

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МЕХАНИКЕ

© 2015 г. М. У. НИКАБАДЗЕ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Основные понятия и определения из линейной алгебры и функционального анализа	9
1. Основные понятия и определения из теории групп	9
2. Параметризация области	10
3. Локально гильбертовы модули тензоров	13
3.1. Внутреннее r -произведение тензоров	13
3.2. Локальное скалярное произведение тензоров. Локальная норма тензора. Угол между двумя тензорами	13
3.3. Линейная зависимость и линейная независимость тензоров	15
3.4. Ортонормальные и биортонормальные системы тензоров	17
3.5. Базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Разложение тензора относительно базиса	19
3.6. Мультипликативные тензоры и их основные свойства	20
3.7. Построение базисов модуля	21
3.8. Базисы тензоров в трехмерном евклидовом пространстве	22
3.9. Обобщение на случай риманова пространства	23
4. Тензорные модули четного порядка. Кольцо с единицей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	24
4.1. Алгебра $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	25
4.2. Мультипликативная группа M_{2p}	26
5. Задача о нахождении собственных значений и собственных тензоров тензора ранга $2p$	29
5.1. Приведение к каноническому виду (главным осям) тензора ранга $2p$	32
Глава 2. Многочлены с тензорными коэффициентами и действия над ними. Обобщенная теорема Безу. Теорема Гамильтона—Кэли	35
6. Основные определения и действия над тензорными многочленами	35
6.1. Сумма и разность двух тензорных многочленов	36
6.2. Произведение двух тензорных многочленов	36
6.3. Правое и левое деление тензорных многочленов. Обобщенная теорема Безу. Теорема Гамильтона—Кэли	37
7. Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	42
7.1. Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно заданного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	45
8. Некоторые теоремы о сопряженном, нормальном, эрмитовом и унитарном тензорах модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	48
8.1. Неотрицательные и положительно определенные эрмитовы тензоры. Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$	54
8.2. Тензоры модуля $\mathbb{R}(\Omega)$	57
8.3. Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Формулы Кэли	62
8.4. Коммутирующие нормальные тензоры	64
Глава 3. Построение линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров	68
9. Об изотропных тензорах в \mathbb{R}^3	68
10. Об ортотропных тензорах в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Представления ортотропных тензоров второго и четвертого ранга	69

11. О гиротропных в \mathbb{R}^2 и трансверсально-изотропных в \mathbb{R}^3 тензорах	73
11.1. О двумерных гиротропных тензорах	75
11.2. О трансверсально-изотропных тензорах	76
Глава 4. Задачи на собственные значения для тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга	85
12. О тензорах модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$	85
13. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензоров для симметричного тензора любого четного ранга	88
14. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы любого четного ранга	101
15. Задача на собственные значения тензорно-блочно-диагональной матрицы	114
Глава 5. Некоторые приложения к механике	116
16. Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений в линейной микрополярной теории упругости	117
16.1. Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы	118
16.2. Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений с помощью собственных значений и собственных тензорных столбцов	120
16.3. Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы	121
16.4. Микрополярный материал с центром симметрии	125
16.5. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензоров для симметричного тензора четвертого ранга	126
17. Классификация микрополярных линейно упругих анизотропных материалов	126
17.1. Классификация микрополярных линейно упругих анизотропных материалов с центром симметрии	126
17.2. Классификация классических линейно упругих анизотропных материалов	128
18. Собственные значения и собственные тензоры для материалов кристаллографических сингоний	129
18.1. «Изотропный» классический материал	131
18.2. Кубическая сингония (3 независимых компонента)	132
18.3. Трансверсальная изотропия (гексагональная сингония, 5 независимых компонент)	133
18.4. Тригональная (ромбоэдрическая) сингония (6 независимых компонент)	134
18.5. Тетрагональная сингония (6 независимых компонент)	135
18.6. Ромбическая сингония (ортотропия, 9 независимых компонент)	135
18.7. Моноклинная сингония	136
18.8. Триклинная сингония	136
19. Некоторые микроконтинуальные материалы	137
19.1. Микроконтинуальные материалы, символы анизотропии которых состоят из трех элементов	137
19.2. Ортоотропный микроконтинуальный материал	139
19.3. Классификация микрополярных линейно упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии	140
Глава 6. Новая параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства	143
20. Параметризация области тонкого тела трехмерного евклидова пространства на основе двух базовых поверхностей	143
20.1. Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела	144
20.2. Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности	145
20.3. Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области	146
20.4. Мультипликативные базисы	150
20.5. Различные семейства символов Кристоффеля	150
20.6. Деривационные формулы для мультипликативных базисов	151
20.7. Представление единичного тензора второго ранга	152
20.8. Представления изотропных тензоров четвертого ранга	153

