замыканием области IIId, множество B является образом определенного выше множества IVc, а множество C — образом множества IVa. С другой стороны, множество A является замыканием прообраза области II, множество B — замыканием пересечения прообраза области IV с областью III, а множество C — прообразом множества Va. Множества A, B, C изображены на рис. 14 слева, а множества $A., B., C.$ — справа. Отображения A, B, C переводят первые во вторые.

Заметим, что множества A и C пересекаются с кривой σ_f в одном и том же отрезке, который одновременно является частью их границы. Оба множества также граничат с областью I и с областью $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$. Множество A также граничит с областью $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$, а множество C — с прообразом при отображении Пуанкаре пересечения $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ с областью V. С другой стороны, множество B граничит с областями I и Ib и областями $\Phi^{-r}(C \setminus \tilde{C})$, $r = 1, 3$. Множество B граничит с областью Ib, с областями $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ и C , а также с образом области IVb. Множество C граничит с множеством A по кривой σ_b , а также примыкает к областям $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$ и C и к образу области IVb.

Отметим, что все три области на рис. 14 слева пересекаются со всеми тремя областями на рис. 14 справа. Поэтому возможны сочетания всех типов отображений A, B, C со всеми типами. Более того, каждое из отображений A, B, C имеет неподвижную точку. Эти точки отмечены на рис. 14 крестиками, и обозначены символами α, β и γ для отображений A, B и C соответственно. При этом первая и вторая неподвижные точки соответствуют шестизвенному и четырехзвенному циклу, соответственно, найденными в [10] (см. приложение Б), а третья — девятизвенному циклу (открытому в 2002 г.).

4.9. Разрешение динамики отображений типа B. Как явствует из рис. 15, множества $.AA, .AC, .CA, .CC$ с множеством B не пересекаются. Таким образом, последовательность символов, отвечающая траектории системы, не может содержать подпоследовательности Bij , где

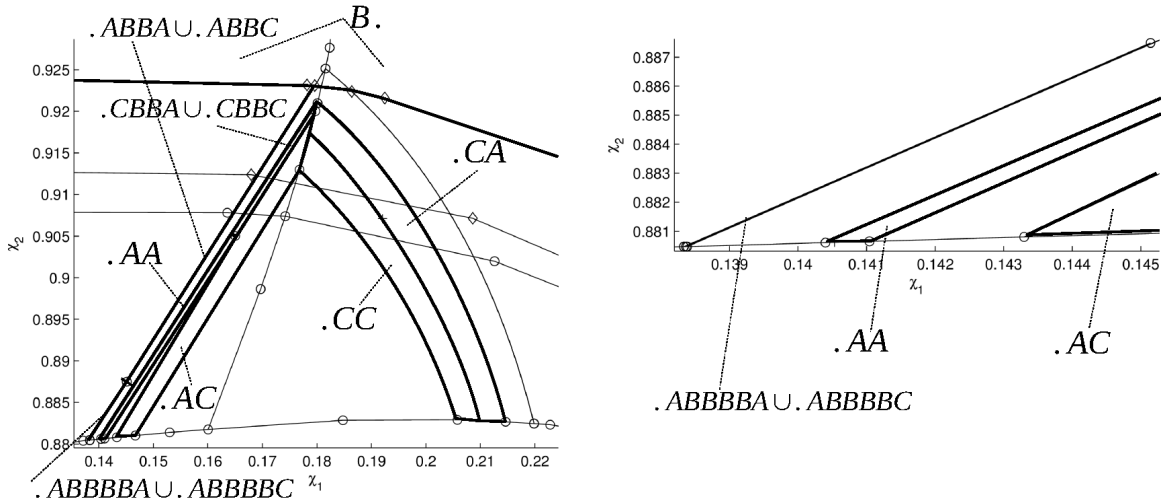


Рис. 15. Динамика с участием отображения B

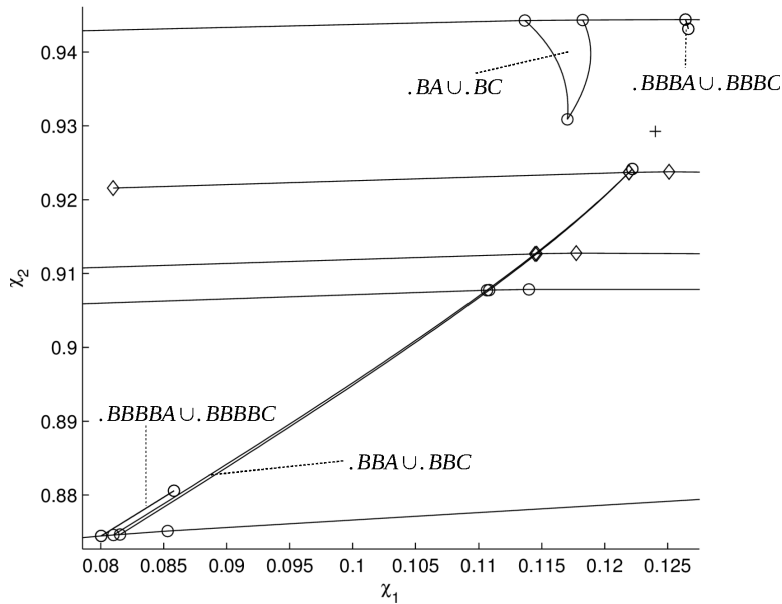


Рис. 16. Динамика с участием отображения B

$i, j \in \{A, C\}$. По индукции из этого следует, что если в последовательности где-либо встречаются подряд два символа из множества $\{A, C\}$, то символ B может встретиться только справа от них.

Множества $.BA$ и $.BC$ являются подмножествами $B.$, а множества $.BBA$ и $.BVC$ пересекаются со всеми тремя множествами $A., B., C.$ Множества $.BBVA$ и $.BBVC$ также являются подмножествами $B.$, а $.BBBVA$ и $.BBBVC$ — подмножествами $A.$ (см. рис. 16). Множества $.ABBBVA$ и $.ABBBVC$ являются подмножествами $A.$, в то время как $.ABBA, .ABBC, .CBBA$ и $.CBBC$ имеют непустое пересечение с множеством $B.$ (см. рис. 15).

Множества $.BABVA, .BABVC, .BCBVA$ и $.BCBVC$ (обозначенные на рис. 17 символом α) являются подмножеством объединения $.BA \cup .BC$ и поэтому также являются подмножеством $B.$ Однако $.BBABVA, .BBABVC, .BBVCBVA, .BBVCBVC$ (обозначенные на рис. 17 символом β) уже являются только подмножествами $A.$, а $.ABBABVA, .ABBABVC, .ABVCBVA, .ABVCBVC$ (обозначенные на рис. 17 символом γ) не пересекаются с $B.$

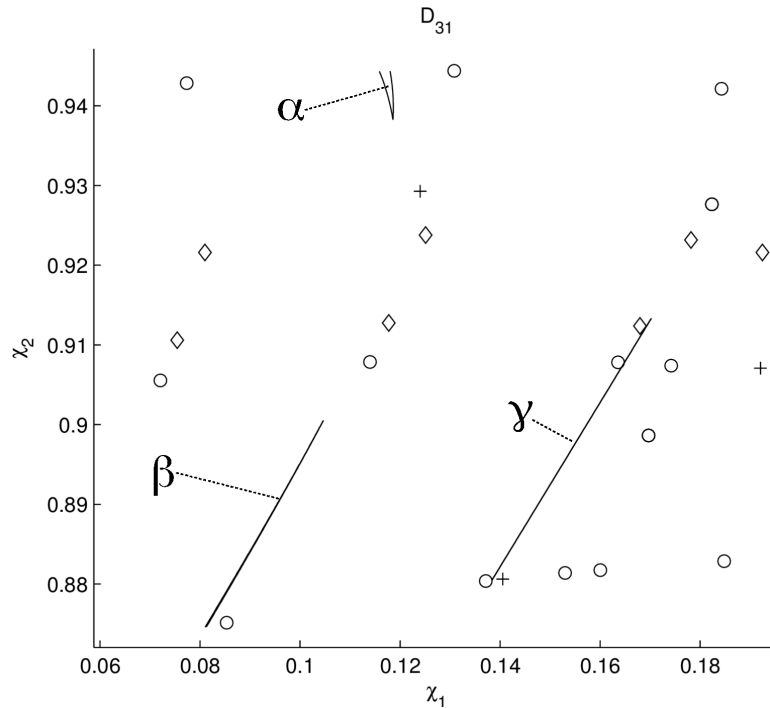


Рис. 17. Динамика с участием отображения B

Из сказанного следует, что если в последовательности встречается подпоследовательность Bi , где $i \in \{A, C\}$, то эта подпоследовательность налево может продолжаться только одним из следующих способов: $\dots AABBBVi$, $\dots ABVjBBi$, $\dots BVi$, где $j \in \{A, C\}$, а многоточие обозначает последовательность любой длины, состоящую из символов A и C .

В частности, бесконечная в обе стороны последовательность либо состоит только из символов B , и в этом случае она соответствует неподвижной точке отображения B , т.е. четырехзвенному циклу, либо она содержит подпоследовательность, состоящую только из символов B и продолжающуюся бесконечно вправо, и подпоследовательность, не содержащую ни одного символа B и продолжающуюся бесконечно влево, а между этими подпоследовательностями расположено максимум 6 символов, либо она не содержит ни одного символа B . Таким образом, если соответствующая траектория динамики на замыкании множества III не является неподвижной точкой отображения B , то она проходит через объединение множеств $A.A$, $A.C$, $C.A$, $C.C$ и далее в обратном направлении времени остается в этом объединении.

4.10. Динамика отображений типа A и C . В дальнейшем мы рассмотрим динамику отображений A и C на объединении множеств $A.A$, $A.C$, $C.A$, $C.C$, а точнее, на замкнутом множестве IIIb , определяемом как объединение множеств $A.A$, $A.C$, $C.A$, $C.C$ и замыкания пересечения области $\Phi^{-2}(C \setminus \tilde{C})$ и области III . Таким образом, множество IIIb граничит с областью I , с областью $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$, с образом множества IVb и с прообразом пересечения области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ с областью V . Множество IIIb изображено на рис. 18 слева и на рис. 19 справа.

Определим отображения $F, F^{-1} : \text{IIIb} \rightarrow D_{31}$ следующим образом. Для точки χ , расположенной в полосе между областью $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ и кривой σ_f , определим $F(\chi)$ как образ χ при отображении A , т.е., при двойном отображении Пуанкаре. При этом оба перехода имеют циклический тип. Для точки χ , расположенной в полосе между прообразом области $\Phi^{-3}(C \setminus \tilde{C})$ и кривой σ_f , определим $F(\chi)$ как образ χ при отображении C , т.е. при тройном отображении Пуанкаре. При этом переходы имеют осциллирующий, циклический, и снова осциллирующий тип соответственно. Отображение F непрерывно продолжается на пересечение множества IIIb с кривой σ_f . Для точки χ , расположенной в полосе между областью I и кривой σ_b , определим $F^{-1}(\chi)$ как прообраз χ при отображении A , т.е. при двойном отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом оба перехода имеют циклический тип. Для точки χ , расположенной в полосе между

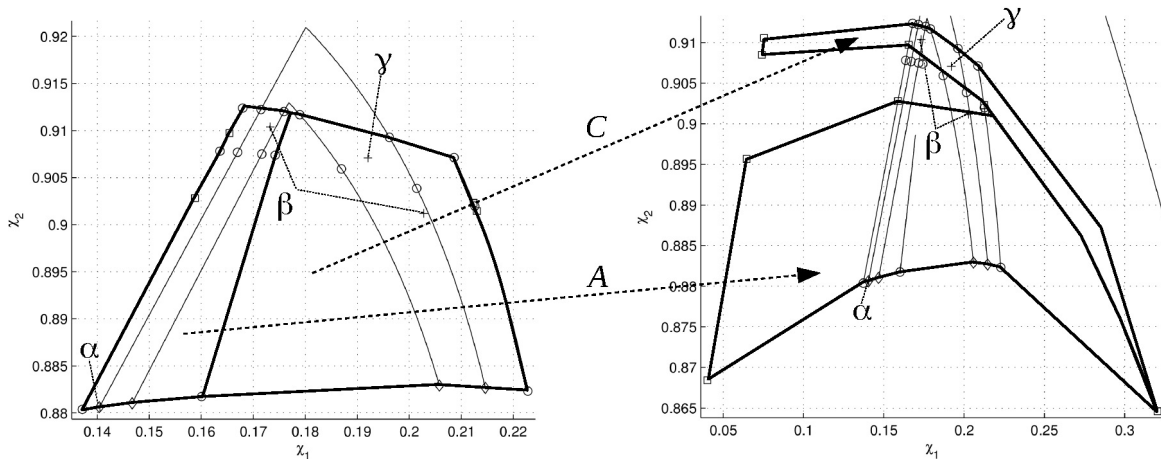


Рис. 18. Образ области IIIb

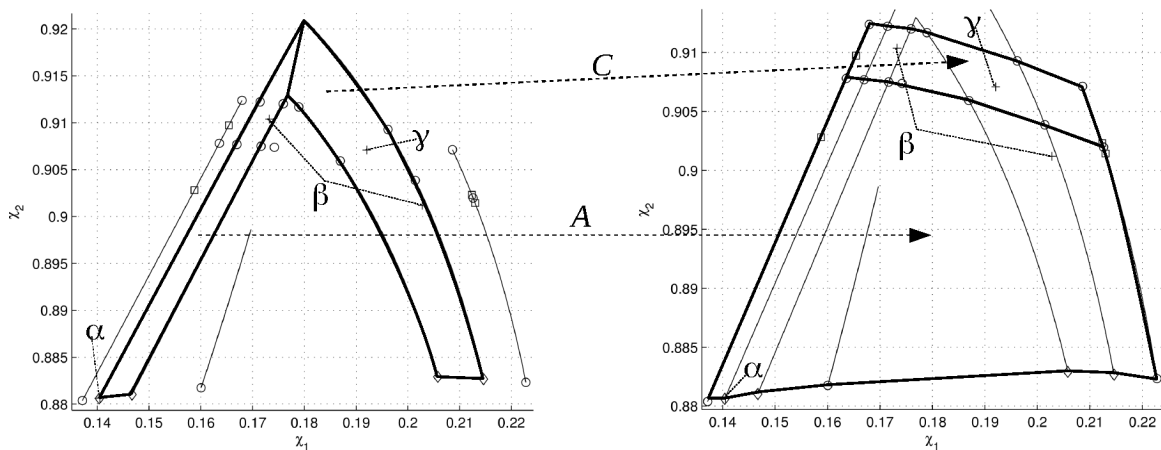


Рис. 19. Прообраз области IIIb

образом множества IVb и кривой σ_b , определим $F^{-1}(\chi)$ как прообраз χ при отображении C , т.е. при тройном отображении Пуанкаре в обратном направлении времени. При этом переходы имеют соответственно осциллирующий, циклический и снова осциллирующий тип. Отображение F^{-1} непрерывно продолжается на пересечение множества IIIb с кривой σ_b .

Отображение F переводит отрезок кривой σ_f в отрезок кривой σ_b , а отображение F^{-1} — отрезок кривой σ_b в отрезок кривой σ_f . При этом образы этих отрезков не пересекаются с множеством IIIb, и пересечения этого множества со своими образами при отображениях F и F^{-1} состоят из двух компонент связности соответственно. Таким образом, топология отображения множества IIIb на себя эквивалентна топологии отображения в классической подкове Смейла. Образы множества IIIb при отображениях F и F^{-1} изображены на рис. 18 и 19.

На рис. 18 и 19 неподвижные точки отображения F отмечены крестиками и обозначены символами α и β . Эти две точки являются неподвижными точками отображений A и C соответственно и были обозначены выше на рис. 14. Крестиками с символом β на рис. 18 и 19 обозначена двухэлементная периодическая траектория отображения F , состоящая из неподвижных точек отображений $A \circ C$ и $C \circ A$. Она соответствует семейству 15-звенных автомодельных циклов, инвариантному относительно элемента порядка 3 группы перестановок S_3 . Все три периодические траектории имеют гиперболический тип. Сжимающие собственные значения приблизительно равны $0,789389405489713$, $-0,195427788394708$, $-0,064093706436160$, а растягивающие — $25,416902415438734$, $-2,553017991174260$, $-73,29685207454$ для неподвижных точек отображений A , C и $A \circ C$ соответственно.

Отметим, что отображение F непрерывно дифференцируемо (и даже алгебраическое) на всюду плотном подмножестве множества IIIb . Это множество точек, которые в прямом направлении времени переводятся многократным применением отображения Пуанкаре во внутренность области C , при этом не проходя через границу области D_{31} . Поэтому любую такую точку можно получить, применяя отображение Пуанкаре в обратном направлении времени к некоторой точке области C , или, что эквивалентно, области $\Phi^{-1}(C \setminus \tilde{C})$.

5. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

В этом разделе мы докажем основную теорему первой части работы о полусопряженности динамики оптимального синтеза в модельной задаче (2.1) с некоторой топологической цепью Маркова (для случая правильного треугольника). Более того, будут найдены оценки на размерности по Хаусдорфу и по Минковскому множества неблуждающих точек и вычислена топологическая энтропия.

5.1. Билипшицевость отображения последования Пуанкаре. Основным инструментом изучения оптимального синтеза задачи (2.1) в предыдущих пунктах выступала теорема 2.1 о переходе к сопряженным переменным, точнее, отображение E . Поэтому для доказательства билипшицевости отображения Φ нам потребуется начать с исследования отображения E на билипшицевость.

В теореме 2.1 было установлено, что в широком классе задач оптимального управления (в том числе в модельной задаче (2.1)) отображение E является (локально) липшицевым и биективным. Вообще говоря, обратное отображение E^{-1} в общей задаче (2.1) может уже не быть липшицевым даже локально.

В следующей лемме мы докажем, что в модельной задаче (2.1) отображение E является локально билипшицевым в окрестности любой точки, не лежащей на A_{ij} .

Лемма 5.1. *Рассмотрим точку $q_0 = (x_0, y_0)$, не лежащую ни в одной из плоскостей A_{ij} (т.е. $x_0 \notin \cup A_{ij}$ или $y_0 \notin \cup A_{ij}$). Тогда существует окрестность точки q_0 , в которой отображение E является билипшицевым.*

Доказательство. По сути доказательство заключается в получении нижней оценки на разность $\mathcal{B}(q_1) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q$ и последующего применения леммы 2.7. Здесь, как обычно, $q_i = (x_i, y_i)$ и $\Delta q = (\Delta x, \Delta y) = q_1 - q_0$.

Пусть $X_0(t)$ и $X_1(t)$ — две произвольные траектории, начинающиеся в точках x_0 и x_1 соответственно. Для произвольного $\lambda \in [0; 1]$ обозначим $X_\lambda(t) = (1 - \lambda)X_0(t) + \lambda X_1(t)$. Тогда для функционала J , определенного в (2.1), выполнено тождество

$$(1 - \lambda)J(X_0) + \lambda J(X_1) - J(X_\lambda) = \lambda(1 - \lambda)J(\Delta X),$$

где $\Delta X(t) = X_1(t) - X_0(t)$. Если же траектории X_0 и X_1 являются оптимальными и $\dot{X}_i(0) = y_i$, $i = 1, 2$, то

$$(1 - \lambda)\mathcal{B}(q_0) + \lambda\mathcal{B}(q_1) - \mathcal{B}(q_\lambda) \geq \lambda(1 - \lambda)J(\Delta X),$$

где $q_\lambda = (1 - \lambda)q_0 + \lambda q_1$. Поскольку левая и правая часть написанного неравенства совпадают при $\lambda = 0$, то продифференцировав их по λ при $\lambda = 0$ получаем

$$\mathcal{B}(q_1) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q \geq J(\Delta X).$$

Осталось оценить снизу $J(\Delta X)$. Простейший способ оценки $J(\Delta X) \geq \mathcal{B}(\Delta q)$ дает плохой результат слишком высокого порядка, так как $\mathcal{B}(\Delta q) \geq A\Delta x^{\frac{5}{2}} + B\Delta y^5$, и лучше оценить в произвольной точке функцию Беллмана, вообще говоря, нельзя.

Однако если точка q_0 не лежит на A_{ij} , то оказывается, что значение функционала $J(\Delta X)$ можно оценить лучше. Пусть для начала точка $q_0 \notin \cup A_{ij} \times A_{ij}$ не является точкой переключения управления. Это означает, что для некоторой достаточно малой окрестности V точки q_0 определено такое время $\tau > 0$, что в течение времени по крайней мере τ все оптимальные траектории из точек $q_1 \in V$ идут с одинаковым управлением u_0 в одной и той же вершине треугольника Ω . Действительно, поднятие оптимальной траектории $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t))$ из $(q_0, E(q_0))$ пересекает в первый раз поверхность переключения \mathcal{S} в некоторой точке $(x', y', \phi', \psi') \neq (q_0, E(q_0))$ в момент времени $t_0 > 0$. Поскольку поверхность \mathcal{S} замкнута, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$,

что если траектория гамильтоновой системы (2.3) начинается в δ -окрестности точки $(q_0, E(q_0))$, то она в первый раз пересечет \mathcal{S} не ранее, чем в $t_0 - \varepsilon$. Осталось отметить, что по теореме 2.1 отображение E непрерывно, поэтому если точка q_1 близка к q_0 , то $(q_1, E(q_1))$ близка к $(q_0, E(q_0))$.

Итак, при $t \in [0; \tau]$ выполнено равенство $\Delta X(t) = \Delta x + t\Delta y$, так как управление на оптимальных траекториях из q_0 и q_1 в течение этого промежутка времени совпадает (если q_1 лежит в окрестности q_0). Поэтому для некоторого $C' > 0$ выполняется

$$\mathcal{B}(q_1) - \mathcal{B}(q_0) - \mathcal{B}'(q_0)\Delta q \geq J(\Delta X) \geq \frac{1}{2} \int_0^\tau (\Delta x + t\Delta y)^2 dt \geq C'(\Delta x^2 + \Delta y^2).$$

Таким образом, после применения леммы 2.7 получаем доказательство утверждения леммы 5.1 для точек q_0 , не лежащих на поверхности переключения. Если же точка q_0 лежит на поверхности переключения, то для оценки $J(\Delta X)$ снизу необходимо сдвинуться по всем оптимальным траекториям из окрестности q_0 на одно и то же небольшое время $t_0 > 0$ и повторить описанное выше доказательство. \square

Таким образом¹, справедливы следующие утверждения:

1. отображение $E : M \rightarrow N$ представляет собой локально липшицев гомеоморфизм, являющийся билипшицевым в окрестности точек, не лежащих на $\cup A_{ij} \times A_{ij}$;
2. отображение $q \mapsto (q, E(q))$ является (локально) билипшицевым гомеоморфизмом $M \rightarrow M_+$;
3. отображение $(q, E(q)) \mapsto E(q)$ представляет собой (локально) липшицев гомеоморфизм $M_+ \rightarrow N$, являющийся билипшицевым в окрестности точек, не лежащих на $\cup A_{ij} \times A_{ij}$.

В том числе все эти отображения сохраняют описанные выше свойства после факторизации по действию g .

Исследуем теперь на билипшицевость отображение последования Пуанкаре Φ . Пусть точка $x \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ не лежит ни в $\cup A_{ij}^{\times 4}/g$, ни на \mathcal{S}_{123}/g . Согласно лемме 2.8, определен образ $\Phi(x) \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$. Предположим, что

$$\Phi(x) \notin \mathcal{S}_{123}/g, \quad \Phi(x) \notin \cup A_{ij}^{\times 4}/g.$$

Тогда проекция траектории гамильтоновой системы (2.3), проходящая через x , пересекает поверхность переключения и в точке x , и в точке $\Phi(x)$ трансверсально. Поэтому отображение $\Phi : \mathcal{S}/g \rightarrow \mathcal{S}/g$ определено в окрестности x в \mathcal{S}/g и является локальным диффеоморфизмом окрестности x в \mathcal{S}/g на ее образ. Отсюда немедленно получаем, что ограничение Φ на $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$ является билипшицевым отображением в окрестности x . Воспользовавшись теперь билипшицевостью отображения E , получаем следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Отображение последования Пуанкаре $\Phi : (\mathcal{S} \cap M_+)/g \rightarrow (\mathcal{S} \cap M_+)/g$ является билипшицевым в окрестности любой такой точки x , что x и $\Phi(x)$ не лежат ни на \mathcal{S}_{123}/g , ни на $\cup A_{ij}^{\times 4}/g$. Свойство локальной билипшицевости сохраняется у отображения Φ , записанного в терминах пространств M/g и N/g с помощью отождествления E .*

Следствие 5.1. *Отображение $F : A.A \cup A.C \cup C.A \cap C.C \rightarrow A.A \cup A.C \cup C.A \cap C.C$, определенное в п. 4.10, является билипшицевым.*

5.2. Условия липшицевой гиперболичности. Изучим подробно динамику отображения F . Выберем (как было показано в предыдущем пункте) непересекающиеся прямоугольные окрестности B_1, B_2, B_3, B_4 множеств $A.A, A.C, C.A, C.C$ соответственно и координаты (X_i, Y_i) на B_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Обозначим через F_{ij} ограничение F на множество тех точек B_i , которые при одной итерации F попадают в B_j , т.е. $F_{ij} = F|_{B_i \cap F^{-1}(B_j)}$. Отображения F_{ij} определены в соответствии с графом $\tilde{\Gamma}$ (см. рис. 20): отображение F_{ij} определено, если в графе $\tilde{\Gamma}$ имеется стрелка, соединяющая соответствующие вершины.

¹На множествах M, N и M_+ естественным образом определены структуры метрических пространств, индуцированные из объемлющего линейного пространства $\mathcal{M} = T^*M = M \times N$. Однако множество M_+ не является, вообще говоря, гладким подмногообразием \mathcal{M} .

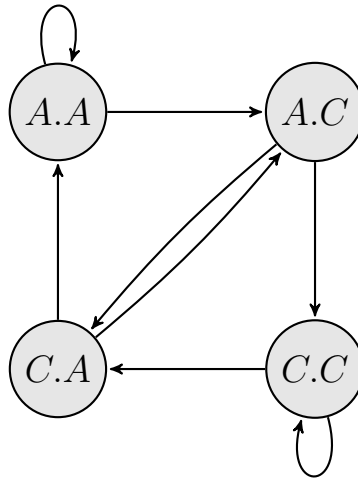


Рис. 20. Граф $\tilde{\Gamma}$

F	\underline{u}_x	\overline{u}_x	\overline{u}_y	\underline{v}_y	\overline{v}_y	\overline{v}_x	F^{-1}	\underline{y}_v	\overline{y}_v	\overline{y}_u	\underline{x}_u	\overline{x}_u	\overline{x}_v
F_{11}	21	25,6	0,57	0,739	0,792	0,15	F_{11}^{-1}	1,26	1,36	0,098	0,039	0,049	0,37
F_{31}	20,3	22,4	0,37	0,4	0,48	0,14	F_{31}^{-1}	2,09	2,51	0,16	0,0444	0,049	0,045
F_{12}	22,5	34	3,1	0,72	0,785	0,5	F_{12}^{-1}	1,342	1,384	0,0195	0,029	0,045	0,18
F_{32}	21	25	1,9	0,4	0,48	0,07	F_{32}^{-1}	2,1	2,5	0,0061	0,04	0,048	0,2
F_{23}	3,08	3,28	0,06	0,07	0,18	0,06	F_{23}^{-1}	5,6	14,1	0,25	0,305	0,323	0,171
F_{43}	3,11	3,28	0,09	0,176	0,019	0,0591	F_{43}^{-1}	5,3	5,66	0,0094	0,303	0,323	0,151
F_{24}	2,35	2,9	0,75	0,1	0,22	0,1	F_{24}^{-1}	5	14,4	0,4	0,37	0,394	1,41
F_{44}	2,3	2,9	0,8	0,175	0,21	0,1	F_{44}^{-1}	4,6	5,6	0,21	0,364	0,381	1,55

Таблица 1. Константы \overline{u}_x , \underline{u}_x и т. д. для отображений F и F^{-1}

	B_1	B_2	B_3	B_4
c	0,00743	0,0225	0,022	0,0488
d	0,146	0,321	0,103	0,374

Таблица 2. Константы c_i и d_i отображений F и F^{-1} для прямоугольников B_i

F	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
λ_{σ}^-	0,797	0,249	0,0748	0,0238	0,0201	0,0883
λ'_{σ}^-	0,734	0,137	0,0178	0,00462	0,0304	0,0271
α_{σ}^-	0,739	0,701	0,643	0,695	0,674	0,673

Таблица 3. Константы λ_{σ}^- , λ'_{σ}^- и α_{σ}^- для отображения F

F^{-1}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6
λ_{σ}^+	0,0484	0,46	0,000785	0,00829	0,000403	0,0162
λ'_{σ}^+	0,0386	0,288	0,000341	0,00294	0,0000864	0,0117
α_{σ}^+	0,931	0,625	0,895	0,822	0,835	0,927

Таблица 4. Константы λ_{σ}^+ , λ'_{σ}^+ и α_{σ}^+ для отображения F^{-1}

Пусть $U_{ij}(X_i, Y_i)$ и $V_{ij}(X_i, Y_j)$ обозначают первую и вторую координаты образа $F_{ij}(X_i, Y_i)$ в прямоугольнике B_j соответственно:

$$F_{ij}(X_i, Y_i) = (U_{ij}(X_i, Y_i), V_{ij}(X_i, Y_j)).$$

Согласно утверждению предыдущего пункта отображения F_{ij} удовлетворяют следующим неравенствам, выполненным для любой точки $(X_i, Y_i) \in B_i \cap F^{-1}(B_j)$ и для любого допустимого смещения $(\Delta X, \Delta Y)$:

$$\begin{cases} \underline{u}_x^{ij} |\Delta X| \leq \left| \begin{array}{l} U_{ij}(X_i + \Delta X, Y_i) - U_{ij}(X_i, Y_i) \\ U_{ij}(X_i, Y_i + \Delta Y) - U_{ij}(X_i, Y_i) \end{array} \right| \leq \overline{u}_x^{ij} |\Delta X|, \\ \underline{v}_y^{ij} |\Delta Y| \leq \left| \begin{array}{l} V_{ij}(X_i, Y_i + \Delta Y) - V_{ij}(X_i, Y_i) \\ V_{ij}(X_i + \Delta X, Y_i) - V_{ij}(X_i, Y_i) \end{array} \right| \leq \overline{v}_y^{ij} |\Delta Y|, \end{cases}$$

где \overline{u}_x^{ij} , \underline{u}_x^{ij} и т. д. обозначают положительные константы (их точные значения приведены в левой таблице 1¹). Более того, обратные отображения F_{ij}^{-1} удовлетворяют аналогичным соотношениям с константами \overline{x}_u^{ij} , \underline{x}_u^{ij} и т. д., точные значения которых приведены в правой таблице 1.

Отметим, что точные значения констант \overline{u}_x , \underline{u}_x и т. п. зависят от выбора координат X_i и Y_i . Данные в таблице 1 приведены для X_i и Y_i , имеющих следующий явный вид:

$$\begin{aligned} X_1 = X_3 &= 3636,746266824261\chi_1 - 4481,163862258486\chi_2 + 3855,150222649458\chi_1^2 - \\ &- 9508,946041171987\chi_1\chi_2 + 5858,268250499643\chi_2^2 + 1403,048095297728\chi_1^3 - \\ &- 5062,144152379995\chi_1^2\chi_2 + 6220,813348898283\chi_1\chi_2^2 - 2553,628003178778\chi_2^3, \\ X_2 = X_4 &= 15(-434,858450049792\chi_1 - 1178,182552029670\chi_2 - 120,018213318585\chi_1^2 + \\ &+ 1034,238125839267\chi_1\chi_2 + 1197,949813776455\chi_2^2 + 294,581582485282\chi_1^3 - \\ &- 56,750230435401\chi_1^2\chi_2 - 570,219924579354\chi_1\chi_2^2 - 401,871126962896\chi_2^3), \\ Y_1 = Y_2 &= 3,239086633898\chi_1 - 908,305710474105\chi_2 - 19,706205900010\chi_1^2 - \\ &- 2,212072200027\chi_1\chi_2 + 1018,022649246405\chi_2^2 + 6,183323553959\chi_1^3 + \\ &+ 19,428876703623\chi_1^2\chi_2 - 1,286781359343\chi_1\chi_2^2 - 379,719994048579\chi_2^3, \\ Y_3 = Y_4 &= 7714,46037676461\chi_1 + 57227,20693518666\chi_2 - 1394,23893421762\chi_1^2 - \\ &- 16419,64632698288\chi_1\chi_2 - 61359,76468135373\chi_2^2 + 68,70577470503\chi_1^3 + \\ &+ 1493,59693767978\chi_1^2\chi_2 + 8734,94321423633\chi_1\chi_2^2 + 21935,18377642208\chi_2^3. \end{aligned}$$

Поскольку прямоугольники B_i образуют предмарковское разбиение множества² $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ относительно отображений F_{ij} , мы можем воспользоваться техникой исследования липшицевых гиперболических динамических систем, разработанной в [27]. Основным условием применимости этой техники для отображения F является условие липшицевой гиперболичности.

Определение 5.1. Будем говорить, что липшицева динамическая система на предмарковском разбиении $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ удовлетворяет условиям липшицевой гиперболичности, если выполнены следующие условия:

1. существуют такие неотрицательные константы $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, что выполняются неравенства

$$\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij} > 0, \quad \frac{c_i \overline{v}_y^{ij} + \overline{v}_x^{ij}}{\underline{u}_x^{ij} - c_i \overline{u}_y^{ij}} \leq c_j \text{ для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \tilde{\Gamma};$$

2. константы $c_i \geq 0$ можно выбрать так, что для каждого простого цикла³ $\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k i_1)$, $i_r \in \{1, 2, 3, 4\}$, выполняется условие

$$\lambda_\sigma^- = \lambda_{i_1 i_2}^- \lambda_{i_2 i_3}^- \dots \lambda_{i_k i_1}^- < 1, \quad (5.1)$$

¹Численные значения, приведенные во всех таблицах, выписаны с округлением в нужную сторону, в зависимости от знаков неравенств, в которых они участвуют.

²За точным определением предмарковского разбиения мы отсылаем читателя к [27].

³Цикл (i_0, \dots, i_N, i_0) в ориентированном графе $\tilde{\Gamma}$, не содержащий повторяющихся вершин, будем называть простым.

где

$$\lambda_{ij}^- = \frac{u_x^{ij} \overline{v_y}^{ij} + \overline{u_y}^{ij} \overline{v_x}^{ij}}{u_x^{ij} - c_i \overline{u_y}^{ij}}. \quad (5.2)$$

Отображение F удовлетворяет условиям липшицевой гиперболичности на $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ с константами c_i , приведенными в таблице 2. Действительно, условие 1 проверяется непосредственной подстановкой, а условие 2 проверяется также прямой подстановкой по всем простым циклам (которых всего шесть: $\sigma_1 = (A.A; A.A)$, $\sigma_2 = (C.C; C.C)$, $\sigma_3 = (A.A; A.C; C.A; A.A)$, $\sigma_4 = (C.C; C.A; A.C; C.C)$, $\sigma_5 = (A.A; A.C; C.C; C.A; A.A)$ и $\sigma_6 = (A.C; C.A; A.C)$). Численные значения произведений (5.1) для отображения F приведены в таблице 3.

В дальнейшем для оценок размерностей нам еще потребуются константы α_σ^- и

$$\lambda_\sigma^- = \lambda_{i_1 i_2}^- \lambda_{i_2 i_3}^- \cdots \lambda_{i_k i_1}^- ,$$

где

$$\lambda_{ij}^{-'} = \frac{u_x^{ij} \overline{v_y}^{ij} - \overline{u_y}^{ij} \overline{v_x}^{ij}}{u_x^{ij} + c_i \overline{u_y}^{ij}} \leq \lambda_{ij}^- , \quad \alpha_\sigma^- = \frac{\ln \lambda_\sigma^-}{\ln \lambda_\sigma^{-'}}. \quad (5.3)$$

Значения констант α_σ^- и $\lambda_\sigma^{-'}$ также приведены в таблице 3.

Из липшицевой гиперболичности F следует, что $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ является предмарковским разбиением также и для обратного отображения F^{-1} (см. [27]). Отметим, что в общем случае, вообще говоря, из липшицевой гиперболичности F не следует, что обратное отображение F^{-1} удовлетворяет условиям 1 и 2 с какими-либо константами $d_i \geq 0$. Однако в этом конкретном случае такие константы d_i для отображения F^{-1} действительно существуют (их точные значения приведено в таблице 2).

Таким образом доказана, следующая лемма.

Лемма 5.3. *Отображения F и F^{-1} обладают предмарковским разбиением $\mathcal{B} = \sqcup_i B_i$ и удовлетворяют на нем условиям липшицевой гиперболичности с положительными константами c_i и d_i , $i = 1, 2, 3, 4$, соответственно, значения которых приведены¹ в таблице 2.*

Отметим, что для отображения F^{-1} константы

$$\lambda_\sigma^+ = \lambda_{i_1 i_2}^+ \lambda_{i_2 i_3}^+ \cdots \lambda_{i_k i_1}^+ , \quad \lambda_\sigma^+ = \lambda_{i_1 i_2}^+ \lambda_{i_2 i_3}^+ \cdots \lambda_{i_k i_1}^+$$

и α_σ^+ , приведенные в таблице 4, вычислены по формулам

$$\lambda_{ji}^{+'} = \frac{y_v^{ji} \overline{x_u}^{ji} - \overline{y_u}^{ji} \overline{x_v}^{ji}}{\overline{y_v}^{ji} + d_j \overline{x_v}^{ji}} \leq \lambda_{ji}^+ = \frac{y_v^{ji} \overline{x_u}^{ji} + \overline{y_u}^{ji} \overline{x_v}^{ji}}{\overline{y_v}^{ji} - d_j \overline{x_v}^{ji}} , \quad \alpha_\sigma^+ = \frac{\ln \lambda_\sigma^+}{\ln \lambda_\sigma^{+'}}. \quad (5.4)$$

5.3. Сопряженность с топологической марковской цепью. Для доказательства того факта, что липшицева гиперболическая динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ полусопряжена с двусторонней топологической марковской цепью Σ_Γ , мы воспользуемся теоремой, доказанной в [27] (через $S(F)$ обозначено множество точек $x \in \mathcal{B}$, образ которых $F^n(x)$ лежит в \mathcal{B} при всех $n \in \mathbb{Z}$).

Теорема 5.1 (см. [27, Theorem 1]). *Предположим, что липшицева динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ обладает предмарковским разбиением $\mathcal{B} = \sqcup_{i=1}^N B_i$ с ориентированным графом Γ . Предположим также, что отображение F обратимо²:*

$$\underline{u_x}^{ij} \underline{v_y}^{ij} - \overline{u_y}^{ij} \overline{v_x}^{ij} > 0 \quad \text{для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma,$$

и для F и F^{-1} выполнены условия липшицевой гиперболичности³ с константами c_i и d_i соответственно, причем $c_i d_i < 1$ для $1 \leq i \leq N$. Тогда существует гомеоморфизм $\Psi_\Gamma : \Sigma_\Gamma \rightarrow S(F)$, полусопрягающий F и левый марковский сдвиг:

$$\Psi_\Gamma \circ l = F \circ \Psi_\Gamma.$$

¹Явные значения констант c_i и d_i были найдены на компьютере с помощью несложного алгоритма, который мы не считаем необходимым публиковать, так как заинтересованный читатель может убедиться в верности вычислений констант c_i и d_i при помощи прямой подстановки.

²Написанное ниже условие гарантирует обратимость F .

³Согласно определению 5.1.

Более того, множество неблуждающих точек $NW(F)$ содержится в $S(F)$, а если граф Γ сильно связан, то $NW(F)$ и $S(F)$ совпадают.

В качестве прямого следствия этой теоремы мы получаем лемму о структуре множества неблуждающих точек исследуемого отображения F .

Лемма 5.4. *Липшицева динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ полусопряжена с левым сдвигом l на топологической марковской цепи $\Sigma_{\tilde{\Gamma}}$ бесконечных в обе стороны путей на графе $\tilde{\Gamma}$ (см. рис. 20), т.е. существует такое непрерывное вложение*

$$\Psi_{\tilde{\Gamma}} : \Sigma_{\tilde{\Gamma}} \rightarrow \mathcal{B},$$

что $F \circ \Psi_{\tilde{\Gamma}} = \Psi_{\tilde{\Gamma}} \circ l$. Более того,

$$S(F) = NW(F) = \Psi_{\tilde{\Gamma}}(\Sigma_{\tilde{\Gamma}}).$$

Доказательство. Проверка условий теоремы для исследуемого отображения F тривиальна, поскольку константы c_i и d_i уже найдены (см. лемму 5.3), а сильная связность графа $\tilde{\Gamma}$ очевидна. \square

5.4. Оценка размерностей. В связи с тем, что отображение E является билипшицевым в окрестности точек \mathcal{B} по лемме 5.1, мы можем говорить о размерности по Хаусдорфу (или по Минковскому) множества неблуждающих точек $NW(F)$, так как билипшицевы отображения не меняют размерностей множеств (см. [19]).

Для оценки размерностей по Хаусдорфу и Минковскому множества неблуждающих точек $NW(F)$ мы воспользуемся еще одной теоремой из [27]. Для ее использования достаточно знать только липшицевы константы $\overline{u_x}$, $\underline{u_x}$ и т. д. и константы c_i и d_i .

Теорема 5.2 (см. [27, Theorem 5]). *Предположим, что липшицева динамическая система $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ обладает предмарковским разбиением $\mathcal{B} = \sqcup_{i=1}^N B_i$ с ориентированным графом Γ . Предположим также, что F обратимо:*

$$\underline{u_x}^{ij} \underline{v_y}^{ij} - \overline{u_y}^{ij} \overline{v_x}^{ij} > 0 \quad \text{для каждой стрелки } (ij) \text{ в графе } \Gamma,$$

и для F и F^{-1} выполнены условия липшицевой гиперболичности с константами c_i и d_i соответственно, причем $c_i d_i < 1$ для $1 \leq i \leq N$. Тогда если граф Γ сильно связан, то

$$(s'_- + s'_+) \alpha \leq \dim_H NW(F) \leq \overline{\dim}_B NW(F) \leq s_- + s_+.$$

Константы s_- , s'_- , s_+ и s'_+ выбираются так, чтобы спектральный радиус соответствующей матрицы равнялся 1:

$$\rho((\Lambda_-)_{s_-}) = 1, \quad \rho((\Lambda'_-)_{s'_-}) = 1, \quad \rho((\Lambda_+)_{s_+}) = 1, \quad \rho((\Lambda'_+)_{s'_+}) = 1,$$

где $\Lambda_{\pm} = (\lambda_{ij}^{\pm})$, $\Lambda'_{\pm} = (\lambda_{ij}^{\pm'})$ и $A_s = (a_{ij}^s)$ для $A = (a_{ij})$, $a_{ij} \geq 0$, а

$$\alpha = \min_{\sigma} \{ \min \{ \alpha_{\sigma}^-, \alpha_{\sigma}^+ \} \}$$

по всем простым циклам σ в графе Γ (значения α_{σ}^{\pm} определены в (5.3) и (5.4)).

Здесь, если (ij) стрелка в Γ , то λ_{ij}^- и $\lambda_{ij}^{-'}$ задаются формулами (5.2) и (5.3), а λ_{ji}^+ и $\lambda_{ji}^{+'}$ — формулами (5.4), и $\lambda_{ij}^- = \lambda_{ij}^{-'} = \lambda_{ji}^+ = \lambda_{ji}^{+'} = 0$ в противном случае.

Вычисленные на компьютере значения констант s_{\pm} , s'_{\pm} и α для исследуемого отображения F приведены в (5.5):

$$s_+ = 0,408, \quad s'_+ = 0,327, \quad s_- = 0,876, \quad s'_- = 0,593. \quad (5.5)$$

Отметим, что решение уравнения $\rho(\Lambda_s) = 1$ по s на первый взгляд представляется весьма нетривиальным, однако существование и единственность его решения, а также элементарный численный метод его нахождения с любой наперед заданной точностью дает следующее утверждение о строгом убывании функции $\rho(\Lambda_s)$ по s .

¹Для получения матрицы A_s необходимо каждый элемент неотрицательной матрицы A возвести в степень $s > 0$. Если $s = 0$, то A_0 — это $(0, 1)$ -матрица, с единицами в тех местах, где у матрицы A стоят ненулевые числа.

Предложение 5.1 (см. [27]). Пусть $\Lambda = (\lambda_{ij})$ — примитивная $N \times N$ матрица с неотрицательными коэффициентами. Если коэффициенты λ_{ij} удовлетворяют условию (5.1) сжатия вдоль простых циклов, то функция $\rho(\Lambda_s)$ непрерывна и строго убывает по s , причем $\rho(\Lambda_0) > 1$ и $\rho(\Lambda_s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$.

Численные значения коэффициентов α_σ^\pm для F и F^{-1} по всем простым циклам приведены в таблицах 3 и 4 соответственно. Поэтому

$$\alpha = \min_{\sigma} \{ \min \{ \alpha_\sigma^-, \alpha_\sigma^+ \} \} = 0,625.$$

Лемма 5.5. Размерности по Хаусдорфу и по Минковскому множества $NW(F)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0,575 \leq \dim_H NW(F) \leq \overline{\dim}_B NW(F) \leq 1,284. \quad (5.6)$$

5.5. Односторонняя марковская цепь. Во второй части данной работы, посвященной общим гамильтоновым системам с разрывной правой частью, нам потребуется описание множества точек, не сходящихся к полусобым циклам Z_{ij} в прямом направлении времени безотносительно рассмотрения асимптотики траектории в обратном направлении времени.

Очевидно, что точки $Q^k \cap D_{31}$, $k = 1, 3$, под действием отображения Пуанкаре Φ не притягиваются к Z_{13} в прямом времени (так как $(ij)\Phi^2(Q^k \cap D_{ij}) = Q^k \cap D_{ij}$, $k = i, j$, по лемме 2.10). Более того в статье [10] доказано, что дифференциал отображения Пуанкаре в объемлющем факторпространстве $\Phi : \mathcal{S}/g \rightarrow \mathcal{S}/g$ имеет ровно одно собственное значение, по модулю меньшее 1. Следовательно, по теореме Адамара—Перрона (см. [12]) на поверхности \mathcal{S}/g определено гладкое погруженное одномерное устойчивое многообразие Q^k точек, стремящихся к $Q^k \cap D_{ij}$, $k = i, j$ под действием отображения Φ . Поднимаясь в расширенное фазовое пространство $\mathcal{M} = T^*\mathcal{M}$, мы немедленно получаем, что траектории гамильтоновой системы (2.3), начинающиеся в точках прообраза $\pi^{-1}(Q^k)$, попадают в начало координат за конечное время и, следовательно, по теореме 2.1 являются оптимальными. Таким образом, на D_{31} определены два одномерных липшицевых¹ погруженных подмногообразия $Q^k \supset Q^k \cap D_{13}$, $k = 1, 3$, таких, что для любой точки $z \in Q^k$ образы $\Phi^n(z)$ не стремятся к полусобым циклам Z_{ij} при $n \rightarrow \infty$.

Помимо Q^k на D_{31} , $k = 1, 3$, присутствует множество $\tilde{\mathcal{Y}}$ таких точек, что их образы также не стремятся к полусобым циклам Z_{ij} . Множество $\tilde{\mathcal{Y}}$ имеет фрактальную природу: оно состоит из объединения множеств $i_0.i_1i_2\dots$, где i_k обозначают один из символов A или C . Структура этих множеств описана в [27, лемма 4] — каждое такое множество представляет собой липшицеву кривую из $\text{Lip}_{d_j}(Y_j \rightarrow X_j)$ в соответствующем прямоугольнике $B_j \supset i_0.i_1$. Рассмотрим естественное отображение Ψ_Γ^+ из $\tilde{\mathcal{Y}}$ в одностороннюю марковскую цепь Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на графе $\tilde{\Gamma}$. Прообразом каждой точки из Σ_Γ^+ является соответствующая липшицева кривая $i_0.i_1i_2\dots$. Очевидно, что по построению отображение Ψ_Γ^+ полусопрягает левый сдвиг l на Σ_Γ^+ и отображение F , т.е. $l \circ \Psi_\Gamma^+ = \Psi_\Gamma^+ \circ F$. Отображение Ψ_Γ^+ является непрерывным в силу [27, замечание 1]. Оценки на размерность множества $\tilde{\mathcal{Y}}$ так же найдены в [27]²:

$$1 + \alpha_+ s'_+ \leq \dim_H \tilde{\mathcal{Y}} \leq \overline{\dim}_B \tilde{\mathcal{Y}} \leq 1 + s_+.$$

где

$$\alpha_+ = \min_{\sigma} \frac{\ln \lambda_\sigma^+}{\ln \lambda_\sigma^{+'}}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

¹Вообще говоря, на D_{31} нет гладкой структуры, сохраняемой отображением E , поэтому мы всегда используем лишь липшицеву структуру на D_{31} , которая уважается отображением E (см. теорему 2.1) и лемму 5.1.

²К сожалению, эта оценка в [27] не сформулирована в виде отдельного утверждения. Подробности см. в доказательстве теоремы 5 из [27]: выписанные оценки на размерности $\dim_H \tilde{\mathcal{Y}}$ и $\overline{\dim}_B \tilde{\mathcal{Y}}$ суть в точности оценки на размерности множеств Q_i^\pm , полученные в этом доказательстве.

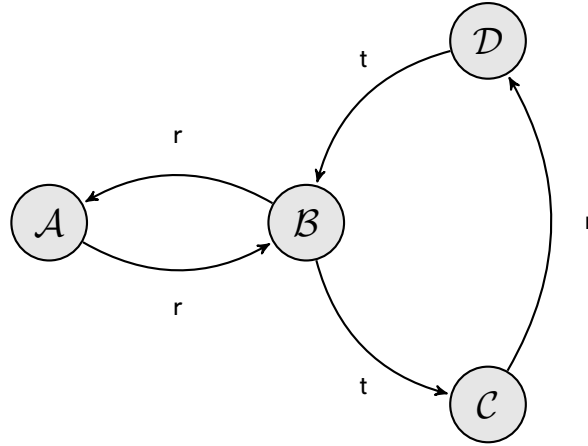


Рис. 21. Граф $\widehat{\Gamma}$. Буквы r и t не важны для графа $\widehat{\Gamma}$, но участвуют в построении графа Γ в определении 5.2

Лемма 5.6.

1. На диске D_{31} определено одномерное погруженное липшицево многообразие \mathcal{Q}^2 точек, которые стремятся в прямом времени под действием отображения последования Пуанкаре Φ к точкам пересечения четырехзвенного цикла \mathcal{Q}^2 с S/g .
2. На диске D_{31} определено множество $\widetilde{\mathcal{Y}} \subset \mathcal{B}$, обладающее следующими свойствами: (1) для любой точки $z \in \widetilde{\mathcal{Y}}$ итерации $F^n(z)$ не стремятся к полуособым циклам Z_{ij} при $n \rightarrow +\infty$; (2) ограничение отображения F на $\widetilde{\mathcal{Y}}$ полусопряжено с помощью непрерывного отображения Ψ_{Γ}^+ с левым сдвигом на односторонней топологической цепи Маркова Σ_{Γ}^+ , причем прообраз любой точки из Σ_{Γ}^+ есть одномерная липшицева кривая в \mathcal{B} ; (3) размерности множества $\widetilde{\mathcal{Y}}$ удовлетворяют оценкам

$$1,204 \leq \dim_H \widetilde{\mathcal{Y}} \leq \overline{\dim}_B \widetilde{\mathcal{Y}} \leq 1,408.$$

5.6. Фрактальная структура отображения Пуанкаре. Отображение F , конечно, является вспомогательным. Нашей основной целью является исследование отображения последования Пуанкаре Φ . Для формулировки основной теоремы об отображении Φ нам потребуется следующий граф Γ .

Определение 5.2. Изображенная схема графа $\widehat{\Gamma}$ на рис. 21 является прототипом ориентированного графа Γ . Граф Γ получается следующим образом. Множество его вершин есть прямое произведение множества вершин $\widehat{\Gamma}$ и множества упорядоченных пар чисел (ij) , принимающих значения $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$. Поэтому Γ имеет 24 вершины $\{A_{12}, A_{13}, \dots, D_{32}\}$. Из вершины A_{ij} графа Γ ведет стрелка в вершину $B_{i'j'}$ тогда и только тогда, когда $j = i'$ и $i \neq j'$, т.е. $\{i, j = i', j'\} = \{1, 2, 3\}$. В знак этого факта стрелка помечена значком r . Из вершины A_{ij} графа Γ ведет стрелка в вершину $C_{i'j'}$ тогда и только тогда, когда $i' = j$ и $j' = i$. В знак этого факта стрелка помечена значком t . Стрелки $B_{ij} \rightarrow A_{i'j'}$, $C_{ij} \rightarrow D_{i'j'}$ и $D_{ij} \rightarrow A_{i'j'}$ строятся аналогичным образом. Других стрелок в графе Γ нет.

Отметим, что граф Γ состоит из двух несвязных идентичных компонент Γ_{\pm} , каждая из которых сильно связна и имеет одну компоненту в спектральном разложении¹.

Теорема 5.3. Динамика отображения последования Пуанкаре $\Phi : (S \cap M_+)/g \rightarrow (S \cap M_+)/g$ описывается следующим образом.

1. Множество неблуждающих точек $\mathcal{Y} = \text{NW}(\Phi) \subset (S \cap M_+)/g$ отображения Φ гомеоморфно топологической цепи Σ_{Γ} бесконечных в обе стороны путей на графе Γ с помощью

¹Граф имеет одну компоненту в спектральном разложении, если наибольший общий делитель длин его простых циклов равен 1 (см. [12]).

некоторого отображения $\widehat{\Psi}_\Gamma$. Более того, отображение $\widehat{\Psi}_\Gamma$ сопрягает Φ и левый сдвиг l на Σ_Γ , т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Y} \\ \widehat{\Psi}_\Gamma \downarrow & & \downarrow \widehat{\Psi}_\Gamma \\ \Sigma_\Gamma & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma \end{array}$$

Размерности множества \mathcal{Y} удовлетворяют неравенствам

$$0,575 \leq \dim_H \mathcal{Y} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{Y} \leq 1,284.$$

2. Множество точек $z \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, которые под действием Φ в прямом направлении времени не стремятся к одному из полуособых циклов Z_{ij} , содержит (1) устойчивые многообразия \mathcal{Q}^i в точках $Q^i \cap (\mathcal{S}/g)$ отображения Φ ; (2) некоторое множество $\mathcal{Y}^+ \subset (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, инвариантное относительно Φ , т.е. $\Phi(\mathcal{Y}^+) \subset \mathcal{Y}^+$. Динамика Φ на \mathcal{Y}^+ полусопряжена левому сдвигу l на топологической цепи Маркова Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на графе Γ с помощью некоторого отображения $\widehat{\Psi}_\Gamma^+ : \mathcal{Y}^+ \rightarrow \Sigma_\Gamma^+$, т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}^+ & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{Y}^+ \\ \widehat{\Psi}_\Gamma^+ \downarrow & & \downarrow \widehat{\Psi}_\Gamma^+ \\ \Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma^+ \end{array}$$

Отображение Ψ_Γ^+ непрерывно, сюръективно, и прообраз любой точки является липшицевым многообразием, гомеоморфным отрезку. Размерности множества \mathcal{Y}^+ удовлетворяют оценкам

$$1,204 \leq \dim_H \mathcal{Y}^+ \leq \overline{\dim}_B \mathcal{Y}^+ \leq 1,408.$$

Отметим, что в п. 2 теоремы 5.3 описаны не все такие точки $z \in (\mathcal{S} \cap M_+)/g$, которые под действием Φ в прямом направлении времени не стремятся к одному из полуособых циклов Z_{ij} . Например, в теореме 5.3 ничего не утверждается про трехзвенные циклы.

Доказательство теоремы 5.3. Начнем с доказательства первого пункта. Обозначим через $S(\Phi)$ множество точек $z \in \mathcal{S}/g$, которые при итерациях $\Phi^k(z)$ не стремятся ни к одному из трех полуособых циклов Z_{ij} в прямом времени, $k \rightarrow +\infty$, и ни к одному из двух трехзвенных циклов Z^\pm в обратном времени, $k \rightarrow -\infty$.

Для описания множества $S(\Phi)$ и динамической системы $\Phi : S(\Phi) \rightarrow S(\Phi)$ рассмотрим часть множества $S(\Phi)$, лежащую в диске D_{31} . Поскольку F есть в точности Φ^2 на $A.A \cup C.A$ или Φ^3 на $A.C \cup C.C$, то множество $S(F)$ содержит $NW(F)$, $\Phi(NW(F))$ и $\Phi^2(NW(F))$. Применяя все перестановки из S_3 к $NW(F)$, получаем

$$S(\Phi) \supset S_1(\Phi) = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma \left(NW(F) \cup \Phi(NW(F)) \cup \Phi^2(NW(F)) \right).$$

Как было показано в пп. 4.9 и 4.10, пересечение разности $S(\Phi) \setminus S_1(\Phi)$ с замыканием области III в диске D_{31} состоит из точек z , которым отвечает последовательность $(\dots i_{-1} i_0 . i_1 \dots)$, $i_k \in \{A, B, C\}$, заканчивающаяся бесконечным хвостом из символов B . Любая такая точка z лежит на устойчивом усе \mathcal{Q}^2 и притягивается к четырехзвенному циклу Q^2 в прямом времени. Остальные точки разности $S(\Phi) \setminus S_1(\Phi)$ в диске D_{31} получаются применением Φ или Φ^2 к описанным точкам z и соответствующей симметрии из S_3 . Таким образом, получаем

$$S(\Phi) \setminus S_1(\Phi) = \tilde{S}(\Phi) \subset \bigsqcup_i \mathcal{Q}^i$$

и, следовательно, точки множества $\tilde{S}(\Phi)$ не являются неблуждающими точками отображения Φ . Точки множества $(\mathcal{S}/g) \setminus S(\Phi)$ также не являются неблуждающими точками Φ , так как либо притягиваются в обратном времени к одному из трехзвенных циклов Z^\pm , либо притягиваются

к точке выхода соответствующей оптимальной траектории на один из полуособых отрезков Z_{ij}^s . Итак,

$$\text{NW}(\Phi) = S_1(\Phi) = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma \left(\text{NW}(F) \cup \Phi(\text{NW}(F)) \cup \Phi^2(\text{NW}(F)) \right).$$

Учитывая результаты лемм 5.4 и 5.5, для доказательства первого пункта осталось объяснить, как возникает граф Γ , и построить отображение $\widehat{\Psi}_\Gamma$.

Во-первых, отметим, что топологическая цепь Маркова $\Sigma_{\widehat{\Gamma}}$ идентична во всех смыслах цепи Σ_{AC} бесконечных в обе стороны слов с двухсимвольным алфавитом $\{A, C\}$. Напомним, что (с точностью до применения некоторой перестановки, переводящей точку в D_{31}) $F = \Phi^3$ на множестве $A.C \cup C.C$ и $F = \Phi^2$ на $A.A \cup C.A$. Поэтому, если рассмотреть на множестве $\text{NW}(\Phi) \cap D_{31}$ отображение $\widehat{\Phi} : z \mapsto \sigma(\Phi(z))$, где $\sigma \in S_3$ переводит $\Phi(z)$ в D_{31} , то отображение $\Psi_{\widehat{\Gamma}}$ из леммы 5.4 немедленно даст сопряженность динамической системы $\widehat{\Psi} : \text{NW}(\Phi) \cap D_{31} \rightarrow \text{NW}(\Phi) \cap D_{31}$ с левым сдвигом на топологической марковской цепи $\Sigma_{\widehat{\Gamma}}$ с помощью естественного гомеоморфизма $\widehat{\Psi}_{\widehat{\Gamma}}$, построенного по $\Psi_{\widehat{\Gamma}}$ (ориентированный граф $\widehat{\Gamma}$ имеет четыре вершины и изображен на рис. 21). Для того, чтобы вернуться к исходному отображению Φ , необходимо учитывать все диски D_{ij} и следить за тем, в каком из шести дисков находится точка $\Phi^k(z)$. Это можно легко проделать, если использовать буквы r и t над стрелками на рис. 21 (напомним, что $A = rr$ и $C = trt$). Буква r обозначает для диска D_{31} перестановку $(312) \in S_3$, а буква t — перестановку $(13) \in S_3$, что немедленно дает сопряженность Φ на $\text{NW}(\Phi)$ с левым сдвигом на цепи Σ_Γ . Первая часть теорема доказана.

Пункт 1 второй части теоремы тривиален. Доказательство пункта 2 основано на лемме 5.6 и абсолютно аналогично доказательству первой части, если в качестве множества \mathcal{Y}^+ выбрать, например,

$$\mathcal{Y}^+ = \bigsqcup_{\sigma \in S_3} \sigma \left(\widetilde{\mathcal{Y}} \cup \Phi(\widetilde{\mathcal{Y}}) \cup \Phi^2(\widetilde{\mathcal{Y}}) \right).$$

□

Замечание 5.1. Множество \mathcal{Y}^+ можно выбрать не единственным образом. Например, можно заменить его на $\Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ для любого наперед заданного $k \in \mathbb{Z}$. Однако с множеством $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ связаны следующие трудности: во-первых, его размерность по Минковскому, вообще говоря, может быть строго больше размерности \mathcal{Y}^+ , а во-вторых, прообраз любой точки из Σ_Γ^+ в $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Phi^k(\mathcal{Y}^+)$ уже перестает быть липшицевым многообразием, а превращается в погруженное липшицево многообразие. Вторая трудность сродни запутыванию устойчивого и неустойчивого многообразия некоторой неподвижной точки гиперболического отображения при удалении от неподвижной точки.

5.7. Основная теорема о хаотичности оптимального синтеза в модельной задаче. Теперь мы готовы сформулировать основную теорему первой части работы, описывающую динамику оптимальных траекторий в исходной задаче оптимального управления (2.1). Первые три пункта теоремы описывают исследуемые множества точек \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ , сотканные из траекторий гамильтоновой системы (2.3), а остальные пункты теоремы описывают хаотическую динамику на этих множествах. Поскольку любая траектория из множеств \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ пересекает стратифицированное многообразие $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{12} \cup \mathcal{S}_{13} \cup \mathcal{S}_{23}$ разрыва правой части системы (2.3), то хаотическая динамика поведения этих траекторий описана в терминах последовательности пересечения страт S_{ij} .

Теорема 5.4. *В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*\mathcal{M}$ задачи (2.1) определены два множества \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ , обладающие следующими свойствами.*

1. Для любой точки $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$ гамильтоновой системы (2.3), проходящая через z , существует и единственна при $t \in [-\infty; T(z)]$. Траектория $X(t, z)$ попадает в начало координат за время $T(z)$, $X(T(z), z) = 0$.
2. Множества \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ инвариантны относительно потока гамильтоновой системы (2.3) в следующем смысле. Если $z \in \mathcal{X}^+$, то $X(t, z)$ лежит в \mathcal{X}^+ при всех $t \in [0; T(z))$. Если же $z \in \mathcal{X}$, то $X(t, z)$ лежит в \mathcal{X} при всех $t \in [-\infty; T(z))$.

3. Проекция траектории $X(t, z)$ на фазовое пространство M , продолженная нулем при $t > T(z)$, является оптимальной при любом $z \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+$ (т.е. $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^+ \subset M_+$). Более того, траектория $X(t, z)$ пересекает поверхность переключения \mathcal{S} счетное число раз в моменты $\dots < t_{-1} < t_0 \leq 0 < t_1 < t_2 \dots < T(z)$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$ и $t_k \rightarrow -\infty$ при $k \rightarrow -\infty$.
4. Динамическая система $\Phi : \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $z \in \mathcal{X} \cap \mathcal{S}$ в точку первого пересечения траектории $X(t, z)$ с множеством \mathcal{S} , $\Phi(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с топологической цепью Маркова бесконечных в обе стороны путей на графе Γ с помощью некоторого отображения Ψ_Γ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{X} \cap \mathcal{S} \\ \Psi_\Gamma \downarrow & & \downarrow \Psi_\Gamma \\ \Sigma_\Gamma & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma_\Gamma \end{array}$$

Отображение Ψ_Γ непрерывно и сюръективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ является одномерным гладким многообразием, диффеоморфным открытому интервалу. Пусть \mathcal{V} обозначает множество путей в Γ , начинающихся из вершины V . Тогда прообразы множеств $\Psi_\Gamma^{-1}(\cdot A_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(\cdot B_{ij})$, $\Psi_\Gamma^{-1}(\cdot C_{ij})$ и $\Psi_\Gamma^{-1}(\cdot D_{ij})$ лежат на страте \mathcal{S}_{ij} .

5. Динамическая система $\Phi : \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S}$, переводящая точку $z \in \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S}$ в точку первого пересечения траектории $X(t, z)$ с множеством \mathcal{S} , $\Phi(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с левым сдвигом на топологической цепи Маркова Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на графе Γ (см. определение 5.2) с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^+ , т.е. следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S} & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{X}^+ \cap \mathcal{S} \\ \Psi_\Gamma^+ \downarrow & & \downarrow \Psi_\Gamma^+ \\ \Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{\Phi} & \Sigma_\Gamma^+ \end{array}$$

Отображение Ψ_Γ^+ непрерывно и сюръективно, а прообраз любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ есть липшицево многообразие, относительная внутренность которого гомеоморфна двумерному открытому диску. Прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\cdot A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\cdot B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\cdot C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\cdot D_{ij})$ лежат на страте \mathcal{S}_{ij} .

6. Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 3,204 &\leq \dim_H \mathcal{X}^+ \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X}^+ \leq 3,408, \\ 2,575 &\leq \dim_H \mathcal{X} \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X} \leq 3,284. \end{aligned}$$

7. Топологическая энтропия левого сдвига l на Σ_Γ и Σ_Γ^+ равна

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0,4057.$$

8. Абсолютно аналогичная картина наблюдается в гамильтоновой системе (2.3) для траекторий, исходящих из начала координат, за исключением того, что они уже не будут оптимальными в задаче (2.1).

Доказательство. Для того, чтобы построить множества \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ , воспользуемся построенными в теореме 5.3 множествами \mathcal{Y} и \mathcal{Y}^+ . На самом деле различие этих пар множеств заключается в том, что, во-первых, вторая пара лежит в фактор-пространстве M_+/g , а первая — в исходном пространстве M , а во-вторых, \mathcal{Y} и \mathcal{Y}^+ лежат на поверхности переключения \mathcal{S}/g и не содержат самих оптимальных траекторий. Построим сначала промежуточные множества \mathcal{Z} и \mathcal{Z}_+ следующим образом: для каждой точки из \mathcal{Y} или \mathcal{Y}^+ поместим в \mathcal{Z} или \mathcal{Z}_+ соответственно выходящую из этой

точки траекторию проекции гамильтоновой системы (2.3). В \mathcal{Z} поместим траекторию целиком, а в \mathcal{Z}_+ — только ее половину, отвечающую положительному направлению времени. Заметим, что

$$\mathcal{Z} \cap (\mathcal{S}/g) = \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Z}_+ \cap (\mathcal{S}/g) = \mathcal{Y}^+,$$

так как множества \mathcal{Y} и \mathcal{Y}^+ инвариантны относительно Φ и, стало быть, мы не приобретем новых точек на \mathcal{S} вследствие этой процедуры. Множества \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ суть прообразы множеств \mathcal{Z} и \mathcal{Z}_+ при проекции $\pi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}/g$. Поскольку множества \mathcal{Y} и \mathcal{Y}^+ лежат в M_+/g , то любая траектория, начинающаяся в точке $\pi^{-1}(\mathcal{Y})$ или $\pi^{-1}(\mathcal{Y}^+)$, является оптимальной и приходит в начало координат за конечное время. Таким образом, п. 1 доказан. Пункты 2 и 3 получаются автоматически из построения множеств \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ .

Полусопрягающие отображения Ψ_Γ и Ψ_Γ^+ строятся одинаковым образом: необходимо сначала применить проекцию π на фактор-пространство \mathcal{M}/g , а потом соответствующее отображение $\widehat{\Psi}_\Gamma$ или $\widehat{\Psi}_\Gamma^+$ из теоремы 5.3:

$$\Psi_\Gamma = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi, \quad \Psi_\Gamma^+ = \widehat{\Psi}_\Gamma^+ \circ \pi.$$

Изучим сначала свойства отображения Ψ_Γ . Очевидно, оно непрерывно как композиция непрерывных отображений и сюръективно как композиция сюръективного и биективного отображений. Чтобы избежать путаницы, будем писать Φ^\dagger для отображения Пуанкаре на исходной поверхности переключения \mathcal{S} и Φ^\downarrow для отображения Пуанкаре на факторе \mathcal{S}/g . Тогда коммутативность диаграммы в п. 4 получается следующим образом:

$$\Psi_\Gamma \circ \Phi^\dagger = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi \circ \Phi^\dagger = \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \Phi^\downarrow \circ \pi = l \circ \widehat{\Psi}_\Gamma \circ \pi = l \circ \Psi_\Gamma.$$

Второе равенство выполнено в силу того, что гамильтонова система (2.3) уважает действие g и, следовательно, его уважает отображение последования Пуанкаре. Третье равенство выполнено по теореме 5.3. Прообразом $\pi^{-1}(z)$ любой точки из $z \in M_+/g$ является гладкая одномерная кривая — орбита действия g группы \mathbb{R}_+ . В силу биективности $\widehat{\Psi}_\Gamma$ получаем, что $\Psi_\Gamma^{-1}(\sigma)$ является гладкой кривой для любого $\sigma \in \Sigma_\Gamma$. Пункт 4 доказан.

Доказательство п. 5 для отображения Ψ_Γ^+ почти во всем эквивалентно доказательству п. 4. Единственное небольшое отличие заключается в исследовании прообраза $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\sigma)$ любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$. В теореме 5.3 доказано, что $(\widehat{\Psi}_\Gamma^+)^{-1}(\sigma)$ является липшицевой кривой в $(\mathcal{S} \cap M_+)/g$. Учитывая структуру проекции π^{-1} , немедленно получаем, что $(\Psi_\Gamma^+)^{-1}(\sigma)$ является двумерным липшицевым многообразием, гомеоморфным декартову произведению отрезка на интервал.

Чтобы получить оценки в п. 6, докажем, что

$$\begin{aligned} \dim_H \mathcal{X} &\geq 1 + \dim_H \mathcal{Z} \geq 2 + \dim_H \mathcal{Y}, & \overline{\dim}_B \mathcal{X} &\leq 1 + \overline{\dim}_B \mathcal{Z} \leq 2 + \overline{\dim}_B \mathcal{Y}, \\ \dim_H \mathcal{X}^+ &\geq 1 + \dim_H \mathcal{Z}_+ \geq 2 + \dim_H \mathcal{Y}^+, & \overline{\dim}_B \mathcal{X}^+ &\leq 1 + \overline{\dim}_B \mathcal{Z}_+ \leq 2 + \overline{\dim}_B \mathcal{Y}^+. \end{aligned}$$

Эти оценки получаются элементарным применением формул для оценки размерностей по Хаусдорфу и по Минковскому произведения множеств (см. [19, Chapter 7]).

Вычислим теперь топологические энтропии левых сдвигов на Σ_Γ и Σ_Γ^+ . Поскольку граф Γ несвязен и состоит из двух копий некоторого графа Γ' , то для вычисления топологической энтропии можно заменить граф Γ на Γ' . Граф Γ' получается из Γ склеиванием вершин одного типа, у которых совпадают индексы, т.е. \mathcal{A}_{ij} с \mathcal{A}_{ji} , \mathcal{B}_{ij} с \mathcal{B}_{ji} и т. д. Пусть A_{01} обозначает 0,1-матрицу графа Γ' . Поскольку A_{01} примитивна (так как граф Γ' сильно связан и у циклов нет общего делителя длины). Хорошо известно, что в этом случае по теореме Перрона—Фробениуса у матрицы A_{01} существует единственное положительное собственное значение $\lambda_{\max} > 0$, и интересующие нас топологические энтропии совпадают и равны $\log_2(\lambda_{\max})$ (см. [12]).

Если p — собственный вектор A_{01} , отвечающий собственному значению λ_{\max} , то, в силу единственности λ_{\max} и p , он должен выдерживать любую перестановку координат, индуцированную из действия группы S_3 на графе Γ' . Поэтому, если вершине \mathcal{A}_{12} отвечает координата a в векторе p , то всем вершинам \mathcal{A}_{ij} также отвечает координата a в векторе p . Следовательно, вершинам \mathcal{B}_{ij} и \mathcal{C}_{ij} отвечает координата $\lambda_{\max}^{-1}a$, а вершинам \mathcal{D}_{ij} — координата $\lambda_{\max}^{-2}a$, и мы немедленно приходим к уравнению

$$a = \lambda_{\max}^{-2}a + \lambda_{\max}^{-3}a.$$

Поэтому

$$\lambda_{\max}^3 - \lambda_{\max} - 1 = 0.$$

По формуле Кардано находим значение λ_{\max} , заявленное в условии теоремы.

Последний пункт теоремы получается немедленно после применения отражения $g(-1)$ к гамильтоновой системе (2.3). \square

Замечание 5.2. Размерности по Хаусдорфу и Минковскому множеств \mathcal{X} и \mathcal{X}^+ при проекции на исходное фазовое пространство $M = \{(x, y)\} = \mathbb{R}^4$ не изменяются, так как отображение E является локально липшицевым, и, следовательно, проекция $M_+ = \text{graph } E \rightarrow M$ является локально билипшицевой.

Замечание 5.3. Множество Ξ , определенное в теореме 3.1, в случае, если треугольник Ω является правильным, содержится в множестве \mathcal{X} .

6. ХАОТИЧНОСТЬ НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ ВРЕМЕНИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В этом разделе будут сформулированы и доказаны две теоремы о хаотичном поведении траекторий в интегральных воронках в гамильтоновых системах с разрывной правой частью общего положения. Доказательства этих теорем основываются на структуре оптимального синтеза в модельной задаче (2.1), точнее, на теоремах 3.1 и 5.4.

6.1. Гамильтоновы системы с разрывной правой частью.

Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие M^{2n} . Пусть $(2n - 1)$ -мерное стратифицированное подмногообразие $S^H \subset M$ разделяет M на конечное число открытых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$: ($M = \bigcup \Omega_i$). Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q, p) : M \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ -продолжаемую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$. Рассмотрим открытое множество $\mathcal{U} \subset M$. Пусть в множестве \mathcal{U} содержатся части лишь от трех $(2n - 1)$ -мерных страт $S_{ij}^H \subset S^H$, $i, j = 1, 2, 3$, которые разделяют области Ω_i и Ω_j . Пусть S_{ij}^H примыкают друг к другу по страте S_{123}^H размерности $(2n - 2)$, как показано на рис. 22.

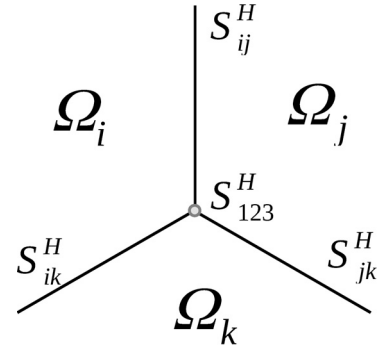


Рис. 22. Взаимное расположение страт S_{ij}^H , S_{123}^H и областей Ω_i

Главным инструментом исследования общих задач поведения решений дифференциальных уравнений является изучение их типичных особенностей. Для обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью эта программа была в основном реализована в работах Пунанкаре. Но в теории оптимального управления ключевую роль играют гамильтоновы системы с разрывной правой частью и касательным скачком вектора скорости, которые возникают при применении принципа максимума Понтрягина.

В работах И. Купки [24] и М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [30] были изучены решения кусочно гладкой гамильтоновой системы, которые входят в особую точку x_0 порядка 2, лежащую на поверхности разрыва S коразмерности 1. Было доказано, что моменты пересечения $\{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ таких решений с поверхностью S при подходе решения к точке x_0 в ситуации общего положения образуют двойную асимптотически геометрическую прогрессию — четтеринг, точнее, bi-constant ratio chattering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{2n+2} - t_{2n+1}}{t_{2n+1} - t_{2n}} = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{2n+3} - t_{2n+2}}{t_{2n+2} - t_{2n+1}} = b.$$

В данной главе изучается ситуация, когда особая точка второго порядка лежит на страте коразмерности 2. Здесь возникает качественно новый феномен, типичный для задач оптимального синтеза и для гамильтоновых систем с разрывной правой частью. Помимо траекторий, которые входят в x_0 с обычным четтерингом, существует канторово множество траекторий $\mathcal{X}_H(x_0)$, динамика пересечения которых со стратами S_{ij}^H описывается топологической цепью Маркова Σ_Γ^+ , где Γ —

некоторый ориентированный граф (см. определение 5.2). Точнее, Σ_Γ^+ является фактором системы, описывающей динамику пересечений траекторий из $\mathcal{X}_H(x_0)$ с \mathcal{S}_{ij}^H . Пересечение множества траекторий $\mathcal{X}_H(x_0)$ с трансверсальной к ним поверхностью есть многомерное канторово множество типа подковы Смейла. Топологическая марковская цепь Σ_Γ^+ гомеоморфна стандартной подкове Смейла (см. [12]) как топологическое пространство, но не сопряжена с ней как динамическая система.

6.2. Формулировки теорем о хаосе в гамильтоновых системах с разрывной правой частью.

Прежде чем перейти к основным формулировкам, определим формально ситуацию, изображенную на рис. 22. А именно, потребуем, чтобы выполнялись неравенства (с возможной заменой H на $-H$)

$$H_i(x) > \max(H_j(x), H_k(x)) \quad \forall x \in \Omega_i, \quad \text{для всех различных } i, j \text{ и } k \text{ из } \{1, 2, 3\}. \quad (6.1)$$

Введем обозначения

$$3G = 3F_0 = H_1 + H_2 + H_3, \quad 3F_1 = H_2 - H_3, \quad 3F_2 = H_3 - H_1, \quad 3F_3 = H_1 - H_2. \quad (6.2)$$

Очевидно, H_i однозначно выражаются через G , F_1 и F_2 и наоборот, а $F_3 \equiv -F_1 - F_2$ (функция F_3 введена для удобства обозначений).

Определение 6.1. Точку $x_0 \in \mathcal{S}_{123}^H$, $H_1(x_0) = H_2(x_0) = H_3(x_0)$, будем называть *странной*¹, если в x_0 выполнен следующий набор условий.

1. В окрестности x_0 выполняется условие (6.1) (возможно с заменой H на $-H$);
2. Функции F_r , $(\text{ad } F_i)F_r$, $(\text{ad } F_j)(\text{ad } F_i)F_r$ и $(\text{ad } F_k)(\text{ad } F_j)(\text{ad } F_i)F_r$ обращаются в нуль в точке x_0 , где индекс r пробегает числа 1, 2, 3, а индексы i, j, k — числа 0, 1, 2, 3. Набор их дифференциалов в точке x_0 имеет максимальный ранг² (насколько это допускается условиями антикоммутативности, линейности, тождествами Якоби и равенством $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$); иными словами, эти дифференциалы находятся в общем положении.
3. Билинейная форма

$$B_{rr'} = \text{ad } F_r(\text{ad } G)^3 F_{r'}|_{x_0}, \quad r, r' = 1, 2, 3,$$

имеет максимально возможный ранг 2 и является симметрической и неположительно (неотрицательно) определенной, если условие (6.1) выполняется для H (соответственно для $-H$). Остальные (независимые от перечисленных) коммутаторы пятого порядка от функций $G = F_0$ и F_r , $r = 1, 2, 3$, обращаются в нуль³ в точке x_0 .

Поведение траекторий в интегральной воронке траекторий, входящих в точку x_0 , описывается в теоремах 6.1 и 6.2. В первой теореме дано намного более точное описание хаотичного поведения траекторий, чем во второй, однако на форму $B_{rr'}$ наложено дополнительное ограничение, эквивалентное (для модельной задачи (2.1)) условию правильного треугольника (аналогично теореме 5.4). Во второй же теореме это условие заменено на естественное условие близости к правильному треугольнику (аналогично теореме 3.1).

Теорема 6.1. Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом H является странной (удовлетворяет условиям определения 6.1), а форма $B_{rr'}$ пропорциональна билинейной форме с матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

с положительным коэффициентом, если условие (6.1) выполняется для H , и с отрицательным коэффициентом, если условие (6.1) выполняется для $-H$. Тогда в окрестности точки x_0 существует такое множество точек $\mathcal{X}_H(x_0)$, что справедливы следующие утверждения.

1. Для любой точки $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$, проходящая через z , существует и единственна при $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в x_0 за время $T(z)$, $X(T(z), z) = x_0$.

¹Мы надеемся, что это название вызовет у читателя ассоциации, связанные с понятием странного аттрактора.

²На самом деле это условие может быть ослаблено.

³Нетрудно показать, что если коммутаторы пятого порядка, отличные от $\text{ad } F_r(\text{ad } G)^3 F_{r'}$, обращаются в нуль в точке x_0 , то форма $B_{rr'}$ является симметрической, хотя и может быть априори вырожденной или не быть знакоопределенной.

2. Множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ соткано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \mathcal{X}_H(x_0)$, то $X(t, z)$ лежит в $\mathcal{X}_H(x_0)$ при всех $t \in [0; T(z))$. Более того, траектория $X(t, z)$ при $t \in (0; T(z))$ пересекает поверхность переключения \mathcal{S}^H счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \dots$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$.
3. Динамическая система $\Phi_H : \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \rightarrow \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, переводящая точку $z \in \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с \mathcal{S}^H , т.е. $\Phi_H(z) = X(t_1, z)$, полусопряжена с помощью некоторого отображения Ψ_Γ^H с односторонней топологической марковской цепью Σ_Γ^+ бесконечных вправо путей на фиксированном графе Γ (см. определение 5.2), не зависящем от x_0 и H :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H} & \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\ \Psi_\Gamma^H \downarrow & & \downarrow \Psi_\Gamma^H \\ \Sigma_\Gamma^+ & \xrightarrow{l} & \Sigma_\Gamma^+ \end{array}$$

где l — бернуллиевский сдвиг влево, а Ψ_Γ^H — непрерывное сюръективное отображение. Прообраз $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma)$ любой точки $\sigma \in \Sigma_\Gamma^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2 , и диаметр $\Phi_H^k((\Psi_\Gamma^H)^{-1}(\sigma))$ стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$. Пусть $(.V)$ обозначает множество путей в Γ , начинающихся в вершине V . Тогда прообразы множеств $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.A_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.B_{ij})$, $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.C_{ij})$ и $(\Psi_\Gamma^H)^{-1}(.D_{ij})$ лежат на страте \mathcal{S}_{ij}^H с теми же индексами.

4. Если $dG(x_0) = 0$, то размерности по Хаусдорфу и Минковскому множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ не зависят от x_0 и H (лишь бы точка x_0 удовлетворяла условиям теоремы), совпадают с размерностями множества \mathcal{X} в теореме 5.4 и, следовательно, удовлетворяют оценкам

$$3,204762 \leq \dim_H \mathcal{X}_H(x_0) \leq \overline{\dim}_B \mathcal{X}_H(x_0) \leq 3,407495. \quad (6.4)$$

5. Топологическая энтропия бернуллиевского сдвига l равна

$$h_{\text{top}}(l) = \log_2 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18}} \right) \approx 0,4057.$$

6. Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0 .

Множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ является прямым аналогом множества \mathcal{X}^+ из теоремы 5.4. Однако с формальной точки зрения гамильтонова система (2.3) принципа максимума Понтрягина в модельной задаче оптимального управления (2.1) не удовлетворяют условиям теоремы 6.1, так как большинство скобок в определении странной точки обращаются в нуль тождественно и, стало быть, не выполняется условие о линейной независимости дифференциалов в нуле. Можно было бы сформулировать теорему 6.1 так, чтобы подобные случаи удовлетворяли ее условиям, но тогда мы потеряли бы структурную устойчивость феномена (см. замечание 6.11).

Замечание 6.1. Используя методы вычисления топологической энтропии, несложно найти меру Перри μ_P на Σ_Γ^+ , удовлетворяющую вариационному принципу и максимизирующую метрическую энтропию:

$$\max_{\mu} h_{\mu}(l) = h_{\mu_P}(l) = h_{\text{top}}(l).$$

Теорема 6.2. Пусть точка x_0 гамильтоновой системы с кусочно гладким гамильтонианом H является странной (удовлетворяет условиям определения 6.1). Предположим также, что существует такое число $\lambda_H(x_0) > 0$ (если условие (6.1) выполняется для H) или $\lambda_H(x_0) < 0$ (если условие (6.1) выполняется для $-H$), что форма $\lambda_H(x_0)B_{r,r'}$ достаточно близка² к билинейной форме с матрицей (6.3).

¹К сожалению, в статьях [9, 21] содержится досадная опечатка и условие $dG(x_0) = 0$ пропущено.

²Под «достаточной близостью» здесь понимается существование такой не зависящей от x_0 и H окрестности матрицы (6.3) в пространстве симметрических матриц ранга 2 и такого числа $\lambda_H(x_0)$, что форма $\lambda_H(x_0)B_{r,r'}$ лежит в указанной окрестности.

Тогда в окрестности точки x_0 существует множество точек $\Xi_H(x_0)$, обладающее следующими свойствами.

1. Для любой точки $z \in \Xi_H(x_0)$ определено такое время $T(z) < \infty$, что траектория $X(t, z)$, проходящая через z , существует и единственна при $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ попадает в x_0 за время $T(z)$, $X(T(z), z) = x_0$.
2. Множество $\Xi_H(x_0)$ соткано из траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H и инвариантно относительно нее в следующем смысле: если $z \in \Xi_H(x_0)$, то $X(t, z)$ лежит в $\Xi_H(x_0)$ при всех $t \in [0; T(z)]$. Более того, траектория $X(t, z)$ при $t \in (0; T(z))$ пересекает поверхность переключения \mathcal{S}^H счетное (бесконечное) число раз в моменты $t_1 < t_2 < \dots$, $X(t_k, z) \in \mathcal{S}^H$, причем $t_k \rightarrow T(z)$ при $k \rightarrow +\infty$.
3. Рассмотрим динамическую систему $\Phi_H : \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \rightarrow \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$, переводящую точку $z \in \Xi_H(x_0)$ на \mathcal{S}^H в точку следующего пересечения траектории $X(t, z)$ с \mathcal{S}^H , т.е. $\Phi_H(z) = X(t_1, z)$. Существует такое натуральное $n > 0$ (одинаковое для всех гамильтоновых систем и точек x_0 и совпадающее со степенью n в теореме 3.1), что отображение Φ_H^n полусопряжено с топологической марковской цепью бернуллиевского сдвига на несвязном объединении двух экземпляров пространства Σ_{01}^+ , состоящего из бесконечных в одну сторону последовательностей из нулей и единиц. Другими словами, существует такое непрерывное сюръективное отображение Ψ_{01}^H из $\Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ в пространство $\bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H & \xrightarrow{\Phi_H^n} & \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H \\ \Psi_{01}^H \downarrow & & \downarrow \Psi_{01}^H \\ \bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+ & \xrightarrow{l} & \bigsqcup^2 \Sigma_{01}^+ \end{array}$$

где l обозначает сдвиг влево на каждом экземпляре Σ_{01}^+ . Прообраз $(\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma)$ каждой точки $\sigma \in \Sigma_{01}^+$ гомеоморфен открытому двумерному диску D^2 , и диаметр $\Phi_H^k((\Psi_{01}^H)^{-1}(\sigma))$ стремится к нулю при $k \rightarrow +\infty$.

4. Помимо описанного в пп. 1–4 канторова множества $\Xi_H(x_0)$ траекторий в точку x_0 входит еще два множества четтеринг траекторий:
 - (а) существуют два однопараметрических семейства «трехзвенных» траекторий R_{123} и R_{132} , попадающих в точку x_0 за конечное время с четтеринг-режимом, т.е. режимом со счетным числом последовательных пересечений страт S_{12}^H , S_{23}^H и S_{31}^H в прямом порядке для R_{123} и в обратном порядке для R_{132} .
 - (б) существуют три двупараметрических семейства «четырёхзвенных» траекторий Q_1 , Q_2 и Q_3 . Каждая траектория из Q_i счетное число раз последовательно пересекает страты S_{ij}^H , S_{ik}^H , S_{ik}^H , S_{ij}^H и далее по циклу ($i \neq j \neq k$).
5. Аналогичная картина с обращением течения времени имеет место для траекторий, выходящих из точки x_0 .

Замечание 6.2. Если выполняется условие «правильного треугольника» из теоремы 6.1, то множество $\Xi_H(x_0)$ содержится в множестве $\mathcal{X}_H(x_0)$.

6.3. Ниспадающая система скобок Пуассона. Доказательства теорем 6.1 и 6.2 похожи и опираются на ключевые факты о хаотичности оптимального синтеза в модельной задаче, полученные соответственно в доказательствах теорем 5.4 и 3.1. Для того чтобы в явном виде отыскать описанный в теоремах 6.1 и 6.2 оптимальный синтез модельной задачи (2.1), содержащийся внутри произвольной гамильтоновой системы с разрывной правой частью, воспользуемся так называемой ниспадающей системой скобок Пуассона, которая позволяет проводить эффективное исследование поведения траекторий в интегральных воронках. С помощью метода ниспадающей системы скобок Пуассона доказаны, например, теорема о гамильтоновости потока особых траекторий (см. [13]) и теорема о структуре лагранжевого многообразия в окрестности особой траектории первого порядка в экстремальных задачах, голономных по управлению, меняющемуся в многограннике (см. [14]).