20.9. О ковариантной производной от компонент тензоров	155
21. Связи между различными семействами параметризаций области тонкого тела	157
21.1. Связь между различными семействами мультипликативных базисов	157
21.2. Связь между различными семействами символов Кристоффеля	157
21.3. Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент много- точечного тензора	158
22. О компонентах ЕТВР	158
22.1. Об основных компонентах ЕТВР и числе независимых основных компонент ЕТВР	158
22.2. Представления компонент ЕТВР через основные компоненты переноса того же тен- зора для различных семейств параметризации области тонкого тела	160
23. Выражение различных семейств символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР	165
23.1. Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ЕТВР	166
23.2. Выражение S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР	167
24. Представление компонент вторых тензоров поверхностей посредством основных компо- нент ЕТВР	168
24.1. Представление компонент второго тензора поверхности S посредством основных компонент ЕТВР	168
24.2. Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством ос- новных компонент ЕТВР	168
24.3. О тензорах Римана—Кристоффеля в \mathbb{R}^3	179
24.4. Тожества Ламе	182
25. О тензорах Римана—Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3	184
Список литературы	192

ВВЕДЕНИЕ

Тензорное исчисление располагает хорошими фундаментальными монографиями и учебниками, часть из которых приведены в списке литературы [5, 9, 10, 14, 27, 54, 69]. Автору посчастливилось во время аспирантуры и докторантуры слушать замечательные курсы лекций по тензорному анализу, различным разделам механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и механике сплошной среды (МСС) (математическая теория пластин и оболочек, основы МДТТ, основы МСС, механика композитов и др.) в тензорном исчислении, читаемые в течении нескольких десятилетий для студентов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова профессором Б. Е. Победрей. Они оказали неоценимую роль при формировании автора, как специалиста по тензорному исчислению и разным разделам МДТТ, в частности, по теории тонких тел.

Уже много лет автор, работая доцентом по кафедре механики композитов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, сам читает следующие спецкурсы для студентов-механиков: «Тензорный аппарат механика», «Математическая классическая теория оболочек», «Математическая неклассическая теория оболочек», «Теории тонких тел» и др. Все эти спецкурсы ведутся с использованием тензорного исчисления. При чтении спецкурсов имеются вопросы, которые или недостаточно освещены в имеющейся литературе, или изложены в труднодоступных книгах. Поэтому созрела необходимость издания, частично устраняющего вышеуказанную проблему. В этой связи ранее маленьким тиражом была издана состоящая из двух частей книга [31, 32]. Материал этой книги после исправления замеченных опечаток был использован при написании первых трех и последней глав настоящей книги, которая состоит из введения и шести глав. Четвертая и пятая главы содержат материалы, которые публикуются впервые. Следует заметить, что различные части материала настоящей книги были опубликованы в разное время в различных изданиях [29, 33–43, 80–82].

В первой главе приведены основные определения из линейной алгебры и функционального анализа. В частности, даны определения полугруппы, группы, кольца и поля, а также модуля и

линейного пространства [2–4, 73]. Сформулирована локальная теорема существования гомеоморфизмов. Введены определения внутреннего r -произведения и локального скалярного произведения тензоров, ранг которых не меньше r , а также локальной нормы тензора [5]. Даны определения, сформулированы и доказаны основные теоремы и утверждения, касающиеся линейной зависимости и независимости системы тензоров любого ранга. Кроме этого, приведены определения и доказательства некоторых теорем, относящихся к ортогональной и биортонормальной системам тензоров. Дано определение мультипликативного базиса (мультибазиса) и рассмотрены способы построения базисов модулей с помощью базисов модулей меньших размерностей. В этой связи сформулировано и доказано несколько теорем. Более подробно, чем в [5], изучены тензорные модули четного порядка и задачи о нахождении собственных значений и собственных тензоров тензора любого четного ранга. Даны канонические представления тензора любого четного ранга. Следует заметить, что аналогичная задача для тензора модулей упругости была рассмотрена польским ученым Я. Рыхлевским в 1983–1984 гг., позже, чем она была изучена для комплексного тензора любого четного ранга советским ученым И. Н. Векуа. Однако, в явном виде не была построена полная ортонормальная система собственных тензоров для симметричного тензора любого четного ранга.