Опишем подробно структуру ниспадающей системы скобок Пуассона. Вместо гамильтонианов H_i будем использовать гамильтонианы F_i из (6.2) помня, что $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$. Гамильтониан H

может быть записан следующим образом (здесь и далее по совпадающим верхним и нижним индексам ведется суммирование от 1 до 3):

$$H = G + \sum_{r=1}^3 u^r F_r = G + u^r F_r,$$

где $u \in \mathbb{R}^3$, $u^1 + u^2 + u^3 = 0$ и функция $u(x)$ выбирается следующим образом:

$$u^i(x) = -1, \quad u^j(x) = 1, \quad u^k(x) = 0, \quad \text{если } x \in \Omega_k \text{ и } (ijk) \text{ — четная перестановка, т.е. } (ijk) \in A_3.$$

Таким образом, $u(x)$ находится в соответствующей вершине треугольника

$$\Omega = \text{conv}\{(-1, 1, 0), (0, -1, 1), (1, 0, -1)\} \subset U = \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 + u_2 + u_3 = 0\}. \quad (6.5)$$

Поскольку гамильтониан H является негладким, то траектория гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью определяется по Филиппову (см. [18]). Дадим точное определение. Обозначим через ω симплектическую форму на \mathcal{M} , а через i_ω — задаваемый формой ω канонический изоморфизм $i_\omega(z) : T_z^* \mathcal{M} \rightarrow T_z \mathcal{M}$. Тогда абсолютно непрерывная траектория $z(t)$ является траекторией гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с гамильтонианом H в том и только том случае, если для почти всех t выполняется дифференциальное включение

$$\dot{z}(t) \in \overline{\text{conv}}\{\text{предельных точек } i_\omega dH(\tilde{z}) \text{ при } \tilde{z} \rightarrow z(t)\} \subset T_{x(t)} \mathcal{M}$$

или, равносильно,

$$\dot{z}(t) = i_\omega \left(dG(z(t)) + u^r dF_r(z(t)) \right) \quad \text{для некоторого } u \in \arg \max_{u \in \Omega} \{u^r F_r(z(t))\}.$$

Замечание 6.3. Важно отметить, что на пространстве $U = \{u : u_1 + u_2 + u_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$ не задано скалярное произведение. Свертку $u^r F_r$ правильно понимать как свертку вектора и ковектора, где $u(x) \in U$, а $F(x) \in U^*$.

Приведем теперь процедуру построения ниспадающей системы скобок Пуассона для гамильтониана H . Для этого выпишем набор дифференциальных уравнений вдоль произвольной траектории системы и упорядочим их по строкам. В первой строке ниспадающей системы стоят три обыкновенных дифференциальных уравнения (будем перед уравнениями, стоящими в k -й строке, ставить символ $\lceil k \rceil$):

$$\lceil 1 \rceil \quad \frac{d}{dt} F_i = \{G, F_i\} + \{F_r, F_i\} u^r, \quad i = 1, 2, 3.$$

Вторая строка содержит два типа уравнений:

$$\lceil 2 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G, F_i\} = \{G, \{G, F_i\}\} + \{F_r, \{G, F_i\}\} u^r, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\lceil 2 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{F_i, F_j\} = \{G, \{F_i, F_j\}\} + \{F_r, \{F_i, F_j\}\} u^r, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

В общем случае в m -й строке выписаны уравнения вида

$$\lceil m \rceil \quad \frac{d}{dt} \mathcal{K}^m = \{G, \mathcal{K}^m\} + \{F_r, \mathcal{K}^m\} u^r,$$

где $\mathcal{K}^m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, $K_1 = F_i$, $i = 1, 2, 3$, а остальные символы K_j могут обозначать как G , так и F_i . Уравнения в $(m+1)$ -й строке получаются дифференцированием по t правых частей уравнений m -й строки. Так, например

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G, \mathcal{K}^m\} = \{G, \{G, \mathcal{K}^m\}\} + \{F_r, \{G, \mathcal{K}^m\}\} u^r$$

и

$$\lceil m+1 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{F_i, \mathcal{K}^m\} = \{G, \{F_i, \mathcal{K}^m\}\} + \{F_r, \{F_i, \mathcal{K}^m\}\} u^r, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ниспадающая система выписывается вплоть до строки с номером $2h$, где h — порядок особенности в точке x_0 (см. [8]). В нашем случае $h = 2$, так как управление в явном виде в точке x_0 возникает на четвертом шаге дифференцирования.

Таким образом, в m -й строке выписаны уравнения на производную по времени от скобок m -го порядка, а правые части этих уравнений есть аффинные по u функции, где коэффициентами выступают скобки $(m + 1)$ -го порядка.

Отметим, что выписывание ниспадающей системы сродни отысканию особой траектории, когда равенства $F_i(x(t)) \equiv 0$ дифференцируются вдоль траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = G + F_r u^r$. Однако с нашей точки зрения ниспадающая система (хотя и содержит большое количество уравнений) значительно удобнее прямого дифференцирования, так как не содержит формальных производных от управляющего параметра \dot{u}, \ddot{u}, \dots , с которыми обычно очень неудобно работать.

Определение 6.2. Главными скобками в ниспадающей системе мы будем называть скобки F_r , $(\text{ad } G)F_r$, $(\text{ad } G)^2 F_r$, $(\text{ad } G)^3 F_r$, $r = 1, 2, 3$. Остальные скобки порядка не больше четырех мы будем называть неглавными¹.

Сведение гамильтоновой системы с разрывной правой частью к гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина модельной задачи (2.1) будет основано на том факте, что в окрестности любой странной точки в любой строке с номером m неглавные скобки имеют больший порядок малости, чем главные, и потому не влияют на принципиальное поведение системы.

Лемма 6.1. Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$, входящую в странную точку $x_0 = x(0)$ при $t < T$. Тогда существует такая константа $c > 0$, что если \mathcal{K}^m — главная скобка Пуассона в ниспадающей системе порядка $m \leq 4$, то при t , близких к T , выполнено неравенство

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq c(T - t)^{5-m},$$

а если \mathcal{K}^m — неглавная скобка Пуассона, $m \leq 4$, то неравенство

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq c(T - t)^{6-m}.$$

Доказательство. Будем доказывать лемму обратной индукцией по m . Основным инструментом будет следующая формула, верная для любой скобки \mathcal{K}_m , $m \leq 4$, из ниспадающей системы при $t \in [0; T]$:

$$\mathcal{K}^m = \int_T^t \left(\{G, \mathcal{K}^m\}(x(\tau)) + u^r(\tau) \{F_r, \mathcal{K}^m\}(x(\tau)) \right) d\tau, \quad (6.6)$$

которая вытекает из соотношения $\mathcal{K}^m(x(T)) = 0$ для $m \leq 4$.

Докажем теперь базу обратной индукции. Рассмотрим последнюю строчку ниспадающей системы. Если \mathcal{K}^4 — неглавная скобка, то подынтегральное выражение в (6.6) обращается в нуль при $t = T$ по определению странной точки x_0 . Следовательно, при малых $T - t$ для некоторого $b_4 > 0$ выполнено неравенство

$$|\mathcal{K}^4(x(t))| \leq b_4(T - t)^2, \quad \text{если } \mathcal{K}^4 \text{ — неглавная скобка.}$$

Рассмотрим главную скобку \mathcal{K}^m в последней строке ниспадающей системы. Для нее подынтегральное выражение в (6.6) при $t = T$, вообще говоря, не обращается в нуль. Поэтому мы можем лишь гарантировать, что

$$|\mathcal{K}^4(x(t))| \leq b_4(T - t), \quad \text{если } \mathcal{K}^4 \text{ — главная скобка.}$$

Шаг обратной индукции очень похож на базу. Пусть $m < 4$. Если \mathcal{K}_m — неглавная скобка, то подынтегральное выражение в (6.6) содержит только неглавные скобки. Поэтому из результата для строки $m + 1$ получаем, что для некоторого $b_m > 0$ при $t < T$ близких к T , справедливо неравенство

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq b_m(T - t)^{6-m}, \quad \text{если } \mathcal{K}^m \text{ — неглавная скобка.}$$

Для главной скобки \mathcal{K}^m получаем следующее: первое подынтегральное слагаемое в (6.6) является главной скобкой в строке с номером $(m + 1)$, а второе — неглавной и мажорируется первым при малых $t < T$, близких к T . Поэтому при малых $t \geq 0$ имеем

$$|\mathcal{K}^m(x(t))| \leq b_m(T - t)^{5-m}, \quad \text{если } \mathcal{K}^m \text{ — главная скобка,}$$

¹Отметим, что \dot{G} не участвует в ниспадающей системе и потому не является ни главной скобкой, ни неглавной.

что и требовалось. \square

Замечание 6.4. В конце доказательства теорем 6.1 и 6.2 мы покажем, что на интересующих нас траекториях в интегральной воронке странной точки x_0 для главных скобок Пуассона выполнена также оценка снизу:

$$c''(T-t) \leq \max_m \left| \mathcal{K}^m(x(t)) \right|^{\frac{1}{5-m}} \leq c'(T-t)$$

для которых констант $c', c'' > 0$.

Конечно оценки, аналогичные полученным в лемме 6.1, верны и для траекторий, выходящих из странной точки; необходимо только заменить $T-t$ на время, прошедшее с выхода из странной точки x_0 .

6.4. Раздутие особенности в странной точке. В этом пункте мы опишем процедуру раздутия особенности в странной точке, связанную лишь с невырожденностью формы $B_{rr'}$, и покажем, что на нулевом сечении (т.е. на сфере, вклеенной в особую точку) возникает гладкое подмногообразие, содержащее в точности траектории гамильтоновой системы (2.3) принципа максимума Понтрягина модельной задачи (2.1) с треугольником Ω . При этом форма $B_{rr'}$ задаст то самое скалярное произведение на плоскости $u^1 + u^2 + u^3 = 0$, относительно которого задан функционал J в модельной задаче (2.3), поэтому правильность треугольника Ω на самом деле определяется формой $B_{rr'}$.

Замечание 6.5. Без ограничения общности всегда будем предполагать, что условие (6.1) выполнено для H . В этом случае согласно определению 6.1 форма $B_{rr'}$ является отрицательно определенной на U . Поэтому форму $-B_{rr'}$ можно использовать в качестве скалярного произведения на U .

Введем новые локальные координаты в окрестности точки x_0 . Рассмотрим набор из всех возможных скобок \mathcal{K}^m , $m \leq 4$, из ниспадающей системы скобок Пуассона — всего 255 скобок¹. Набор функций $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}^m, m \leq 4\}$, конечно же, является зависимым, ввиду тождества Якоби, кососимметричности скобки Пуассона и соотношения $F_1 + F_2 + F_3 \equiv 0$. Более того, некоторые скобки являются тождественно нулевыми. Однако согласно определению 6.1 странной точки, набор дифференциалов $d\mathcal{K}^m$ имеет в x_0 максимально возможный ранг. Поэтому набор \mathcal{K} определяет отображение окрестности x_0 в линейное подпространство \mathbb{R}^{255} размерности 31. (Размерность 31 получается следующим образом. Размерность свободной нильпотентной алгебры Ли четвертого порядка с тремя образующими G, F_1 и F_2 равна 32. Однако мы исключили G из набора локальных координат, поэтому размерность понижается на 1.) Дополним систему \mathcal{K} до полного набора локальных координат в окрестности x_0 произвольным набором гладких функций $w(x) = (w_1(x), \dots, w_{(\dim \mathcal{M} - 31)}(x)) \in \mathbb{R}^{\dim \mathcal{M} - 31}$, лишь бы дифференциал dw в x_0 имел максимальный ранг и выполнялось условие $w(x_0) = 0$. На пространстве $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{M} - 31}$ введем стандартную евклидову норму.

В координатах (\mathcal{K}, w) гамильтонова система обыкновенных дифференциальных уравнений с гамильтонианом H записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathcal{K}^m = \{G, \mathcal{K}^m\} + \{F_r, \mathcal{K}^m\} u^r, & m \leq 4, \\ \frac{d}{dt} w = \alpha(\mathcal{K}, w) + \beta_r(\mathcal{K}, w) u^r, \\ F_r u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases} \quad (6.7)$$

для некоторых гладких функций α и β_r . Отметим, что скобки пятого порядка \mathcal{K}^5 в окрестности x_0 являются гладкими функциями от локальных координат (\mathcal{K}, w) .

Раздутие особенности произведем аналогично раздутию начала координат в модельной задаче (см. п. 3.2). Для этого определим действие $g_H(x_0)$ группы $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ на пространстве $\mathbb{R}^{\dim \mathcal{M}} = \{(K, w)\}$ следующим образом.

¹Число 255 получается следующим образом. Скобок первого порядка в ниспадающей системе всего 3: F_1, F_2 и F_3 (скобка G не участвует в процедуре последовательного дифференцирования в ниспадающей системе). Скобок второго порядка всего $3 \cdot 4 = 12$: $\{F_i, F_j\}$ и $\{G, F_i\}$. Итого $255 = 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^3$.

Определение 6.3. Для произвольного числа $\lambda \neq 0$ определим действие $g_H(x_0)(\lambda)$ следующим образом:

$$g_H(x_0)(\lambda) : (\mathcal{K}^1, \mathcal{K}^2, \mathcal{K}^3, \mathcal{K}^4, w) \mapsto (\lambda^4 \mathcal{K}^1, \lambda^3 \mathcal{K}^2, \lambda^2 \mathcal{K}^3, \lambda \mathcal{K}^4, \lambda w).$$

Действие $g_H(x_0)$, конечно, не уважает гамильтонову систему с гамильтонианом H . Однако главная часть системы может быть выделена благодаря раздутию особенности в точке x_0 с помощью действия $g_H(x_0)$. Для этого введем точные обозначения для локальных координат в окрестности странной точки x_0 . Положим здесь и далее $F_0 = G$, а также

$$\mathcal{K}_r^1 = F_r, \quad \mathcal{K}_{ir}^2 = \{F_i, \mathcal{K}_r^1\}, \quad \mathcal{K}_{jir}^3 = \{F_j, \mathcal{K}_{ir}^2\}, \quad \mathcal{K}_{kzir}^4 = \{F_k, \mathcal{K}_{jir}^3\},$$

где индекс r может принимать значения 1, 2 и 3, а остальные индексы i, j и k принимают те же значения или 0. В качестве локальных координат возьмем $w, \mathcal{K}_r^1, \mathcal{K}_{ir}^2, \mathcal{K}_{jir}^3$ и \mathcal{K}_{kzir}^4 .

Учитывая замечание 6.5, положим

$$\mu(\mathcal{K}) = \sqrt[24]{(-B^{rr'} \mathcal{K}_r^1 \mathcal{K}_{r'}^1)^3 + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{0r}^2 \mathcal{K}_{0r'}^2)^4 + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{00r}^3 \mathcal{K}_{00r'}^3)^6 + (-B^{rr'} \mathcal{K}_{000r}^4 \mathcal{K}_{000r'}^4)^{12}}, \quad (6.8)$$

где матрица $B^{rr'}$ обозначает матрицу обратной формы на U^* к отрицательно определенной форме $B_{rr'}$ на U из определения 6.1 странной точки. Также положим

$$(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) = g_H(x_0)(1/\mu(\mathcal{K}))(\mathcal{K}, w). \quad (6.9)$$

Переменные $\tilde{\mathcal{K}} = \{\tilde{\mathcal{K}}^m, m \leq 4\}$ и \tilde{w} лежат на сферическом цилиндре

$$\mathcal{C}_0^H = \{(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) : \mu(\tilde{\mathcal{K}}) = 1\}.$$

Цилиндр \mathcal{C}^H зададим согласно определению 3.2 в пункте 3.2.

Отображение $(\mathcal{K}, w) \mapsto (\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w})$ обозначим через \mathbf{B} . Топологически данная процедура раздутия эквивалентна вырезанию подмногообразия, на котором обращаются в нуль главные скобки Пуассона, и вклеиванию сферического цилиндра \mathcal{C}_0^H в странную точку x_0 .

В дальнейшем тильда над скобкой Пуассона будет означать деление на μ в соответствующей степени, т.е., например,

$$\tilde{\mathcal{K}}^m = \mathcal{K}^m / \mu^{5-m}, \quad \{\widetilde{G, \mathcal{K}_m}\} = \{G, \mathcal{K}_m\} / \mu^{4-m}.$$

Для скобок до четвертого порядка включительно получаем локальную координату на \mathcal{C}^H , а скобки пятого порядка не изменяются при добавлении тильды.

Теперь перенесем гамильтонову систему обыкновенных дифференциальных уравнений обыкновенных дифференциальных уравнений на пространство \mathcal{C}^H аналогично тому, как мы действовали в п. 3.3. Прямым дифференцированием (6.8) и (6.9) вдоль произвольной траектории получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mu = \Upsilon(\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u), \\ \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{K}}^m = \frac{1}{\mu} \left(\{\widetilde{G, \mathcal{K}^m}\} + \{\widetilde{F_r, \mathcal{K}^m}\} u^r - (5-m) \Upsilon \tilde{\mathcal{K}}^m \right), \\ \frac{d}{dt} \tilde{w} = \frac{1}{\mu} (\alpha + \beta_r u^r - \Upsilon \tilde{w}), \\ \tilde{F}_r u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega} \end{cases} \quad (6.10)$$

где

$$\begin{aligned} 24\Upsilon(\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u) = & -6(B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_r^1 \tilde{\mathcal{K}}_{r'}^1)^2 B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_r^1 (\{\widetilde{G, \mathcal{K}_r^1}\} + \{\widetilde{F_{r''}, \mathcal{K}_r^1}\} u^{r''}) + \\ & + 8(B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2 \tilde{\mathcal{K}}_{0r'}^2)^3 B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2 (\{\widetilde{G, \mathcal{K}_{0r}^2}\} + \{\widetilde{F_{r''}, \mathcal{K}_{0r}^2}\} u^{r''}) + \\ & + 12(B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3 \tilde{\mathcal{K}}_{00r'}^3)^5 B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3 (\{\widetilde{G, \mathcal{K}_{00r}^3}\} + \{\widetilde{F_{r''}, \mathcal{K}_{00r}^3}\} u^{r''}) + \\ & + 24(B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 \tilde{\mathcal{K}}_{000r'}^4)^{11} B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 (\{\widetilde{G, \mathcal{K}_{000r}^4}\} + \{\widetilde{F_{r''}, \mathcal{K}_{000r}^4}\} u^{r''}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Аналогично п. 3.3 обозначим векторное поле на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ в правой части (6.10) через $\xi_H(x_0)$. Формально поле $\xi_H(x_0)$ определено в окрестности \mathcal{C}_0^H при $\mu > 0$, однако мы его продолжим теми же формулами на нижнюю половину окрестности в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu < 0\}$. Точнее, отображение

$$\mathbf{B}^{-1} : (\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}) \mapsto (\mathcal{K}, w), \quad \text{где } (\mathcal{K}, w) = g_H(x_0)(\mu)(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w})$$

является двулиственным накрытием окрестности \mathcal{C}_0^H в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$ над ее образом в проколотой окрестности¹ x_0 и позволяет перенести значения функций α и β и скобок Пуассона пятого порядка на нижнюю половину цилиндра $\mathcal{C}^H \cap \{\mu < 0\}$. В этом случае отображение \mathbf{B}^{-1} отображает векторное поле системы (6.10) в поле гамильтониана H и при $\mu > 0$, и при $\mu < 0$.

Отметим, что при $\mu \rightarrow 0$ поле $\xi_H(x_0)$ растет как $1/\mu$. Однако поле $\mu\xi_H(x_0)$ уже может быть продолжено по непрерывности на сечение цилиндра $\mathcal{C}_0^H = \mathcal{C}^H \cap \{\mu = 0\}$ во всех точках, кроме точек множества $\mathcal{S}^H = \{\tilde{K}_r^1 = \tilde{K}_{r'}^1, r \neq r'\}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что поле $\mu\xi_H(x_0)$ определено на $\mathcal{C}_0^H \setminus \mathcal{S}^H$ с помощью естественного продолжения по непрерывности. Конечно же, $\mu\xi_H(x_0) \neq 0$ на \mathcal{C}_0^H , несмотря на то, что $\mu = 0$ на \mathcal{C}_0^H . Траектории поля $\mu\xi_H(x_0)$ либо не пересекают сечение \mathcal{C}_0^H , либо лежат в нем, так как вдоль поля $\mu\xi_H(x_0)$ имеем $\dot{\mu} = \mu\Upsilon$. Более того, на \mathcal{C}_0^H компоненты поля $\mu\xi_H(x_0)$, отвечающие переменным $(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w})$, не зависят от μ .

Таким образом, интегральные кривые полей $\xi_H(x_0)$ и $\mu\xi_H(x_0)$ совпадают на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$, отличается лишь скорость движения по ним. Если обозначить через s параметр времени движения по траектории поля $\mu\xi_H(x_0)$, то s и t связаны соотношением

$$ds = \frac{1}{\mu} dt.$$

Система (6.10) переписется в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mu = \mu\Upsilon(\mu, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u), \\ \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}^m = \{\widetilde{G}, \tilde{\mathcal{K}}^m\} + \{\widetilde{F}_r, \tilde{\mathcal{K}}^m\}u^r - (5-m)\Upsilon\tilde{\mathcal{K}}^m, \\ \frac{d}{ds}\tilde{w} = \alpha + \beta_r u^r - \Upsilon\tilde{w}, \\ \tilde{F}_r u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (6.12)$$

6.5. Модельная задача оптимального управления на нулевом сечении \mathcal{C}_0^H . Рассмотрим произвольную траекторию $x(t)$, входящую в странную точку $x_0 = x(0)$ при $t \rightarrow -0$. В этом случае $\mu(x(t)) \leq c'|t| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -0$ по лемме 6.1. Поэтому, если $x(t)$ лежит в множестве $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{C}^H \setminus \mathcal{C}_0^H)$ при малых $t < 0$, то образ траектории $\mathbf{B}(x(t))$ на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ стремится к \mathcal{C}_0^H при $t \rightarrow -0$.

Нас будут интересовать такие траектории $x(t)$ входящие в $x_0 = x(0)$, что хотя бы одна из главных скобок Пуассона $\mathcal{K}^m(x(t))$ имеет максимально возможный порядок $|t|^{5-m}$ при $t \rightarrow -0$. В этом случае $\mu(x(t))$ имеет порядок $|t|$ при $t \rightarrow -0$. А именно, благодаря лемме 6.1, при малых $t < 0$ выполнено неравенство $c''|t| \leq \mu(x(t)) \leq c'|t|$. Поэтому траектория $x(t)$ при малых $t < 0$ не покидает множества $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{C}^H \setminus \mathcal{C}_0^H)$, а ее образ $\mathbf{B}(x(t))$ на $\mathcal{C}^H \cap \{\mu > 0\}$ стремится к \mathcal{C}_0^H . На самом деле верно более сильное утверждение: при $t \rightarrow -0$ образ $\mathbf{B}(x(t))$ стремится к подмногообразию $\mathcal{D}_0^H \subset \mathcal{C}_0^H$, на котором обращаются в нуль все неглавные скобки Пуассона:

$$\mathcal{D}_0^H = \left\{ \mu = 0 \text{ и } \tilde{\mathcal{K}}^m = 0, \text{ где } \tilde{\mathcal{K}}^m \text{ пробегает все неглавные скобки Пуассона} \right\} \subset \mathcal{C}_0^H.$$

Более того, любая траектория поля $\mu\xi_H(x_0)$, начинающаяся на \mathcal{D}_0^H , не покидает \mathcal{D}_0^H . Действительно, на \mathcal{D}_0^H вдоль поля $\mu\xi_H(x_0)$ имеем

$$\frac{d}{ds}\mu = 0, \quad \frac{d}{ds}\tilde{\mathcal{K}}^m = 0,$$

где $\tilde{\mathcal{K}}^m$ — любая неглавная скобка Пуассона в ниспадающей системе.

¹Отметим, что образ окрестности \mathcal{C}_0^H в $\mathcal{C}^H \cap \{\mu \neq 0\}$ при отображении \mathbf{B}^{-1} не содержит проколотой окрестности точки x_0 .

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.12) на \mathcal{D}_0^H устроена так же, как и в раздутой системе (3.4) принципа максимума Понтрягина модельной задачи (2.1). Действительно, переобозначим главные скобки ниспадающей системы следующим образом:

$$\tilde{\psi}_r = \tilde{\mathcal{K}}_r^1, \quad \tilde{\phi}_r = -\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2, \quad \tilde{x}^r = B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{00r'}^3, \quad \tilde{y}^r = B^{rr'} \tilde{\mathcal{K}}_{000r'}^4, \quad (6.13)$$

где $\tilde{\phi}, \tilde{\psi} \in U^*$ и $\tilde{x}, \tilde{y} \in U$. Тогда на \mathcal{D}_0^H мы получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} \tilde{\psi}_r = -\tilde{\phi}_r - 4\Upsilon \tilde{\psi}_r, \\ \frac{d}{ds} \tilde{\phi}_r = -B_{rr'} \tilde{x}^{r'} - 3\Upsilon \tilde{\phi}_r, \\ \frac{d}{ds} \tilde{x}^r = \tilde{y}^r - 2\Upsilon \tilde{x}^r, \\ \frac{d}{ds} \tilde{y}^r = u^r - \Upsilon \tilde{y}^r; \\ \frac{d}{ds} \tilde{w} = \alpha(x_0) + \beta_r(x_0) u^r - \Upsilon \tilde{w}, \\ \tilde{\psi}_r u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (6.14)$$

Подставляя в (6.11) вместо неглавных скобок нули, получаем, что на \mathcal{D}_0^H выполнено соотношение

$$\begin{aligned} 24\Upsilon|_{\mathcal{D}_0^H} = & -6(-B^{rr'} \tilde{\psi}_r \tilde{\psi}_{r'})^2 (-B^{rr'} \tilde{\psi}_r \tilde{\phi}_{r'}) + 8(-B^{rr'} \tilde{\phi}_r \tilde{\phi}_{r'})^3 (\tilde{\phi}_r \tilde{x}^r) + \\ & + 12(-B_{rr'} \tilde{x}^r \tilde{x}^{r'})^5 (-B_{rr'} \tilde{x}^r \tilde{y}^{r'}) + 24(-B_{rr'} \tilde{y}^r \tilde{y}^{r'})^{11} (-B_{rr'} \tilde{y}^r u^{r'}). \end{aligned}$$

Таким образом, если отбросить переменную \tilde{w} , то система обыкновенных дифференциальных уравнений на \mathcal{D}_0^H исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H совпадает (после раздутия) с гамильтоновой системой (3.4) принципа максимума Понтрягина в модельной задаче (2.1), если задать на U скалярное произведение с помощью формы $-B_{rr'}$. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, получившаяся на \mathcal{C}_0^H , является, в некотором смысле, «нильпотентизацией» исходной гамильтоновой системы в окрестности странной точки x_0 .

Также отметим, что «правильность» треугольника Ω определяется формой $-B_{rr'}$. А именно, треугольник Ω является правильным, если форма $B_{rr'}$ устроена, как описано в теореме 6.1. Действительно, вершины треугольника Ω , заданные в (6.5), должны образовывать правильный треугольник относительно формы $-B_{rr'}$ с центром в начале координат. Следовательно, матрица Грама вершин треугольника Ω должна быть пропорциональна матрице (6.3) с отрицательным коэффициентом, по модулю равным длине стороны треугольника Ω .

6.6. Нильпотентизация в окрестности странной точки. Ниже будет показано, что поведение исходной гамильтоновой системы моделируется ее поведением на нулевом сечении \mathcal{C}_0^H цилиндра \mathcal{C} . Доказательство будет основано на точном исследовании отображения последования Пуанкаре в системе (6.12) в окрестности точек странных множеств Ξ и \mathcal{X} из теорем 6.2 и 6.1. Поэтому в качестве вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности x_0 мы рассмотрим систему, полученную из системы (6.12) «нильпотентизацией» по μ с помощью раздувающего отображения \mathbf{B} .

Опишем процедуру «нильпотентизации» в окрестности странной точки с помощью раздувающего отображения. Правую часть системы (6.12), полученную с помощью раздувающего отображения \mathbf{B} , необходимо преобразовать следующим образом: дифференциальные уравнения на $\tilde{\mathcal{K}}$ и \tilde{w} переносятся на весь цилиндр \mathcal{C} с нулевого сечения \mathcal{C}_0^H без изменений, а правая часть дифференциального уравнения на μ линейаризуется по μ в окрестности нулевого сечения (т.е. отбрасываются члены порядка $o(\mu)$). В результате получаем систему (все суммирования по совпадающему верхнему и нижнему индексу r' ведутся по $r' = 1, 2, 3$)

$$\frac{d}{ds} \mu = \mu \Upsilon(0, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u), \quad (6.15a)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{K}}_r^1 = \tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'r}^2 u^{r'} - 4\tilde{\mathcal{K}}_r^1 \Upsilon, \quad (6.15b)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{K}}_{ir}^2 = \tilde{\mathcal{K}}_{0ir}^3 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'ir}^3 u^{r'} - 3\tilde{\mathcal{K}}_{ir}^2 \Upsilon, \quad (6.15c)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{K}}_{jir}^3 = \tilde{\mathcal{K}}_{0jir}^4 + \tilde{\mathcal{K}}_{r'jir}^4 u^{r'} - 2\tilde{\mathcal{K}}_{jir}^3 \Upsilon, \quad (6.15d)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 = B_{rr'} u^{r'} - \tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 \Upsilon, \quad (6.15e)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{\mathcal{K}}_{kzir}^4 = -\tilde{\mathcal{K}}_{kzir}^4 \Upsilon, \quad \text{если } \mathcal{K}_{kzir}^4 \text{ — неглавная скобка,} \quad (6.15f)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{w} = \alpha(x_0) + \beta_r(x_0) u^r - \Upsilon(0, \tilde{\mathcal{K}}, \tilde{w}, u) \tilde{w}, \quad (6.15g)$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_r^1 u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \quad (6.15h)$$

Перепишем эту систему в исходных (не раздутых) координатах \mathcal{K} и w . После применения обратного отображения \mathbf{B}^{-1} и обратной замены параметров времени s и t получим (все суммирования по совпадающему верхнему и нижнему индексу r' ведутся по $r' = 1, 2, 3$)

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_r^1 = \mathcal{K}_{0r}^2 + \mathcal{K}_{r'r}^2 u^{r'}, \quad (6.16a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_{ir}^2 = \mathcal{K}_{0ir}^3 + \mathcal{K}_{r'ir}^3 u^{r'}, \quad (6.16b)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_{jir}^3 = \mathcal{K}_{0jir}^4 + \mathcal{K}_{r'jir}^4 u^{r'}, \quad (6.16c)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_{000r}^4 = B_{rr'} u^{r'}, \quad (6.16d)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{K}_{kzir}^4 = 0, \quad \text{если } \mathcal{K}_{kzir}^4 \text{ — неглавная скобка,} \quad (6.16e)$$

$$\frac{d}{dt} w = \alpha(x_0) + \beta_r(x_0) u^r, \quad (6.16f)$$

$$\mathcal{K}_r^1 u^r \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \quad (6.16g)$$

Таким образом, «нильпотентизация» по μ в окрестности странной точки с помощью раздувающего отображения \mathbf{B} приводит к системе (6.16), которая фактически получена из системы (6.7) заменой функций α и β_r , а также скобок пятого порядка их значениями в точке x_0 .

Как было сказано выше, система (6.15) совпадает на нулевом сечении \mathcal{C}_0^H с системой (6.10), дифференциальные уравнения на $\tilde{\mathcal{K}}$ и \tilde{w} не зависят от μ , а правая часть дифференциального уравнения на μ получена из (6.10) линеаризацией по μ в окрестности $\mathcal{C}_0^H = \mathcal{C}^H \cap \{\mu = 0\}$.

Отметим три важных факта, касающихся системы (6.15):

1. Правая часть дифференциальных уравнений на $\tilde{\mathcal{K}}$ не зависит от \tilde{w} и μ . Поэтому после точного отыскания координат $\tilde{\mathcal{K}}$ на траектории системы (6.15) $\ln \mu$ и \tilde{w} могут быть найдены прямым интегрированием.
2. При постоянном управлении поведение неглавных скобок Пуассона никак не связано с поведением главных скобок Пуассона (поведение главных скобок влияет лишь на момент переключения управления).

Таким образом, на сечении \mathcal{D}_0^H для исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H мы можем найти любую оптимальную траекторию в модельной задаче оптимального управления (2.1). Действительно, рассмотрим произвольную траекторию $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t))$ принципа максимума Понтрягина модельной задачи (2.1), лежащую на M_+ (см. следствие 2.7), т.е. траекторию, входящую в начало координат. По теореме 2.1 эта траектория входит в начало координат при $t = T(x(0), y(0))$. Эта траектория задает с помощью (6.13) главные скобки Пуассона \mathcal{K} как функции времени t при $t < T(x(0), y(0))$. Чтобы получить траекторию системы (6.16), необходимо еще определить неглавные скобки Пуассона \mathcal{K} и w как функции времени. Мы сделаем это следующим образом. Положим неглавные скобки \mathcal{K} (как функции времени) равными нулю тождественно.

Функцию $w(t)$ определим из последнего уравнения системы (6.16):

$$w(t) = w_0 + \alpha(x_0) \left(t - T(x(0), y(0)) \right) + \beta_r(x_0) y^r(t).$$

Поскольку нас интересуют траектории, входящие в странную точку x_0 , положим $w_0 = w(0) = 0$. Получившаяся траектория по построению удовлетворяет обыкновенным дифференциальным уравнениям «нильпотентизованной» системы (6.16). Таким образом, мы построили отображение Π_+ из $M_+ \subset \{(x, y, \phi, \psi)\}$ в пространство $\{(\mathcal{K}, w)\}$, заданное формулами

$$\Pi_+ : \begin{cases} \mathcal{K}_r^1 = \psi_r, & \mathcal{K}_{0r}^2 = -\phi_r, & \mathcal{K}_{00r}^3 = B_{r'r} x^{r'}, & \mathcal{K}_{000r}^4 = B_{r'r} y^{r'}, \\ \mathcal{K} = 0 & \text{для всех неглавных скобок } \mathcal{K}, \\ w = \beta_r(x_0) y^r - \alpha(x_0) T(x(0), y(0)). \end{cases}$$

Лемма 6.2. *Построенное отображение $\Pi_+ : M_+ \rightarrow \{(\mathcal{K}, w)\}$ является эквивариантной инъекцией, т.е. уважает действие группы \mathbb{R}_+ :*

$$\Pi_+ \circ g(\lambda) = g_H(x_0)(\lambda) \circ \Pi_+.$$

Более того, отображение Π_+ является непрерывным на M_+ и переводит траектории гамильтоновой системы (2.3) модельной задачи (2.1) на M_+ в траектории «нильпотентизованной» системы (6.16).

Если к тому же $dG(x_0) = 0$, то отображение Π_+ является локально липшицевым.

Доказательство. Отображение Π_+ является инъективным и эквивариантным по построению. Непрерывность Π_+ на $M_+ \setminus \{0\}$ следует из теоремы 2.1, в которой, помимо прочего, доказано, что функция $T(\cdot)$ непрерывна. Отображение Π_+ переводит траектории системы (2.3) в траектории системы (6.16) по построению.

Если $dG(x_0) = 0$, то $x(t) = x_0$ является траекторией исходного гамильтониана $\mathcal{H} = G + F_r u^r$ при $u = 0$. Поэтому $\mathcal{K}(t) = 0$, $w(t) = 0$ является траекторией системы (6.7) при $u = 0$. Поэтому необходимо $\alpha(x_0) = 0$ и отображение Π_+ не содержит слагаемого с $T(x(0), y(0))$ и потому является локально липшицевым согласно теореме 2.1. \square

Таким образом, мы можем отыскать любую траекторию системы (2.3) в «нильпотентизованной» системе (6.16). Однако в исходной системе (6.7) эти траектории, вообще говоря, отсутствуют. Однако траектории множеств \mathcal{X} (из теоремы 5.4) и Ξ (из теоремы 3.1) все же удается отыскать в исходной гамильтоновой системе. Для этого сначала необходимо спроектировать множества $\Pi_+(\mathcal{X})$ и $\Pi_+(\Xi)$ на \mathcal{C}_0^H , а потом поднять каждую траекторию с нулевого сечения \mathcal{C}_0^H с помощью теоремы Адамара—Перрона.

Итак, в силу эквивариантности отображения Π_+ корректно определено отображение $\Pi_+/g : M_+/g \rightarrow \mathcal{C}_0^H$. Более того, образ M_+/g лежит в \mathcal{D}_0^H . Поскольку векторное поле $\mu\xi_H(x_0)$ раздутой «нильпотентизованной» системы (6.15) и векторное поле $\mu\xi$ раздутой модельной системы (3.4) также сохраняются действием группы $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, то любая траектория поля $\mu\xi$ на M_+/g переходит в траекторию поля $\mu\xi_H(x_0)$.

Теперь перенесем множества \mathcal{X} и Ξ из модельной задачи оптимального управления на нулевое сечение \mathcal{C}_0^H . Определим множества

$$\mathcal{X}_H^0(x_0) = (\Pi_+/g)(\mathcal{X}/g) \subset \mathcal{D}_0^H, \quad \Xi_H^0(x_0) = (\Pi_+/g)(\Xi/g) \subset \mathcal{D}_0^H.$$

Отметим, что множество $\mathcal{X}_H(x_0)$ корректно определено для гамильтоновой системы с гамильтонианом H , только если треугольник Ω является правильным относительно формы $B_{r'r'}$ или, другими словами, если форма $B_{r'r'}$ устроена, как описано в условии теоремы 6.1.

6.7. Отображение последования Пуанкаре в гамильтоновой системе. В предыдущем пункте мы построили множества $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и $\Xi_H^0(x_0)$ на $\mathcal{D}_0^H \subset \mathcal{C}_0^H$ в общей гамильтоновой системе с гамильтонианом H . Однако при обратном отображении \mathbf{B}^{-1} сечение \mathcal{C}_0^H целиком перейдет в странную точку x_0 . Поэтому для того чтобы отыскать траектории исходной гамильтоновой системы, мы применим теорему Адамара—Перрона к каждой траектории из множеств $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ на \mathcal{D}_0^H . Мы покажем, что их устойчивые многообразия уже не лежат в нулевом сечении \mathcal{C}_0^H , а их объединение

и дает искомые множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ и $\Xi_H(x_0)$, а неустойчивые многообразия лежат в \mathcal{C}_0^H и не дают никакого вклада в исходную гамильтонову систему.

Мы будем применять теорему Адамара—Перрона к отображению последования Пуанкаре в окрестности произвольной траектории γ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$. Любая траектория $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{\phi}(t), \hat{\psi}(t), \hat{u}(t))$ из множества Ξ или \mathcal{X} (в модельной задаче (2.1)) пересекает поверхность переключения только трансверсально, и поэтому в окрестности любой ее точки на поверхности переключения определено гладкое отображение последования Пуанкаре. В этом пункте мы перенесем структуру этого отображения из модельной задачи на траекторию γ сначала в «нильпотентизованую» систему (6.15), а потом и в исходную систему (6.12).

Нас будет интересовать дифференциал отображения последования Пуанкаре $\bar{\Phi}_H$ поверхности переключения на себя в «нильпотентизованой» системе (6.15) в окрестности произвольной траектории на \mathcal{D}_0^H (отображение последования в исходной (не «нильпотентизованой») гамильтоновой системе мы будем обозначать через Φ_H без надчеркивания).

Для построения отображения $\bar{\Phi}_H$ в окрестности точки $z_0 = \gamma(0)$ на траектории $\gamma(t)$ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$ воспользуемся следующими упрощающим соображением: поскольку $\gamma(t)$ пересекает поверхность переключения \mathcal{S}^H трансверсально в последовательных точках z_0 и $z_1 = \bar{\Phi}_H(z_0) = \gamma(\tau)$, то на любой траектории в окрестности $\gamma(t)$ управление также постоянно между точками пересечения с \mathcal{S}^H и совпадает с управлением на $\gamma(t)$. Поэтому будем считать, что управление в «нильпотентизованой» системе (6.15) постоянно, и вычислим $d\bar{\Phi}_H$ как композицию линеаризации отображения вдоль системы (6.15) на фиксированное время τ и проекции на касательное пространство к \mathcal{S}^H вдоль векторного поля системы (6.15). Обозначим первое отображение через $\Phi_H(\tau)$ и вычислим его.

Уравнение в вариациях для системы (6.15) в окрестности γ устроено следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\Phi_H(t) = M\Phi_H(t).$$

Поскольку траектория γ лежит в \mathcal{D}_0^H , то все неглавные скобки обращаются в нуль на γ . Так как функция Υ не зависит от μ и неглавных скобок $\tilde{\mathcal{K}}$, то матрица M имеет следующую блочную структуру (здесь и далее $\Upsilon(t) = \Upsilon(\gamma(t))$, а I — единичная матрица нужного размера):

	μ	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$				Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$			\tilde{w}
	$\Upsilon(t)$	0	0	0	0	0	0	0	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_r^1$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4$	0	*	*	*	*	*	*	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^2$	0	0	0	0	0	$-3\Upsilon(t)I$	*	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^3$	0	0	0	0	0	0	$-2\Upsilon(t)I$	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^4$	0	0	0	0	0	0	0	$-\Upsilon(t)I$	0
\tilde{w}	0	*	*	*	*	*	*	*	$-\Upsilon(t)I$

Матрица M является блочно-нижнетреугольной матрицей с тремя блоками на диагонали, причем центральный блок (отвечающий переменным $\tilde{\mathcal{K}}$) является блочно-верхнетреугольным. Поэтому матрица $\Phi_H(t)$ имеет ту же структуру:

$\mu \begin{cases} \mu \\ \lambda \end{cases}$	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$ 0	Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$ 0	\tilde{w} 0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$ { 0	*	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$ { 0	0	C	0
\tilde{w} { 0	*	*	W

причем матрица W пропорциональна единичной, а матрица C является верхнетреугольной.

Выпишем явно дифференциальные уравнения на λ , W и C :

$$\frac{d}{dt}\lambda = \Upsilon(t)\lambda, \quad \lambda(0) = 1.$$

Обозначим $\lambda(\tau) = \rho$, где τ — время движения по γ от z_0 до z_1 . Далее,

$$\frac{d}{dt}W = -\Upsilon(t)W, \quad W(0) = I \implies W(\tau) = \rho^{-1}I.$$

Уравнение на матрицу C имеет вид

$$\frac{d}{dt}C = \begin{pmatrix} -3\Upsilon(t) & * & * \\ 0 & -2\Upsilon(t) & * \\ 0 & 0 & -\Upsilon(t) \end{pmatrix} C, \quad C(0) = I.$$

Поэтому диагональные блоки C будут соответственно $\rho^{-3}I$, $\rho^{-2}I$ и $\rho^{-1}I$.

Вычислим теперь число ρ . Пусть траектория γ' — это поднятие γ с $C_0^H = \{\mu = 0\}$ на $\{\mu \neq 0\}$. Другими словами, координаты $\tilde{\mathcal{K}}$ и \tilde{w} на γ и γ' совпадают, но на γ' выполнено условие $\mu \neq 0$, причем траектория γ' удовлетворяет системе (6.15). Через z'_0 и z'_1 обозначены соответствующие поднятия z_0 и z_1 .

Лемма 6.3. *Обозначим $\mu_0 = \mu(z'_0)$ и $\mu_1 = \mu(z'_1)$. Тогда*

$$\frac{\mu_1}{\mu_0} = \rho.$$

Доказательство. Действительно, μ_1 есть функция начальной точки $z'_0 = (\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$, т.е. $\mu_1 = \mu_1(\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$. Очевидно, что

$$\mu_1(\kappa\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0) = \kappa\mu_1(\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}.$$

Дифференцируя это равенство по κ при $\kappa = 1$, находим

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0} = \frac{\mu_1}{\mu_0}.$$

Поскольку правая часть равенства не изменяется при умножении μ_0 на $\kappa \neq 0$, получаем, что производная $\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0}$ постоянна на всей вертикальной прямой $(\kappa\mu_0, \tilde{\mathcal{K}}_0, \tilde{w}_0)$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Однако на γ (т.е. при $\kappa = 0$) выполнено соотношение

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial \mu_0} = \lambda(\tau) = \rho,$$

что и требовалось. \square

Замечание 6.6. Если на траектории γ' отбросить координату \tilde{w} и координаты неглавных скобок $\tilde{\mathcal{K}}$ (т.е. применить отображение, обратное к Π_+/g), то получится оптимальная траектория модельной задачи (2.1). Поэтому к ней применима ключевая лемма 3.2, которая гарантирует экспоненциальную скорость стремления к 0 координаты $\mu(s)$ на ней при $s \rightarrow +\infty$.

Займемся теперь оператором проектирования касательного пространства $T_{z_1}\mathcal{C}^H$ на гиперплоскость $T_{z_1}\mathcal{S}^H$ вдоль векторного поля системы (6.15). Вообще говоря, векторное поле системы (6.15) разрывно в точке z_1 , но нас интересует тот вектор скорости, с которым траектория γ приходит в точку z_1 при $t \rightarrow \tau - 0$. Обозначим этот вектор через v . Тогда

$$v = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & 0 & * \end{array} \right)^T.$$

Ковектор α , задающий гиперплоскость $T_{z_1}\mathcal{S}^H$ имеет следующий вид:

$$\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c|c} 0 & * & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Таким образом, оператор проектирования $1 - \frac{v \otimes \alpha}{\alpha(v)}$ на $T_{z_1}\mathcal{S}^H$ вдоль v имеет следующую структуру:

$\underbrace{\mu}_{1}$	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	\tilde{w}
	0	0	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	*	0	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$	0	I	0
\tilde{w}	*	0	I

Итак, дифференциал отображения последования Пуанкаре $d\overline{\Phi}_H$ «нильпотентизованной» системы (6.15) в точке z_0 записывается в виде

$$d\overline{\Phi}_H|_{z_0} = \left(1 - \frac{v \otimes \alpha}{\alpha(v)} \right) \Phi_H(\tau)$$

и имеет следующую блочную структуру:

$$d\overline{\Phi}_H|_{z_0} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \rho & 0 & & 0 \\ \hline 0 & A & & * \\ \hline & & \rho^{-3}I & * \\ 0 & 0 & 0 & \rho^{-2}I \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & & \rho^{-1}I \\ 0 & * & & * \\ \hline & & & \rho^{-1}I \end{array} \right)$$

Замечание 6.7. Важно отметить, что матрица A получается сопряжением с помощью дифференциала отображения (6.13) из соответствующей матрицы в гамильтоновой системе принципа максимума Понтрягина (2.3) для модельной задачи (2.1). Это немедленно вытекает из сказанного в п. 6.5. Более того, поскольку все рассматриваемые траектории лежат в \mathcal{D}_0^H , то матрица сопряжения будет постоянной и не зависеть от выбора траекторий γ на \mathcal{D}_0^H .

Опишем теперь матрицу дифференциала отображения последования Пуанкаре $d\Phi_H$ уже для исходной (не «нильпотентизованной») системы (6.12). Поскольку исходная система (6.12) и «нильпотентизованная» (6.15) совпадают на \mathcal{C}_0^H , то у матриц $d\Phi_H$ и $d\overline{\Phi}_H$ заведомо совпадают все элементы вне первого столбца и первой строки. Но первая строка тоже сохраняется, так как дифференциальные уравнения на μ в системах (6.12) и (6.15) отличаются на член порядка $O(\mu^2)$ в окрестности \mathcal{C}_0^H .

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 6.4. Дифференциал $d\Phi_H$ отображения последования Пуанкаре системы (6.12) в точке $z_0 \in D_0^H \cap \mathcal{S}^H$ из $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$ на поверхности \mathcal{S}^H имеет следующий вид:

$\mu \begin{cases} \mu \\ \rho \end{cases}$	Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$				Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}$			\tilde{w}
	0	0	0	0	0	0	0	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_r^1 \{ *$					*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{0r}^2 \{ *$					*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{00r}^3 \{ *$			A		*	*	*	0
Главные скобки $\tilde{\mathcal{K}}_{000r}^4 \{ *$					*	*	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^2 \{ *$	0	0	0	0	$\rho^{-3}I$	*	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^3 \{ *$	0	0	0	0	0	$\rho^{-2}I$	*	0
Неглавные скобки $\tilde{\mathcal{K}}^4 \{ *$	0	0	0	0	0	0	$\rho^{-1}I$	0
$\tilde{w} \{ *$	*	*	*	*	*	*	*	$\rho^{-1}I$

где матрица A совпадает (с точностью до замены (6.13)) с соответствующей матрицей системы (2.3) принципа максимума Понтрягина для модельной задачи (2.1), а ρ может быть вычислено по лемме 6.3.

6.8. Окончание доказательства хаотического поведения траекторий в общей гамильтоновой системе. Лемма 6.4 позволяет воспользоваться результатами о хаотичности оптимального синтеза, полученными в модельной задаче (2.1). Однако, как уже было сказано выше, множества $\Xi_H^0(x_0) \subset C_0^H$ или $\mathcal{X}_H^0(x_0) \subset C_0^H$ построены на нулевом сечении C_0^H и перейдут в странную точку x_0 при обращении раздувающего отображения \mathbf{V}^{-1} . Поэтому для того чтобы не потерять картину хаотичного синтеза, мы для каждой оптимальной траектории из \mathcal{X} или Ξ построим с помощью теоремы Адамара—Перрона (см. [12]) двумерные устойчивые листы, которые уже будут выходить за пределы нулевого сечения C_0^H . Точнее, теорему Адамара—Перрона будем применять к отображению последования Пуанкаре Φ_H вдоль этой траектории.

Итак, зафиксируем траекторию γ из множества $\Xi_H^0(x_0)$ или множества $\mathcal{X}_H^0(x_0)$. Траектория γ является образом некоторой траектории $\hat{\gamma}$ из Ξ/g или \mathcal{X}/g при отображении Π_+/g . Обозначим точки последовательного пересечения поверхности переключения \mathcal{S}^H траекторией γ через $\dots, z_{-1}, z_0, z_1, \dots$, а траектории $\hat{\gamma}$ — через $\dots, \hat{z}_{-1}, \hat{z}_0, \hat{z}_1, \dots$. Матрицу A и число ρ из леммы 6.4, отвечающие k -й точке z_k , будем обозначать через $A(z_k) = A_k$ и $\rho(z_k) = \rho_k$ соответственно. По лемме 6.4 для гамильтоновой системы (2.3) имеем:

$$d\Phi(\hat{z}_k) = \begin{pmatrix} \rho_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее через Φ обозначено отображение последования в раздутой модельной системе поля $\mu\xi$ (см. систему (3.4)).

Сначала докажем сжатие в вертикальном направлении в исходной гамильтоновой системе с гамильтонианом H . Вообще говоря, при однократном отображении последования Φ_H , в дифференциале $d\Phi_H(z_k)$ собственное значение ρ_k может быть больше 1. Однако мы утверждаем, что лемма 3.2 гарантирует, что найдется такое натуральное N , что Φ_H^N будет сжимать в вертикальном направлении. Действительно, любая оптимальная траектория в модельной задаче попадает в начало координат за конечное время, поэтому повторяя отображение последования Пуанкаре Φ_H

достаточное число раз, мы получим сжатие в вертикальном направлении. Докажем это утверждение строго. Воспользуемся результатами, полученными для модельной задачи (2.1). Из леммы 3.2 следует, что на оптимальной траектории $\hat{\gamma}$ на M_+ выполнены неравенства

$$c_1 e^{-c_2 s} \leq \frac{\mu(\hat{\gamma}(s))}{\mu(\hat{\gamma}(0))} \leq c_3 e^{-c_4 s},$$

причем положительные константы c_j , $k = 1, \dots, 4$, не зависят от выбора траектории на M_+ . Следовательно,

$$\frac{\mu(s)}{\mu(0)} \leq \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad s \geq \frac{1}{c_4} \ln(2c_3).$$

Оценим теперь время $\sigma(z)$ перехода между двумя последовательными пересечениями поверхности переключения \mathcal{S} в точках $z \in \mathcal{S}$ и $\Phi(z) \in \mathcal{S}$ вдоль поля $\mu\xi$ по произвольной траектории из Ξ или \mathcal{X} . Функция σ непрерывна и не зависит от μ , а множества $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ компактны и не пересекаются с \mathcal{S}_{123} . Поэтому выполнена оценка

$$s_{\min} \leq \sigma(z) \leq s_{\max}$$

для некоторых неотрицательных констант s_{\min} и s_{\max} . Поскольку непрерывная функция достигает своего минимума на компакте, то $s_{\max} \geq s_{\min} > 0$. Поэтому по лемме 6.3 получаем

$$\rho_k \rho_{k+1} \dots \rho_{k+N-1} < \frac{1}{2} \quad \forall k \quad \text{при} \quad N > \frac{1}{s_{\min} c_4} \ln(2c_3).$$

Таким образом, зафиксировав произвольное достаточно большое число N и работая только с N -й степенью отображений Φ и Φ_H вместо них самих, мы можем считать, что в вертикальном направлении происходит сжатие. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 6.5. *Зафиксируем число¹*

$$N > \frac{1}{s_{\min} c_4} \ln(2c_3)$$

и введем обозначения

$$\Theta = \Phi^{-N}, \quad \Theta_H = \Phi_H^{-N}.$$

Положим также

$$\varrho(z_{kN}) = \varrho_k = \left(\rho_{kN-1} \rho_{kN-2} \dots \rho_{(k-1)N} \right)^{-1} > 2,$$

$$\mathcal{A}(z_{kN}) = \mathcal{A}_k = \left(A_{kN-1} A_{kN-2} \dots A_{(k-1)N} \right)^{-1}.$$

Тогда

$$d\Theta(\hat{z}_{kN}) = \begin{pmatrix} \varrho_k & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_k \end{pmatrix},$$

а матрица $d\Theta_H(z_{kN})$ имеет структуру из леммы 6.4 с заменой ρ на ϱ_k и A на \mathcal{A}_k .

Следующим шагом, необходимым для применения теоремы Адамара—Перрона, является аккуратное изучение структуры матриц A_k . Мы докажем, что в некотором специальном разложении касательного пространства все матрицы A_k превращаются в блочно-диагональные. Поэтому для удобства обозначим

$$d\Phi(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \rho(\hat{z}) & 0 \\ 0 & A(\hat{z}) \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

где линейный оператор $A(\hat{z})$ действует из $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S})$ в $T_{\Phi(\hat{z})}\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}$.

Лемма 6.6. *В точках \hat{z} каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ существует такое разложение касательного пространства²*

$$T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \hat{U}(\hat{z}) \oplus \hat{V}(\hat{z}), \quad \dim \hat{U}(\hat{z}) = 1, \quad \dim \hat{V}(\hat{z}) = 5,$$

¹Число N не зависит от выбора траектории z_k и может быть выбрано одинаковым для всех траекторий.

²Напомним, что $\dim \mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S} = 6$.

и метрика на них, что оператор $A(\hat{z})$ принимает вид

$$A(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}(\hat{z}) & 0 \\ 0 & \hat{\delta}(\hat{z}) \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{\alpha}(\hat{z}) : \hat{U}(\hat{z}) \rightarrow \hat{U}(\Phi(\hat{z})), \quad \hat{\delta}(\hat{z}) : \hat{V}(\hat{z}) \rightarrow \hat{V}(\Phi(\hat{z})).$$

При этом $\hat{\alpha}$ — сжимающий оператор, а $\hat{\delta}$ — растягивающий, т.е.

$$\|\hat{\alpha}(\hat{z})\| < 1, \quad \|\hat{\delta}(\hat{z})^{-1}\| < 1 \quad \forall \hat{z}.$$

Более того, и метрика, и разложение $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \hat{U}(\hat{z}) \oplus \hat{V}(\hat{z})$ непрерывно зависят от \hat{z} .

Доказательство. Доказательство леммы состоит из двух частей. Сначала мы выберем «почти» правильное разложение касательного пространства в точках каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$, в которых матрица $A(\hat{z})$ становится «почти» блочно-диагональной, а потом трансформируем это разложение.

Итак, мы утверждаем, что в окрестности каждого из множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ существуют такие локальные координаты и риманова метрика, что

$$A^{-1}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \alpha(\hat{z}) & \beta(\hat{z}) \\ \gamma(\hat{z}) & \delta(\hat{z}) \end{pmatrix}, \quad (6.18)$$

для каждой точки \hat{z} из этих окрестностей. Здесь $\alpha(\hat{z})$ — число, $\beta(\hat{z})$ и $\gamma(\hat{z})$ — матрицы 1×5 и 5×1 , а $\delta(\hat{z})$ — матрица 5×5 . При этом найдутся четыре таких положительных числа u_x , u_y , v_x и v_y , что

$$\|\alpha(\hat{z})^{-1}\| \leq u_x^{-1}, \quad \|\beta(\hat{z})\| \leq u_y, \quad \|\gamma(\hat{z})\| \leq v_x, \quad \|\delta(\hat{z})\| \leq v_y.$$

Более того, диагональные элементы устроены гиперболически, а элементы на побочной диагонали малы по сравнению с ними. Точнее, числа u_x , u_y , v_x и v_y удовлетворяют неравенствам

$$u_x > 1 > v_y, \quad (u_x - 1)(1 - v_y) > u_y v_x. \quad (6.19)$$

Действительно, существование таких локальных координат в окрестности множества $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ следует из теоремы Гробмана—Хартмана (см. [12]) и трансверсальности гомоклинической точки (см. лемму 3.6): множество $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ в теореме 3.1 можно уменьшить при необходимости так, что в произвольной фиксированной метрике норма элементов на побочной диагонали будет сколь угодно мала, а диагональные элементы будут растягивающими и сжимающими операторами тех размерностей, что и в шестизвенном цикле, т.е. 5 и 1.

Для множества $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ этот факт следует из явной формулы локальных координат. Приведем эти координаты на поверхности переключения $\psi_1 = \psi_3$, с нормализацией $\phi_2 = 1$. Сначала проведем редукцию к шести переменным:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(y_1 - y_3), & \pi_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(y_1 - 2y_2 + y_3), & \pi_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_3), \\ \pi_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 - 2x_2 + x_3), & \pi_5 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\phi_1 - \phi_3), & \pi_6 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3). \end{aligned}$$

Теперь в каждой из 16 областей $AA.AA$, $AA.AC$, \dots , $CC.CC$ произведем линейную замену координат $\eta = M\pi$, где постоянные матрицы M для 16 областей имеют вид

$$M_{AA.AA} = \begin{pmatrix} -0,5913 & -1,0677 & 0,0683 & 0,2937 & -0,0114 & 0,0316 \\ 0,0848 & -1,3179 & -0,9326 & -0,6262 & -0,0104 & 0,0737 \\ -0,0023 & 0,6606 & 0,2677 & 0,7432 & 0,4258 & 0,2468 \\ -0,2024 & 0,8600 & -0,7595 & 0,9189 & -1,5610 & 0,7982 \\ 0,5347 & -0,1061 & 1,3964 & 0,6468 & 2,3193 & -2,1665 \\ -1,1822 & 0,5279 & -2,5279 & -0,2730 & -3,8024 & 2,6844 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_{AA.AC} &= \begin{pmatrix} -0,3772 & -0,6812 & 0,0436 & 0,1874 & -0,0072 & 0,0201 \\ 0,0603 & -0,9371 & -0,6631 & -0,4452 & -0,0074 & 0,0524 \\ -0,0016 & 0,4697 & 0,1903 & 0,5285 & 0,3028 & 0,1755 \\ -0,1439 & 0,6115 & -0,5401 & 0,6534 & -1,1101 & 0,5675 \\ 0,3801 & -0,0754 & 0,9930 & 0,4599 & 1,6493 & -1,5406 \\ -0,8407 & 0,3754 & -1,7976 & -0,1940 & -2,7037 & 1,9088 \end{pmatrix}, \\
M_{AA.CA} &= \begin{pmatrix} -0,3971 & -0,6704 & 0,1033 & 0,2038 & 0,0053 & -0,0444 \\ 0,1116 & -0,2444 & -0,2931 & -0,2188 & 0,0594 & 0,0028 \\ 0,0819 & 0,6562 & 0,5188 & 0,8690 & 1,3697 & 0,2361 \\ -0,0770 & 0,5547 & -0,3887 & 0,6313 & -0,8937 & 0,5253 \\ 0,2177 & -0,0065 & 0,6332 & -0,1496 & 1,2464 & 0,3705 \\ -0,1329 & 0,0749 & -0,4715 & -0,2392 & -0,9990 & 0,9895 \end{pmatrix}, \\
M_{AA.CC} &= \begin{pmatrix} -0,2941 & -0,4965 & 0,0765 & 0,1509 & 0,0039 & -0,0329 \\ 0,1180 & -0,2584 & -0,3099 & -0,2314 & 0,0629 & 0,0030 \\ 0,0865 & 0,6937 & 0,5485 & 0,9186 & 1,4479 & 0,2496 \\ -0,0815 & 0,5864 & -0,4109 & 0,6674 & -0,9447 & 0,5552 \\ 0,2302 & -0,0068 & 0,6694 & -0,1581 & 1,3176 & 0,3916 \\ -0,1405 & 0,0791 & -0,4985 & -0,2529 & -1,0561 & 1,0461 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.AA} &= \begin{pmatrix} -1,3472 & -1,2301 & 0,8883 & 0,9348 & -0,4362 & -0,0239 \\ 0,1653 & -1,7355 & -1,7124 & -0,5395 & 0,6959 & 0,2788 \\ 0,3610 & 0,1926 & 2,3424 & -0,1152 & 4,4150 & -0,4106 \\ -0,2216 & 1,5281 & -0,9719 & 1,9245 & -2,4828 & 1,4865 \\ 1,7063 & -1,3513 & 3,2009 & -1,9034 & 4,1924 & -0,2951 \\ -0,4124 & 0,3207 & -1,2318 & -0,1906 & -2,4337 & 2,6356 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.AC} &= \begin{pmatrix} -1,5370 & -1,4034 & 1,0134 & 1,0666 & -0,4977 & -0,0273 \\ 0,1456 & -1,5288 & -1,5084 & -0,4752 & 0,6131 & 0,2456 \\ 0,3180 & 0,1697 & 2,0633 & -0,1015 & 3,8890 & -0,3616 \\ -0,1951 & 1,3460 & -0,8561 & 1,6952 & -2,1869 & 1,3094 \\ 1,5029 & -1,1902 & 2,8195 & -1,6767 & 3,6929 & -0,2599 \\ -0,3632 & 0,2825 & -1,0851 & -0,1678 & -2,1437 & 2,3215 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.CA} &= \begin{pmatrix} -1,4918 & -1,2360 & 1,0849 & 0,9744 & -0,6000 & -0,1150 \\ -0,5929 & 0,5930 & 1,2489 & 0,5188 & -0,7829 & -0,2039 \\ 0,2087 & -2,0370 & 0,9934 & -2,4691 & 2,5841 & -1,8853 \\ 0,8390 & 1,3864 & 4,1958 & 1,8630 & 10,4128 & 0,9577 \\ 1,8997 & -0,1209 & 6,1266 & -1,0920 & 12,6540 & 3,2477 \\ -0,5410 & 0,3880 & -1,7381 & -0,6350 & -3,6204 & 3,9319 \end{pmatrix}, \\
M_{AC.CC} &= \begin{pmatrix} -1,4492 & -1,2008 & 1,0539 & 0,9467 & -0,5829 & -0,1117 \\ -0,6064 & 0,6066 & 1,2774 & 0,5307 & -0,8008 & -0,2085 \\ 0,2134 & -2,0836 & 1,0162 & -2,5256 & 2,6432 & -1,9285 \\ 0,8583 & 1,4182 & 4,2918 & 1,9056 & 10,6511 & 0,9796 \\ 1,9431 & -0,1237 & 6,2668 & -1,1170 & 12,9436 & 3,3220 \\ -0,5534 & 0,3969 & -1,7778 & -0,6495 & -3,7032 & 4,0219 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.AA} &= \begin{pmatrix} -0,8312 & -1,5009 & 0,0960 & 0,4129 & -0,0159 & 0,0445 \\ 0,1017 & -1,5797 & -1,1178 & -0,7505 & -0,0125 & 0,0883 \\ -0,0028 & 0,7918 & 0,3209 & 0,8908 & 0,5104 & 0,2957 \\ -0,2426 & 1,0308 & -0,9104 & 1,1014 & -1,8712 & 0,9568 \\ 0,6409 & -0,1272 & 1,6739 & 0,7752 & 2,7801 & -2,5969 \\ -1,4171 & 0,6327 & -3,0301 & -0,3272 & -4,5577 & 3,2177 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{CA.AC} &= \begin{pmatrix} -0,5590 & -1,0094 & 0,0646 & 0,2777 & -0,0107 & 0,0300 \\ 0,0284 & -1,2522 & -1,0645 & -0,6260 & -0,2454 & 0,2924 \\ 0,0136 & 0,5899 & 0,2568 & 0,6980 & 0,4571 & 0,2243 \\ -0,1603 & 0,7743 & -0,6799 & 0,8766 & -1,3837 & 0,6740 \\ 0,4698 & 0,0295 & 1,3318 & 0,6845 & 2,0995 & -2,0201 \\ -1,1106 & 0,4685 & -2,3717 & -0,2692 & -3,5420 & 2,4780 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.CA} &= \begin{pmatrix} -0,6987 & -1,1795 & 0,1817 & 0,3586 & 0,0093 & -0,0782 \\ 0,2866 & -0,6276 & -0,7527 & -0,5620 & 0,1527 & 0,0072 \\ 0,2102 & 1,6846 & 1,3320 & 2,2311 & 3,5163 & 0,6063 \\ -0,1980 & 1,4241 & -0,9979 & 1,6208 & -2,2944 & 1,3485 \\ 0,5591 & -0,0166 & 1,6256 & -0,3841 & 3,1999 & 0,9511 \\ -0,3412 & 0,1922 & -1,2105 & -0,6143 & -2,5648 & 2,5404 \end{pmatrix}, \\
M_{CA.CC} &= \begin{pmatrix} -0,5165 & -0,8721 & 0,1343 & 0,2651 & 0,0068 & -0,0579 \\ 0,2310 & -0,5057 & -0,6066 & -0,4529 & 0,1230 & 0,0059 \\ 0,1694 & 1,3576 & 1,0734 & 1,7980 & 2,8339 & 0,4887 \\ -0,1595 & 1,1476 & -0,8042 & 1,3062 & -1,8490 & 1,0867 \\ 0,4506 & -0,0134 & 1,3100 & -0,3096 & 2,5789 & 0,7664 \\ -0,2750 & 0,1549 & -0,9756 & -0,4950 & -2,0670 & 2,0473 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.AA} &= \begin{pmatrix} -1,7029 & -1,5549 & 1,1228 & 1,1818 & -0,5513 & -0,0303 \\ 0,2242 & -2,3541 & -2,3229 & -0,7318 & 0,9440 & 0,3782 \\ 0,4897 & 0,2613 & 3,1773 & -0,1562 & 5,9887 & -0,5568 \\ -0,3006 & 2,0727 & -1,3182 & 2,6104 & -3,3677 & 2,0164 \\ 2,3143 & -1,8329 & 4,3417 & -2,5818 & 5,6867 & -0,4003 \\ -0,5593 & 0,4349 & -1,6709 & -0,2585 & -3,3011 & 3,5749 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.AC} &= \begin{pmatrix} -2,1389 & -1,9529 & 1,4103 & 1,4843 & -0,6925 & -0,0380 \\ 0,2145 & -2,2524 & -2,2225 & -0,7003 & 0,9032 & 0,3618 \\ 0,4685 & 0,2499 & 3,0400 & -0,1494 & 5,7300 & -0,5328 \\ -0,2876 & 1,9832 & -1,2612 & 2,4976 & -3,2221 & 1,9292 \\ 2,2144 & -1,7536 & 4,1542 & -2,4703 & 5,4411 & -0,3829 \\ -0,5352 & 0,4161 & -1,5988 & -0,2473 & -3,1585 & 3,4205 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.CA} &= \begin{pmatrix} -2,1848 & -1,8102 & 1,5888 & 1,4272 & -0,8787 & -0,1684 \\ -0,9631 & 0,3038 & 0,8826 & 0,2771 & -2,6832 & -1,3049 \\ 0,1995 & -2,1397 & 1,4883 & -2,6630 & 3,2584 & -1,9360 \\ 0,9908 & 1,4063 & 4,5037 & 1,9791 & 11,6620 & 0,8665 \\ 2,2134 & -0,2631 & 6,8269 & -1,3631 & 14,3844 & 3,5996 \\ -0,6009 & 0,2926 & -2,2588 & -0,8628 & -4,4148 & 4,3259 \end{pmatrix}, \\
M_{CC.CC} &= \begin{pmatrix} -1,8994 & -1,5738 & 1,3813 & 1,2407 & -0,7640 & -0,1464 \\ -0,6747 & 0,6749 & 1,4212 & 0,5903 & -0,8909 & -0,2319 \\ 0,2374 & -2,3179 & 1,1304 & -2,8096 & 2,9404 & -2,1454 \\ 0,9548 & 1,5775 & 4,7743 & 2,1199 & 11,8485 & 1,0898 \\ 2,1615 & -0,1375 & 6,9713 & -1,2427 & 14,3987 & 3,6954 \\ -0,6155 & 0,4415 & -1,9777 & -0,7225 & -4,1196 & 4,4740 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В этих координатах константы u_x , u_y и т. д. для отображения последования Пуанкаре на областях $AA.AA$, $AA.AC$, \dots , $CC.CC$ удовлетворяет неравенствам

$$|u_x| > 1,2641, \quad \|u_y\| < 0,3894, \quad \|v_x\| < 0,3894, \quad \|v_y\| < 0,4000.$$

Далее рассуждения для множеств $(\Xi/g) \cap \mathcal{S}$ и $(\mathcal{X}/g) \cap \mathcal{S}$ совпадают. Поэтому мы будем обозначать через X любое из этих множеств.

Таким образом, в каждой точке \hat{z} из X определено разложение касательного пространства

$$T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = U(\hat{z}) \oplus V(\hat{z}),$$

непрерывно зависящее от $\hat{z} \in X$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{z}) : U(\hat{z}) &\rightarrow U(\Phi^{-1}(\hat{z})), & \beta(\hat{z}) : V(\hat{z}) &\rightarrow U(\Phi^{-1}(\hat{z})), \\ \gamma(\hat{z}) : U(\hat{z}) &\rightarrow V(\Phi^{-1}(\hat{z})) & \delta(\hat{z}) : V(\hat{z}) &\rightarrow V(\Phi^{-1}(\hat{z})) \end{aligned}$$

— линейные операторы. В нашем случае $\dim U(\hat{z}) = 1$, а $\dim V(\hat{z}) = 5$. Однако это не существенно для дальнейшего, и мы будем производить рассуждения для произвольных размерностей $\dim U(\hat{z}) = m_1$ и $\dim V(\hat{z}) = m_2$ (соответственно, $\alpha(\hat{z})$ будем считать не числом, а обратимым, растягивающим в u_x раз линейным отображением). Векторы пространств $U(\hat{z})$ и $V(\hat{z})$ будем обозначать буквами u и v .

Итак, мы ищем такую линейную замену координат $\tilde{v} = v + \mathcal{R}(\hat{z})u$ в каждом пространстве $T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S})$, что нижний левый элемент в матрице $A^{-1}(\hat{z})$ обращается в нуль. Найдем $\mathcal{R}(\hat{z})$, т.е. если

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R}(\hat{z}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1}(\hat{z}) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(\hat{z}) & \beta(\hat{z}) \\ \gamma(\hat{z}) & \delta(\hat{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mathcal{R}(\hat{z}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

или, иначе,

$$A^{-1}(\hat{z}) \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(\hat{z}) & \tilde{\beta}(\hat{z}) \\ \tilde{\gamma}(\hat{z}) & \tilde{\delta}(\hat{z}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}(\hat{z}) = \alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}), \\ \tilde{\beta}(\hat{z}) = \beta(\hat{z}), \\ \tilde{\gamma}(\hat{z}) = \gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\alpha(\hat{z}) - \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}), \\ \tilde{\delta}(\hat{z}) = \delta(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z}). \end{cases}$$

Поскольку нас интересует такая замена, что $\tilde{\gamma}(\hat{z}) = 0$ для всех $\hat{z} \in X$, то мы получаем

$$\mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) = -(\gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1}. \quad (6.20)$$

Будем искать оператор $\mathcal{R}(\hat{z})$ ограниченной нормы (независимо от \hat{z}), т.е. $\|\mathcal{R}(\hat{z})\| \leq \varepsilon$ для некоторого фиксированного $\varepsilon > 0$ и любого $\hat{z} \in X$. Произведем точный выбор $\varepsilon > 0$. Для обратимости оператора $\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z})$ достаточно, чтобы

$$u_x - \varepsilon u_y > 0.$$

Для того, чтобы отображение в правой части равенства (6.20) давало оператор, по норме не превосходящий ε , достаточно, чтобы

$$\frac{v_x + \varepsilon v_y}{u_x - \varepsilon u_y} \leq \varepsilon.$$

Теперь наложим еще одно требование на ε , а именно, выберем его так, чтобы отображение в правой части равенства (6.20) было сжимающим. Дифференциал этого отображения имеет вид

$$(\delta(\hat{z}) + \mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z}))\beta(\hat{z}))d\mathcal{R}(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1}.$$

Поэтому достаточным условием сжатия является

$$\frac{v_y + \varepsilon u_y}{u_x - \varepsilon u_y} < 1.$$

Последнее, что необходимо потребовать от ε , это чтобы оператор $A^{-1}(\hat{z})$ сохранял гиперболическую структуру, а именно,

$$\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < 1, \quad \|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < 1.$$

Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{u_x - \varepsilon u_y} < 1, \quad v_y + \varepsilon u_y < 1.$$

Объединяя все полученные условия на $\varepsilon > 0$, получаем систему

$$\begin{cases} u_y \varepsilon < u_x, \\ u_y \varepsilon^2 - (u_x - v_y) \varepsilon + v_x \leq 0, \\ u_y \varepsilon < \frac{1}{2}(u_x - v_y), \\ u_y \varepsilon < u_x - 1, \\ u_y \varepsilon < 1 - v_y. \end{cases} \quad (6.21)$$

Докажем, что эта система совместна по ε . Если $u_y = 0$, то система имеет тривиальное решение $\varepsilon \geq \frac{v_x}{u_x - v_y}$. Разберем теперь случай $u_y > 0$. Первое условие системы (6.21) следует из четвертого; третье — из четвертого и пятого. Таким образом, после замены $C = u_y \varepsilon$ получаем равносильную систему

$$\begin{cases} C^2 - (u_x - v_y)C + u_y v_x < 0, \\ C < u_x - 1, \\ C < 1 - v_y. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена в первом неравенстве положителен. Действительно, из неравенств (6.19) следует, что

$$D = (u_x - v_y)^2 - 4u_y v_x = ((u_x - 1) + (1 - v_y))^2 - 4u_y v_x \geq 4(u_x - 1)(1 - v_y) - 4u_y v_x > 0.$$

Поэтому система совместна, если меньший корень квадратного трехчлена лежит левее обоих чисел $u_x - 1$ и $1 - v_y$, а именно,

$$\frac{u_x - v_y - \sqrt{D}}{2} < u_x - 1, \quad \frac{u_x - v_y - \sqrt{D}}{2} < 1 - v_y,$$

или, иначе,

$$\sqrt{D} > 2 - u_x - v_y, \quad \sqrt{D} > u_x + v_y - 2.$$

Поэтому осталось доказать, что

$$\sqrt{D} > |2 - u_x - v_y| \iff D > (2 - u_x - v_y)^2,$$

что немедленно следует из (6.19) после раскрытия скобок и приведения подобных членов.

Покажем теперь, что интересующее нас линейное отображение $\mathcal{R}(\hat{z}) : U(\hat{z}) \rightarrow V(\hat{z})$, $\|\mathcal{R}(\hat{z})\| \leq \varepsilon$, действительно существует и непрерывно по \hat{z} . Рассмотрим пространство \mathfrak{C} всех непрерывных отображений из $\hat{z} \in X$ в шар радиуса ε в пространстве $L(U(\hat{z}), V(\hat{z}))$ линейных отображений из $U(\hat{z})$ в $V(\hat{z})$. Пространство \mathfrak{C} является полным метрическим пространством относительно стандартной метрики «супремум разности», так как множество X компактно, а $L(U(\hat{z}), V(\hat{z}))$ полно. На пространстве \mathfrak{C} определено отображение $\mathfrak{P} : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$ по формуле (6.20), а именно,

$$\mathfrak{P}\mathcal{R}(\Phi^{-1}(\hat{z})) = -(\gamma(\hat{z}) - \delta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))^{-1}.$$

Отображение \mathfrak{P} определено корректно, потому что (1) образ непрерывного отображения \mathcal{R} будет непрерывным, так как оператор $(\alpha(\hat{z}) - \beta(\hat{z})\mathcal{R}(\hat{z}))$ отделен от множества необратимых за счет выбора ε , и (2) из неравенства $|\mathcal{R}(\hat{z})| < \varepsilon$ следует неравенство $|\mathfrak{P}\mathcal{R}(\hat{z})| < \varepsilon$, опять же за счет выбора ε . Более того, отображение \mathfrak{P} является сжимающим по тем же причинам. Следовательно, отображение \mathfrak{P} имеет единственную неподвижную точку $\mathcal{R}_0 \in \mathfrak{C}$, т.е. $\mathcal{R}_0(\hat{z})$ — искомый линейный оператор, непрерывно зависящий от $\hat{z} \in X$.

Таким образом, в точках множества X определено непрерывное семейство таких операторов $\mathcal{R}_0(\hat{z})$, что $\tilde{\gamma}(\hat{z}) = 0$, причем

$$\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < 1, \quad \|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < 1.$$

Заменяя подпространства

$$U(\hat{z}) = \{v = 0\}, \quad V(\hat{z}) = \{u = 0\}$$

на

$$\tilde{U}(\hat{z}) = \{\tilde{v} = v + \mathcal{R}_0(\hat{z})u = 0\}, \quad \tilde{V}(\hat{z}) = V(\hat{z}),$$

получаем новое непрерывное разложение

$$T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \tilde{U}(\hat{z}) \oplus \tilde{V}(\hat{z}),$$

в котором матрица $A^{-1}(\hat{z})$ принимает форму

$$A^{-1}(\hat{z}) = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}(\hat{z}) & \beta(\hat{z}) \\ 0 & \tilde{\delta}(\hat{z}) \end{pmatrix} \quad \text{для всех } \hat{z} \text{ из } X.$$

В силу компактности X найдутся такие положительные константы $\tilde{u}_x > 1$ и $\tilde{v}_y < 1$, что

$$\|\tilde{\alpha}(\hat{z})^{-1}\| < \tilde{u}_x^{-1}, \quad \|\tilde{\delta}(\hat{z})\| < \tilde{v}_y.$$

Поскольку в новом разложении $\tilde{u}_y = u_y$, а $\tilde{v}_x = 0$, то условия (6.19) выполнены и в новом разложении. Применяя описанную выше процедуру, но уже к оператору $A(\hat{z})$ в новом разложении получаем искомое разложение

$$T_{\hat{z}}(\mathcal{C}_0 \cap \mathcal{S}) = \hat{U}(\hat{z}) \oplus \hat{V}(\hat{z})$$

На самом деле можно показать, что это разложение зависит от $\hat{z} \in X$ не только непрерывно, но и с выполнением условия Гельдера, однако это не существенно для дальнейшего. \square

Замечание 6.8. Дадим краткое пояснение, почему оператор $\mathcal{R}_0(\hat{z})$, вообще говоря, не является гладким (скажем, по Уитни). Уравнение (6.20) является функциональным уравнением, и в наиболее простом виде можно его записать так:

$$y(x) = f(x, y(\phi(x))),$$

где x — координата, $f(x, y)$ и $\phi(x)$ — данные бесконечно гладкие функции, а $y(x)$ — искомая функция. О функции f известно, что $\|f'_y\| < 1$. Можно даже считать, что x и y одномерны — это не меняет принципиальных эффектов, связанных с негладкостью решения.

Если бы функция ϕ имела вид $\phi(x) = x$, то уравнение имело бы вид $y = f(x, y)$. В этом случае теорема о неявной функции гарантирует существование бесконечно гладкого решения. Именно, тот факт, что $y \in C^1$, можно доказать прямой оценкой, а из него немедленно следует, что $y \in C^\infty$. Действительно,

$$y'(x) = \frac{f'_x(x, y(x))}{1 - f'_y(x, y(x))}$$

и, следовательно, $y' \in C^1$, так что $y \in C^2$ и т. д.

Однако если $\phi(x)$ не есть тождественная функция, то, если ϕ есть отображение некоторого компакта в себя, по-прежнему можно доказать существование и единственность непрерывного решения на этом компакте (как это сделано в лемме 6.6). Однако решение этого уравнения, вообще говоря, может быть не гладким, а лишь гильдеровым. Например, для уравнения $y(x) = \frac{1}{2}y(3x)$ решение $y(x) = |x|^{\log_3 2}$ не является гладким в точке $x = 0$.

Теперь, применяя поочередно к различным разложениям касательного пространства процедуру, описанную в лемме 6.6, приведем $-N$ -ю степень матрицы дифференциала отображения последования Пуанкаре $d\Phi_H^{-N} = \Theta_H$ из леммы 6.4 к наиболее удобному виду. Поскольку дальнейшие рассуждения почти идентичны для обоих множеств $\Xi_H^0(x_0)$ и $\mathcal{X}_H^0(x_0)$, будем обозначать через X^0 любое из двух множеств $\Xi_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ или $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$.

Для того, чтобы привести дифференциал $d\Theta_H(z)$ к блочно-диагональному виду, сначала ограничимся нулевым сечением \mathcal{C}_0^H и, более того, отбросим пока не нужную координату \tilde{w} . Обозначим подпространство $T_z \mathcal{C}_0^H$, отвечающее главным скобкам через $T_z^0 \mathcal{C}_0^H$, а неглавным — через $T_z^1 \mathcal{C}_0^H$. Разложим $T_z^0 \mathcal{C}_0^H$ с помощью леммы 6.6 и замены (6.13) в сумму

$$T_z^0 \mathcal{C}_0^H = \hat{U}(z) \oplus \hat{V}(z), \quad \dim \hat{U}(z) = 1.$$

Оператор $\mathcal{A}(z)$ станет блочно-диагональным и будет растягивать на $\hat{U}(z)$ и сжимать на $\hat{V}(z)$. Теперь расширим $\hat{V}(z)$, присоединив к нему подпространство $T_z^1 \mathcal{C}_0^H$. В получившемся разложении оператор $d\Theta_H|_{T_z^0 \mathcal{C}_0^H \oplus T_z^1 \mathcal{C}_0^H}$ имеет вид (6.18) с $\gamma(z) = 0$ и $\|\alpha(z)^{-1}\| < 1$. Поскольку $\varrho(z) > 2$, можно увеличить N так, чтобы норма $\|\delta(z)\|$ стала меньше 1 (число N можно выбрать не зависящим от z в силу компактности множества X^0). Поэтому к $d\Theta_H|_{T_z^0 \mathcal{C}_0^H \oplus T_z^1 \mathcal{C}_0^H}$ может быть применена процедура,

описанная в лемме 6.6, после чего оператор $d\Theta_H|_{T_z^k C_0^H \oplus \tilde{T}_z^k C_0^H}$ примет блочно-диагональный вид. Повторяя этот прием, мы можем поочередно присоединить к разложению, касательные подпространства, отвечающие координатам \tilde{w} и μ . При этом размерность подпространства $\widehat{U}(z)$ возрастет ровно на единицу на последнем шаге, при добавлении координаты μ .

Таким образом, мы получаем такое непрерывно зависящее от z разложение

$$T_z C^H \cap S^H = U(z) \oplus V(z)$$

в точках z из X^0 , что $\dim U(z) = 2$, а подпространство $V(z)$ горизонтально, т.е. $V(z) \subset T_z C_0^H$. При этом

$$d\Theta_H(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & 0 \\ 0 & \beta(z) \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha(z) : U(z) \rightarrow U(\Theta_H(z)), \quad \beta(z) : V(z) \rightarrow V(\Theta_H(z))$$

непрерывно зависят от z , и

$$\|\alpha(z)^{-1}\| < 1, \quad \|\beta(z)\| < 1.$$

В силу компактности $\Xi_H^0(x_0) \cap S^H$ и $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap S^H$ можно считать, что нормы этих операторов отделены от 1, т.е.

$$\|\alpha(z)^{-1}\| < \kappa, \quad \|\beta(z)\| < \kappa$$

для некоторого $\kappa < 1$.

Применим теперь теорему Адамара—Перрона. Для этого построим систему локальных координат в окрестности X^0 . Поскольку множество X^0 компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой точки z_0 из X^0 разность $\Theta_H(z) - d\Theta_H(z_0)(z - z_0)$ меньше ε в метрике C^1 для z из δ -окрестности точки z_0 . Покроем X^0 конечным числом $(\delta/2)$ -окрестностей в C_0^H с центрами в точках $z_1^0, \dots, z_M^0 \in X^0$, и в δ -окрестности каждой точки z_m^0 введем свои локальные координаты, порожденные дифференциалом $d\Theta_H(z_m^0)$. Если точка $z \in X_0$ лежит в $(\delta/2)$ -окрестности точки z_m^0 , то норма разности $d\Theta_H(z) - d\Theta_H(z_m^0)$ меньше ε . Поэтому, если ε достаточно мало, то к орбите $\Theta_H^k(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, применима теорема Адамара—Перрона. Таким образом, для каждой точки $z_0 \in X^0$ в ее $(\delta/2)$ -окрестности в $C_0^H \cap S^H$ определено двумерное бесконечно гладкое многообразие $W^+(z_0)$ точек z , экспоненциально стремящихся при итерациях отображения Θ_H^{-1} к образу z_0 при тех же итерациях. Поскольку $\Theta_H = \Phi_H^{-N}$, а множество X^0 компактно, то любая точка $z \in W^+(z_0)$ стремится к образу z_0 и при итерациях самого отображения Φ_H :

$$W^+(z_0) = \left\{ z \in C^H \cap S^H, \|z - z_0\| < \frac{\delta}{2}, \|\Phi_H^k(z) - \Phi_H^k(z_0)\| < C\lambda^k, k \in \mathbb{N} \right\},$$

причем константы $C > 0$ и $0 < \lambda < 1$ из теоремы Адамара—Перрона зависят лишь от выбора κ и ε , т.е. одинаковы для всех точек z . В силу компактности X^0 можно выбрать такие константы $C_1 > 0$ и $0 < \lambda_1 < 1$, что

$$\|\Phi_H^k(z) - \Phi_H^k(z_0)\| < C_1 \lambda_1^k$$

при $k \in \mathbb{N}$.

Нам потребуются некоторые свойства построенных множеств $W^+(z_0)$.

(а) Опишем теперь, как устроены траектории исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H , начинающиеся в точках множества $W_+(z_0)$, $z_0 \in X^0$. Для этого воспользуемся полем $\mu\xi_H(x_0)$ на C_H в окрестности C_0^H , построенным в п. 6.4 (см. систему (6.10)). Пусть для определенности $\mu(z) > 0$. Траектория $\gamma(s)$, начинающаяся в точке $\gamma(0) = z \in W^+(z_0)$, пересекает при $s \rightarrow +\infty$ поверхность разрыва правой части гамильтониана S^H счетное число раз в точках $\Phi_H^k(z)$, $k \in \mathbb{N}$. При этом такая траектория существует и единственна, так как в окрестности X^0 векторное поле $\mu\xi_H(x_0)$ трансверсально S^H . При этом время между переключениями ограничено снизу и сверху числами $\frac{1}{2}s_{\min}$ и $2s_{\max}$. Поэтому $\gamma(s)$ стремится при $s \rightarrow +\infty$ к $C_0^H = \{\mu = 0\}$ с экспоненциальной скоростью, т.е.

$$c_1 e^{-c_2 s} < \mu(\gamma(s)) < c_3 e^{-c_4 s}$$

для некоторых положительных констант c_i , $i = 1, \dots, 4$. Поскольку $dt = \mu ds$, получаем, что интеграл

$$T(z) = \int_0^{+\infty} \mu(\gamma(s)) ds < \infty$$

конечен; следовательно, прообраз траектории $\mathbf{B}^{-1}(\gamma(t))$ попадает в точку x_0 за конечное время $T(z)$. Другими словами, траектория $X(t, \tilde{z})$, $z \in \mathcal{M}$, исходной гамильтоновой системы с гамильтонианом H , начинающаяся в точке $X(0, \tilde{z}) = \tilde{z} \in \mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0))$, существует и единственна на промежутке $t \in [0; T(\mathbf{B}(\tilde{z}))]$ и попадает в x_0 в момент $T(\mathbf{B}(\tilde{z}))$. В дальнейшем для краткости мы будем опускать знак отображения \mathbf{B} и будем писать $T(\tilde{z}) = T(\mathbf{B}(\tilde{z}))$.

Отметим, что главные скобки $\mathcal{K}^m(X(t, z))$ удовлетворяют неравенствам, заявленным в замечании 6.4.