Во второй главе приведены элементарные сведения о многочленах с тензорными коэффициентами и действиях над ними. Сформулирована и доказана обобщенная теорема Безу, на основании которой доказана теорема Гамильтона—Кэли. Рассмотрено и другое доказательство последней теоремы. Доказано несколько важных теорем, при выводе которых применяются формулы, выражающие присоединенный тензор $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для тензорного двучлена $\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}$ через тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга $2p$) и его инварианты. Далее даны определения минимального многочлена тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ (элементами этого модуля являются комплексные тензоры ранга p), а также тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно заданного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Здесь Ω — некоторая область n -мерного евклидова (риманова) пространства. Сформулированы и доказаны некоторые теоремы, касающиеся минимальных многочленов. Кроме того, сформулированы 1-я, 2-я и 3-я теоремы о расщеплении модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ на инвариантные подмодули. Особое внимание уделено теоремам о сопряженном, нормальном, эрмитовом и унитарном тензорах модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (элементы этого модуля — действительные тензоры ранга $2p$). Доказаны теоремы о полярном разложении тензоров модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а также теоремы о существовании общей полной ортонормальной системы собственных тензоров для конечного или бесконечного множества попарно коммутирующих нормальных тензоров модулей $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Даны канонические представления вышеупомянутых тензоров.

В конце главы приведены важные с точки зрения практики упражнения, выполнение которых позволит представить законы и уравнения МДТТ во многих случаях в более удобной форме, чем имеющиеся в настоящее время.

В третьей главе рассмотрены различные способы построения линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулированы утверждения и теоремы, позволяющие построить эти тензоры. Построены линейно независимые вышеуказанные тензоры с первого до шестого ранга включительно, когда компоненты тензора не обладают никакой симметрией и в том случае, когда имеются разные виды симметрии.

Механические свойства линейно упругого материала в классической линейной теории упругости определяются одним тензором четвертого ранга модулей упругости, а в микрополярной линейной теории упругости в общем случае, когда материал не обладает центром симметрии в смысле упругих свойств, — тремя тензорами. Хотя закон Гука сформулирован давно, однако тензоры модулей упругости пока еще недостаточно изучены, а при проектировании и создании композитных материалов, которые обладают анизотропией высшей степени, важно знать внутреннюю структуру тензоров модулей упругости. Другими словами, важно определить собственные значения и собственные тензоры для тензоров модулей упругости. При этом, если микрополярный материал не обладает центром симметрии в смысле упругих свойств, то для изучения математической и механической структуры таких материалов нужно найти собственные значения и собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости. Следует отметить, что в микрополярной теории компоненты тензоров модулей упругости обладают меньшим числом

свойств симметрии, чем компоненты тензора модулей упругости в классической теории. Кроме того, в микрополярной теории не все тензоры имеют одинаковые свойства. Этот факт, конечно, усложняет нахождение собственных значений и собственных тензоров для тензоров модулей упругости в микрополярной теории.

Собственные модули (значения) и собственные состояния (тензоры) для изотропного материала известны со времени Стокса [26]. Для анизотропных материалов понятие собственных модулей и собственных состояний под другими названиями было введено Кельвином в середине XIX века. Однако почему-то все это было надолго забыто, и лишь примерно 30 лет назад исследователи вернулись к изучению этой проблемы. В частности, этой проблемой занимались Я. Рыхлевский [64, 65], Л. М. Минкевич [28], Л. А. Толоконников, Н. М. Матченко [71], А. С. Пипкин [83], К. С. Александров [1], К. Л. Лурье [22], А. И. Чанышев [75, 76], А. Ф. Ревуженко, А. И. Чанышев, Е. И. Шемякин [62], Н. И. Остросаблин [47–50] и другие. Для получения более полной информации о работах отечественных и зарубежных авторов по этой теме отсылаем заинтересованного читателя к докторской диссертации Н. И. Остросаблина [50], в списке литературы которой приведены многие работы по данной проблеме. Следует отметить, что Н. И. Остросаблин довольно полно изучил внутреннюю структуру классического тензора модулей упругости, дал классификацию анизотропных классических линейно упругих материалов, а также изучил много других важных проблем, которые отражены в его докторской диссертации. Понятие собственных упругих состояний нашло применение в построении теории пластичности [52, 56] и теории течения [55]. Что касается работ по этой проблеме для микрополярных материалов, автору мало что известно.