(b) Опишем теперь, как могут пересекаться множества $W^+(z_0)$ и $W^+(z_1)$, определенные в $(\delta/2)$ -окрестностях точек z_0 и z_1 . Пусть U — пересечение $(\delta/2)$ -окрестностей точек z_0 и z_1 . Докажем, что $W^+(z_0)$ и $W^+(z_1)$ либо не пересекаются, либо совпадают в U . Ясно, что если их пересечение не пусто и содержит некоторую точку $z \in U$, то итерации z стремятся и к образу z_0 , и к образу z_1 , поэтому итерации z_0 и z_1 сближаются с экспоненциальной скоростью. Как следствие, итерации любой точки $z \in W^+(z_0)$ сближаются с итерациями z_1 и наоборот. Поэтому множества $W^+(z_i)$, $i = 1, 2$ совпадают на U .

Множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ устроены следующим образом: их пересечение с \mathcal{S}^H есть в точности объединение всех слоев $\mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0))$ по всем z_0 :

$$\begin{aligned} \Xi_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H &= \bigcup_{z_0 \in \Xi_H^0(x_0)} \mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0)); \\ \mathcal{X}_H(x_0) \cap \mathcal{S}^H &= \bigcup_{z_0 \in \mathcal{X}_H^0(x_0)} \mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0)); \end{aligned}$$

а сами множества получаются, если из каждой точки на \mathcal{S}^H выпустить траекторию гамильтоновой системы до следующего пересечения с \mathcal{S}^H . Таким образом свойства 1 и 2 обеих теорем 6.1 и 6.2 получаются автоматически из свойства (a) множеств $W^+(z_0)$.

Отображения Ψ_Γ^H и Ψ_{01}^H , топологические цепи Маркова Σ_Γ^+ и Σ_{01}^+ , заявленные в 3, получаются с помощью с помощью соответствующих отображений для модельной задачи (2.1). А именно, как композиции

- (1) проекции π_W , которая переводит $z \in \mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0))$ в точку $z_0 \in \mathcal{C}_0^H$,
- (2) идентификации $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и $\Xi_H^0(x_0)$ с \mathcal{X}^+/g и Ξ/g с помощью отображения Π_+/g из леммы 6.2,
- (3) применения соответствующего фактор-отображения из модельной задачи (2.1) и
- (4) отбрасывания некоторых начальных позиций в полученной топологической цепи Маркова.

Точнее, для отображения Ψ_Γ^H в 2 необходимо использовать отображение Ψ_Γ^+/g из теоремы 5.4, а для отображения Ψ_{01}^H — отображение Ψ_{01}/g из теоремы 3.1. Важно отметить, что сама проекция $z \mapsto z_0$ определена не однозначно, так как, вообще говоря, возможно, что $z \in \mathbf{B}^{-1}(W^+(z_0) \cap W^+(z_1))$. Однако в этом случае по свойству (b) итерации z_0 и z_1 сближаются с экспоненциальной скоростью, поэтому найдется такое число $K \in \mathbb{N}$, что в образах

$$(\Psi_\Gamma^+/g)((\Pi_+/g)^{-1}(z_i)) \in \Sigma_\Gamma^+ \quad \text{или} \quad (\Psi_{01}/g)((\Pi_+/g)(z_i)) \in \Sigma_{01}$$

отличия могут быть только на позициях с номерами меньше K , а на позициях с номерами больше K они должны совпадать. Поэтому мы отбросим все позиции левее K (обозначим это отображение¹ через \mathfrak{d}). После этого неоднозначность в отображении π_W пропадет. Итак,

$$\Psi_\Gamma^H = \mathfrak{d} \circ (\Psi_\Gamma^+/g) \circ (\Pi_+/g)^{-1} \circ \pi_W, \quad \Psi_{01}^H = \mathfrak{d} \circ (\Psi_{01}/g) \circ (\Pi_+/g)^{-1} \circ \pi_W.$$

Таким образом, п. 3 обеих теорем 6.1 и 6.2 доказан.

Пункт 4 теоремы 6.2 получается заменой множества X_0 конечным множеством, состоящим из пересечений R_{ijk}/g или Q_i/g с \mathcal{S} (точнее их образа при отображении Π_+/g). В первом случае

¹В случае бесконечных вправо последовательностей Σ_Γ^+ мы отбрасываем ровно K первых членов, а в случае бесконечных в обе стороны последовательностей Σ_{01} мы отбрасываем весь бесконечный влево хвост, начиная с позиции K .

X_0 — это трехточечное множество, а во втором — четырехточечное. В случае трехзвенного цикла все собственные значения оператора A^3 из (6.17) по модулю больше 1 (см. п. 2.8). Поэтому в этом случае мы получаем, что многообразие W^+ одномерно. В случае четырехзвенного цикла оператор A^4 содержит ровно одно собственное значение, по модулю меньше 1 (см. п. 2.8). В этом случае многообразие W^+ двумерно.

Пункт 4 теоремы 6.1 об оценке размерностей $\mathcal{X}_H(x_0)$ следует из соответствующего пункта теоремы 5.4. Действительно, во-первых, для некоторого достаточно малого μ_0 отображение \mathbf{B}^{-1} является диффеоморфизмом на $\mathcal{C}_0^H \times \{0 < \mu < \mu_0\}$ и, значит, не изменяет размерностей. Во-вторых, если $dG(x_0) = 0$, то размерности (и по Хаусдорфу, и по Колмогорову) множеств $\mathcal{X}_H^0(x_0)$ и \mathcal{X}/g совпадают, так как по лемме 6.2 в этом случае отображение Π_+ является локально липшицевым. Остается только сказать, что множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ и \mathcal{X}^+ получаются из соответственно $\mathcal{X}_H^0(x_0) \cap \mathcal{S}^H$ и $(\mathcal{X} \cap \mathcal{S})/g$ с помощью одинаковой процедуры (строятся двумерные устойчивые листы и выпускаются траектории).

Пункт 5 теоремы 6.1 идентичен соответствующему пункту в теореме 5.4.

Пункты 6 теоремы 6.1 и 5 теоремы 6.2 получаются рассмотрением липшицевой поверхности M_- вместо липшицевой поверхности M_+ оптимальных траекторий. Напомним, что M_- состоит из траекторий, выходящих из начала координат гамильтоновой системы (2.3) принципа максимума Понтрягина модельной задачи (2.1). Доказательство теорем 6.1 и 6.2 закончено. \square

Докажем теперь утверждение, сформулированное в замечании 6.4. Оценка сверху уже получена в лемме 6.1. Оценка снизу эквивалентна тому, что на любой траектории $X(t)$ из множества $\mathcal{X}_H(x_0)$ или $\Xi_H(x_0)$ выполнена оценка

$$\mu(X(t)) \geq c''(T - t),$$

где $c'' > 0$ — некоторая константа, а T — момент выхода в странную точку x_0 .

Перенесем траекторию $X(t)$ на цилиндр \mathcal{C}_H с помощью раздувающего отображения \mathbf{B} и сделаем замену времени $ds = \frac{1}{\mu} dt$. Получим траекторию $\tilde{X}(s) = \mathbf{B}(X(t(s)))$ системы (6.12). Таким образом, необходимо доказать, что

$$\mu(\tilde{X}(s)) \geq T - t(s) = c'' \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}(\sigma)) d\sigma.$$

Обозначим через $\tilde{X}^0(s)$ траекторию на \mathcal{C}_0^H из $\mathcal{X}_H(x_0)$ или $\Xi_H^0(x_0)$, к которой приближается $\tilde{X}(s)$ при $s \rightarrow +\infty$. Как уже неоднократно упоминалось, траектория $\tilde{X}^0(s)$ является также траекторией системы (6.15), так как $\mu(\tilde{X}^0(s)) = 0$. Рассмотрим также траекторию $\tilde{X}^1(s)$ системы (6.15), которая отличается от $\tilde{X}^0(s)$ только тем, что $\mu(\tilde{X}^1(s)) > 0$, а именно:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{K}(\tilde{X}^1(s)) = \tilde{K}(\tilde{X}^0(s)), \\ \tilde{w}(\tilde{X}^1(s)) = \tilde{w}(\tilde{X}^0(s)), \\ \frac{d}{ds} \mu(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s)) \Upsilon(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s)) \Upsilon(\tilde{X}^0(s)), \\ \mu(\tilde{X}^1(0)) = \mu(\tilde{X}(0)). \end{array} \right.$$

Поскольку траектория $\tilde{X}^1(s)$ является образом оптимальной траектории в модельной задаче (2.1) при отображении $\mathbf{B} \circ \Pi_+$, то на ней по теореме 2.1 выполнено

$$\mu(\tilde{X}^1(s)) \geq c_0 \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}^1(\sigma)) d\sigma$$

для некоторой константы $c_0 > 0$.

Покажем теперь, что значения μ на обеих траекториях $\tilde{X}(s)$ и $\tilde{X}^1(s)$ отличаются «не слишком сильно», а именно,

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\mu(\tilde{X}(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}(s)), \\ \frac{d}{ds}\mu(\tilde{X}^1(s)) = \mu(\tilde{X}^1(s))\Upsilon(\tilde{X}^1(s)) \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{ds} \ln \frac{\mu(\tilde{X}(s))}{\mu(\tilde{X}^1(s))} = \Upsilon(\tilde{X}(s)) - \Upsilon(\tilde{X}^1(s)).$$

Поскольку $\tilde{X}(s)$ и $\tilde{X}^1(s)$ с экспоненциальной скоростью приближаются к $\tilde{X}^0(s)$, то разность в правой части тоже стремится к нулю с экспоненциальной скоростью. Итак, для некоторых констант $c_1, c_2 > 0$ выполнены оценки

$$-c_1 e^{-c_2 s} \leq \frac{d}{ds} \ln \frac{\mu(\tilde{X}(s))}{\mu(\tilde{X}^1(s))} \leq c_1 e^{-c_2 s}.$$

Учитывая, что

$$\ln \frac{\mu(\tilde{X}(0))}{\mu(\tilde{X}^1(0))} = 0,$$

немедленно приходим к выводу, что для $c_3 = e^{c_1/c_2}$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{c_3} \mu(\tilde{X}^1(s)) \leq \mu(\tilde{X}(s)) \leq c_3 \mu(\tilde{X}^1(s)).$$

Таким образом,

$$\mu(\tilde{X}(s)) \geq \frac{1}{c_3} \mu(\tilde{X}^1(s)) \geq \frac{c_0}{c_3} \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}^1(\sigma)) d\sigma \geq \frac{c_0}{c_3^2} \int_s^{+\infty} \mu(\tilde{X}(\sigma)) d\sigma,$$

что и требовалось.

Замечание 6.9. Учитывая замечание 6.4, мы можем проконтролировать, как множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ входят в странную точку x_0 . Говоря геометрическим языком, множества $\Xi_H(x_0)$ и $\mathcal{X}_H(x_0)$ касаются (в смысле порядка по μ) конуса $\mathbf{B}^{-1}(\mathcal{D}_0 \times \{\mu \in \mathbb{R}\})$.

Замечание 6.10. Согласно определению 6.1, странная точка может появиться только если количество степеней свободы системы не меньше 16. Действительно, в определении 6.1 требуется линейная независимость дифференциалов функций F_r , $(\text{ad } F_i)F_r$ и т. д. до четвертого порядка включительно. Минимальная размерность, в которой такое возможно, легко вычислить через размерность свободной нильпотентной градуированной алгебры Ли глубины 4 с тремя образующими (F_3 необходимо исключить, так как $F_3 \equiv -F_1 - F_2$). А именно, вектор роста такой алгебры легко вычислить через слова Холла: он равен $(3, 6, 14, 32)$. Поскольку на первой ступени мы не используем dF_0 , то минимально возможная размерность \mathcal{M} — это 31. Но $\dim \mathcal{M}$ четна, поэтому $\dim \mathcal{M} \geq 32$ и система имеет не менее 16 степеней свободы. Число степеней свободы так велико, потому что условия в определении странных точек чрезмерно строги. На самом деле их можно существенно ослабить. Примером гамильтоновой системы малой размерности (с четырьмя степенями свободы), в которой наблюдается описанный в теореме 6.1 феномен, может служить гамильтонова система (2.3) принципа максимума Понтрягина в модельной задаче (2.1).

Замечание 6.11. Появление странных точек в больших размерностях становится неизбежным и не уничтожается малым шевелением H_i , $i = 1, 2, 3$, если линейно независимыми являются дифференциалы коммутаторов в x_0 не до четвертого порядка (как это требуется в определении 6.1) а до пятого порядка. В этом случае множество странных точек ST является гладким многообразием в окрестности точки x_0 , и его коразмерность также вычисляется через размерность свободной нильпотентной градуированной алгебры Ли глубины 5 с тремя образующими. А именно, вектор роста такой алгебры равен $(3, 6, 14, 32, 80)$. Коразмерность ST меньше 80 на 4 (3 за счет симметрической формы $B_{r,r'}$ и еще за счет F_0 на первой ступени). Таким образом,

$$\text{codim } ST = 76.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ТЕОРИЯ ГАЛУА (М. И. Зеликин, Д. Д. Киселев, Л. В. Локуциевский)

В данном приложении кратко приведены недавние результаты, касающиеся еще одного типа выхода неособых экстремалей на особую в задачах, аффинных по многомерному управлению из шара Ω . Феномен заключается в том, что оптимальное управление движется вдоль иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, вложенного в сферу $\partial\Omega$. При этом движение занимает конечное время: иррациональная обмотка проходит целиком в положительном направлении за конечное время. Оптимальная траектория, отвечающая такому управлению, представляет собой обобщенную логарифмическую спираль, натянутую на иррациональную обмотку. В отличие от фокуса в обыкновенных дифференциальных уравнениях, движение по этой спирали занимает конечное время и оптимальная траектория попадает в начало координат за конечное время.

А.1. Введение. Рассмотрим гладкое $2n$ -мерное симплектическое многообразие M^{2n} . Пусть $(2n - 1)$ -мерное стратифицированное подмногообразие $S \subset M$ разделяет M на конечное число открытых областей $\Omega_1, \dots, \Omega_k$: $M = \bigcup \overline{\Omega_i}$. Рассмотрим непрерывный гамильтониан $H(q, p) : M \rightarrow \mathbb{R}$, ограничение которого $H_i = H|_{\Omega_i}$ на любое множество Ω_i определяет гладкую функцию, C^∞ -продолжаемую на окрестность множества $\overline{\Omega_i}$.

Одной из основных целей теории оптимального управления является построение оптимального синтеза, т.е. фазового портрета экстремалей, проходящих через каждую начальную точку x_0 . Принцип максимума Понтрягина сводит эту проблему к изучению гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью, причем разрывы достигаются в тех точках $x_0 \in \partial S$, для которых максимум достигается при нескольких различных значениях управления. В таких точках стандартные теоремы существования и единственности неприменимы. Вопросы существования обобщенного решения обеспечиваются с помощью рассмотрения вспомогательного дифференциального уравнения с многозначной правой частью. В правой части этого уравнения стоит выпуклое замыкание всех предельных точек фазовых скоростей, полученных при стремлении окрестных точек к точке x_0 . Единственность решения, проходящего через x_0 , принципиально не имеет места. Здесь на первый план выходит проблема описания с помощью функций H_i соответствующей интегральной воронки — конуса решений, входящих в точку x_0 , или выходящий из нее. Порядок особенности определяется числом кратных скобок Пуассона от функций H_i , которые обращаются в нуль в точке x_0 (см. [8]).

Для одномерного управления, или, что то же, для поверхности разрыва коразмерности 1 при особенности первого порядка, в типичной ситуации интегральная воронка состоит из трех экстремалей: две из них лежат по разные стороны от поверхности разрыва, а третья идет по этой поверхности. При особенности второго порядка ситуация общего положения была найдена и исследована в работах И. Купки [24] и М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [30]. Экстремали подходят к точке x_0 (и отходят от нее) за конечное время со счетным числом пересечений поверхности разрыва (chattering-режим).

Особенности второго порядка для многомерного управления в случае, когда область изменения управления является круг, были описаны в [15, 30]. При подходе к точке x_0 управление за конечное время совершает счетное число оборотов по некоторой окружности. Соответствующая траектория $x(t)$ попадает в точку x_0 , проходя за конечное время некоторый аналог логарифмической спирали.

Данный обзор посвящен недавно обнаруженному феномену выхода неособой траектории на особую таким образом, что соответствующее оптимальное управление в ряде случаев движется вдоль иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора (см. [7, 8]). При этом вся половина этой обмотки в одном направлении проходит за конечное время. Дело заключается в том, что в некотором классе задач оптимальное управление движется вдоль обмотки (не обязательно иррациональной) клиффордова тора, а иррациональность этой обмотки определяется линейной зависимостью (или точнее независимостью) над полем рациональных чисел \mathbb{Q} корней некоторых многочленов R_q , $q \in \mathbb{N}$, специального вида. Авторам удалось показать линейную независимость корней R_q в ряде случаев. Многочлен R_q имеет степень $2q - 1$, а его коэффициенты могут быть

выписаны в явном виде. Тем не менее вопрос о линейной независимости корней R_q над \mathbb{Q} для произвольного q остается открытым.

А.2. Постановка задачи и ее симметрии. В этом пункте будет изучен класс задач, в которых, с одной стороны, сопряжение особых оптимальных траекторий с неособыми неизбежно, а с другой (см. [8, теорема 5.1]) — запрещает регулярное сопряжение.

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\int_0^{+\infty} \langle x, Cx \rangle dt \rightarrow \min \tag{A.1}$$

на траекториях управляемой системы

$$\begin{aligned} x^{(q)} &= u, \quad |u| \leq 1, \quad x \in V, \quad u \in U = V, \\ x^{(k)}(0) &= x_k^0 \quad \text{при } k \leq q - 1. \end{aligned}$$

Здесь V — евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а C — некоторая симметрическая билинейная форма. Функция $x(t)$ считается абсолютно непрерывной вместе со своими $2q - 1$ производными. Управление $u(t) \in L_1(0; +\infty)$ — измеримая функция.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ — собственные числа формы C , а V_1, \dots, V_k — соответствующие собственные подпространства. Очевидно, что если хотя бы одно из собственных чисел отрицательно, то минимум задачи равен $-\infty$. Поэтому будем считать, что форма C неотрицательно определена. Нетрудно показать, что если $\det C = 0$, то за счет проектирования вдоль $\ker C$ задача сводится к аналогичной, но уже с невырожденной матрицей C . Поэтому без ограничения общности будем считать, что форма C положительно определена. В этом случае у задачи для любых начальных данных решение существует, единственно и попадает в начало координат за конечное время (по аналогу теоремы 2.1).

Легко видеть, что в данной задаче имеется равно одна особая экстремаль $x = u = 0$, и ее глобальный порядок равен¹ q . Значит, если q чётно, то в силу теоремы 5.1 из [8] регулярное сопряжение неособой траектории с особой $x = u = 0$ не оптимально.

Обозначим через $L \subset V$ подпространство, натянутое на векторы $\{x_0^0, x_1^0, \dots, x_{q-1}^0\}$, отвечающие начальным данным задачи (A.1).

Теорема А.1 (см. [8, Теорема 6.1]). *Если L лежит в некотором собственном подпространстве V_j , то оптимальная траектория задачи (A.1) остается в L в течение всего времени.*

Доказательство основано на том факте, что ортогональная проекция на L допустимой траектории снова является допустимой траекторией. При этом, если $L \subset V_j$, то эта проекция может только уменьшить функционал (A.1). Поэтому оптимальной траектории ничего не остается, как лежать в L при всех $t \geq 0$.

Оказывается, что если собственные значения формы C находятся в некотором специальном отношении, то в задаче (A.1) возникают оптимальные решения, управление в которых движется по клиффордовому тору, вложенному в сферу $|u| = 1$. Для отыскания всех траекторий такого типа мы воспользуемся группой Ли симметрий данной задачи и выделим семейства траекторий, не выходящий за пределы одной орбиты. Для этого выпишем систему принципа максимума. Положим

$$x_1 = x, \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dots, \quad \dot{x}_{q-1} = x_q.$$

Тогда гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид

$$H = -\lambda_0 \langle Cx_1, x_1 \rangle + \langle p_1, x_2 \rangle + \dots + \langle p_q, u \rangle$$

(p_1, \dots, p_q — сопряженные переменные). Нетрудно показать, что $\lambda_0 \neq 0$. Положив $\lambda_0 = 1/2$, получаем

$$\dot{p}_1 = Cx_1, \quad \dot{p}_2 = -p_1, \quad \dots, \quad \dot{p}_q = -p_{q-1}, \quad u = \frac{p_q}{|p_q|}.$$

¹Точнее, глобальный порядок есть финитная последовательность $(0, \dots, 0, \dim V, 0, \dots)$ где $\dim V$ стоит на q -ом месте (подробнее см. [8]).

Вид этой системы сильно упростится, если ввести обозначения

$$z_k = (-1)^{q-k} p_{q-k+1}, \quad z_{q+k} = Cx_k \quad \text{при } k \leq q. \quad (\text{A.2})$$

Тогда $x = C^{-1}z_{q+1}$ и

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots, \quad \dot{z}_{2q} = (-1)^{q+1}u, \quad u = \frac{Cz_1}{|z_1|}. \quad (\text{A.3})$$

Данная система обладает следующими симметриями:

1. группа $G_1 = SO(V_1) \times SO(V_2) \times \dots \times SO(V_s) \subseteq SO(V)$ действует на z_k и u одновременными поворотами и переводит векторы скоростей (а значит, и решения) системы (A.3) в себя;
2. группа $G_2 = \mathbb{R}_+$ действует масштабированием: если $\lambda \in \mathbb{R}_+$, то $z_k \mapsto \lambda^{2q-k+1}z_k$. На самом деле, вектор скорости системы (A.3) удлинится в λ раз при этом действии. Однако интегральные кривые по-прежнему переходят в интегральные кривые (только скорость движения по ним возрастает в λ раз).

А.3. Об оптимальном управлении в виде обмотки клиффордова тора. Ключевую роль в отыскании траекторий в виде обобщенных логарифмических спиралей, моделирующих движение вдоль иррациональной обмотки клиффордова тора, будет играть многочлен

$$P_q(\alpha) = (2q + i\alpha)((2q - 1) + i\alpha) \dots (1 + i\alpha) \quad (\text{A.4})$$

и корни $\alpha_j > 0$ его мнимой части, при которых действительная часть имеет нужный знак:

$$\text{Im } P_q(\alpha_j) = 0, \quad (-1)^{q+1} \text{Re } P_q(\alpha_j) > 0, \quad \alpha_j > 0. \quad (\text{A.5})$$

Теорема А.2 (см. [7, теорема 3]). *Рассмотрим любой набор двумерных плоскостей $L_m \subseteq V_{j_m}$, $m = 1, \dots, N$, где V_{j_m} — какие-либо различные¹ собственные подпространства формы C . Если набор собственных значений $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_k}$ формы C удовлетворяет условию*

$$\frac{P_q(\alpha_{j_1})}{\lambda_{j_1}} = \frac{P_q(\alpha_{j_2})}{\lambda_{j_2}} = \dots = \frac{P_q(\alpha_{j_N})}{\lambda_{j_N}} = \mu \quad (\text{A.6})$$

для каких-то различных α_{j_m} , то любая траектория вида

$$\begin{aligned} z_1 &= \sum_{m=1}^N b_m t^{2q} \exp\{\pm i\alpha_{j_m} \ln |t|\} y_m, \\ u &= \sum_{m=1}^N \exp\{\pm i\alpha_{j_m} \ln |t|\} y_m \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

является оптимальной для задачи (A.1) при любом выборе единичных векторов $y_m \in L_m$ и ненулевых чисел $b_m \in \mathbb{R}$ при выполнении условия

$$\mu^2 \sum b_m^2 = 1.$$

Более того, таким способом описываются все возможные (с точностью до сдвига по времени) оптимальные траектории задачи (A.1), не покидающие какую-либо фиксированную орбиту группы $G = G_1 \times G_2$.

Отметим, что в решениях (A.7) управление движется по обмотке клиффордова тора $(L_1 \times \dots \times L_N) \cap \{|u| = 1\}$ и проходит ее целиком² за конечное время. Сама траектория $x(t)$ представляет собой прямое произведение соответствующих логарифмических спиралей и тоже проходит за конечное время.

На каждой оптимальной траектории (A.7) управление проходит обмотку клиффордова тора

$$\mathbb{T}^N = (L_1 \times \dots \times L_k) \cap \{|u| = 1\}$$

¹Случай $N = 1$ не исключается. В этом случае подойдет любое собственное значение λ_j формы C , лишь бы $\dim V_j \geq 2$.

²Точнее, ту ее половину, что соответствует положительному направлению времени

и выходит за конечное время на особый режим $x = u = 0$. Тор \mathbb{T}^N вложен в сферу $S^{n-1} = \{|u| = 1\} \subseteq V$ единичного радиуса. Более того, если значения $\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_N$ несоизмеримы над \mathbb{Q} , то полученная обмотка тора \mathbb{T} является всюду плотной.

Положительный ответ на вопрос о линейной независимости корней $\{\alpha_{2j-1}\}_{j=1}^{\lfloor q/2 \rfloor}$ полинома $P_q(\alpha)$ над полем рациональных чисел для произвольного q позволит доказать, что оптимальное управление из теоремы А.2 движется вдоль иррациональной обмоткой любого k -мерного тора. Если же какие-либо наборы корней окажутся линейно зависимыми (хотя примеры многочленов вида (А.4) и А.5 неизвестны), то соответствующая им обмотка замкнется.

Заметим, что природа коэффициентов многочлена $P_q(\alpha)$ весьма специфична. Обозначим через σ_j элементарный симметрический многочлен степени j от набора чисел $\{1, 2, \dots, 2q\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}P_q(\alpha) &= \alpha(\sigma_{2q-1} - \sigma_{2q-3}\alpha^2 + \dots + (-1)^{q-1}\sigma_1\alpha^{2q-2}), \\ \operatorname{Re}P_q(\alpha) &= \sigma_{2q} - \sigma_{2q-2}\alpha^2 + \sigma_{2q-4}\alpha^4 - \dots + (-1)^q\alpha^{2q}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

В [7] доказано, что при $q < 16$ корни многочлена $\operatorname{Im}P_q(\alpha)$, удовлетворяющие условию (А.5), линейно независимы над полем рациональных чисел \mathbb{Q} . Это дает нам смелость высказать следующую гипотезу.

Гипотеза А.1 (см. [7, 8, гипотеза 1]). *При любом $q \in \mathbb{N}$ корни многочлена $\operatorname{Im}P_q(\alpha)$, удовлетворяющие условию (А.4), линейно независимы над полем рациональных чисел \mathbb{Q} .*

Количество решений в (А.5) нетрудно вычислить.

Предложение А.1. *Многочлен $\operatorname{Im}P_q(\alpha)$ имеет $2q - 1$ различных действительных корней, из которых ровно $\lfloor q/2 \rfloor$ удовлетворяет условию (А.5).*

Доказательство. Многочлен $\operatorname{Im}P_q(\alpha)$ можно представить в виде $\operatorname{Im}P_q(\alpha) = \alpha f_q(\alpha^2)$, где $f_q(x)$ — многочлен степени $q - 1$. Поэтому нуль всегда является корнем многочлена $\operatorname{Im}P_q(\alpha)$ а остальные корни разбиваются на пары совпадающих по модулю и отличающихся знаком чисел.

Изучим положительные корни. Каждый из сомножителей в формуле (А.4) является комплексным числом, аргумент которого при росте $\alpha \in (0; +\infty)$ монотонно возрастает от нуля до $\pi/2$. Аргумент их произведения монотонно возрастает от нуля до πq и, следовательно, $P_q(\alpha)$ ровно $q - 1$ раз пересекает действительную ось. Если при этом q четно, то он $\lfloor q/2 \rfloor$ раз пересекает отрицательную часть действительной оси, а если q нечетно, то он $\lfloor q/2 \rfloor$ раз пересекает положительную часть действительной оси. \square

А.4. Применение теории Галуа для доказательства иррациональности обмотки клиффордова тора. Начнем с простейшего случая $q = 2$. Тогда $\alpha = \sqrt{5}$ и находим экстремали (если $\lambda_j = 1$):

$$z_1 = \frac{1}{126}t^4 \exp\{\pm i\alpha \ln |t|\}, \quad u = \exp\{\pm i\alpha \ln |t|\}. \quad (\text{A.9})$$

Поскольку $\ln |t| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, то управление совершает счетное число оборотов по окружности S^1 за конечное время. При этом $x \rightarrow 0$, и траектория выходит на особый режим. Траекторией в конфигурационном пространстве служит логарифмическая спираль. В отличие от траекторий особой точки типа фокуса для обыкновенных дифференциальных уравнений, кривая подходит к началу координат за конечное время, совершая счетное число оборотов.

Пусть теперь $q = 4$. Если начальные векторы $\{x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3\}$ лежат на одной прямой $l \subseteq V_j$, то, в соответствии с теоремой А.1, вопрос сводится к решению одномерной задачи четвертого порядка типа Фуллера. В этом случае в фазовом пространстве \mathbb{R}^4 имеются два семейства автономных оптимальных траекторий, ведущих в начало координат со счетным числом переключений на конечном интервале времени (см. [30]). В конфигурационном пространстве все эти оптимальные траектории не покидают прямой l . Если же начальные векторы в задаче (А.1) принадлежат некоторой двумерной плоскости $L \subseteq V_j$, то возникает двумерная задача четвертого порядка типа Фуллера. Согласно (А.8) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}P_4(\alpha) &= \alpha(109584 - 67284\alpha^2 + 4536\alpha^4 - 36\alpha^6) = 0, \\ \operatorname{Re}P_4(\alpha) &= 40320 - 118124\alpha^2 + 22449\alpha^4 - 546\alpha^6 + \alpha^8 < 0. \end{aligned}$$

Получаем $\alpha_1^2 \cong 1,86$ и $\alpha_2^2 \cong 109,13$. Корни $\alpha_3^2 \cong 15,01$ и $\alpha_4 = 0$ лишние, так как для них нарушается неравенство (А.5). Итак, $A_1 \cong 78 \cdot 10^{-7}$ и $A_2 \cong 32 \cdot 10^{-9}$. Соответствующие оптимальные управления и решения системы (А.3) имеют вид (при $\lambda_j = 1$)

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp(\alpha_1 i \ln |t|), & u_2 &= \exp(\alpha_2 i \ln |t|), \\ z_1^1 &= A_1 t^8 \exp(\alpha_1 i \ln |t|), & z_1^2 &= A_2 t^8 \exp(\alpha_2 i \ln |t|). \end{aligned} \quad (\text{А.10})$$

Рассмотрим исходную задачу (А.1) при $q = 4$. Используя найденные явные решения в пространствах V_j , построим оптимальные траектории, не лежащие в собственных подпространствах V_j . Предположим, что решения z_1^1 и z_1^2 из (А.10) лежат в разных собственных подпространствах V_1 и V_2 , отвечающих собственным значениям λ_1 и λ_2 . Рассмотрим их линейную комбинацию: пусть L_j , $j = 1, 2$ — двумерные плоскости в V_j , а x_j^0 — два фиксированных единичных вектора в L_1 и L_2 . Тогда при ненулевых a и b имеем

$$z_1 = a t^8 \exp(\alpha_1 i \ln |t|) x_1^0 + b t^8 \exp(\alpha_2 i \ln |t|) x_2^0. \quad (\text{А.11})$$

Очевидно, z_1 удовлетворяет всем уравнениям системы (А.3) кроме, возможно, последнего. Для того, чтобы удовлетворялось последнее уравнение, коэффициенты a и b должны быть такими, чтобы при любом t выполнялось равенство

$$\begin{aligned} \dot{z}_{2q} &= a P_4(\alpha_1) \exp(\alpha_1 i \ln |t|) x_1^0 + b P_4(\alpha_2) \exp(\alpha_2 i \ln |t|) x_2^0 = \\ &= -\frac{a \lambda_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp(\alpha_1 i \ln |t|) x_1^0 - \frac{b \lambda_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \exp(\alpha_2 i \ln |t|) x_2^0 = (-1)^{q+1} C \frac{z_1}{|z_1|}. \end{aligned}$$

Поскольку $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то данное уравнение выполнено при любом t тогда и только тогда, когда коэффициенты a и b удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -P_4(\alpha_1), \\ \frac{\lambda_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -P_4(\alpha_2). \end{cases} \quad (\text{А.12})$$

Как было показано, $P_4(\alpha_j) \in \mathbb{R}$ и отрицательно, $j = 1, 2$. Поэтому система (А.12) разрешима, если пара собственных значений формы C удовлетворяет соотношению

$$\frac{P_4(\alpha_1)}{\lambda_1} = \frac{P_4(\alpha_2)}{\lambda_2} = \mu. \quad (\text{А.13})$$

Тогда задача (А.1) имеет семейство оптимальных траекторий вида (А.11) при $\mu^2(a^2 + b^2) = 1$. На каждом таком решении управление проходит обмотку клиффордова тора \mathbb{T}_{ab} и выходит за конечное время на особый режим $x = u = 0$. Тор \mathbb{T}_{ab} вложен в сферу $S^3 \subseteq V = \mathbb{R}^4$ единичного радиуса и описывается уравнениями

$$|u_1| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad |u_2| = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Более того, если значения α_1 и α_2 несоизмеримы над \mathbb{Q} , то полученная обмотка тора \mathbb{T}_{ab} является всюду плотной.

Докажем, что корни α_1 и α_2 линейно независимы над \mathbb{Q} . Для этого покажем, что их квадраты линейно независимы над \mathbb{Q} . Предположим противное: пусть для некоторых рациональных $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ выполнено

$$b_1 \alpha_1^2 + b_2 \alpha_2^2 = 0.$$

Обозначим $Q_q(\alpha^2) = \text{Im} P_q(\alpha) / \alpha$. Корнями многочлена Q_4 являются α_i^2 , $i = 1, 2, 3$. Легко видеть (например, из формулы Кардано), что многочлен Q_4 не имеет рациональных корней. Поскольку $\deg Q_4 = 3$, то он неприводим над \mathbb{Q} и, значит, группа Галуа действует транзитивно на α_1^2 , α_2^2 и α_3^2 (см. [5]). Поэтому

$$b_1 \alpha_i^2 + b_2 \alpha_j^2 + 0 \alpha_k^2 = 0,$$

для любой четной перестановки $(ijk) \in S_3$. Данная линейная система относительно α_i^2 должна иметь нетривиальное решение, что возможно только если $b_1 + b_2 = 0$. Это противоречит тому, что $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$.

Итак, мы доказали гипотезу А.1 для $q = 4$ (случаи $q = 1, 2, 3$ тривиальны). Следовательно, в задаче (А.1) при $q = 4$ возникают семейства оптимальных траекторий с управлением в виде иррациональной всюду плотной обмотки тора, если выполняются следующие условия:

1. некоторая пара собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы C находится в отношении (А.13);
2. соответствующие собственные подпространства V_1 и V_2 имеют размерность не меньше двух;
3. значения α_1 и α_2 несоизмеримы над \mathbb{Q} .

В [7] получен следующий результат.

Теорема А.3 (см. [7, теорема 8]). *Гипотеза А.1 выполняется для всех $q < 16$.*

Также недавно Д. Д. Киселевым для всех $q > 3$ был доказан следующий важный результат:

Теорема А.4 (Д. Д. Киселев, 2015). *Для всех $q > 3$ найдется как минимум два линейно независимых корня многочлена $\text{Im}P_q(\alpha)$ из (А.4), удовлетворяющих условию (А.5).*

Таким образом, при любом $q > 3$ если какие-либо два собственных значения формы C находятся в соотношении (А.6), то оптимальное управление на построенной траектории движется вдоль всюду плотной иррациональной обмотки двумерного клиффордова тора и проходит ее половину за конечное время.

Полное доказательство этого результата готовится к отдельной публикации. Завершим этот обзор наброском доказательства теоремы А.4 для четных $q > 8$. Воспользуемся идеей, которая помогла доказать гипотезу А.1 для $q = 4$: если квадраты двух чисел линейно независимы над \mathbb{Q} , то и сами числа линейно независимы над \mathbb{Q} . Обозначим

$$\alpha f_q(\alpha^2) = \text{Im}P_q(\alpha).$$

Иными словами,

$$f_q(x) = (-1)^{q-1}\sigma_1x^{q-1} + (-1)^{q-2}\sigma_3x^{q-2} + \dots + \sigma_{2q-1}. \quad (\text{А.14})$$

Знаки коэффициентов полинома $f_q(x)$ чередуются, поэтому все его вещественные корни¹ положительны. Учитывая условие $(-1)^{q+1}\text{Im}P_q(\alpha) > 0$ для четных q , получаем, что необходимо оставить только $[q/2]$ корней $f_q(x)$, для которых выполнено соотношение

$$\sum_{s=1}^{2q} \arctg \frac{\sqrt{x}}{s} = (2k - 1)\pi, \quad k = 1, \dots, [q/2]. \quad (\text{А.15})$$

Лемма А.1. *При любом q все коэффициенты многочлена $f_q(x)$ делятся на старший.*

Доказательство. Итак, надо показать, что все коэффициенты σ_{2k+1} делятся на $\sigma_1 = q(2q + 1)$. Рассмотрим многочлен $P_q(\alpha)$ как многочлен над кольцами² $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/(2q + 1)\mathbb{Z}$. В первом случае получаем

$$\begin{aligned} (i\alpha + 1) \dots (i\alpha + 2q) &= -\alpha^2(i\alpha + 1)(i\alpha - 1) \dots (i\alpha + (q - 1))(i\alpha - (q - 1)) = \\ &= -\alpha^2(-\alpha^2 - 1^2) \dots (-\alpha^2 - (q - 1)^2), \end{aligned}$$

т.е. мнимая часть исчезает, поэтому $q \mid \sigma_{2k+1}$. Во втором случае получаем

$$(i\alpha + 1) \dots (i\alpha + 2q) = (i\alpha + 1)(i\alpha - 1) \dots (i\alpha + q)(i\alpha - q) = (-\alpha^2 - 1^2) \dots (-\alpha^2 - q^2);$$

мнимая часть опять исчезает, поэтому $(2q + 1) \mid \sigma_{2k+1}$. Поскольку числа q и $2q + 1$ взаимно просты, то $\sigma_1 \mid \sigma_{2k+1}$. \square

Следствие А.1. *Все рациональные корни многочлена $f_q(x)$ (если таковые имеются) должны быть целыми.*

Теперь, обобщая идеи, использованные для доказательства гипотезы А.1 при $q = 4$, докажем следующую лемму.

¹Многочлен $f_q(x)$ имеет только вещественные корни согласно предложению А.1.

²Точнее, над $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})[i]/(i^2 + 1 = 0)$, где $m = q, 2q + 1$.

Лемма А.2. Пусть $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ — неприводимый над \mathbb{Q} многочлен степени $t \geq 2$. Предположим, что все корни многочлена $f(x)$ вещественны и одного знака. Тогда любые два корня многочлена $f(x)$ линейно независимы над \mathbb{Q} .

Доказательство. Фиксируем произвольным образом два корня многочлена $f(x)$ и обозначим их x_1 и x_2 . Предположим, что имеется линейная зависимость над \mathbb{Q} вида

$$b_1x_1 + b_2x_2 = 0, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0. \tag{A.16}$$

В силу неприводимости многочлена $f(x)$ над \mathbb{Q} его группа Галуа действует на корнях транзитивно. Поэтому найдется такой элемент $g \in \text{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$, что $g(x_1) = x_2$. Положим $x_k = g^{k-1}(x_1)$. Тогда существует такое наименьшее натуральное s , что $x_{s+1} = x_1$. В таком случае получим после $(s - 1)$ -кратного применения автоморфизма g к (A.16) систему линейных однородных алгебраических уравнений на числа x_1, \dots, x_s над полем разложения многочлена $f(x)$ с матрицей

$$X = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_1 & b_2 \\ b_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \end{pmatrix}. \tag{A.17}$$

Определитель матрицы (A.17) должен обращаться в нуль. С другой стороны непосредственное вычисление показывает, что

$$\det X = b_1^s + (-1)^{s+1}b_2^s. \tag{A.18}$$

Если s чётно, то $b_1^s = b_2^s$, откуда либо $b_1 = b_2$, либо $b_1 = -b_2$ (мы пользуемся тем, что $b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$). Если же s нечётно, то получаем $b_1^s = (-b_2)^s$, откуда $b_1 = -b_2$.

Пусть $b_1 = b_2$. Тогда из (A.16) получаем равенство $x_1 = -x_2$, которое противоречит условиям леммы. Пусть $b_1 = -b_2$. Тогда из (A.16) получаем равенство $x_1 = x_2$, которое противоречит неприводимости многочлена $f(x)$, ибо условие неприводимости над полем нулевой характеристики влечет сепарабельность. Лемма доказана. \square

Многочлен $f_q(x)$ имеет степень $q - 1$ и, согласно предложению А.1, является сепарабельным, причем все его корни вещественны и положительны. Обозначим через A множество корней $f_q(x)$, удовлетворяющих условию (A.15). Разложим многочлен $f_q(x)$ на неприводимые множители над \mathbb{Q} . Если нашлась хотя бы одна неприводимая компонента, имеющая не менее двух корней из A , то результат следует из леммы А.2. Поэтому без ограничения общности можно считать, что каждая неприводимая компонента имеет не более одного корня из A . Согласно лемме А.1 можно заключить, что если многочлен $f_q(x)$ имеет рациональные корни, то они necessarily целые. Заметим, что если хотя бы один элемент множества A является целым числом, то либо найдутся два искомого линейно независимых над \mathbb{Q} элемента множества A , либо справедливо включение $A \subset \mathbb{N}$. Но тогда $x_1 \in \mathbb{N}$. Однако, корень x_1 должен быть решением уравнения (A.15) при $k = 1$. Поскольку $\arctg x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то при достаточно больших q выполнено

$$\arctg \frac{\sqrt{1}}{1} + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2} + \dots + \arctg \frac{\sqrt{1}}{2q} > \pi. \tag{A.19}$$

На самом деле нетрудно убедиться, что данное соотношение выполнено при $q > 8$. Оценка (A.19) вместе с равенством (A.15) при $k = 1$ показывает, что $x_1 \notin \mathbb{N}$.

Итак, осталось рассмотреть вариант, при котором возможно, что любые два корня из A линейно независимы над \mathbb{Q} : если каждая неприводимая компонента многочлена $f_q(x)$ содержит не более одного корня из A , а каждая компонента, имеющая корень из A , не является многочленом степени 1. Рассмотрим неприводимые компоненты, содержащие по одному корню из A . Степень любой такой компоненты не меньше 2, а их количество равно $[q/2]$. Но так как q чётно, то получаем противоречие: степень многочлена $f_q(x)$ равна $q - 1$; с другой стороны, она не меньше $2 \cdot [q/2] = q$. Теорема А.4 для чётных $q > 8$ доказана.

При нечётных q аргументы «принципа Дирихле» (именно, что для чётных q выполнено $2[q/2] = q$, а степень многочлена равна $q - 1$) не проходят, поэтому для доказательства теоремы А.4 используется аппарат полигонов Ньютона и вариации на тему постулата Бертрана.

Таким образом, при всех $q > 3$ если в задаче (А.1) некоторые собственные значения формы S находятся в соответствующем отношении (А.6), то существуют оптимальные траектории, управление на которых имеет вид иррациональной всюду плотной обмотки клиффордова тора, проходимой за конечное время.

Б. БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ПРАВИЛЬНЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ
(М. И. Зеликин, Н. Б. Мельников, Р. Хильдебранд)

Основные результаты о наличии хаотических структур в интегральных воронках в гамильтоновых системах с разрывной правой частью, изложенные в настоящей статье, опираются на ключевые элементы оптимального синтеза в модельной задаче, полученные в [10]. В данном приложении кратко изложены основные результаты статьи [10], к которой мы отсылаем интересующегося читателя за доказательствами и более подробным изложением.

Б.1. Постановка задачи.

Задача Б.1. Минимизировать интегральный функционал

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dt \rightarrow \inf \tag{Б.1}$$

на траекториях системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u \tag{Б.2}$$

с начальными данными $(x(0), y(0)) = (x^0, y^0)$.

Здесь $(x, y) = (x_1, \dots, y_3) \in \mathbb{R}^6$ — вектор состояния системы, $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ — управление со значениями в симплексе $\Omega = \{u \mid u_1 + u_2 + u_3 = 0, -2 \leq u_i \leq 1\}$. Допустимым управлением будем считать всякую измеримую функцию $u(t)$, а допустимой траекторией — соответствующую абсолютно непрерывную функцию $(x(t), y(t))$. Будем также считать, что

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Эти соотношения определяют фазовое пространство M размерности $\dim M = 4$.