В этой связи в четвертой главе рассматриваются задачи на собственные значения тензора любого четного ранга и тензорно-блочной матрицы, состоящей из тензоров одинакового четного ранга (см. также [39, 40, 43]). Подробно изучены внутренние структуры тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и введенной в рассмотрение тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ (этот модуль состоит из множества тензорно-блочных матриц, состоящих из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$). Кроме того, введен в рассмотрение тензорный столбец, состоящий из двух тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Множество этих тензорных столбцов создает модуль, который обозначается через $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$. Далее для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ введены в рассмотрение тензор и расширенный тензор миноров любого ранга и порядка, а также соответствующие этим минорам тензор и расширенный тензор алгебраических дополнений. С помощью этих тензоров даны формулы, обобщающие теорему Лапласа о разложении определителя тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Даны соотношения, выражающие классические (входящие в характеристическое уравнение) инварианты тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ как через тензоры и расширенные тензоры миноров, так и с помощью тензоров и расширенных тензоров алгебраических дополнений этого тензора. Получены также формулы, выражающие классические инварианты тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ через первые инварианты степеней этого тензора. Приведены и обратные к этим формулам соотношения. Сформулированы некоторые определения, утверждения и теоремы, касающиеся тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. В явном виде построена полная ортонормированная система собственных тензоров симметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а также полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Эти собственные тензорные столбцы, конечно, являются элементами модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$.

В пятой главе даны некоторые приложения к механике. В частности, в линейной микрополярной теории упругости анизотропных тел, не обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, аналогично общему случаю введены в рассмотрение тензорные столбцы тензоров напряжений и моментных напряжений и тензоров деформаций и изгиба-кручения, которые являются элементами модуля $\mathbb{R}_2^2(\Omega)$. Введена также тензорно-блочная матрица тензоров модулей упругости, состоящая из четырех тензоров четвертого ранга и являющаяся, конечно, элементом модуля $\mathbb{R}_4^4(\Omega)$.

Даны представления упругой энергии деформации и определяющих соотношений (закона Гука) с помощью введенных тензорных столбцов и тензорно-блочной матрицы. Дано определение положительно определенной тензорно-блочной матрицы и показана положительная определенность тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости. Введены понятия собственного значения и собственного тензорного столбца тензорно-блочной матрицы и рассмотрена задача о нахождении

собственных значений и собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы. В микрополярной теории характеристическое уравнение тензорно-блочной матрицы имеет 18-ю степень, и поэтому в силу положительной определенности тензорно-блочной матрицы имеет 18 положительных корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность. Следовательно, каждому собственному значению соответствует собственный тензорный столбец. Полная ортонормированная система тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы состоит из 18 тензорных столбцов (в классической теории упругости по терминологии Я. Рыхлевского собственные значения тензора модулей упругости называются (истинными) модулями жесткости, а собственные тензоры — упругими состояниями тела). Дано каноническое представление тензорно-блочной матрицы, на основании которого в свою очередь даны канонические записи удельной энергии деформации и определяющих соотношений. Введено в рассмотрение понятие символа структуры тензорно-блочной матрицы (в классической теории упругости Я. Рыхлевским было введено понятие первого структурного индекса $\langle \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \rangle$, $\langle \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k \rangle$, а Н.И. Остросаблин ввел символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, $0 \leq \alpha_i \leq 6$, $i = \overline{1, k}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 6$, где k ($0 \leq k \leq 6$) — число различных собственных модулей λ_i , а α_i — их кратность, который на наш взгляд целесообразно называть символом структуры (анизотропии) тензора (материала). Первый структурный индекс имеет тот недостаток, что качественно различные материалы объединяет в один класс) и дана классификация тензорно-блочных матриц тензоров модулей упругости микрополярной линейной теории упругости анизотропных тел, не обладающих центром симметрии (микрополярных линейно упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии). Все линейные анизотропные микрополярные упругие материалы, не обладающие центром симметрии в смысле упругих свойств, разделяются на 18 классов по числу различных собственных значений, а классы в зависимости от кратностей собственных значений подразделяются еще на подклассы. Все сказанное выше в равной мере относится к линейной микрополярной теории упругости анизотропных тел, обладающих центром симметрии. В этом случае тензорно-блочная матрица является тензорно-блочно-диагональной матрицей и в этой связи упрощается изучение ее внутренней структуры. В частности, достаточно изучить внутреннюю структуру каждого из двух положительно определенных тензоров модулей упругости в отдельности. В этом случае, в отличие от классического случая, характеристическое уравнение для каждого тензора модулей упругости имеет 9-ю степень (в классической теории упругости имеем один тензор модулей упругости, и в связи с имеющимися симметриями компонент тензора модулей упругости характеристическое уравнение имеет 6-ю степень). Непосредственным подсчетом доказано, что, если производить классификацию множества положительно определенных симметричных тензоров четвертого ранга (тензоры модулей упругости в линейной микрополярной теории упругости анизотропных тел, обладающих центром симметрии, являются таковыми), то в итоге получаются 9 основных классов по числу различных собственных значений, а классы в зависимости от кратностей собственных значений подразделяются еще на подклассы. Всего имеем 256 подклассов (в классическом случае существует 6 классов, которые состоят из 32 подклассов). При этом, если каждому анизотропному материалу соответствуют тензоры модулей упругости одинаковой структуры (тензоры имеют одинаковый символ структуры и принадлежат одному и тому же подклассу), то число анизотропных материалов равно 256, а если тензоры модулей упругости имеют одинаковый символ структуры, а принадлежат различным подклассам, то число линейно упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, равно 12870. Следовательно, число анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, намного больше, чем число анизотропных материалов, обладающих центром симметрии. В частности, общее число всех анизотропных микрополярных линейно упругих не обладающих центром симметрии материалов равно 131072 (см. ниже).

В явном виде построены полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 153 независимых параметров, полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочно-диагональной матрицы тензоров модулей упругости с помощью 72 независимых параметров и полная ортонормированная система собственных тензоров для положительно определенного симметричного тензора модулей упругости микрополярной теории упругости с помощью 36 независимых

параметров (Н. И. Остросаблин в классической теории упругости в явном виде построил собственные тензоры для тензора модулей упругости с помощью 15 независимых параметров). Рассмотрена классификация и классических анизотропных материалов. Найдены собственные значения и собственные тензоры для классических материалов кристаллографических сингоний в отличной от полученных Н. И. Остросаблиным форме, а также для некоторых микрополярных материалов.

В шестой главе изложены основы тензорного исчисления при новой параметризации области тонкого тела, заключающейся в использовании нескольких базовых поверхностей для построения теорий однослойных и многослойных тонких тел, а также теорий пластин, оболочек и многослойных конструкций. В конце главы приведены упражнения.

Автор выражает самую глубокую благодарность профессорам Б. Е. Победре, Ю. И. Димитриенко и Д. В. Георгиевскому за полезные советы и обсуждения, а также к.ф.-м.н., старшему преподавателю А. Р. Улуханян за большую помощь при оформлении рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 14-01-00317-а, 15-01-00848-а.

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ГРУПП

Приведем основные понятия и определения из линейной алгебры и функционального анализа [2–5, 11, 24, 54, 73].

Определение 1.1. *Полугруппой* называется множество, в котором определено действие, сопоставляющее каждой упорядоченной паре элементов третий — результат действия. Действие предполагается ассоциативным. Полугруппами являются: множество целых неотрицательных чисел относительно действия сложения, то же множество относительно действия умножения.

Определение 1.2. Полугруппа называется *группой*, если в ней существует нейтральный элемент e такой, что при всех a из группы $a * e = a$ (через $*$ обозначен знак действия), и для каждого элемента a существует обратный a^{-1} такой, что $a * a^{-1} = e$. Примерами групп могут служить: множество всех целых чисел относительно сложения, множество положительных рациональных чисел относительно сложения. Эти группы коммутативны. Коммутативные группы называются также абелевыми.