Пусть $(x(t), y(t))$ — оптимальная траектория, отвечающая оптимальному управлению $u(t)$. Тогда в соответствии с принципом максимума Понтрягина (см. [17]) существуют такие абсолютно непрерывные функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ и число $\lambda_0 = 1$ (см. теорему 2.1), что

$$H = \max_{v \in \Omega} \mathcal{H}(\phi, \psi, x, y, v) = \mathcal{H}(\phi, \psi, x, y, u) \equiv 0, \tag{Б.3}$$

$$\dot{\psi} = -\phi, \quad \dot{\phi} = x, \quad \dot{x} = y, \quad \dot{y} = u(t), \quad u \in \arg \max_{v \in \Omega} \mathcal{H}(v), \tag{Б.4}$$

где

$$\mathcal{H}(\phi, \psi, x, y, u) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{-1}{2} x_i^2 + \phi_i y_i + \psi_i u_i \right),$$

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0, \quad \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0.$$

Определение Б.1. Экстремаль $(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$ будем называть *неособой* на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, если для почти всех t из этого интервала существует такой индекс k , что

$$\psi_k < \min\{\psi_i, \psi_j \mid i, j \neq k\}.$$

Из явного вида функции \mathcal{H} непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение Б.1. Управление на неособом участке траектории равно

$$u(t) = \begin{cases} (-2, 1, 1), & \psi_1 < \min\{\psi_2, \psi_3\}, \\ (1, -2, 1), & \psi_2 < \min\{\psi_3, \psi_1\}, \\ (1, 1, -2), & \psi_3 < \min\{\psi_1, \psi_2\}. \end{cases}$$

В точках, где $\psi_i = \psi_j < \psi_k$, происходит переключение управления.

Пусть i, j, k — некоторая перестановка индексов 1, 2, 3.

Определение Б.2. Экстремаль $(x(t), y(t), \phi(t), \psi(t))$ будем называть (ij) -особой (или *полуособой*) на интервале $t_0 \leq t \leq t_1$, если $\psi_i \equiv \psi_j < \psi_k$ для почти всех t из этого интервала.

Дифференцируя несколько раз соотношение $\psi_i \equiv \psi_j$ в силу системы (Б.4) немедленно получаем следующее утверждение.

Предложение Б.2. Все (ij) -особые траектории принадлежат многообразию

$$A_{ij} = \{(x, y) \in M \mid x_i = x_j, y_i = y_j\}.$$

При этом оптимальное управление на (ij) -особой траектории принимает постоянное значение $u_i = u_j = -1/2$, $u_k = 1$.

Начало координат естественно называть (123) -особой траекторией с оптимальным управлением $u(t) \equiv 0$.

Группу $\mathcal{G} = \{g_\lambda, \lambda > 0\}$ преобразований пространства M , действующую по формулам

$$g_\lambda(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda y),$$

будем называть группой Фуллера. Обозначим фактор-пространство $(M \setminus \{0\})/\mathcal{G}$ через Σ^3 . Эта симметрия была найдена А. Фуллером [20] в системах с одномерным управлением. Как отмечено в пункте 2.2, данная группа симметрий уважает оптимальный синтез задачи.

Предложение Б.3. Оптимальное управление как функция от x, y инвариантно относительно действия \mathcal{G} .

Орбитами группы \mathcal{G} являются кривые, проекциями которых на плоскости x_i, y_i служат полу-параболы $x = Cy^2$. При этом точки переключения оптимальных траекторий переходят в точки переключения оптимальных траекторий, и поверхности переключения состоят из орбит группы.

Кроме непрерывной группы симметрий \mathcal{G} , на траекториях системы (Б.2) действует также дискретная группа перестановок индексов координат \mathcal{S}_3 .

Предложение Б.4. Оптимальный синтез в задаче Б.1 является инвариантным относительно действия группы перестановок \mathcal{S}_3 .

Определение Б.3. Решение $(x(t), y(t))$ задачи Б.1 будем называть *автомодельным*, если действие некоторой дискретной циклической подгруппы группы \mathcal{G} переводит его в себя.

Б.2. Оптимальный синтез в окрестности A_{ij} . Исследование оптимального синтеза задачи Б.1 удобно начинать с построения синтеза на подпространствах A_{ij} и в их окрестностях. Возможность явного построения здесь основана на двух ключевых соображениях:

1. ограничение задачи Б.1 на подпространство A_{ij} совпадает с задачей Фуллера с несимметричным отрезком управлений, и потому оптимальный синтез на A_{ij} может быть построен полностью;
2. оптимальные траектории на A_{ij} содержат полуособые участки, в окрестности которых оптимальный синтез также может быть построен явно с помощью некоторой специальной замены координат, описанной в [30].

Б.2.1. Оптимальный синтез на подпространствах A_{ij} . Согласно предложению Б.2, (ij) -особые режимы могут лежать только на подмногообразиях A_{ij} , задаваемых уравнениями $x_i = x_j, y_i = y_j$. Эти многообразия являются двумерными подпространствами четырехмерного фазового пространства M и попарно пересекаются в начале координат. Исследуем оптимальный синтез на этих подпространствах. Отметим, что A_{ij} является множеством неподвижных точек пространства M относительно транспозиции (ij) из группы \mathcal{S}_3 перестановок индексов координат. Более того, из леммы 2.8 следует, что подпространства A_{ij} являются интегральными многообразиями оптимального синтеза задачи Б.1:

Лемма Б.1. Пусть $(x(t), y(t), u(t))$ — решение задачи Б.1 и $(x_0, y_0) = (x(0), y(0)) \in A_{ij}$. Тогда для всех $t \geq 0$ имеем $(x(t), y(t)) \in A_{ij}$.

Эта лемма позволяет понизить размерность задачи нахождения оптимального синтеза на многообразиях A_{ij} . Обозначим третий индекс (отличный от i, j) через k . Тогда плоскость A_{ij} параметризуется координатами x_k, y_k , а остальные координаты выражаются через них по формулам $x_i = x_j = -\frac{1}{2}x_k, y_i = y_j = -\frac{1}{2}y_k$. Уравнения системы (Б.2) приводятся к виду

$$\dot{x}_k = y_k, \quad \dot{y}_k = u_k,$$

а минимизируемый функционал (Б.1) — к виду

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x_i^2 + x_j^2 + x_k^2) dt = \frac{3}{4} \int_0^{\infty} x_k^2 dt.$$

Эта задача есть несимметрическая задача Фуллера на плоскости x_k, y_k с управлением u_k из интервала $[-2, 1]$. Такие задачи были полностью исследованы в [30]. Приведем описание синтеза для этого типа задач.

Задача Б.2 (несимметрическая задача Фуллера). Минимизировать интегральный функционал

$$\mathcal{J}(x(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2 dt \rightarrow \inf$$

на траекториях системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = u, \quad u \in [a, b]$$

с начальными данными $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ при условии $0 \in (a, b)$ (здесь координаты x, y предполагаются одномерными).

Предложение Б.5. *Оптимальный синтез в задаче Б.2 имеет следующий вид. Имеется кривая переключения с $u = b$ на $u = a$, задаваемая уравнением $x = \alpha y^2, y \geq 0$, где $\alpha \in (\frac{1}{2a}, 0)$, и кривая переключения с $u = a$ на $u = b$, задаваемая уравнением $x = \beta y^2, y \leq 0$, где $\beta \in (0, \frac{1}{2b})$. Эти кривые разделяют фазовое пространство на две области, где применяются управления $u = a$ и $u = b$ соответственно (см. рис. 23). В задаче имеет место чаттеринг-режим, т.е. оптимальные траектории совершают счетное количество переходов из области, где $u = a$, в область, где $u = b$, и обратно, но все же за конечное время приходят в начало координат. Начало координат представляет собой особый режим второго порядка.*

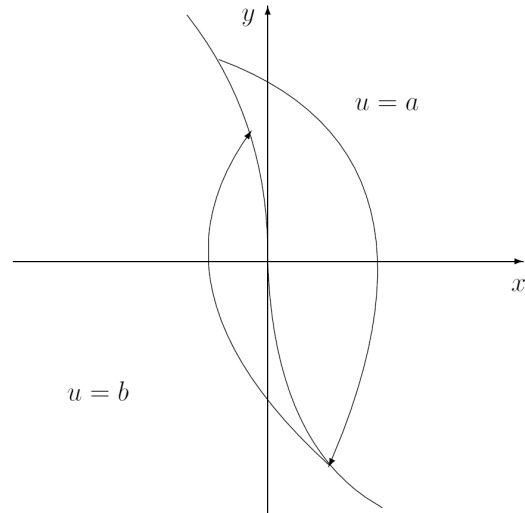


Рис. 23. Оптимальный синтез в задаче Фуллера

Дополним результаты [30] точными формулами для функции Беллмана и сопряженных переменных. Обозначим через $\mathcal{B}_{[a,b]}(x, y)$ функцию Беллмана¹ задачи Б.2:

$$\mathcal{B}_{[a,b]}(x, y) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^2(t) dt \mid x = x(0), y = y(0) \right\}.$$

Предложение Б.6 (см. [10, предложение 3.2]). *Постоянные α и β однозначно находятся из двух уравнений (при $u = a$ и $u = b$):*

$$K_u = \frac{u^2 \alpha^2 - 2u\alpha + \frac{2}{3}}{10u^3 (1 - 2u\alpha)^{3/2}} = \frac{u^2 \beta^2 - 2u\beta + \frac{2}{3}}{-10u^3 (1 - 2u\beta)^{3/2}}. \tag{Б.5}$$

¹В статье [10] вместо функции $\mathcal{B}_{[a,b]}$ использована функция $\omega_{[a,b]} = -\mathcal{B}_{[a,b]}$.

Функция Беллмана в областях, где $u = a$ и $u = b$, задается выражением

$$\mathcal{B}_{[a,b]}(x, y) = -\frac{1}{2u}x^2y + \frac{1}{3u^2}xy^3 - \frac{1}{15u^3}y^5 + K_u(y^2 - 2ux)^{\frac{5}{2}}. \quad (\text{Б.6})$$

Функция Беллмана связана с сопряженными переменными уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{B}_{[a,b]}}{\partial x} = -\phi, \quad \frac{\partial \mathcal{B}_{[a,b]}}{\partial y} = -\psi. \quad (\text{Б.7})$$

Дифференцируя (Б.6) по x и y и подставляя в (Б.7), получаем для сопряженных переменных

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{u}xy - \frac{1}{3u^2}y^3 + 5uK_u(y^2 - 2ux)^{3/2}, \\ \psi &= \frac{1}{2u}x^2 - \frac{1}{u^2}xy^2 + \frac{1}{3u^3}y^4 - 5K_u(y^2 - 2ux)^{3/2}y. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Легко проверить, что уравнения (Б.5) имеют в интервале $\alpha \in \left(\frac{1}{2a}, 0\right)$, $\beta \in \left(0, \frac{1}{2b}\right)$ в точности одно решение. В частности, для значений $a = -2$, $b = 1$ получаем

$$\alpha \approx -0,2225502019, \quad \beta \approx 0,4444824223. \quad (\text{Б.9})$$

Таким образом, мы установили следующий вид оптимального синтеза на подмногообразиях A_{ij} .

Теорема Б.1 (см. [10, теорема 1]). *Оптимальный синтез задачи Б.1, ограниченный на подмногообразии A_{ij} , в точности совпадает с синтезом несимметрической задачи Фуллера с интервалом допустимых управлений $[-2, 1]$.*

Каждое из многообразий A_{ij} делится на две области, разделяемые кривыми переключения $x_k = \alpha y_k^2$, $x_k = \beta y_k^2$. В одной области, которую мы обозначим через A_{ij}^n , применяются управления $(u_k = -2, u_i = u_j = 1)$, а в другой, которую обозначим через A_{ij}^s , применяются управления $\left(u_k = 1, u_i = u_j = -\frac{1}{2}\right)$. Таким образом, область A_{ij}^s заполнена (ij) -особыми траекториями, а A_{ij}^n — неособыми.

Б.2.2. Оптимальный синтез в окрестности A_{ij}^s . Для исследования поведения системы в окрестности особых траекторий М. И. Зеликин и В. Ф. Борисов разработали метод, изложенный в [30]. Используя эти результаты, мы исследуем оптимальный синтез в окрестности областей A_{ij}^s .

Заметим, что вместе с синтезом на A_{ij} мы построили поднятия подмногообразий A_{ij} из фазового пространства M в расширенное фазовое пространство T^*M , определив на них сопряженные переменные как функции от x_k, y_k . При этом синтез несимметрической задачи Фуллера определяет ϕ_k, ψ_k как функции от x_k, y_k , а остальные сопряженные переменные выражаются через x_k, y_k в силу условий $\phi_i = \phi_j, \psi_i = \psi_j$ формулами $\phi_i = \phi_j = -\frac{1}{2}\phi_k, \psi_i = \psi_j = -\frac{1}{2}\psi_k$. Рассмотрим точку в области A_{ij}^s . В окрестности поднятия этой точки в T^*M проведем согласно [30] следующую замену координат:

$$\begin{aligned} z_1 &= -\frac{1}{3}(\psi_j - \psi_i), & z_2 &= \frac{1}{3}(\phi_j - \phi_i), & z_3 &= \frac{1}{3}(x_j - x_i), & z_4 &= \frac{1}{3}(y_j - y_i), \\ w_1 &= -\psi_k, & w_2 &= \phi_k, & w_3 &= x_k, & w_4 &= y_k. \end{aligned}$$

Переменные z, w с индексами 3, 4 параметризуют пространство M . Многообразие A_{ij} задается уравнениями $z_3 = z_4 = 0$ и параметризуется переменными w_3, w_4 . Переменные z_1, z_2 , рассматриваемые как функции от координат пространства M , также равны нулю на A_{ij} . Система (Б.4) в координатах z, w примет вид:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_l &= w_{l+1}, \quad l = 1, 2, 3, \\
 \dot{w}_4 &= \begin{cases} 1, & w_1 < |z_1|, \\ -2, & w_1 > |z_1|, \end{cases} \\
 \dot{z}_l &= z_{l+1}, \quad l = 1, 2, 3, \\
 \dot{z}_4 &= \begin{cases} \operatorname{sgn} z_1, & w_1 < |z_1|, \\ 0, & w_1 > |z_1|. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{Б.10}$$

Область A_{ij}^s характеризуется неравенством $w_1 < 0$, поэтому в рассматриваемой окрестности имеем $w_1 < |z_1|$. В ней применима теорема Зеликина—Борисова о расслоении [30], согласно которой имеем следующую картину. В окрестности области A_{ij}^s в M имеем некоторое расслоение $\Pi_{ij} \rightarrow A_{ij}^s$ с базой A_{ij}^s и двумерными слоями F_{ij}^w , являющимися интегральными многообразиями оптимального синтеза задачи Б.1. База A_{ij}^s расслоения Π_{ij} параметризована переменными w_3, w_4 , а слои F_{ij}^w — переменными z_3, z_4 . На каждом из этих слоев синтез эквивалентен синтезу симметрической задачи Фуллера с интервалом допустимых управлений $[-1, 1]$. Оптимальные траектории выходят на базу A_{ij}^s с чаттерингом по слою F_{ij}^w и дальше движутся по A_{ij}^s . Существует поднятие пространства расслоения Π_{ij} из M в T^*M , которое является (локальным) лагранжевым сечением кокасательного расслоения T^*M над M . Другими словами, в окрестности области A_{ij}^s в M сопряженные переменные ϕ, ψ задаются как функции от x, y .

В рассматриваемом случае переменные z_l в окрестности A_{ij}^s эволюционируют независимо от переменных w_l . При выполнении неравенства $w_1 < |z_1|$ уравнения (Б.10), которым подчиняются z_l , представляют собой в точности гамильтонову систему, возникающую в симметрической задаче Фуллера с интервалом допустимых управлений $[-1, 1]$. Поэтому синтез на слоях F_{ij}^w расслоения Π_{ij} не только эквивалентен, но и в точности совпадает с синтезом в этой задаче. Этот синтез подробно исследован в [30]. Он имеет вид, описанный в предложении Б.5, где α и β принимают значения

$$-\alpha = \beta = \frac{1}{12} \sqrt{6\sqrt{33} - 6},$$

а переменные задачи Б.2 выражаются через z_l по формулам

$$y = z_4, \quad x = z_3, \quad \phi = z_2, \quad \psi = -z_1.$$

Предложение Б.7 (см. [10, предложение 3.3]). *В окрестности области A_{ij}^s существует гиперповерхность переключения с управления ($u_i = -2, u_j = u_k = 1$) на управление ($u_i = 1, u_j = -2, u_k = 1$), задаваемая уравнением*

$$x_j - x_i = -\frac{1}{36} \sqrt{6\sqrt{33} - 6} (y_j - y_i)^2, \quad y_j > y_i, \tag{Б.11}$$

и гиперповерхность переключения с управления ($u_i = 1, u_j = -2, u_k = 1$) на управление ($u_i = -2, u_j = u_k = 1$), задаваемая уравнением

$$x_j - x_i = \frac{1}{36} \sqrt{6\sqrt{33} - 6} (y_j - y_i)^2, \quad y_j < y_i. \tag{Б.12}$$

Доказательство. В задаче Фуллера поверхности переключения задаются уравнениями

$$z_3 = -\frac{1}{12} \sqrt{6\sqrt{33} - 6} z_4^2, \quad z_4 < 0 \quad \text{и} \quad z_3 = \frac{1}{12} \sqrt{6\sqrt{33} - 6} z_4^2, \quad z_4 > 0.$$

Переходя в старую систему координат, получаем требуемое утверждение. \square

Формулы (Б.8) задают уравнение лагранжева сечения кокасательного расслоения в T^*M . Выражая z_1, z_2, w_1, w_2 как функции координат фазового пространства M , имеем:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2}z_3^2 + z_3z_4^2 + \frac{1}{3}z_4^4 - \frac{\frac{\sqrt{33+15}}{24} - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}{2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}\right)^{3/2}}(z_4^2 + 2z_3)^{3/2}z_4, & z_1 > 0, \\ -\frac{1}{2}z_3^2 + z_3z_4^2 - \frac{1}{3}z_4^4 - \frac{\frac{\sqrt{33+15}}{24} - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}{2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}\right)^{3/2}}(z_4^2 - 2z_3)^{3/2}z_4, & z_1 < 0, \end{cases} \\
z_2 &= \begin{cases} -z_3z_4 - \frac{1}{3}z_4^3 + \frac{\frac{\sqrt{33+15}}{24} - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}{2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}\right)^{3/2}}(z_4^2 + 2z_3)^{3/2}, & z_1 > 0, \\ z_3z_4^2 - \frac{1}{3}z_4^3 - \frac{\frac{\sqrt{33+15}}{24} - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}{2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}\right)^{3/2}}(z_4^2 - 2z_3)^{3/2}, & z_1 < 0, \end{cases} \\
w_1 &= -\frac{1}{2}w_3^2 + w_3w_4^2 - \frac{1}{3}w_4^4 - \frac{\beta^2 - 2\beta + \frac{2}{3}}{2(1-2\beta)^{3/2}}(w_4^2 - 2w_3)^{3/2}w_4, \\
w_2 &= w_3w_4 - \frac{1}{3}w_4^3 - \frac{\beta^2 - 2\beta + \frac{2}{3}}{2(1-2\beta)^{3/2}}(w_4^2 - 2w_3)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{Б.13}$$

Постоянная β здесь находится из уравнений (Б.5) для интервала допустимых управлений $[a, b] = [-2, 1]$ и принимает значение (Б.9). Все приведенные утверждения верны только в окрестности области A_{ij}^s , состоящей из отрезков траекторий, на которых выполнено неравенство $w_1 < |z_1|$. Формулы (Б.13) использованы в разделе 4 для построения лагранжева многообразия в окрестности A_{ij}^s на фактор-пространстве M/\mathcal{G} .

Гиперповерхность

$$w_1(w_3, w_4) = |z_1(z_3, z_4)| \tag{Б.14}$$

является поверхностью переключения с управления $(u_i = u_j = 1, u_k = -2)$ на управление $(u_i = -2, u_j = u_k = 1)$ или $(u_i = 1, u_j = -2, u_k = 1)$.

Б.2.3. Уравнение слоя. Займемся теперь выводом уравнения слоя F_{ij}^w расслоения Зеликина—Борисова Π_{ij} . Обозначим через $\tau(z_3^{(0)}, z_4^{(0)})$ время, за которое оптимальная траектория в симметрической задаче Фуллера с интервалом допустимых управлений $[a, b] = [-1, 1]$ из начальной точки $(z_3(0), z_4(0)) = (z_3^{(0)}, z_4^{(0)}) \in \mathbb{R}^2$ достигает начала координат $(z_3(\tau), z_4(\tau)) = (0, 0)$.

Предложение Б.8 (см. [10, предложение 3.4]). *Пересечениями слоев F_{ij}^w расслоения Π_{ij} с уровнями $\{w_3 = \text{const}, w_4 = \text{const}\}$ являются линии уровня функции $\tau(z_3, z_4)$.*

Следующий результат был получен Маршалом в [28].

Предложение Б.9. *Для симметрической задачи Фуллера с интервалом допустимых управлений $[-1, 1]$ время τ перехода из начальной точки (x, y) в начало координат равно*

$$\tau(x, y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{y^2 - 2x}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}}} - y, & u(x, y) = 1, \\ \frac{2\sqrt{y^2 + 2x}}{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)} - \sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{6}(\sqrt{33}-1)}}}} + y, & u(x, y) = -1. \end{cases}$$

Таким образом, линии уровня функции $\tau(z_3, z_4)$ образуют центрально-симметрические концентрические замкнутые кривые, составленные из двух кусков парабол. На рис. 24 изображены линии уровня $\tau = 1, 2, 3$.

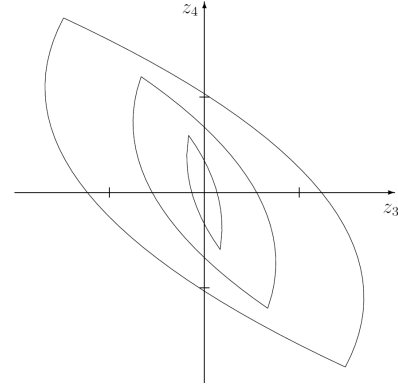


Рис. 24. Уровни функции $\tau(z_3, z_4)$

Рассмотрим участок траектории σ на подпространстве A_{ij} , проходящий через область A_{ij}^s , и параметризуем его временем t . Пусть p_1 — точка переключения с управления $u_k = -2$ на $u_k = 1$, через которую траектория σ входит в область A_{ij}^s , а p_2 — точка переключения с $u_k = 1$ на $u_k = -2$, через которую σ покидает A_{ij}^s . Таким образом, $t(p_2) > t(p_1)$, и для всех точек p траектории σ , лежащих в A_{ij}^s , имеем $t(p) \in (t(p_1), t(p_2))$.

Зафиксируем точку $p \in \sigma \cap A_{ij}^s$ с координатами $w_3^{(0)}, w_4^{(0)}$ и рассмотрим двумерный уровень $s = \{w_3 = w_3^{(0)}, w_4 = w_4^{(0)}\}$ в M . Множество s пересекается со слоями F_{ij}^w над всеми точками $p' \in \sigma$, для которых $t(p') \geq t(p)$. Пересечением является линия уровня $\tau(z_3, z_4) = t(p') - t(p)$ функции τ . При этом, если $p', p'' \in \sigma$ — две такие точки, что $t(p'') > t(p') > t(p)$, то линия уровня $\tau = t(p') - t(p)$ более близка к центру $(z_3, z_4) = (0, 0)$, чем линия уровня $\tau = t(p'') - t(p)$, и лежит внутри последней.

Зафиксируем точку p' и рассмотрим, как будет меняться пересечение слоя F_{ij}^w над p' с уровнем s , если варьировать точку p , над которой взят уровень s . По мере того, как p приближается к p' и разница $t(p') - t(p)$ уменьшается, линия уровня $\tau = t(p') - t(p)$ стягивается к центру и при $p = p'$ вырождается в точку. Таким образом, слой F_{ij}^w над p' представляет собой конусообразную поверхность с вершиной p' .

Рассмотрим, как ведет себя система (Б.10) в окрестностях точек p_1 и p_2 . В точке p_1 имеют место соотношения $w_1 = z_1 = 0, \dot{z}_1 = 0, \dot{w}_1 < 0$. Поэтому p_1 лежит на поверхности (Б.14), и любая траектория, приходящая в p_1 , приходит из области $w_1 > |z_1|$. Следовательно, переменные z_1 не подчиняются уравнениям гамильтоновой системы симметрической задачи Фуллера, и расслоение Зеликина—Борисова не продолжается на p_1 . В эту точку приходит в точности одна неособая траектория, а именно, траектория σ , лежащая на A_{ij} . В точке p_2 также выполняется равенство $w_1 = z_1 = 0$, но $\dot{w}_1 > 0$. Поэтому на траекториях, приходящих в p_2 , в окрестности p_2 для $t < t(p_2)$ имеет место неравенство $w_1 < |z_1|$. Следовательно, расслоение Π_{ij} можно продолжить на p_2 , и слой F_{ij}^w над p_2 также является двумерной поверхностью.

Б.2.4. Оптимальный синтез в окрестности A_{ij}^n . На слоях F_{ij}^w расслоения Π_{ij} используются только управления $(u_i = u_k = 1, u_j = -2)$ и $(u_i = -2, u_j = u_k = 1)$, а на базе A_{ij}^s — особое управление $(u_i = u_j = -\frac{1}{2}, u_k = 1)$. Все эти управления лежат на одномерной грани двумерного симплекса допустимых управлений, которая задается соотношением $u_k = 1$. Управление $(u_i = u_j = 1, u_k = -2)$, соответствующее третьей вершине симплекса допустимых управлений, применяется в области $w_1 > |z_1|$. Граница этой области задается уравнением (Б.14).

Рассмотрим отображение E , переводящее (x, y) на оптимальной траектории в соответствующие сопряженные ковекторы (ϕ, ψ) (отображение E построено в теореме 2.1). Это отображение непрерывно (и даже локально липшицево), поэтому оптимальное управление в окрестности A_{ij}^n устроено так же, как и на A_{ij}^n . Действительно, неравенство $\psi_k < \min(\psi_i, \psi_j)$ является грубым и не нарушается при малом шевелении ковектора ψ .

В [10] доказана следующая теорема о структуре оптимального синтеза в окрестности A_{ij} .

Теорема Б.2 (см. [10, теорема 2]). *В окрестности области A_{ij}^s интегрального многообразия A_{ij} имеем расслоение Π_{ij} с базой A_{ij}^s и двумерными слоями F_{ij}^w , являющимися интегральными многообразиями оптимального синтеза задачи Б.1. На слоях F_{ij}^w используются управления*

$(u_i = u_k = 1, u_j = -2)$ и $(u_i = -2, u_j = u_k = 1)$. Траектории, лежащие на слое F_{ij}^w , с чаттеринг-режимом входят в соответствующую точку на базе A_{ij}^s и дальше движутся по A_{ij} . Точку p_2 можно включить в базу расслоения Π_{ij} .

Каждый из слоев F_{ij}^w над точками σ гомеоморфен поверхности конуса; слой окружает кривую σ , и его вершина лежит на ней. Любая траектория, лежащая на одном из слоев F_{ij}^w , имеет точку пересечения с гиперповерхностью (Б.14). В окрестности p_1 эти точки пересечения образуют двумерное многообразие переключения \mathcal{T} , содержащее p_1 . В окрестности точки p_0 имеется двумерное многообразие переключения \mathcal{T}' , содержащее p_0 . Неособый отрезок траектории σ , соединяющий точки p_0 и p_1 , погружен в поток неособых траекторий, сохраняющих управление $(u_i = u_j = 1, u_k = -2)$ между поверхностями переключения \mathcal{T} и \mathcal{T}' .

Б.3. Элементы оптимального синтеза на фактор-многообразии. Ниже мы покажем, что на фактор-многообразии $\{M \setminus \{0\}\}/\mathcal{G} = \Sigma^3$, гомеоморфном сфере S^3 , имеется картина, сходная с той, что описана в теореме Б.2.

В силу предложения Б.3 на Σ^3 определен синтез, т.е. управление является функцией на Σ^3 . На Σ^3 имеется поле направлений, индуцированное векторным полем оптимального синтеза задачи Б.1. Это означает, что векторное поле на Σ^3 определено с точностью до умножения на положительные скалярные функции. Свойства полей направления на фактор-многообразиях по группе Фуллера были исследованы в работах М. И. Зеликина и В. Ф. Борисова [30]. Известно, что образ автомодельной траектории задачи Б.1 на фактор-многообразии является либо замкнутой траекторией, либо неподвижной точкой.

Начало координат в задаче Б.1 является особой траекторией второго порядка, поэтому из теоремы о сопряжении (см., например, [8]) следует, что оптимальное управление должно иметь разрыв второго рода в момент выхода оптимальной траектории в начало координат. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение Б.10. *Поле направлений на фактор-многообразии Σ^3 не имеет особенностей типа неподвижных точек.*

Так как подпространство A_{ij} состоит из автомодельных траекторий, его образ на фактор-многообразии Σ^3 является циклом. Обозначим этот цикл через \tilde{A}_{ij} . На нем имеются две точки переключения, соответствующие кривым переключения на A_{ij} , поэтому мы будем называть циклы \tilde{A}_{ij} *двузвенными*. Точки переключения разделяют цикл \tilde{A}_{ij} на две дуги, которые являются образами областей A_{ij}^n и A_{ij}^s соответственно. Обозначим эти дуги через \tilde{A}_{ij}^n и \tilde{A}_{ij}^s . Точку переключения с \tilde{A}_{ij}^n на \tilde{A}_{ij}^s обозначим через \tilde{p}_1 , а точку переключения с \tilde{A}_{ij}^s на \tilde{A}_{ij}^n — через \tilde{p}_2 . Точка \tilde{p}_1 является образом точки p_1 , а \tilde{p}_2 — образом точек p_0 и p_2 при проекции M на фактор-многообразие Σ^3 .

Проекция расслоения Π_{ij} коммутирует с действием элементов группы \mathcal{G} . Поэтому расслоение Π_{ij} индуцирует на Σ^3 расслоение $\tilde{\Pi}_{ij} \rightarrow \tilde{A}_{ij}^s$ с базой \tilde{A}_{ij}^s и двумерными слоями \tilde{F}_{ij}^w , являющимися интегральными многообразиями поля направлений на Σ^3 . Особый отрезок некоторой траектории $\sigma \subset A_{ij}$, проходящий через A_{ij}^s , является поднятием дуги \tilde{A}_{ij}^s из Σ^3 в M . Поэтому топология расслоения $\tilde{\Pi}_{ij}$ соответствует описанной в теореме Б.2 топологии расслоения Π_{ij} , ограниченного на одну выделенную (ij) -особую траекторию σ . Обозначим образы поверхностей \mathcal{T} и \mathcal{T}' на фактор-многообразии Σ^3 через $\tilde{\mathcal{T}}$ и $\tilde{\mathcal{T}'}$. Справедлив следующий аналог теоремы Б.2.

Предложение Б.11 (см. [10, предложение 4.3]). *В окрестности дуги \tilde{A}_{ij}^s имеется расслоение $\tilde{\Pi}_{ij}$ с базой \tilde{A}_{ij}^s и двумерными слоями \tilde{F}_{ij}^w , являющимися интегральными многообразиями поля направлений на Σ^3 . На слоях \tilde{F}_{ij}^w используются управления $(u_i = u_k = 1, u_j = -2)$, $(u_i = -2, u_j = u_k = 1)$. Траектории, лежащие на слое \tilde{F}_{ij}^w , с бесконечным числом переключений входят в соответствующую точку на базе \tilde{A}_{ij}^s и дальше движутся по циклу \tilde{A}_{ij} . Точку \tilde{p}_2 можно включить в базу расслоения $\tilde{\Pi}_{ij}$.*

Каждый из слоев \tilde{F}_{ij}^w расслоения $\tilde{\Pi}_{ij}$ над \tilde{A}_{ij}^s гомеоморфен поверхности конуса, «осью» которого служит \tilde{A}_{ij}^s . Любая траектория, лежащая на одном из слоев \tilde{F}_{ij}^w , имеет точку пересечения с образом гиперповерхности переключения (Б.14). В окрестности точки \tilde{p}_1 эти точки

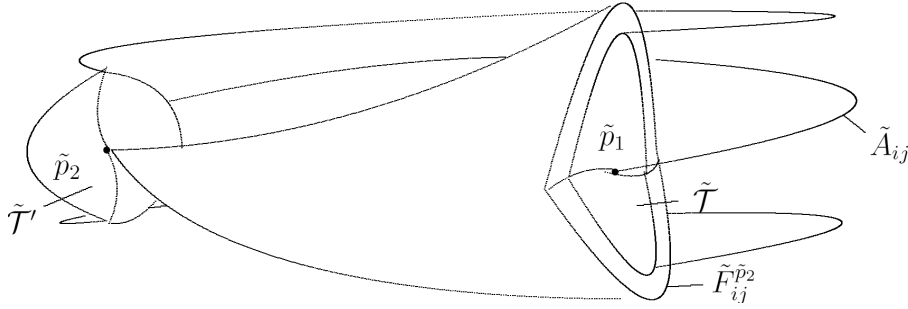


Рис. 25. Окрестность цикла \tilde{A}_{ij} на Σ^3

пересечения образуют двумерное многообразие переключения \tilde{T} , содержащее \tilde{p}_1 . В окрестности точки p_2 имеется двумерное многообразие переключения \tilde{T}' , содержащее \tilde{p}_2 . Дуга \tilde{A}_{ij}^n погружена в поток неособых траекторий, сохраняющих управление ($u_i = u_j = 1, u_k = -2$) между поверхностями переключения \tilde{T} и \tilde{T}' .

Обозначим слой \tilde{F}_{ij}^w расслоения $\tilde{\Pi}_{ij}$ над точкой \tilde{p}_2 через $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$. Цикл \tilde{A}_{ij} в точке \tilde{p}_2 пересекает две поверхности \tilde{T}' и $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$, соприкасающиеся в \tilde{p}_2 . На рис. 25 изображена окрестность цикла \tilde{A}_{ij} . Цикл пересекает поверхности \tilde{T} и \tilde{T}' в точках \tilde{p}_1 и \tilde{p}_2 . Изображен слой $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$ над точкой \tilde{p}_2 , по которому чаттеринг-траектории приходят в \tilde{p}_2 .

Завершим исследование синтеза в окрестности цикла \tilde{A}_{ij} его характеристикой в пространстве между поверхностями \tilde{T}' и $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$.

Проследим поток траекторий, проходящий через \tilde{T}' , дальше в обратном направлении времени. Согласно предложению Б.11 через точку \tilde{p}_2 проходит не только цикл \tilde{A}_{ij} , но в нее приходят и траектории со слоя $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$. Через любую другую точку поверхности \tilde{T}' проходит в точности одна траектория.

Предложение Б.12 (см. [10, предложение 4.4]). *Поток траекторий, проходящих через \tilde{T}' , в окрестности точки \tilde{p}_2 заполняет все пространство между поверхностями \tilde{T}' и $\tilde{F}_{ij}^{\tilde{p}_2}$. Сопряженные переменные непрерывны в окрестности любой точки $p_2 \in M$, являющейся поднятием точки \tilde{p}_2 .*

Следствие Б.1. *Область притяжения цикла \tilde{A}_{ij} в Σ^3 содержит полноторие \mathcal{P} , которое является окрестностью цикла \tilde{A}_{ij} .*

Доказательство. Действительно, синтез построен на самом цикле \tilde{A}_{ij} , в пространстве расслоения $\tilde{\Pi}_{ij}$, на потоке неособых траекторий между поверхностями \tilde{T} и \tilde{T}' и в окрестности точки \tilde{p}_2 . Объединение этих областей является окрестностью цикла \tilde{A}_{ij} , содержащейся в области притяжения цикла \tilde{A}_{ij} . Она содержит открытую окрестность цикла \tilde{A}_{ij} , гомеоморфную открытому полноторию. \square

Полноторие \mathcal{P} из следствия Б.1 можно выбрать так, чтобы все траектории, проходящие через точки его границы $\partial\mathcal{P}$, пересекали границу $\partial\mathcal{P}$ трансверсально снаружи внутрь. Отсюда следует утверждение о топологии области притяжения \mathcal{A}_{ij} цикла \tilde{A}_{ij} в Σ^3 .

Предложение Б.13 (см. [10, предложение 4.6]). *Области притяжения \mathcal{A}_{ij} циклов \tilde{A}_{ij} в Σ^3 гомеоморфны открытым полноториям.*

Б.4. Периодические траектории вне областей притяжения. В [10] на основе идей, изложенных в п. 2.7, получены три ключевых типа периодических траекторий на фактор-пространстве $\Sigma^7 = (T^*M \setminus \{0\})/\tilde{\mathcal{G}}$ (см. лемму 2.10).

Теорема Б.3 (см. [10, теоремы 3–5]).

1. Поле направлений, индуцированное системой (Б.4), определяет на фактор-многообразии Σ^7 два трехзвенных цикла \tilde{V}_{ijk} и \tilde{V}_{jik} , каждый из которых соответствует однопараметрическому семейству оптимальных траекторий в M . На этих траекториях последовательно используются управления, лежащие в каждой из трех вершин симплекса Ω . При этом управления чередуются в порядке, соответствующем индексации, т.е. на одном из циклов вершины чередуются в одном порядке, а на другом — в противоположном. Оба цикла инвариантны относительно четных перестановок из группы симметрий S_3 . Нечетные перестановки переводят циклы друг в друга. При этом на оптимальных траекториях имеет место чаттеринг-режим, т.е. фазовая точка приходит в начало координат за конечное время с бесконечным числом переключений управления.
2. На фактор-многообразии Σ^7 существуют три четырехзвенных цикла \tilde{Q}_{ikjk} , \tilde{Q}_{ijkj} , \tilde{Q}_{jiki} , на каждом из которых совершается четыре переключения управления за период цикла. При этом управления чередуются в порядке, соответствующем индексации; в частности, в любом из циклов участвуют все вершины симплекса управлений. Цикл \tilde{Q}_{ikjk} инвариантен относительно нечетной перестановки (ij) , цикл \tilde{Q}_{ijkj} — относительно (ik) , а цикл \tilde{Q}_{jiki} — относительно (jk) . Четные перестановки переводят циклы друг в друга. Каждый из этих циклов соответствует однопараметрическому семейству оптимальных траекторий на многообразии M . При этом на этих оптимальных траекториях имеет место чаттеринг-режим, т.е. фазовая точка приходит в начало координат за конечное время с бесконечным числом переключений управления.
3. На фактор-многообразии Σ^7 существуют два шестизвенных цикла \tilde{R}_{ijkijk} , \tilde{R}_{jikjik} , на каждом из которых совершается шесть переключений управления за период цикла. При этом управления чередуются в порядке, соответствующем индексации, в частности, в любом из циклов участвуют все вершины симплекса управлений. Цикл \tilde{R}_{ijkijk} инвариантен относительно четной перестановки (ikj) , цикл \tilde{R}_{jikjik} — относительно (jki) . Нечетные перестановки переводят циклы друг в друга. Каждый из этих циклов соответствует однопараметрическому семейству оптимальных траекторий на многообразии M . При этом на этих оптимальных траекториях имеет место чаттеринг-режим, т.е. фазовая точка приходит в начало координат за конечное время с бесконечным числом переключений управления.

Важно отметить, что к периодическим траекториям может быть применена теорема Гробмана—Хартмана для отыскания устойчивых и неустойчивых многообразий этих траекторий. Применение теоремы Гробмана—Хартмана осложняется необходимостью вычисления собственных значений дифференциала отображения последования Пуанкаре $\tilde{\Phi}$ поверхности переключения на себя в точках периодической траектории. В [10] эти значения вычислены для всех трех найденных семейств автомодельных траекторий.

Теорема Б.4 (см. [10, теорема 6 и утверждения 6.3–6.5]).

1. В точках переключения двух трехзвенных циклов \tilde{V} из п. 1 теоремы Б.3 все собственные значения дифференциала отображения $\alpha^{-1} \circ \tilde{\Phi}$ вещественны, попарно отличны друг от друга и по абсолютной величине строго больше единицы, где α — четная перестановка, соответствующая данному циклу. Два собственных значения имеют вид $\lambda^{-4} \approx 51,2106$ и $\lambda^{-5} \approx 136,993$. Здесь

$$\lambda = \sqrt{\frac{7}{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - \sqrt{\frac{7}{3} \cos^2\left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) - 1} \approx 0,373817876$$

есть коэффициент сжатия траектории, отвечающей трехзвенному циклу, после одного переключения. Остальные собственные числа разбиты на пары. Вычисление дает следующие значения для этих пар: $(\approx -129,573; \approx -1,05726)$ и $(\approx -24,733; \approx -5,53889)$. Их произведение в каждой паре равно λ^{-5} .

2. Точки переключения трех четырехзвенных циклов \tilde{Q} из п. 2 теоремы Б.3 являются гиперболическими неподвижными точками отображения $\alpha^{-1} \circ \tilde{\Phi}^2$, где α — нечетная перестановка, соответствующая данному циклу. Более точно, все собственные значения дифференциала этого отображения вещественны, попарно различны, в точности одно из них по модулю строго меньше 1, а все другие — строго больше. Два собственных значения имеют вид $\lambda^{-4} \approx 593,6238$ и $\lambda^{-5} \approx 2930,1611$. Здесь $\lambda \approx 0,20259194$ — число, на которое сжимается траектория, отвечающая четырехзвенному циклу, после двух переключений. Остальные собственные числа разбиты на пары (вычисление дает $(\approx -0,3582464; \approx -8179,2022)$, $(\approx -312,78875; \approx -9,367823)$), и их произведение в каждой паре равно λ^{-5} .
3. Точки переключения двух шестизвенных циклов \tilde{R} из п. 3 теоремы Б.3 являются гиперболическими неподвижными точками отображения $\alpha^{-1} \circ \tilde{\Phi}^2$, где α — четная перестановка, соответствующая данному циклу. Более точно, все собственные значения дифференциала этого отображения вещественны, попарно различны, в точности одно из них по модулю строго меньше 1, а все другие — строго больше. Два собственных значения имеют вид $\lambda^{-4} \approx 1982,838$ и $\lambda^{-5} \approx 13231,50$. Здесь $\lambda \approx 0,14985738$ — число, на которое сжимается траектория, отвечающая шестизвенному циклу, после двух переключений. Остальные собственные числа разбиты на пары (вычисление дает $(\approx 0,789381; \approx 16761,72)$, $(\approx 520,5791; \approx 25,4169)$), и их произведение в каждой паре равно λ^{-5} .

С помощью теоремы Гробмана—Хартмана немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие Б.2 (см. [10, следствие 5.1]). *Каждый из циклов \tilde{Q} из п. 2 теоремы Б.3 погружен в двумерное интегральное многообразие поля направлений на Σ^7 . Эти многообразия гомеоморфны произведению $S^1 \times \mathbb{R}$. Траектории на этих многообразиях асимптотически приближаются к соответствующему четырехзвенному циклу. Им соответствуют трехмерные интегральные многообразия оптимального синтеза в M .*

Аналогичное утверждение верно и для шестизвенных циклов \tilde{R} из п. 3 теоремы Б.3.

В [10] вычислены коэффициенты попарного зацепления найденных периодических траекторий.

Предложение Б.14 (см. [10, предложение 5.3]). *Попарные коэффициенты зацепления восьми циклов в Σ^3 , найденных в предложении Б.2 и пп. 1 и 2 теоремы Б.3, при подходящем выборе ориентации на Σ^3 равны единице. Индекс зацепления любого шестизвенного цикла с любым двузвенным или четырехзвенным циклом равен 2. Индекс зацепления циклов \tilde{R}_{ijkijk} и \tilde{B}_{ijk} равен 1, также как и индекс зацепления циклов \tilde{R}_{jikjik} и \tilde{B}_{jik} . Индекс зацепления циклов \tilde{R}_{ijkijk} и \tilde{B}_{jik} равен 2, также как и индекс зацепления циклов \tilde{R}_{jikjik} и \tilde{B}_{ijk} . Индекс зацепления двух шестизвенных циклов равен 4.*

Справедливо следующее очевидное предложение.

Предложение Б.15 (см. [10, предложение 5.4]). *Трехзвенные, четырехзвенные и шестизвенные циклы не могут принадлежать ни одной из областей притяжения A_{ij} циклов \tilde{A}_{ij} .*

В. ГАМИЛЬТОНОВСТЬ ПОТОКА ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ (Л. В. ЛОКУЦИЕВСКИЙ)

Принцип максимума Понтрягина сводит задачи оптимального управления к изучению гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Оптимальный синтез — это совокупность решений этой системы с фиксированным конечным (или начальным) условием, однозначно покрывающих некоторую область фазового пространства. Определяющую роль при построении оптимального синтеза играют особые траектории — траектории, идущие вдоль поверхности разрыва правой части гамильтоновой системы. Основной характеристикой особой траектории является ее порядок. Однако в определении порядка исторически присутствует некоторая путаница, а существующие различные определения порядка не всегда удобно использовать. В данном приложении построено новое определение порядка, призванное компенсировать недостатки классических определений. В терминах нового определения получена теорема

о том, что особые траектории образуют гладкий гамильтонов поток на некотором подмногообразии поверхности разрыва правой части принципа максимума Понтрягина. В качестве примера исследован поток особых траекторий в задаче управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле. Поток особых траекторий в этой задаче является вполне интегрируемым по Лиувиллю и включается в поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве. Подробное изложение большинства результатов (с доказательствами) можно найти в [13].

В.1. Введение. Хорошо известно, что принцип максимума Понтрягина сводит решение задач оптимального управления к нахождению решений гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Гамильтониан \mathcal{H} этой системы часто является негладким, и правая часть системы терпит разрыв на некотором стратифицированном многообразии N . В гл. 6 настоящей работы исследовались хаотические структуры в интегральных воронках точек, лежащих на стыке трех гиперповерхностей N . В данном приложении исследована динамика траекторий в окрестности одной страты N коразмерности 1.

Пусть N_1 — страта N коразмерности 1. Нетрудно показать, что в силу гамильтоновости предел поля скоростей системы ξ может иметь на N_1 лишь тангенциальный скачок. Большинство траекторий системы пересекает N_1 трансверсально, однако, в некоторых точках предел поля ξ с обеих сторон от N_1 становится касательным к N_1 . В этом случае возникают траектории системы, целиком лежащие в N_1 . Их принято называть особыми.

В основе исследования геометрических свойств гладкой системы обыкновенных дифференциальных уравнений лежит изучение особых точек и предельных циклов системы. Аналогично, особые траектории гамильтоновой системы с разрывной правой частью обычно играют ключевую роль при построении полного фазового портрета. Во-первых, их сравнительно нетрудно находить с помощью дифференцирования гамильтониана принципа максимума Понтрягина. Во-вторых, особые траектории определяют строение поля неособых траекторий в своей окрестности. В огромном спектре задач удается доказать так называемую «теорему о магистрали», т.е. показать, что любая оптимальная траектория за конечное время выходит на особую траекторию¹, и далее оптимальное движение продолжается вдоль особой траектории (см. [6]).

Достаточно много работ посвящено изучению оптимальности особых траекторий. Известны как необходимые условия (см. [1, 22, 23]), так и достаточные условия (см. [3]) второго порядка. Наиболее употребимую форму эти условия принимают в задачах субримановой геометрии (см. [4]).

В данном приложении проведено исследование не свойств одной отдельно взятой особой траектории, но изучение потока всех особых траекторий системы в целом. Доказана теорема о том, что множество всех особых траекторий образует симплектическое подмногообразие \mathcal{S} , а их поток на \mathcal{S} является гамильтоновым относительно ограничения \mathcal{H} на \mathcal{S} . В качестве приложения этой теоремы в п. В.8 исследована задача оптимального управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле. С помощью разработанной техники показано, что поток особых траекторий в этой задаче является вполне интегрируемым по Лиувиллю на \mathcal{S} и включается в поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве.

С понятием особой траектории тесно связано понятие порядка, в некотором смысле характеризующего степень вырождения системы. Имеется два классических определения — определение локального порядка траектории (local order) и определение глобального порядка системы (intrinsic order, см. [25]). Первое определение дает хорошие инструменты для исследования оптимальности одной отдельной особой траектории и работает в большинстве конкретных задач. Второе определение, напротив, часто оказывается слишком ограничительным, но уж если его можно применить в какой-то задаче, то оно позволяет не только сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности особой траектории удобным образом в терминах скобок Пуассона, но и дает возможность исследовать поведение неособых траекторий в окрестности особой траектории. Например, хорошо известна теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка (см. [29]), верная в терминах глобального порядка, и, вообще говоря, неверная в терминах локального порядка (см. [25]).

¹Единственность решения теряется в окрестности особых траекторий; см. пункт В.2.

В данном приложении предложено новое, наиболее естественное, на взгляд автора, определение порядка особой траектории. Оно не требует (обычно неудобного) дифференцирования управляющего параметра (в отличие от локального порядка) и не требует коммутирования серии гамильтонианов (в отличие от глобального порядка). При этом оно сочетает в себе достоинства обоих классических определений: во-первых, оно позволяет изучать оптимальность особой траектории и поведение неособых траекторий в ее окрестности, используя гамильтонов формализм и алгебры Ли скобок Пуассона (как и определение глобального порядка), а во-вторых, оно работает в большинстве конкретных задач (как и определение локального порядка). Теорема о гамильтоновости особого потока доказана в терминах нового определения порядка, хотя верна и в более ограниченном случае глобального порядка. В терминах нового определения также доказана теорема о сопряжении, обобщающая классическую теорему о сопряжении.

В.2. Гамильтоновы системы с негладким гамильтонианом. Пусть \mathcal{M} — $2n$ -мерное симплектическое многообразие с симплектической формой¹ $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$. Через i_ω обозначим канонический изоморфизм $i_\omega : T^*\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, индуцированный формой² ω . Мы исследуем системы с кусочно гладкими гамильтонианами. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемая кусочно гладким гамильтонианом, имеет разрывную правую часть. Поэтому мы начнем с общепринятого определения траектории такой системы, которое совпадает в точках гладкости гамильтониана с классическим определением для гладких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть \mathcal{H} — непрерывный кусочно гладкий гамильтониан с множеством N точек разрыва первой производной (т.е. $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathcal{M} \setminus N)$ и $\mathcal{H} \in C^0(\mathcal{M})$), где N — стратифицированное подмногообразие \mathcal{M} , не содержащее страт полной размерности $2n$.

Определение В.1. Абсолютно непрерывная траектория $x(t)$ является траекторией системы с гамильтонианом \mathcal{H} , если для почти всех t выполнено дифференциальное включение $\dot{x}(t) \in i_\omega K(x(t))$, где $K(x_0) \subseteq T_{x_0}^*\mathcal{M}$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $d\mathcal{H}(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Такое определение гарантирует существование траектории (подробнее про системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью см. [18]), однако единственность теряется. Часто встречаются случаи, когда существуют траектории, целиком лежащие в N , причем в каждую точку такой траектории входят траектории, не лежащие в N (и выходят из нее).

Определение В.2. Траекторию $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, будем называть *особой*, если она лежит на множестве точек разрыва $x(t) \in N$ при $t \in (t_0, t_1)$.

В данном приложении проведено исследование поведения особых траекторий гамильтоновой системы на поверхности разрыва \mathcal{H} коразмерности 1. Предположим, что в окрестности V точки $x_0 \in N$ множество N является гладкой гиперповерхностью, разбивающей V на две области Ω_1 и Ω_2 . Пусть $\mathcal{H}|_{\Omega_i} = H_i$, $i = 1, 2$, и H_i гладко продолжаются в окрестность $\overline{\Omega_i}$. Тогда гамильтониан \mathcal{H} в окрестности x_0 задается одним из двух соотношений:

$$\mathcal{H} = \max(H_1, H_2) \quad \text{или} \quad \mathcal{H} = \min(H_1, H_2).$$

Будем считать, что гладкие функции H_1 и H_2 заданы в окрестности точки x_0 . Тогда можно записать иначе:

$$\mathcal{H} = H + Gu,$$

где

$$H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2), \quad G = \frac{1}{2}(H_1 - H_2),$$

а $u = 1$ в Ω_1 и $u = -1$ в Ω_2 (или наоборот)³. Будем считать, что $dG(x_0) \neq 0$; этого достаточно, чтобы N было гладким многообразием в окрестности $x_0 \in N$.

¹Иными словами, $\omega(x)$ — невырожденная кососимметрическая форма на касательном расслоении $T_x\mathcal{M}$. В канонических координатах (q, p) форма ω принимает вид $\omega = dp \wedge dq$.

²В канонических координатах (q, p) изоморфизм i_ω принимает вид $i_\omega : dH \mapsto (H'_p, -H'_q) = \text{sgrad } H$.

³Всюду в этой работе $u \in [-1; 1]$. Общий случай $u \in [a, b]$ немедленно сводится к $u \in [-1; 1]$ очевидной аффинной заменой.

В.3. Порядок особой траектории. С понятием особой траектории тесно связано понятие ее порядка, который, в некотором смысле, определяет степень вырождения системы в окрестности особой траектории. Как уже отмечалось, существует два различных классических определения порядка: так называемый локальный порядок траектории и глобальный (intrinsic) порядок системы (см. [25]).

Глобальный порядок всегда не превосходит локального порядка. Использование глобального порядка системы позволяет использовать гамильтонов формализм, выписывать необходимые условия и отыскивать особые траектории в терминах скобок Пуассона, что очень удобно и при конкретных вычислениях, и при теоретических исследованиях. В терминах глобального порядка может быть доказана теорема о сопряжении: если глобальный порядок $h = h_{\text{glob}}$ четен, $2|h$, и на особой траектории выполнено усиленное обобщенное условие Лежандра—Клебша (условие Келли—Коппа—Мойера [22]), то в точке стыковки этой особой траектории с любой неособой управление на последней обязано иметь разрыв второго рода (см. [29]). Особые траектории, на которых не выполнено усиленное условие Келли—Коппа—Мойера (такие траектории принято называть атипичными), невозможно исследовать с помощью определения глобального порядка.

Напротив, локальный порядок не позволяет использовать гамильтонов формализм. Однако в большом количестве задач локальный порядок любой особой траектории строго больше глобального порядка системы (в таких случаях мы будем говорить, что определение глобального порядка вырождается). В этом случае в понятии глобального порядка мало смысла: все особые траектории атипичны и их невозможно найти, используя определение глобального порядка. Также в этом случае не работает теорема о сопряжении (см. [25]). Использовать определение локального порядка для отыскания особых траекторий в этих случаях тоже не очень удобно, так как приходится производить формальное дифференцирование управления u , \dot{u} , \ddot{u} и т. д., которое не всегда корректно и всегда не удобно. В защиту определения локального порядка скажем, что обобщенное условие Лежандра—Клебша (см. [22]) формулируется очень просто даже для атипичных особых траекторий¹:

$$(-1)^{h_{\text{loc}}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2h_{\text{loc}}-1} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \leq 0.$$

В этом приложении построено модифицированное определение порядка, сочетающее в себе достоинства обоих классических определений; во избежание путаницы будем называть его *натуральным порядком*. Во-первых, новое определение порядка позволяет без труда использовать гамильтонов формализм, а во-вторых, в большинстве конкретных примеров, в которых локальный порядок траекторий больше глобального порядка системы, натуральный порядок оказывается равным локальному порядку, и все неудобства, связанные с вычислениями в терминах локального порядка, исчезают. В результате удастся получить важную теорему о гамильтоновости потока особых траектории. Теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории и особой траекторией в системе четного порядка остается верной при замене глобального порядка на натуральный.

Определение В.3. Пусть \mathcal{S}_k — множество точек V , в которых обращаются в нуль скобки² $(\text{ad } H)^m G$ при $m = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\mathcal{S}_k = \{x \in V : G(x) = (\text{ad } H)G(x) = \dots = (\text{ad } H)^{k-1}G(x) = 0\}.$$

Будем говорить, что гамильтонова система с кусочно гладким гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V *натуральный порядок* $h \in \mathbb{N}$, если для всех $k = 1, \dots, h-1$ выполнены соотношения

$$\{G, (\text{ad } H)^{2k-1}G\} = 0 \text{ на } \mathcal{S}_{2k}, \quad (\text{B.1})$$

¹Неравенство сформулировано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве необходимо обратить.

²Через ad здесь и далее обозначено присоединенное действие, т.е. $(\text{ad } H)G = \{H, G\} = H'_p G'_q - H'_q G'_p$.

а также¹

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\} \neq 0 \text{ в любой точке из } \mathcal{S}_{2h}.$$

Если же равенства (В.1) выполнены для всех $k \in \mathbb{N}$, то натуральный порядок системы равен ∞ .

Легко убедиться, что выполняются следующие неравенства:

$$\text{локальный порядок} \geq \text{натуральный порядок} \geq \text{глобальный порядок}.$$

Для того чтобы пояснить данное определение и продемонстрировать разницу между различными определениями порядков, проведем подробное исследование модифицированной задачи Фуллера².

Пример В.1. Рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$\frac{1}{2} \int_0^T x^2 dt \rightarrow \min$$

с некоторыми начальными и конечными условиями, которые несущественны для дальнейшего, и при ограничении на вторую производную³

$$|\ddot{x}| \leq |1 + x|.$$

В классической задаче Фуллера предыдущее условие немного другое, $|\ddot{x}| \leq 1$, поэтому при x и \dot{x} , близких к началу координат, эта задача в некотором смысле не сильно отличается от задачи Фуллера. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина: пусть $q_1 = x$, $q_2 = \dot{x}$, а p_1 , p_2 — сопряженные переменные к q_1 , q_2 . Тогда⁴

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2(1 + q_1)u,$$

и управление u выбирается в зависимости от знака произведения $p_2(1 + q_1)$. Получаем

$$H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 \quad \text{и} \quad G = p_2(1 + q_1).$$

Траектория является особой, если на ней G обращается в нуль. Поэтому множество \mathcal{S}_1 определяется условием $p_2(1 + q_1) = 0$ и не является гладким многообразием. Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} 0 = \dot{G} &= \{H, G\} + \{G, G\}u = \{H, G\} = p_2q_2 - p_1(1 + q_1), \\ 0 &= \frac{d}{dt}\{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u. \end{aligned}$$

Поскольку $\{G, \{H, G\}\} = 2p_2(1 + q_1) \neq 0$, то система имеет первый глобальный порядок в любой открытой области V , $h_{\text{glob}} = 1$. С другой стороны, поскольку скобка $\{G, \{H, G\}\} = 2G$ обращается в нуль на любой особой траектории, то локальный порядок любой особой траектории не меньше двух, $h_{\text{loc}} \geq 2$. Таким образом, определение глобального порядка в этой задаче вырождается. Напротив, определение натурального порядка работает: поскольку $\{G, \{H, G\}\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$, то натуральный порядок системы, как и локальный порядок, не меньше двух, $h \geq 2$.

Найдем особые траектории, их локальные порядки и натуральный порядок системы в их окрестности. Итак,

$$\begin{aligned} (\text{ad } H)^2G &= -q_1(1 + q_1) - 2p_1q_2, & (\text{ad } H)^3G &= -q_2(1 + 4q_1), & (\text{ad } H)^4G &= -4q_2^2, \\ \{G, (\text{ad } H)^2G\} &= 2\{H, G\}, & \{G, (\text{ad } H)^3G\} &= -(1 + q_1)(1 + 4q_1), & \{G, (\text{ad } H)^4G\} &= -4q_2(1 + q_1), \\ (\text{ad } H)^kG &\equiv \{G, (\text{ad } H)^kG\} \equiv 0 & \text{при } k &\geq 5. \end{aligned}$$

¹Если в каких-либо точках из \mathcal{S}_{2h} (но не во всех) скобка $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$ обращается в нуль (обозначим множество таких точек через \mathcal{S}_{2h}^0), то в V натуральный порядок не определен. Однако в $V \setminus \mathcal{S}_{2h}^0$ система имеет натуральный порядок, равный h . В ситуации общего положения $\dim \mathcal{S}_{2h}^0 = \dim \mathcal{S}_{2h} - 1$. Вообще говоря, на множестве \mathcal{S}_{2h}^0 могут лежать атипичные особые траектории, локальный порядок которых больше h .

²Подробнее про задачу Фуллера и вообще про особые экстремали второго глобального порядка см. [30].

³Как обычно, предполагаем, что $x \in C^1$ и $\dot{x} \in AC$.

⁴Будем считать, что $\lambda_0 = 1$.

Поскольку $\{G, (\text{ad } H)G\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$ и $\{G, (\text{ad } H)^2G\}|_{\mathcal{S}_3} = 0$, то на любой особой траектории выполнено

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} G = (\text{ad } H)G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 G = (\text{ad } H)^2G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^3 G = (\text{ad } H)^3G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^4 G = (\text{ad } H)^4G + \{G, (\text{ad } H)^3G\}u. \end{array} \right.$$

Дальнейшие вычисления зависят от того, равна ли нулю скобка $\{G, (\text{ad } H)^3G\}$. Существует две возможности, в зависимости от того, в окрестности какой особой траектории рассматривается система. Положим

$$\mathcal{S}_1^1 = \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, \quad \mathcal{S}_1^2 = \{q_1 = -1, p_2 \neq 0\}, \quad \mathcal{S}_1^0 = \{p_2 = 0, q_1 = -1\}$$

и изучим по отдельности поведение системы в малых окрестностях V^j многообразий \mathcal{S}_1^j , $j = 1, 2$. Будем считать, что $V^j \cap \mathcal{S}_1^0 = \emptyset$, $j = 1, 2$.

В области V^1 имеем

$$\mathcal{S}_1^1 = \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, \quad \mathcal{S}_2^1 = \mathcal{S}_1^1 \cap \{p_1 = 0\}, \quad \mathcal{S}_3^1 = \mathcal{S}_2^1 \cap \{q_1 = 0\}, \quad \mathcal{S}_4^1 = \mathcal{S}_3^1 \cap \{q_2 = 0\}.$$

С другой стороны $\{G, (\text{ad } H)^3G\}|_{\mathcal{S}_4^1} \neq 0$. Поэтому нетрудно показать, что единственная особая траектория $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = u = 0$ в V^1 имеет локальный порядок 2. Более того, натуральный порядок системы в V^1 тоже равен 2 и совпадает с локальным.

В области V^2 ситуация следующая: $\mathcal{S}_2^2 = \mathcal{S}_1^2 \cap \{q_2 = 0\}$, а при $k \geq 3$, $\mathcal{S}_k^2 = \mathcal{S}_2^2$. Все особые траектории образуют двумерную поверхность $\{q_1 = -1, q_2 = 0\}$, а p_1, p_2 — любые. Действительно, если $q_1 = -1$ и $q_2 = 0$, то $\dot{q}_1 \equiv \dot{q}_2 \equiv 0$, поэтому никакое управление не может сдвинуть систему из этой точки. Локальный порядок каждой особой траектории в V_2 равен ∞ . Поскольку $\{G, (\text{ad } H)^{k-1}G\}|_{\mathcal{S}_k^2}$ при всех k , то натуральный порядок системы в V^2 совпадает с локальным порядком любой особой траектории и тоже равен ∞ .

Таким образом, в приведенном выше примере глобальный порядок h_{glob} в любой открытой области равен 1. Однако (1) имеется одна особая траектория второго локального порядка, $h_{\text{loc}} = 2$, и в ее окрестности система имеет второй натуральный порядок, $h = 2$, и (2) имеется двумерная поверхность \mathcal{S}_2^2 особых траекторий бесконечного локального порядка, $h_{\text{loc}} = \infty$, и в окрестности \mathcal{S}_2^2 система тоже имеет бесконечный натуральный порядок, $h = \infty$.

В.4. Гамильтоновость потока особых траекторий. Хорошо известно, что управление на особой траектории с помощью процедуры последовательного дифференцирования G в силу системы может быть найдено лишь на четном шаге дифференцирования $2h$. Поэтому в ситуации общего положения все особые траектории образуют четномерное многообразие \mathcal{S} коразмерности $2h$ в \mathcal{M} . Само многообразие \mathcal{M} симплектично, имеет четную размерность, и, значит, размерность \mathcal{S} тоже четна. Истинная причина того, что многообразие \mathcal{S} всегда имеет четную размерность, заключается в том, что оно является симплектическим подмногообразием в \mathcal{M} . Более того, поток особых траекторий на нем является гамильтоновым с гладким гамильтонианом $\mathcal{H}|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}}$.

Приведенная ниже теорема о гамильтоновости особого потока сформулирована в терминах натурального порядка, однако остается верной, если заменить в ее формулировке натуральный порядок на глобальный и не рассматривать атипичные траектории (тогда, правда, область применимости теоремы сильно сужается).

Теорема В.1 (о гамильтоновости, см. [13, теорема 1]). *Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V натуральный порядок $h \neq \infty$ и дифференциалы*

$dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Тогда все особые траектории системы лежат в множестве $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : |u^s(x)| \leq 1\}$, где

$$u^s(x) = -\frac{(\text{ad } H)^{2h}G}{\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}}.$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Множество \mathcal{S}_{2h} (если не пусто) является гладким симплектическим многообразием с симплектической формой $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$ и $\dim \mathcal{S}_{2h} = \dim V - 2h$.
2. Особые траектории на \mathcal{S} получаются следующим образом: необходимо взять траектории гамильтоновой системы на \mathcal{S}_{2h} с гамильтонианом $H|_{\mathcal{S}_{2h}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}_{2h}}$ и ограничить их на \mathcal{S} . Таким образом, особые траектории образуют гамильтонов поток на $\mathcal{S}_{2h} \cap \{|u^s(x)| < 1\}$.
3. Поток гладкого гамильтониана $\tilde{H} = H(x) + G(x)u^s(x)$ в объемлющем пространстве V является касательным к \mathcal{S}_{2h} , и его траектории на \mathcal{S}_{2h} совпадают с траекториями из пункта 2. При этом функцию $u^s(x)$ в определении \tilde{H} можно заменить на любую такую функцию $v(x)$, что $u^s(x) = v(x)$ на \mathcal{S}_{2h} .

Будем называть \mathcal{S} многообразием особых траекторий или просто особым многообразием. Теорема В.1 сформулирована в локальных терминах в окрестности V , однако если система с гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет натуральный порядок h на всем пространстве \mathcal{M} (т.е. $\mathcal{M} = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup N$), то многообразие \mathcal{S} определено глобально на N (достаточно положить $V = \mathcal{M}$).

Замечание В.1. Из п. 2 теоремы В.1 немедленно следует, что особые траектории являются бесконечно гладкими и не пересекаются друг с другом, хотя могут пересекаться с неособыми.

Замечание В.2. Если множество допустимых управлений в $\mathcal{H} = H + Gu$ представляет собой всю прямую, $u \in \mathbb{R}$, то все траектории являются особыми. Действительно, если $G \neq 0$, то максимум Gu по $u \in \mathbb{R}$ не достигается. В этом случае имеются лишь особые траектории, и они образуют гладкий гамильтонов поток на $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h}$.

Имеет место следующее очевидное следствие (конечно, его нетрудно получить и прямым вычислением).

Следствие В.1. H является первым интегралом потока особых траекторий.

Замечание В.3. Если существуют $n - h$ независимых функций H_1, \dots, H_{n-h} в V , коммутирующих на \mathcal{S} с H, G и друг с другом, то поток особых траекторий на \mathcal{S} является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, он включается в поток гладкого гамильтониана \tilde{H} в V , который часто является суперинтегрируемым (см. [16]) на \mathcal{S} с $n + h$ интегралами $H_1, \dots, H_{n-h}, H_{n-h+1} = G, H_{n-h+2} = (\text{ad } H)G, \dots, H_{n+h} = (\text{ad } H)^{2h-1}G$.

Замечание В.4. Если H и G являются бесконечно гладкими функциями, то многообразие особых траекторий \mathcal{S} бесконечно гладко; более того, все особые траектории на \mathcal{S} бесконечно гладкие. Если же $H, G \in C^k(V)$, где $k > 2h$, то \mathcal{S} и особые траектории на \mathcal{S} будут иметь гладкость не ниже $k - 2h$.

В.5. Метод упрощенных вычислений. В этом пункте приведены два полезных утверждения, применение которых позволяет кардинально упростить выкладки. Дело заключается в том, что при прямых вычислениях приходится находить огромное количество символьных слагаемых, которые на деле обращаются в нуль на соответствующих многообразиях \mathcal{S}_k . Например, попытка прямого счета (без использования приводимой ниже техники) в задаче оптимального управления намагниченным волком Лагранжа в контролируемом магнитном поле привела к выражениям, содержащим несколько сотен ненулевых слагаемых. На деле же оказалось, что лишь несколько из них не являлись тождественно нулевыми функциями на \mathcal{S} .

Лемма В.1 (см. [13, леммы 1, 2]). Пусть F — произвольная гладкая функция в V , $k \in \mathbb{N}$ и дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{k-1}G$ линейно независимы в V . Тогда значения скобки $\{H, F\}$ в точках множества \mathcal{S}_{k+1} зависят только от значений F в точках \mathcal{S}_k и не зависят от продолжения F в $V \setminus \mathcal{S}_k$.

Если дополнительно система имеет в V натуральный порядок h и $k < 2h$, то значения скобки $\{G, F\}$ в точках множества \mathcal{S}_k зависят только от значений F в точках \mathcal{S}_k и не зависят от продолжения F в $V \setminus \mathcal{S}_k$.

Таким образом, лемма В.1 позволяет производить вычисления скобок на \mathcal{S}_k индуктивно, отбрасывая слагаемые, обратившиеся в нуль на предыдущих шагах. Например, вычисления в примере В.1 становятся совершенно элементарными. Действительно, в этом примере

$$H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2, \quad G = p_2(1 + q_1) = 0.$$

Разберем случай $q_1 \neq -1$, т.е. $p_2|_{\mathcal{S}_1} = 0$. Итак,

$$\{H, G\} = p_2q_2 - p_1(1 + q_1), \quad \{H, G\}|_{\mathcal{S}_1} = p_1(1 + q_1), \quad p_1|_{\mathcal{S}_2} = 0.$$

Поскольку $h \geq 1$, то по лемме В.1

$$\{G, \{H, G\}\}|_{\mathcal{S}_1} = 0, \quad h \geq 2.$$

Далее, опять по лемме В.1

$$(\text{ad } H)^2 G|_{\mathcal{S}_2} = \{H, p_1(1 + q_1)\}|_{\mathcal{S}_2} = (q_1(1 + q_1) + q_2 p_1)|_{\mathcal{S}_2} = q_1(1 + q_1), \quad q_1|_{\mathcal{S}_3} = 0.$$

Снова по лемме В.1 получаем

$$\{G, (\text{ad } H)^2 G\}|_{\mathcal{S}_3} = 0.$$

Наконец, на последнем шаге

$$(\text{ad } H)^3 G|_{\mathcal{S}_3} = q_2,$$

т.е.

$$q_2|_{\mathcal{S}_4} = 0, \quad \{G, (\text{ad } H)^3 G\}|_{\mathcal{S}_3} = (1 + q_1)|_{\mathcal{S}_3} = 1.$$

Поэтому $h = 2$, и по теореме В.1 особая траектория единственна: $p_1 = p_2 = q_1 = q_2 = 0$ и $u^s = 0$.

Приведем еще одно очень полезное утверждение.

Лемма В.2 (см. [13, лемма 3]). Пусть дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{h-2}G$ линейно независимы в области V , в которой система имеет натуральный порядок h . Обозначим

$$\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots \},$$

где при каждом $i \geq 1$ символ K_i обозначает H или G . Пусть $1 \leq m < 2h$ и $j \geq 0$. Тогда $\mathcal{K}_{m+j} = 0$ на \mathcal{S}_m , если скобка \mathcal{K}_{m+j} содержит не более $m - 1$ символов H (и любое количество символов G). При $m = 2h$ это утверждение верно для всех скобок \mathcal{K}_{2h+j} , в которых крайний слева символ есть H .

В.6. Ниспадающая система скобок Пуассона. Достаточно удобным инструментом для исследования поведения неособых траекторий в окрестности особой является ниспадающая система скобок Пуассона. Опишем ее для случая натурального порядка: выпишем набор дифференциальных уравнений вдоль произвольной траектории системы и упорядочим их по строкам. Первые две строки системы содержат по одному уравнению (будем перед уравнениями, стоящими в k -й строке, ставить символ $\lceil k \rceil$):

$$\lceil 1 \rceil \quad \frac{d}{dt} G = \{H, G\},$$

$$\lceil 2 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u.$$

Третья строка содержит два уравнения:

$$\lceil 3 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{H\{H, G\}\} = \{H\{H, \{H, G\}\}\} + \{G, \{H\{H, G\}\}\}u,$$

$$\lceil 3 \rceil \quad \frac{d}{dt} \{G\{H, G\}\} = \{H\{G, \{H, G\}\}\} + \{G, \{G\{H, G\}\}\}u.$$

В общем случае m -я строка, $m \geq 2$, содержит уравнения вида

$$\lceil m \rceil \quad \frac{d}{dt} \mathcal{K}_m = \{H, \mathcal{K}_m\} + \{G, \mathcal{K}_m\}u,$$

где $\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, $K_1 = G$, $K_2 = H$, а остальные символы K_j могут обозначать как H , так и G (т.е. всего 2^{m-2} уравнений). Уравнения в $(m + 1)$ -й строке получаются дифференцированием по t правых частей уравнений m -й строки, например,

$$\begin{aligned}]m + 1[\quad \frac{d}{dt} \{H, \mathcal{K}_m\} &= \{H, \{H, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{H, \mathcal{K}_m\}\}u, \\]m + 1[\quad \frac{d}{dt} \{G, \mathcal{K}_m\} &= \{H, \{G, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{G, \mathcal{K}_m\}\}u. \end{aligned}$$

Ниспадающая система выписывается вплоть до строки с номером $2h$, где h — натуральный порядок системы.

Таким образом в m -й строке выписаны уравнения на производную по времени от скобок m -го порядка, а правые части этих уравнений суть аффинные по управлению u функции, где коэффициентами выступают скобки $(m + 1)$ -го порядка.

Главными скобками ниспадающей системы будем называть скобки G , $(\text{ad } H)G$, \dots , $(\text{ad } H)^{2h-1}G$. Остальные скобки порядка не выше $2h$ будем называть неглавными. Доказательство теоремы В.2 о сопряжении основано на том, что при выходе на особую траекторию (или при сходе с нее) в любой строке с номером m неглавные скобки имеют больший порядок малости по $t - \tau$, чем главные скобки, и потому не влияют на принципиальное поведение системы. Этот факт следует из леммы В.2. Действительно, если неособая траектория выходит в некоторый момент τ на особое многообразие, то почти все правые части в ниспадающей системе скобок Пуассона обращаются в нуль в момент τ . Единственное уравнение, правая часть которого не обращается в нуль — это производная от главной скобки в последней строке:

$$\frac{d}{dt} ((\text{ad } H)^{2h-1}G) = (\text{ad } H)^{2h}G + \{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}u.$$

Поэтому все скобки длины $2h$, кроме главной, имеют на траектории порядок $(t - \tau)^2$ и мажорируются главной скобкой. Осталось заметить, что аналогичный факт для главных и неглавных скобок одинаковой длины $k < 2h$ также верен: неглавные скобки длины $k < 2h$ имеют порядок $(t - \tau)^{2h-k+2}$. Дело заключается в том, что главная скобка длины m появляется в правой части в $(m - 1)$ -й строке только в производной главной скобки длины $m - 1$.

В.7. Теорема о сопряжении. Как отмечалось выше, в окрестности многообразия особых траекторий \mathcal{S} теряется единственность решения гамильтоновой системы $\mathcal{H} = H + Gu$ с разрывной правой частью. А именно, через каждую точку на \mathcal{S} проходит единственная особая траектория, но из каждой точки особой траектории могут выходить неособые, и обратно, в каждую точку особой траектории могут входить неособые. Типичное поведение неособых траекторий в окрестности (не атипичной) особой траектории в системе первого натурального (или, что то же, глобального) порядка описано так: в каждую точку особой траектории приходят две неособые траектории и выходят тоже две. В случае большего глобального порядка в любую точку особой траектории может входить (или выходить) континуальное семейство неособых (см. пример Фуллера [30])

Теоремы о невозможности регулярного сопряжения (в том или ином смысле) неособой траектории с особой обычно доказываются в терминах глобального порядка. Например, если система имеет четный глобальный порядок, то при сопряжении неособой траектории с особой (не атипичной) управление обязано иметь разрыв второго рода. При этом заменить глобальный порядок на локальный в формулировке нельзя (см. [25]).

В этом пункте мы приводим обобщение классической теоремы о сопряжении, а именно, теорему В.2 о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка в терминах натурального порядка. Таким образом, наличие глобального порядка не является необходимым для доказательства теорем о сопряжении. Достаточно наличие лишь натурального порядка.

Без ограничения общности будем считать, что $u = 1$, если $G > 0$, и $u = -1$ если $G < 0$, т.е. выполнен принцип максимума.

Теорема В.2 (о сопряжении, см. [13, теорема 2]). *Предположим, что негладкая гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V четный натуральный порядок $h \neq \infty$ и дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Рассмотрим особую траекторию $x^*(t)$,*

$u^*(t)$ при $t \in (t_1, t_2)$, на которой $u^*(t) \in (-1; 1)$ и выполнено усиленное условие Лежандра—Клебша¹:

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}(x^*(t)) < 0.$$

Если неособая траектория $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ определена при $t \geq \tau$ (или $t \leq \tau$) и сопрягается в точке $\tau \in (t_1, t_2)$ с особой траекторией, $\tilde{x}(\tau) = x^*(\tau)$, то управление $\tilde{u}(t)$ имеет разрыв второго рода при $t \rightarrow \tau + 0$ (соответственно $t \rightarrow \tau - 0$).

Замечание В.5. Условие $|u^*(t)| < 1$ в теореме В.2 существенно. Это означает, что теорема В.2 запрещает регулярное сопряжение во внутренних точках многообразия особых траекторий \mathcal{S} , но ничего не утверждает про сопряжение на его границе $\partial\mathcal{S}$.

Пример В.2. В рассмотренном выше примере В.1 в окрестности особой траектории $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ система имеет второй натуральный порядок, поэтому² по доказанной теореме В.2 регулярное сопряжение с неособой траекторией невозможно. Однако этот факт не следует из классической теоремы о сопряжении, так как глобальный порядок системы равен 1 в любой открытой области. Это связано с тем, что определение глобального порядка в этом примере вырождается: локальный порядок любой особой траектории больше или равен 2; следовательно, все траектории атипичны.

Таким образом, невозможность регулярного сопряжения на самом деле определяется четностью натурального порядка, а не глобального. Четность локального порядка, напротив, не препятствует регулярному сопряжению. Это хорошо видно из примера Льюиса (см. [25]), который изначально и послужил толчком для введения двух разных определений порядка — глобального и локального.

Замечание В.6. Если система в V имеет натуральный порядок h , то локальный порядок любой особой траектории в V совпадает с h (хотя глобальный порядок может быть меньше). Действительно, вычислим в старых обозначениях $\left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ как формальный многочлен от $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots$. Коэффициентами при мономах будут линейные комбинации скобок от H и G длины k . Поэтому, согласно лемме В.2, если $k < 2h$, то

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0.$$

Если же $k = 2h$, то по той же лемме получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt}\right)^{2h} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = \{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\} \neq 0 \quad \text{на } \mathcal{S}.$$

Более того, как элементарное следствие получаем обобщенное неравенство Лежандра—Клебша для натурального порядка, вытекающее из его аналога для локального порядка:

$$(-1)^h \{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\} \leq 0.$$

Неравенство сформулировано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве надо обратить. Эта формула хорошо известна в случае, когда h — глобальный порядок. Здесь же она доказана для более общего определения натурального порядка и работает во многих случаях несовпадения локального и глобального порядков.

В.8. Задача управления намагниченным волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле.

Пример В.3. Рассмотрим задачу оптимального управления вращением твердого тела в переменном магнитном поле. Пусть осесимметричное намагниченное твердое тело (волчок Лагранжа) закреплено в точке на оси симметрии и помещено внутрь индукционной магнитной катушки (в невесомости). Магнитное поле катушки приближенно будем считать в каждый момент времени постоянным: $h(t)e$, где $e \in \mathbb{R}^3$ — единичный вектор, а $h(t) \in \mathbb{R}$ — напряженность поля, и пренебрежем

¹Тот факт, что обобщенное условие Лежандра—Клебша формулируется в терминах натурального порядка именно в таком виде, доказан в замечании В.6.

²Обобщенное условие Лежандра—Клебша выполнено, так как $\{G, (\text{ad } H)^3G\} = -1$ в начале координат.

эффектом Барнетта. Вычисления будем проводить в системе координат, связанной с телом. Обозначим через $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_2)$ матрицу, обратную к тензору инерции, через $m \in \mathbb{R}^3$ — момент тела, а через $N \in \mathbb{R}^3$ — постоянный магнитный момент тела. Будем считать, что тело намагничено осесимметрично, т.е. вектор N лежит на оси симметрии и является собственным вектором J , $JN = J_2N$. Тогда, если $u(t) \in [-u_0, u_0]$ — напряжение на катушке в момент времени t , а R — ее внутреннее сопротивление, то

$$\begin{cases} \dot{m} = [m, Jm] + h[e, N], \\ \dot{e} = [e, Jm], \\ \dot{h} = -Rh + u, \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение.

Система (B.2) почти совпадают с системой уравнений вращения волчка Лагранжа в однородном силовом поле тяжести (см. [2]). Существенная разница заключается в том, что модуль силы меняется со временем.

Система (B.2) не изменяется при следующих заменах координат: пусть $\lambda > 0$, тогда

- (1) $t \mapsto 1/\lambda t$, $m \mapsto \lambda m$, $h \mapsto \lambda^2 h$, $u \mapsto \lambda^3 u$, $R \mapsto \lambda R$, поэтому мы можем считать, что $R = 1$;
- (2) $h \mapsto \lambda h$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda} N$, $u \mapsto \lambda u$, поэтому можно считать, что $u_0 = 1$, и
- (3) $e \mapsto \lambda e$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda} N$, поэтому будем считать, что $N = (0, 0, 1)$, а вектор e может иметь, вообще говоря, не единичную длину.

Таким образом, фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$ семимерно: $M = \mathbb{R}^7 \setminus \{e = 0\}$.

Требуется, управляя напряжением на катушке $u \in [-1, 1]$, перевести систему из начального состояния в конечное за минимальное время:

$$T \rightarrow \inf. \quad (\text{B.3})$$

Начальное и конечное состояния могут быть либо фиксированными, либо лежащими на некоторых терминальных многообразиях — это несущественно для дальнейшего.

Система (B.2) обладает следующими очевидными первыми интегралами:

1. проекция вектора момента на ось симметрии: $\langle m, N \rangle = \text{const}$;
2. проекция вектора момента на направление магнитного поля: $\langle m, e \rangle = \text{const}$;
3. геометрический интеграл: $\langle e, e \rangle = \text{const}$.

Длина вектора момента m и аналог энергии E не сохраняются в системе, так как напряженность магнитного поля h меняется со временем.

Пусть p, q, r — переменные, сопряженные к m, e и h соответственно (координаты в слое на кокасательном расслоении $\mathcal{M} = T^*M$); $p \in \mathbb{R}^3$, $q \in \mathbb{R}^3$ и $r \in \mathbb{R}$. Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальные траектории должны быть траекториями гамильтоновой системы с разрывной правой частью:

$$\mathcal{H} = \langle p, [m, Jm] \rangle + h \langle p, [e, N] \rangle + \langle q, [e, Jm] \rangle - rh + ru = H + Gu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает спаривание вектора и ковектора (скалярное произведение), а симплектическая форма имеет вид $\omega = dp \wedge dm + dq \wedge de + dr \wedge dh$. Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{p} = [p, Jm] - J[p, m] - J[q, e], \\ \dot{q} = h[p, N] + [q, Jm], \\ \dot{r} = -\langle p, [e, N] \rangle + r. \end{cases}$$

Особое многообразие \mathcal{S} может быть найдено в явном виде с помощью лемм B.1 и B.2. Оказывается, что глобальный порядок системы равен 2, но любая особая траектория атипична. Тем не менее определение натурального порядка работает. В этой задаче натуральный порядок равен 3 на открытом всюду плотном множестве, и натуральный порядок совпадает с локальным порядком. Таким образом, на 14-мерном пространстве \mathcal{M} особые траектории лежат на многообразии \mathcal{S} размерности $\dim \mathcal{S} = \dim \mathcal{M} - 2 \cdot 3 = 8$ и образуют на нем гамильтонов поток с гамильтонианом H . Помимо очевидного первого интеграла H особый поток обладает дополнительно тремя первыми

интегралами исходной управляемой системы. Следовательно, поток особых траекторий автоматически является интегрируемым по Лиувиллю (подробнее см. лемму В.3). Это приводит к тому, что особые траектории в рассматриваемой задаче удастся отыскать в явном виде.

Теорема В.3 (см. [13, теорема 3]). *Движение по любой особой траектории на*

$$M' = M \cap \{[e, N] \neq 0, \langle e, [m, q] \rangle \neq 0\}$$

в задаче (В.2), (В.3) оптимального управления волчком Лагранжа в контролируемом магнитном поле устроено следующим образом:

1. *вектор момента импульса m , магнитный момент тела N и направление магнитного поля e во время движения лежат в одной плоскости и образуют друг с другом постоянные углы;*
2. *вектор момента m во время движения имеет постоянную длину и параллелен сумме вектора магнитного момента N и проекции N на направление магнитного поля e ;*
3. *плоскость, содержащая векторы m и e , вращается вокруг N с постоянной угловой скоростью*

$$\Omega = \langle e, e \rangle + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle};$$

4. *управление u выбирается так, чтобы напряженность магнитного поля h внутри катушки была постоянной: $u^s = h \in (-u_0, u_0)$.*

Таким образом, при движении по особой траектории волчок равномерно вращается с постоянной скоростью вокруг вектора направления магнитного поля. Прецессия и нутация отсутствуют, а сумма магнитного момента и его проекции на направление магнитного поля в любой момент времени параллельна вектору момента вращения тела.

Теорема В.3 описывает проекцию особых траекторий на фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$. Ситуация в расширенном фазовом пространстве $M = T^*M$ описывается следующим образом.

Лемма В.3 (см. [13, лемма 6]). *Гамильтонов поток особых траекторий на \mathcal{S} , $\dim \mathcal{S} = 8$, обладает четырьмя независимыми первыми интегралами в инволюции:*

$$F_1 = \langle e, e \rangle, \quad F_2 = \langle m, e \rangle, \quad F_3 = \langle m, N \rangle, \quad F_4 = \tilde{\mathcal{H}} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} \mathcal{H} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} H \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} \langle q, [e, Jm] \rangle.$$

Первые интегралы h и $E = \langle m, Jm \rangle$ через них выражаются.

Таким образом, по теореме В.1 поток особых траекторий в задаче (В.2), (В.3) оптимального управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, по той же теореме его можно включить в поток гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u^s(x)$, который (как было отмечено в замечании В.3) обладает на \mathcal{S} дополнительно еще шестью первыми интегралами: $F_5 = G$, $F_6 = (\text{ad } H)G, \dots, F_{10} = (\text{ad } H)^5 G$. Матрица $(\{F_i, F_j\})_{i,j=1}^{10}$ имеет ранг 6, и потому система с гамильтонианом $\tilde{\mathcal{H}}$ является суперинтегрируемой¹ на \mathcal{S} .

Г. ОСОБЫЕ РЕЖИМЫ В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ С МНОГОМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ИЗ МНОГОГРАННИКА (Л. В. Локуциевский)

Основной объект исследования в работе — это гамильтоновы системы, аффинные по многомерному управлению, меняющемуся в некотором многограннике Ω . В основной части работы проведено исследование интегральных воронок точек, лежащих на траекториях второго порядка, и показано, что интегральные воронки содержат хаотические структуры канторовского типа. В данном приложении проведено исследование интегральных воронок точек на особых траекториях первого порядка. Доказана теорема о структуре выхода оптимальных траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и схода с нее) для систем с голономным управлением. Доказано, что лагранжева поверхность в окрестности особой траектории первого порядка специальным

¹Отметим, что вне \mathcal{S} эта система теряет первые интегралы F_5, \dots, F_{10} , но это не имеет значения, так как все особые траектории лежат на \mathcal{S} .

образом соткана из траекторий системы, особых по граням многогранника Ω . Предложен простой метод явного отыскания особых траекторий первого порядка по граням многогранника Ω . В результате описывается полная картина оптимального синтеза, полученная последовательным сопряжением особых экстремалей первого порядка. Подробное изложение результатов данного приложения можно найти в [14].

Г.1. Введение. При изучении топологии решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений ключевую роль играют неподвижные (особые) точки и периодические траектории. Поведение траекторий системы в окрестности особых точек и циклов является определяющим при исследовании глобальной структуры решений. Аналогичным образом в задачах оптимального управления при построении оптимального синтеза¹ особые траектории и геометрия их окрестностей зачастую определяют структуру всего синтеза. Наиболее хорошо изученный случай — это аффинные по управлению гамильтоновы системы принципа максимума Понтрягина с одномерным управлением:

$$\mathcal{H}(q, p, u) = H(q, p) + G(q, p)u, \quad u \in [\alpha, \beta].$$

Согласно принципу максимума Понтрягина $u = \alpha$, если $G < 0$, и $u = \beta$, если $G > 0$. Если же на оптимальной траектории $G \equiv 0$ на некотором промежутке времени, то управление не может быть найдено из принципа максимума. Такая траектория называется особой, и управление на ней часто может быть найдено из условий $\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0$. По теореме Келли—Коппа—Мойера (см. [22]), управление на особой траектории в явном виде в первый раз может возникнуть только в производной G четного порядка $2h$ и однозначно выражается из условия $G^{(2h)} = 0$. Число h принято называть порядком особой траектории.

Особые траектории первого порядка часто встречаются в задачах математической экономики. Например хорошо известна теорема о магистрали (см. [6]). Особые траектории второго порядка естественным образом возникают в управляемых механических системах — робототехнике, астронавтике и т. д. (см. [30]). Это связано с тем, что в качестве управления в таких задачах выступает вторая производная фазовых координат (сила). Определение порядка особой экстремали для задач с многомерным управлением приводит к так называемому флагу порядков (подробнее см. [8]).

В данном приложении изучаются особые траектории первого порядка в управляемых гамильтоновых системах с многомерным управлением. На управление наложен ряд аффинных ограничений, т.е. $u \in \Omega$, где Ω — многогранник. В приложении предложен новый метод изучения особых траекторий. На участвующие в системе гамильтонианы H и G и их скобки Пуассона выписывается система дифференциальных уравнений специального вида. Оказывается, что с помощью некоторого раздувающего отображения, в этой системе можно выделить набор главных переменных, определяющих поведение всей системы в целом. В системах с голономным управлением² структура системы относительно главных переменных совпадает с оптимальным синтезом одной выпуклой модельной задачи оптимального управления. Это позволяет применить мощную технику выпуклого анализа для построения синтеза в окрестности особой траектории.

Для нелинейных систем с голономным управлением доказана теорема об эквивалентности синтеза в окрестности особой траектории первого порядка и синтеза в модельной задаче оптимального управления. Структура оптимальных траекторий в модельной задаче полностью построена в многомерном случае для «не слишком скошенных» компактных многогранников (подробнее см. теоремы Г.3 и Г.4). Построен метод аналитического отыскания особых траекторий для заданной грани многогранника.

В пп. Г.2 и Г.3 даются основные определения. В п. Г.4 показано, что в ситуации общего положения особые траектории по граням размерности ≥ 2 не оптимальны. Начиная с п. Г.5 исследуется класс задач с голономным управлением, в которых (в отличие от общего случая) возникают особые траектории по граням всех возможных размерностей.

Г.2. Особые по граням траектории. Пусть на многомерное управление u наложен ряд линейных ограничений типа равенств и неравенств, т.е. u меняется в некотором многограннике Ω из аффинного пространства U с отмеченной точкой. Без ограничения общности можно считать, что

¹Или более общо, в изучении динамики траекторий гамильтоновой системы с разрывной правой частью.

²Аффинная по управлению система имеет голономное управление, если, грубо говоря, поле плоскостей, отвечающих многограннику Ω , интегрируемо. Точнее см. определение Г.4.

$\dim U = \dim \Omega$. На симплектическом многообразии \mathcal{M} задана управляемая гамильтонова система принципа максимума Понтрягина

$$\mathcal{H}(x, u) = H(x) + \langle G(x), u \rangle. \quad (\text{Г.1})$$

Здесь $x = (q, p) \in \mathcal{M}$, а $H : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ и $G : \mathcal{M} \rightarrow U^*$ — достаточно гладкие функции¹, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает действие ковектора на векторе. Оптимальное управление \hat{u} выбирается согласно принципу максимума Понтрягина

$$\langle G, \hat{u} \rangle = \max_{v \in \Omega} \langle G, v \rangle. \quad (\text{Г.2})$$

Очевидная геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина заключается в том, что \hat{u} лежит в опорной гиперплоскости $\langle G, v \rangle = \text{const}$ к многограннику Ω (если $G \neq 0$). Пересечение опорной гиперплоскости с Ω может быть либо вершиной, либо гранью большей размерности.

Рассмотрим произвольную траекторию $x(t), u(t)$ системы (Г.1), (Г.2).

Определение Г.1.

1. Если для почти всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (Г.2) достигается ровно в одной вершине (возможно, в разных при разных t), то траекторию $x(t), u(t)$ будем называть неособой на (t_1, t_2) .
2. Зафиксируем грань Γ многогранника Ω . Если при всех t из промежутка (t_1, t_2) максимум в (Г.2) достигается одновременно на всех точках Γ и только в них, то такую траекторию будем называть особой² по грани Γ .

Данное выше определение особой траектории по всему многограннику Ω совпадает с классическим определением особой траектории: $G(x(t)) = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$.

Замечание Г.1. В данном приложении изучаются окрестности особых экстремалей. Если траектория $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ является особой по грани Γ на промежутке (t_1, t_2) , то для любой точки x , близкой к $\hat{x}(t)$, максимум в (Г.2) может достигаться только на точках некоторой подграницы $\tilde{\Gamma} \subseteq \Gamma$. Поэтому при изучении окрестности особой экстремали (в том числе ее самой) можно редуцировать задачу и считать, что $\Omega = \Gamma$, а траектория является особой по всему многограннику.

Ниже приведена теорема о выходе на особую траекторию первого порядка по всему многограннику в голономном случае (см. определение Г.4) А именно, пусть

$$\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots \subset \Gamma_k$$

— некоторый набор последовательно вложенных граней³. Тогда существует траектория, выходящая на особую по всему многограннику следующим образом: сначала используется управление, особое по Γ_1 , потом оно скачком переключается на особое управление по Γ_2 и т. д., пока не переключится на особое управление по всему многограннику (см. теорему Г.4). Подобное поведение оптимальных траекторий в широком классе задач впервые было получено для случая, когда Ω — тетраэдр, в работах М. И. Зеликина, Л. Ф. Зеликиной и К. В. Хлюстова (см., например, [11]).

Г.3. Аналитические формулы особых траекторий. Согласно замечанию Г.1 для отыскания особых экстремалей по граням, достаточно построить алгоритм отыскания особой экстремали по всему многограннику.

Итак, пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ — траектория, особая по всему многограннику Ω , т.е.

$$G|_{\hat{x}(t)} = 0 \quad (\text{Г.3})$$

при $t \in (t_1, t_2)$, и управление не может быть найдено однозначно из принципа максимума Понтрягина. Однако из определения (Г.1) немедленно следует, что

$$\dot{G} = \ddot{G} = \dots = G^{(n)} = \dots = 0.$$

¹Например, бесконечно гладкие.

²Иногда употребляется термин «полуособая экстремаль/траектория по грани Γ ».

³Возможно, Γ_1 — точка.

Здесь и далее производная берется вдоль траекторий системы (Г.1). Производная может быть вычислена стандартным образом через скобки Пуассона. Однако необходимо действовать аккуратно; например $\{G, G\}$, вообще говоря, нулю не равно, так как $G(x)$ является векторнозначной функцией. Дадим строгое определение.

Определение Г.2. Пусть $F : \mathcal{M} \rightarrow T_m^n(U)$ и $K : \mathcal{M} \rightarrow T_l^k(U)$ — две тензорнозначные функции. Тогда их скобкой Пуассона называется тензорнозначная функция $R : \mathcal{M} \rightarrow T_{m+l}^{n+k}$, определяемая формулой¹

$$R_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} = \left\{ F_{\beta_1 \dots \beta_m}^{\alpha_1 \dots \alpha_n}, K_{\delta_1 \dots \delta_l}^{\gamma_1 \dots \gamma_k} \right\}.$$

Прямое вычисление показывает, что это определение корректно, т.е. G действительно является тензором типа $(n+k, m+l)$. Это определение позволяет производить вычисления в бескоординатной форме (например, оно используется для нахождения первых интегралов в гамильтоновых системах классической механики, см. [2, добавление 5]).

Линейность скобки Пуассона для функций влечет линейность тензорной скобки Пуассона. Кососимметричность и тождество Якоби записываются в виде

$$\begin{aligned} \{F, K\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} + \{K, F\}_{\delta_1 \dots \delta_l \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \alpha_1 \dots \alpha_n} &= 0; \\ \{G, \{F, K\}\}_{\beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r}^{\alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k \epsilon_1 \dots \epsilon_s} + \{F, \{K, G\}\}_{\delta_1 \dots \delta_l \zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m}^{\gamma_1 \dots \gamma_k \epsilon_1 \dots \epsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n} + \{K, \{G, F\}\}_{\zeta_1 \dots \zeta_r \beta_1 \dots \beta_m \delta_1 \dots \delta_l}^{\epsilon_1 \dots \epsilon_s \alpha_1 \dots \alpha_n \gamma_1 \dots \gamma_k} &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{G, G\}$ является кососимметрической билинейной формой над U . Найдем производную G вдоль системы (Г.1). По правилу Лейбница получаем

$$\left(\frac{d}{dt} G \right)_\alpha = \{H, (G)_\alpha\} + \{(G)_\beta, (G)_\alpha\} \hat{u}^\beta + (G)_\beta \dot{\hat{u}}^\beta.$$

Здесь $\hat{u} = \hat{u}(t)$ — управление на особой траектории. Поскольку $G|_{\hat{x}(t)} = 0$ при $t \in (t_1, t_2)$, то

$$\frac{d}{dt} G = \{H, G\} + \{G, G\} \hat{u}. \quad (\text{Г.4})$$

По теореме Гоха—Кренера (см. [23]) билинейная форма $\{G, G\}$ должна обращаться в нуль в точках особой траектории:

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0 \quad \text{при } t \in (t_1, t_2), \quad (\text{Г.5})$$

и, следовательно,

$$\{H, G\}|_{\hat{x}(t)} = 0. \quad (\text{Г.6})$$

Далее аналогично получаем

$$\frac{d}{dt} \{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\} \hat{u} = 0. \quad (\text{Г.7})$$

Теперь управление \hat{u} может быть найдено, если

1. билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}$ невырождена в $\hat{x}(t)$; в этом случае особое управление \hat{u} непрерывно и однозначно находится: $\hat{u}(t) = O_\Omega(\hat{x}(t))$, где

$$O_\Omega(x) = - \left(\{G, \{H, G\}\}|_x \right)^{-1} \{H, \{H, G\}\}|_x.$$

Будем определять функцию $O_\Omega(x)$ только в таких точках x , для которых выполняются условия (Г.3), (Г.5) и (Г.6);

2. найденное особое управление $\hat{u}(t)$ лежит во внутренности Ω .

Определение Г.3. Будем говорить, что особая по Ω траектория $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ имеет первый порядок, если она удовлетворяет условиям 1, 2.

Замечание Г.2. Теорема Гоха—Кренера требует также симметричности и неотрицательной определенности формы $\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ (подробнее см. лемму Г.2).

¹Справа в равенстве стоит классическая скобка Пуассона для функций.

Воспользуемся замечанием Г.1, чтобы найти особую траекторию по некоторой грани Γ . Пусть Γ' — линейное подпространство в U , параллельное $\text{Aff } \Gamma$, Γ^\perp — аннулятор Γ' в U^* .

Зафиксируем произвольное $u^0 \in \Gamma$ и положим $u = u^0 + v$, где $v \in \Gamma'$. Тогда

$$\mathcal{H} = (H + \langle G, u^0 \rangle) + \langle G, v \rangle = H^\Gamma + \langle G^\Gamma, v \rangle,$$

где $H^\Gamma(x) = H(x) + \langle G(x), u^0 \rangle$ и $G^\Gamma(x) = G(x)|_{\Gamma'}$ определены для таких $x \in \mathcal{M}$, что $\arg \max_{u \in \Omega} \langle G, u \rangle \subseteq \Gamma$. Прямым вычислением получаем следующее утверждение.

Лемма Г.1 (см. [14, лемма 1]). *Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$ является особой траекторией первого порядка по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда*

1. *условие (Г.3) превращается в*

$$G|_{\hat{x}(t)} \in \Gamma^\perp \quad \text{при } t \in (t_1, t_2);$$

2. *условие (Г.6) преобразуется в*

$$\{H^\Gamma, G\}|_{\hat{x}(t)} = \{H, G\}|_{\hat{x}(t)} + \{G, G\}|_{\hat{x}(t)} u^0 \in \Gamma^\perp;$$

3. *условие (Г.5) из теоремы Гоха—Кренера означает*

$$\{G, G\}|_{\hat{x}(t)} \Gamma' \subseteq \Gamma^\perp \quad \text{при } t \in (t_1, t_2).$$

В этом случае особое управление находится их формулы $\hat{u}_\Gamma(t) = O_\Gamma(\hat{x}(t))$, где

$$O_\Gamma(\hat{x}(t)) = u^0 - \left(\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)} \right)^{-1} \{H^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)},$$

если форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}|_{\hat{x}(t)}$ невырождена на Γ' , $\hat{u}(t) \in \Gamma$ и $\langle G, v \rangle$ достигает на Γ максимума по Ω (а не минимума)¹.

Для экстремалей первого порядка при стыковке особых траекторий по разным граням характерно регулярное поведение управления, т.е. управление терпит разрыв первого рода в точке стыковки². Рассмотрим экстремаль $\hat{x}(t), \hat{u}(t)$, которая является особой по грани Γ_0 при $t \in (t_0, t_1)$ и особой по грани Γ_1 при $t \in (t_1, t_2)$. Тогда в точке стыковки $x^0 = x(t_1)$ с очевидностью должны быть выполнены условия 1–3 из леммы Г.1 для обеих граней Γ_1 и Γ_2 .

Отметим, что в точке стыковки x^0 функция $\langle G(x^0), v \rangle$ достигает максимума одновременно в точках $v \in \Gamma_1$ и в точках $v \in \Gamma_2$. Поэтому условие 1 должно быть выполнено в усиленной форме:

$$G|_{x^0} \in (\text{conv}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1))^\perp, \quad (\text{Г.8})$$

где $\text{conv}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ — минимальная грань, содержащая Γ_1 и Γ_2 .

Г.4. Поверхности особых экстремалей. Условия 1 и 2 леммы Г.1 определяют в \mathcal{M} некоторую поверхность \mathcal{M}_Γ , внутри которой должны лежать все особые траектории первого порядка по грани Γ . Необходимое условие Гоха—Кренера — условие 3 из леммы Г.1 — определяет в \mathcal{M}_Γ поверхность $\mathcal{M}_\Gamma^0 \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$. Особые траектории также не должны покидать и поверхность \mathcal{M}_Γ^0 по теореме Гоха—Кренера.

С другой стороны, особое управление u_Γ фактически выбирается только в точках \mathcal{M}_Γ^0 из того условия, что траектория гамильтоновой системы (Г.1), (Г.2) не покидает \mathcal{M}_Γ . Другими словами, векторное поле, отвечающее гамильтониану $\mathcal{H}(x, \hat{u}_\Gamma)$, должно быть касательным к \mathcal{M}_Γ в точках \mathcal{M}_Γ^0 . В ситуации общего положения такое управление может быть выбрано единственным образом, что определяет на \mathcal{M}_Γ^0 единственно возможное векторное поле ξ_Γ управляемой системы (Г.1), (Г.2), касательное к \mathcal{M}_Γ .

¹Нетрудно видеть, что определение $O_\Gamma(x)$ не зависит от выбора $u_0 \in \Gamma$.

²Для особых экстремалей второго порядка (или вообще любого четного порядка) регулярная стыковка вообще невозможна: ее запрещает обобщенное условие Лежандра—Клебша (см. [8, 25]).

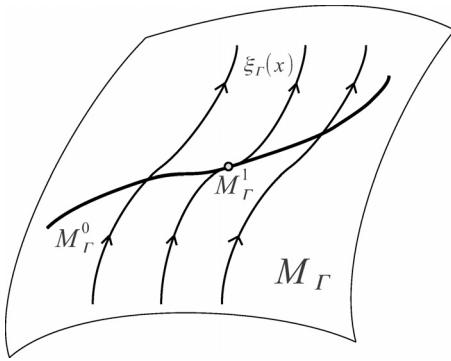


Рис. 26. Структура поверхностей M_G^i

С другой стороны, условие 3 — теорема Гоха—Кренера — накладывает дополнительные требования типа равенств. Форма $\{G, G\}|_{\Gamma'}$ в случае общего положения имеет ранг $\dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Значит, если $\dim \Gamma \neq 0, 1$, то M_G^0 имеет ненулевую коразмерность в M_G , $\text{codim}_{M_G} M_G^0 = \dim \Gamma(\dim \Gamma - 1)/2$. Поэтому в ситуации общего положения поле ξ_G не будет касаться M_G^0 и, следовательно, траектории системы (Г.1), (Г.2) будут протыкать M_G^0 , и необходимое условие оптимальности будет нарушено (см. рис. 26). Конечно, в M_G^0 в ситуации общего положения найдется поверхность M_G^1 той же коразмерности, в точках которой поле ξ_G будет касательным к M_G^0 . Однако ξ_G не будет касательным к M_G^1 , и траектории покинут M_G^1 , а значит, и M_G^0 . Исключения составляют точки из гиперповерхности M_G^2 в M_G^1 , в которых поле ξ_G касается M_G^1 . Продолжая этот процесс, получим, что, вообще говоря, траектории поля ξ_G не будут лежать в M_G^0 в ситуации общего положения. Поэтому в общем случае особые траектории по граням размерности больше 1 не оптимальны.

Поскольку оптимизационные задачи моделируют процессы, возникающие в реальной жизни, практический интерес представляют только те оптимальные траектории, которые не разрушаются при малом шевелении самой задачи, т.е. неособые траектории и траектории, особые по ребру.

Естественный класс систем — это системы, в которых $M_G = M_G^0$. Это так в важном частном случае, когда гамильтонова система (Г.1), (Г.2) получена из оптимизационной задачи управления голономной системой. В следующем пункте мы покажем, что в этом случае необходимое условие Гоха—Кренера (условие 3) будет выполнено автоматически на особых траекториях.

Г.5. Голономный случай. Все утверждения и определения в этом пункте носят исключительно локальный характер. Однако они будут сформулированы в глобальной форме для упрощения записи.

Рассмотрим оптимизационную управляемую динамическую систему на многообразии M

$$\dot{q} = a(q) + B(q)u. \tag{Г.9}$$

Здесь $q \in M$, $a(q) \in T_qM$ и $B(q) \in \text{Hom}(U, T_qM)$ гладко зависят от $q \in M$. Будем считать, что $\dim M \geq \dim U = \dim \Omega$. Целевой функционал — терминального типа и не влияет на гамильтонову систему принципа максимума Понтрягина.

Определение Г.4. Будем говорить, что управление в системе (Г.9) голономно по грани Γ , если отображение $B(q)|_{\Gamma'}$ невырождено, а поле плоскостей $B(q)\Gamma' \subseteq T_qM$ является интегрируемым.

Голономность управления по какой-либо грани Γ , вообще говоря, не влечет голономность по подгранице $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$. Стоит также отметить, что поскольку определенное выше условие голономности никак не зависит от поля $a(q)$, то система (Г.9) может одновременно иметь голономное управление по Ω и быть вполне управляемой.

Теорема Г.1 (см. [14, теорема 1]). *Если управление в системе (Г.9) голономно по грани Γ , то поверхности M_G и M_G^0 совпадают.*

Иными словами, необходимое условие Гоха—Кренера (условие 3 из леммы Г.1) выполнено автоматически на любой особой траектории, если система (Г.9) голономна по соответствующей грани. Таким образом, в системах с голономным управлением траектории, особые по граням, возникают в ситуации общего положения. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Следствие Г.1. *В системах общего положения вида (Г.9), голономных по грани Γ , множество всех особых по Γ траекторий первого порядка является подмногообразием в расширенном фазовом пространстве $M = T^*M$ коразмерности $2 \dim \Gamma$.*

Замечание Г.3. Любая управляемая система (Г.9) голономна по любому ребру многогранника Ω .

Замечание Г.4. Если система голономна по грани Γ , то из леммы Г.1 можно убрать условие 3: оно является следствием условия 1.

Следствие Г.2. Для системы с голономным по Γ управлением функция $O_\Gamma(x)$ корректно определена во всех точках поверхности M_Γ , в которых форма $\{G^\Gamma, \{H^\Gamma, G^\Gamma\}\}$ невырождена.

Естественный класс систем — это системы, голономные по любой грани многогранника Ω . Это так, если, например, векторные поля $B(x)u$ коммутируют, когда u пробегает базисные векторы U (или, скажем, вершины Ω).

Г.6. Сведение к модельной задаче. В этом пункте будут описаны системы дифференциальных уравнений специального вида на скобки Пуассона, позволяющие (с помощью некоторого раздувающего отображения) свести изучение окрестности особой экстремали к оптимальному синтезу в одной модельной задаче оптимального управления.

Рассмотрим управляемую гамильтонову систему (Г.1), (Г.2), голономную по любой грани многогранника Ω . Пусть $x^0 \in M$ — некоторая точка особой траектории $\hat{x}(t)$ первого порядка по всему многограннику Ω , $x^0 = \hat{x}(0)$. Будем предполагать, что особое управление $\hat{u}(t)$ непрерывно в x_0 . Итак,

$$G|_{x_0} = \{H, G\}|_{x_0} = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \{G, G\}|_{x_0} = 0.$$

Предположим, что набор дифференциалов функций $(G)_i$ и $\{H, G\}_j$ имеют максимальный ранг в x_0 :

$$\text{rk}\left(dG_i, d\{H, G\}_j\right) = 2 \dim \Omega.$$

Введем локальную систему координат в окрестности точки x_0 . Положим $z_1 = G$ и $z_2 = \{H, G\}$, $z = (z_1, z_2)$, и дополним до полной системы переменной w , так что $w(x_0) = 0$. Тогда гамильтонова система (Г.1), (Г.2) переписывается в виде

$$\begin{cases} \langle z_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}, \\ \dot{z}_1 = z_2 + \varepsilon z_1 u, \\ \dot{z}_2 = \alpha(z, w) + \beta(z, w)u, \\ \dot{w} = R(z, w) + S(z, w)u. \end{cases} \quad (\text{Г.10})$$

Здесь $z_1, z_2, \alpha \in U^*$, $\beta \in T_2(U)$ — билинейная форма:

$$\alpha = \{H, \{H, G\}\}, \quad \beta = \{G, \{H, G\}\}, \quad \varepsilon z_1 = \varepsilon G = \{G, G\}.$$

Лемма Г.2 (см. [14, лемма 3]). *Билинейная форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0} = \beta(0, 0)$ является симметричной и положительно определенной:*

$$\beta(0, 0) \succ 0, \quad \beta(0, 0)[u, v] = \beta(0, 0)[v, u] \quad \forall u, v \in U.$$

Естественно использовать форму $\{G_k, \{H, G_l\}\}|_{x_0} = \beta(0, 0)$ в качестве скалярного произведения на U . Это задаст отождествление U и U^* , а форма $\beta(0, 0)$ запишется как единичная матрица в любом ортонормированной базисе. Взяв $-\beta^{-1}(0, 0)\alpha(0, 0)$ за начало координат в аффинном пространстве U , мы можем считать, что $\alpha(0, 0) = 0$. В новых координатах на U особое управление в точке x_0 — это $\hat{u} = 0$.

Оказывается, что поведение переменных z_1 и z_2 в окрестности особой точки x_0 определяет поведение всей системы в целом. Чтобы показать это, воспользуемся процедурой раздутия особенности. Именно эта процедура использовалась для доказательства теорем 6.1 и 6.2 с помощью выделения главных скобок Пуассона, поведение которых моделируется системой принципа максимума Понтрягина для модельной задачи (2.1). Итак, пусть

$$\lambda = \sqrt{|z_1| + \frac{1}{2}|z_2|^2}, \quad z_1 = \lambda^2 \zeta_1, \quad z_2 = \lambda \zeta_2, \quad w = \lambda \omega,$$

т.е. переменные z_2 и w имеют первый порядок по раздувающей переменной λ , а z_1 — второй¹. Переменные λ , ζ_1 , ζ_2 , ω лежат на цилиндре $|\zeta_1| + \frac{1}{2}|\zeta_2|^2 = 1$. Точка x_0 раздувается на сечение \mathcal{N} этого цилиндра гиперплоскостью $\lambda = 0$. В новых координатах система (Г.10) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 + \lambda \varepsilon \zeta_1 \rangle}{|\zeta_1|} + \langle \zeta_2, \alpha + \beta u \rangle \right) = \phi(\lambda, \zeta_1, \zeta_2, \omega), \\ \dot{\zeta}_1 = \frac{1}{\lambda} (\zeta_2 - 2\phi\zeta_1 + \lambda\varepsilon\zeta_1), \\ \dot{\zeta}_2 = \frac{1}{\lambda} (\alpha + \beta u - \phi\zeta_2), \\ \dot{\omega} = \frac{1}{\lambda} (F + Gu - \phi\omega), \\ \langle \zeta_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (\text{Г.11})$$

Векторное поле $\xi = (\dot{\lambda}, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2, \dot{\omega})$ не продолжается на сечение \mathcal{N} гиперплоскостью $\lambda = 0$ ввиду наличия особенности типа $1/\lambda$ по каждой координате ζ_1 , ζ_2 и ω . Однако интегральные кривые все же могут быть перенесены на сечение \mathcal{N} . Дело в том, что траектории векторных полей ξ и $\lambda\xi$ совпадают, различаются лишь скорости движения по этим траекториям. Поле же $\lambda\xi$ может быть продолжено на гиперплоскость $\lambda = 0$. Итак, на \mathcal{N} траектории поля $\lambda\xi$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dot{\lambda} = 0, \\ \dot{\zeta}_1 = \zeta_2 - 2\phi_0\zeta_1, \\ \dot{\zeta}_2 = u - \phi_0\zeta_2, \\ \dot{\omega} = F(0, 0) + G(0, 0)u - \phi_0\omega, \\ \langle \zeta_1, u \rangle \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \quad (\text{Г.12})$$

Здесь

$$\phi_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle}{|\zeta_1|} + \langle \zeta_2, u \rangle \right).$$

Полученная система (Г.12) фактически описывает поведение исходной системы (Г.10) в бесконечно малой окрестности точки x_0 . Она обладает следующими важными свойствами.

1. Система (Г.12) зависит лишь от значений $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$ и не зависит от поведения функций F и G в окрестности точки x_0 . Поэтому система (Г.12) получится одинаковой во всех задачах с данными значениями $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$.
2. Так как переменная ω не входит в правую часть системы (Г.12), то достаточно ограничиться изучением поведения главных переменных ζ_1 и ζ_2 (которое не зависит от $F(0, 0)$ и $G(0, 0)$), а переменная ω однозначно найдется из линейного неоднородного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$\dot{\omega} = a(t)\omega + b(t),$$

где $a(t) = \phi_0(\zeta_1(t), \zeta_2(t), u(t))$ и $b(t) = F(0, 0) + G(0, 0)u(t)$.

В следующем пункте приведена задача оптимального управления, уравнения принципа максимума Понтрягина в которой полностью совпадают с главной частью (ζ_1, ζ_2) системы (Г.12). Оптимальный синтез в этой задаче будет построен для не «слишком скошенных» компактных многогранников. После этого в п. Г.8 доказывается теорема о структуре выхода траекторий на особую траекторию первого порядка в ее окрестности (и схода с нее) для систем с голономным управлением.

¹Переменные z_1 , z_2 и w должны иметь именно такие порядки относительно раздувающего отображения, чтобы векторное поле системы (Г.10) в новых координатах имело особенность одинакового типа по всем переменным при приближении к гиперплоскости $\lambda = 0$.

Г.7. Модельная задача оптимального управления. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} J(q) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \langle q(t), q(t) \rangle dt \rightarrow \inf, \\ \dot{q} &= u, \quad u \in \Omega \subset U, \\ q(0) &= q_0. \end{aligned} \tag{Г.13}$$

Здесь q и u лежат в евклидовом пространстве $U \simeq \mathbb{R}^n$, а 0 является внутренней точкой¹ Ω . Пусть p — сопряженная к q переменная из принципа максимума Понтрягина; тогда

$$\mathcal{H} = -\frac{\lambda_0}{2} \langle q, q \rangle + \langle p, u \rangle,$$

т.е. $\dot{p} = \lambda_0 q$. Если $\lambda_0 = 0$, то p постоянно, и мы немедленно приходим к противоречию с конечностью интеграла (Г.13). Полагая $\lambda_0 = 1$, получаем $H = -\frac{1}{2} \langle q, q \rangle$, $G = p$ и

$$\begin{cases} \dot{p} = q & \Leftrightarrow & \dot{z}_1 = z_2, \\ \dot{q} = u & \Leftrightarrow & \dot{z}_2 = u, \\ \langle z_1, u \rangle = \langle p, u \rangle & \rightarrow \max_{u \in \Omega}. \end{cases} \tag{Г.14}$$

В этой задаче существует ровно одна особая по всему многограннику траектория: $q \equiv p \equiv u \equiv 0$. Она имеет первый порядок. Поведение оптимальных траекторий в окрестности начала координат является типичным, потому что раздутие данной системы приводит к тем же уравнениям (Г.12) с $\omega = 0$, что и раздутие общей системы (Г.10). Поэтому оптимальные траектории задачи (Г.13) являются модельными для системы (Г.10).

Для модельной задачи Г.14, как и для модельной задачи 2.1, можно доказать следующую теорему о структуре оптимального синтеза.

Теорема Г.2 (см. [14, теорема 2]). *Предположим, что Ω — выпуклое компактное множество (возможно, не многогранник) и $0 \in \text{Int } \Omega$. Тогда для любой начальной точки q_0 справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует и единственна оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$ задачи (Г.13). Сопряженная функция $\hat{p}(t, q_0)$ также единственна.*
2. *Найдется такой момент времени $T(q_0) \geq 0$, что $\hat{q}(t, q_0) = 0$ и $\hat{p}(t, q_0) = 0$ при $t \geq T(q_0)$.*
3. *Отображение $q_0 \mapsto \hat{p}(0, q_0)$ является локально липшицевым и биективным.*

Таким образом, множество всех пар $(q_0, \hat{p}(0, q_0))$ образует в расширенном фазовом пространстве T^*M липшицево многообразие M_+ , однозначно проектирующееся на плоскость $\{p = 0\}$. Все оптимальные траектории (и только они) лежат в M_+ и приходят в начало координат за конечное время. Других попадающих в начало координат траекторий гамильтоновой системы (Г.14) не существует².

Стоит еще сказать, что замена $q \mapsto -q$, $p \mapsto p$ не меняет гамильтониана \mathcal{H} , но изменяет знак симплектической формы $dq \wedge dp$. Поэтому при такой замене траектории гамильтоновой системы (Г.14) переходят в себя, но меняется направление движения по ним. Липшицева поверхность M_+ переходит в поверхность M_- траекторий, выходящих из начала координат.

Найдем теперь особые траектории задачи (Г.13) в случае, когда Ω — многогранник. Рассмотрим произвольную грань Γ многогранника Ω . Нас интересует траектория $\hat{q}, \hat{p}, \hat{u}$, особая по грани Γ при $t \in (t_1, t_2)$. Поскольку $\{G, G\} \equiv 0$, то по лемме Г.1 немедленно получаем, что $\hat{p} \in \Gamma^\perp$ и $\hat{q} \in \Gamma^\perp$. Пусть O_Γ — ортогональная проекция начала координат на $\text{Aff } \Gamma$. Так как $\{G, \{H, G\}\} \equiv \text{id}$, то особое управление \hat{u} по Γ равно O_Γ , если $O_\Gamma \in \Gamma$.

Определение Г.5. Будем называть многогранник Ω не слишком скошенным, если $O_\Gamma \in \text{Int } \Gamma$ для любой грани Γ многогранника Ω .

¹Это условие необходимо для локальной управляемости.

²Иначе они были бы оптимальны в силу выпуклости исходной задачи.

Компактные не слишком скошенные многогранники обладают тем замечательным свойством, что подпространства Γ^\perp , ортогональные граням, разрежут «правильным образом» все пространство на секторы, наподобие барицентрического разбиения. А именно, верна следующая лемма.

Лемма Г.3 (о барицентрическом разбиении многогранника). Пусть на каждой грани $\Gamma \neq \Omega$ выпуклого компактного многогранника $\Omega \subseteq U$, $0 \in \text{Int } \Omega$, выбрано по внутренней точке O_Γ . Тогда для любой точки $q_0 \in U$ найдутся такие единственный набор граней $\Gamma_1 \subsetneq \Gamma_2 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$ и единственный набор положительных чисел $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$, что

$$q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k}.$$

Множество всех q_0 с данным набором граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k$ будем обозначать через

$$\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k) = \left\{ q_0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j O_{\Gamma_j}, \text{ где } \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0 \right\}.$$

В случае не слишком скошенного компактного многогранника Ω линейное пространство U разбивается на конусы, ребра которых порождены особыми управлениями O_{Γ_i} по всем возможным различным наборам вложенных друг в друга граней $\Gamma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \Gamma_k \subsetneq \Omega$.

Для любой такой начальной точки q_0 , что $-q_0$ лежит в относительной внутренности $\text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k)$, оптимальная траектория начинает двигаться с управлением, особым по грани Γ_1 до тех пор, пока траектория $\hat{q}(t, q_0)$ не попадет на $(k - 1)$ -мерную грань $\text{cone}(\Gamma_2, \dots, \Gamma_k)$. В этот момент управление скачком переключается на особое управление O_{Γ_2} по грани Γ_2 , и процесс повторяется до момента выхода траектории в начало координат (см. рис. 27).

Точнее, имеет место следующая теорема.

Теорема Г.3 (см. [14, теорема 3]). Если компактный многогранник Ω является не слишком скошенным, то любая оптимальная траектория $\hat{q}(t, q_0)$, $\hat{u}(t, q_0)$ устроена следующим образом. Пусть $\Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_k$ и $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_k > 0$ — из предыдущей леммы для точки $-q_0$, т.е.

$$-q_0 = \lambda_1 O_{\Gamma_1} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_k).$$

Тогда найдутся такие моменты времени $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T(q_0)$, $t_j = \sum_{i=1}^j \lambda_i$, что при $t \in (t_{j-1}, t_j)$ управление $\hat{u}(t, q_0) = O_{\Gamma_j}$ и

$$-q(t) = \mu(t) O_{\Gamma_j} + \lambda_{j+1} O_{\Gamma_{j+1}} + \dots + \lambda_k O_{\Gamma_k} \in \text{cone}(\Gamma_j, \Gamma_{j+1}, \dots, \Gamma_k),$$

где μ — линейно убывающая функция от $\mu(t_{j-1}) = \lambda_j$ до $\mu(t_j) = 0$.

В частности, управление выбирается по принципу обратной связи: $\hat{u}(t, q_0) = \hat{u}(\hat{q}(t, q_0)) = O_\Gamma$, где Γ — грань наименьшей размерности из разложения $-\hat{q}(t, q_0)$ по лемме Г.3.

Г.8. Структура выхода на особую траекторию и схода с нее. Как было показано ранее, структура решений модельной задачи должна определять поведение траекторий управляемой гамильтоновой системы (Г.1) в окрестности особой траектории. В предыдущем пункте в модельной задаче были найдены все траектории, выходящие на особую траекторию и сходящие с нее для случая не слишком скошенного компактного многогранника Ω . Для произвольной управляемой системы условие «не слишком скошенности» Ω в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ означает следующее: необходимо в пространстве управлений U выбрать в качестве начала координат особое управление в точке x_0 , а в качестве скалярного произведения — форму $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$.

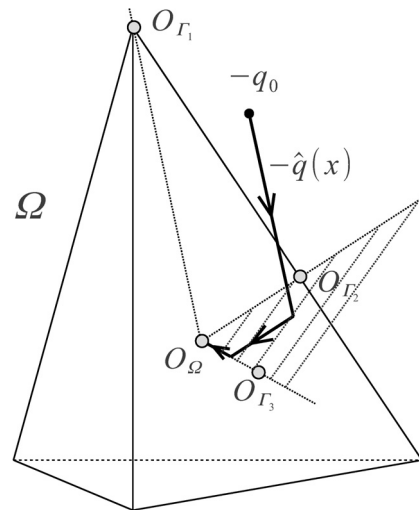


Рис. 27. Оптимальная траектория $-\hat{q}(x)$

Как было доказано в лемме Г.2, в голономном случае форма $\{G, \{H, G\}\}$ является симметричной, поэтому следующее определение корректно.

Определение Г.6. Будем говорить, что компактный многогранник $\Omega \subset U$ является не слишком скошенным в точке $x_0 \in \mathcal{M}_\Omega$ относительно управляемой гамильтоновой системы (Г.1), если

1. форма $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$ является положительно определенной в x_0 ;
2. проекции (относительно скалярного умножения с формой $\{G, \{H, G\}\}|_{x_0}$) особого управления $O_\Omega(x_0)$ на любую грань Γ попадает строго внутрь этой грани.

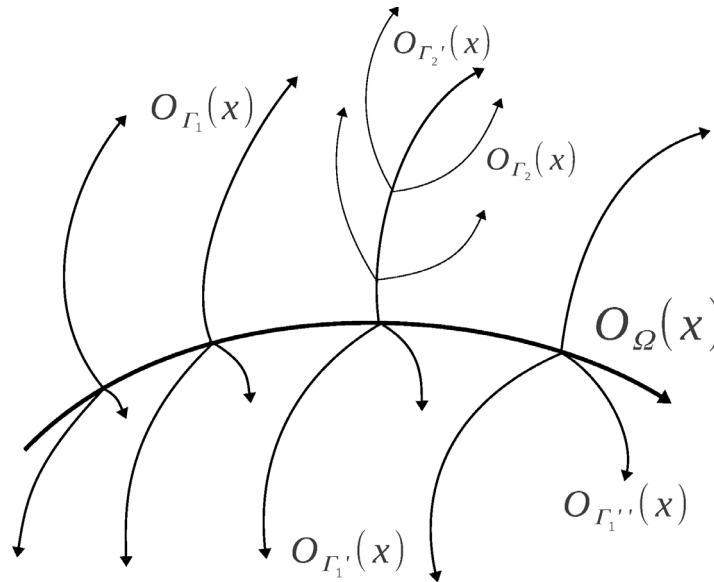


Рис. 28. Оптимальный синтез в окрестности особой траектории.

Естественно, если многогранник Ω является не слишком скошенным в $x \in \mathcal{M}_\Omega$, то он является не слишком скошенным и для любой точки из \mathcal{M}_Ω , достаточно близкой к x . Итак, в рамках этого ограничения мы докажем следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы Г.3 для произвольной управляемой системы (Г.1), (Г.2) с голономным управлением (см. рис. 28).

Теорема Г.4 (см. [14, теорема 4]). Пусть $\hat{x}(t), \hat{u}(t), t \in (\tau_1, \tau_2)$ — особая траектория по всему компактному многограннику Ω управляемой гамильтоновой системы (Г.1), (Г.2) с голономным управлением по каждой грани Ω . При этом форма $\{G, \{H, G\}\}$ положительно определена в точке $\hat{x}(t^*)$ при $t^* \in (\tau_1, \tau_2)$. Если многогранник Ω является не слишком скошенным относительно точки $\hat{x}(t^*)$, то определено следующее семейство траекторий выходящих из $\hat{x}(t^*)$ и удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина и необходимым условиям Гоха—Кренера: для каждого набора граней $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \dots \supset \Gamma_k$ определена траектория $x(t), u(t)$, выходящая из $\hat{x}(t^*)$ при $t > t^*$, где

$$\begin{cases} x(t^*) = \hat{x}(t^*), & \dot{x}(t) = u(x(t)), \\ u(x(t)) = O_{\Gamma_i}(x(t)) & \text{при } t \in (t_{i-1}, t_i). \end{cases}$$

Здесь $t^* = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$ — любой набор моментов времени, лишь бы разница $t_k - t^*$ была достаточно мала. Выход на особую траекторию при $t < t^*$ устроен аналогично; необходимо лишь изменить направление течения времени и порядок прохождения граней (от большей к меньшей).

Замечание Г.5. Мы не проверяем достаточные условия второго порядка в данном приложении, однако скажем о них несколько слов. Рассмотрим случай нормальной траектории ($\lambda_0 = 1$ и сопряженный множитель $p(t)$ определен однозначно). На самом деле, поскольку на особой траектории выполняются равенства $\{G, G\} = 0$ и $\{G, \{G, G\}\} = 0$, то достаточные условия второго порядка для локального понтрягинского минимума (П-минимума) фактически совпадают с достаточными

условиями слабого локального минимума (см. [3]). Последние же в нашем случае требуют положительной определенности формы $\{G, \{H, G\}\}$ (которая имеет место) вкпе с некоторыми условиями трансверсальности на концах траектории. Поэтому проверка достаточных условий в конкретных примерах сведется к проверке граничных условий и не должна вызвать затруднений (подробнее см. [4])

Теорема Г.4 дает наглядное описание поверхностей M_Γ : для произвольной грани Γ^0 в окрестности M_{Γ^0} поверхности M_Γ по всем $\Gamma \subsetneq \Gamma^0$ примыкают друг к другу по M_{Γ^0} (см. рис. 28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агрчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстродействия// Мат. сб. — 1976. — 100 (142), № 4 (8). — С. 610–643.
2. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Едиториал УРСС, 1989.
3. Дмитриук А. В. Квадратичные условия понтрягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — 50, № 2. — С. 284–312.
4. Дмитриук А. В. Квадратичные достаточные условия минимальности аномальных субримановых геодезических// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. прилож. — 1999. — 4. — С. 5–89.
5. Зарисский О., Самюэль П. Коммутативная алгебра. Т. 1. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
6. Зеликин М. И., Борисов В. Ф. Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики// Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и ее прилож. — 2003. — 11. — С. 3–161.
7. Зеликин М. И., Киселев Д. Д., Локуцевский Л. В. Оптимальное управление и теория Галуа// Мат. сб. — 2013. — 204, № 11. — С. 83–98.
8. Зеликин М. И., Локуцевский Л. В., Хильдебранд Р. Геометрия окрестностей особых экстремалей в задачах с многомерным управлением// Тр. МИАН. — 2012. — 277. — С. 74–90.
9. Зеликин М. И., Локуцевский Л. В., Хильдебранд Р. Стохастическая динамика алгебр Ли скобок Пуассона в окрестности точки негладкости гамильтониана// Докл. РАН. — 2013. — 450, № 1. — С. 1–6.
10. Зеликин М. И., Мельников Н.Б., Хильдебранд Р. Топологическая структура фазового портрета типичного слоя оптимального синтеза для задач с накоплением переключений// Тр. МИАН. — 2001. — 233. — С. 125–152.
11. Зеликина Л. Ф., Зеликин М. И., Хлюстов К. В. Особые стратифицированные многообразия для инволютивных управляемых систем// Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 9. — С. 1161–1167.
12. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.
13. Локуцевский Л. В. Гамильтоновость потока особых траекторий// Мат. сб. — 2014. — 205, № 3. — С. 133–160.
14. Локуцевский Л. В. Особые режимы в управляемых системах с многомерным управлением из многогранника// Изв. РАН. Сер. мат. — 2014. — 78, № 5. — С. 167–190.
15. Милютин А. А., Илютович А. Е., Осмоловский Н. П., Чуканов С. В. Оптимальное управление в линейных системах. — М.: Наука, 1993.
16. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем// Функци. анализ и его прилож. — 1978. — 12, № 2. — С. 46–56.
17. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
18. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
19. Falconer K. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. — Chichester: Wiley, 2003.
20. Fuller A. T. Dimensional properties of optimal and sub-optimal nonlinear control systems// J. Franklin Inst. — 1970. — 289. — С. 379–393.
21. Hildebrand R., Lokutsievskiy L. V., Zelikin M. I. Generic fractal structure of finite parts of trajectories of piecewise smooth hamiltonian systems// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — 20, № 1. — С. 25–32.
22. Kelley H. J., Kopp R. E., Moyer H. G. Singular extremals// В сб.: «Topics in Optimization». — N.Y.: Academic Press, 1967. — С. 63–101.
23. Krener A. J. The high order maximum principle and its application to singular extremals// SIAM J. Control Optim. — 1977. — 15, № 2. — С. 256–293.
24. Курка I. Fuller's phenomena// В сб.: «Progr. Systems Control Theory». — Boston: Birkhäuser, 1990. — С. 129–142.

25. *Lewis R. M.* Defenitions of order and junction condition in singular control problems// SIAM J. Control Optim. — 1980. — 18, № 1. — С. 21–32.
26. *Lokutsievskiy L. V.* Generic structure of the lagrangian manifold in chattering problems// Sb. Math. — 2014. — 205, № 3. — С. 432–458.
27. *Lokutsievskii L. V., Zelikin M. I., Hildebrand R.* Fractal structure of hyperbolic Lipschitzian dynamical systems// Russ. J. Math. Phys. — 2012. — 19, № 1. — С. 27–44.
28. *Marchal C.* Chattering arcs and chattering controls// J. Optim. Theory Appl. — 1973. — 11, № 5. — С. 441–468.
29. *McDannel J. P., Powers W. F.* Necessary conditions for joining optimal singular and non-singular subarcs// SIAM J. Control Optim. — 1971. — 9. — С. 161–173.
30. *Zelikin M. I., Borisov V. F.* Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering. — Boston: Birkhäuser, 1994.

М. И. Зеликин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

E-mail: mzelikin@mtu-net.ru

Л. В. Локуциевский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

E-mail: lion.lokut@gmail.com

Р. Хильдебранд

Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany

E-mail: hildebra@wias-berlin.de