Действие в группе обозначается обычно как умножение (мультипликативная группа), иногда как сложение (аддитивная группа). Действие сложения применяется только для абелевых групп. Нейтральный элемент в мультипликативной группе обозначается через 1 , а в аддитивной группе — через 0 . Обратный к a элемент в мультипликативной группе обозначается через a^{-1} , а в аддитивной — через $-a$ (и называется противоположным элементом).

Определение 1.3. *Кольцом* называется множество объектов произвольной природы, в котором определены два действия — «сложение» и «умножение», сопоставляющие упорядоченным парам элементов их «сумму» и «произведение», являющиеся элементами того же множества. Предполагается, что действия удовлетворяют следующим условиям (требованиям):

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения).
2. $a + b = b + a$ (коммутативность сложения).
3. Существует нулевой (нейтральный) элемент 0 такой, что $a + 0 = a$ при любом a .
4. Для каждого a существует противоположный $-a$ такой, что $a + (-a) = 0$.
5. $(a + b)c = ac + bc$ (левая дистрибутивность).
6. $c(a + b) = ca + cb$ (правая дистрибутивность).

Первые четыре условия обозначают, что элементы кольца образуют абелеву группу относительно сложения, которая называется *аддитивной группой кольца*. На основании перечисленных условий нетрудно доказать утверждения.

Утверждение 1.1. Если $a + x = a + y$, то $x = y$.

Утверждение 1.2. При данных a и b уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $(-a) + b$.

Заметим, что утверждения 1.1 и 1.2 справедливы для любой абелевой группы, а не только для аддитивной группы кольца. Кроме того, из утверждения 1.2 следует единственность нуля и противоположного элемента, ибо 0 — решение уравнения $a + x = a$, а $-a$ — решение уравнения $a + x = 0$.

Утверждение 1.3. $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ при любом a .

В общем определении кольца на действие умножения не накладывается никаких ограничений, кроме дистрибутивности со сложением. Однако часто возникает необходимость рассматривать кольца, в которых умножение удовлетворяет тем или иным дополнительным условиям. Наиболее употребимыми являются следующие:

7. $(ab)c = a(bc)$ (ассоциативность умножения). При выполнении этого условия элементы кольца образуют полугруппу относительно умножения.
8. $ab = ba$ (коммутативность умножения).
9. Существование единичного элемента 1 (т. е. такого, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ для любого элемента a).
10. Существование обратного элемента a^{-1} для любого элемента a , отличного от 0 .

В конкретных кольцах эти условия могут выполняться как порознь, так и вместе в различных комбинациях. Кольцо называется *ассоциативным*, если в нем выполнено условие 7, *коммутативным*, если выполнено условие 8, *коммутативным и ассоциативным*, если выполнены условия 7 и 8. Если выполнено условие 9, говорят о *кольце с единицей*. При этом слово «кольцо» снабжается прилагательным в зависимости от выполнения условий 7 и 8.

Если в кольце есть единица, то она единственна.

Кольцо называется *областью целостности*, если из равенства $ab = 0$ следует, что хотя бы один из сомножителей a или b равен 0 .

Определение 1.4. *Полем* называется коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный a^{-1} .

Иными словами, поле есть кольцо, в котором отличные от нуля элементы образуют коммутативную группу, которая носит название *мультипликативной группы поля*.

Любое поле есть область целостности. Действительно, если $ab = 0$ и $a \neq 0$, то $a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0$ и, следовательно, $b = 0$.

Приведем несколько простых примеров. Множество \mathbb{Z} всех целых чисел образует кольцо, коммутативное, ассоциативное и с единицей. Оно является областью целостности. Полем является множество \mathbb{Q} всех рациональных чисел, множество \mathbb{R} всех вещественных чисел и множество \mathbb{C} всех комплексных чисел.

2. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ

Множество Ω точек $x(x^1, x^2, \dots, x^n)$ называется *n -мерным открытым множеством* пространства \mathbb{R}^n , если все его точки внутренние, т. е. для любой точки $x \in \Omega$ существует ε -окрестность $(O_\varepsilon(x))$, целиком принадлежащая множеству Ω . Всякое открытое множество, содержащее точку x , называется *окрестностью* этой точки. Множество Ω называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Открытое множество называется *связным*, если любые две точки этого множества могут быть соединены ломаной, целиком лежащей в нем (или открытое множество называется *связным*, если его нельзя представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств). Открытое связное множество Ω называется *областью* пространства \mathbb{R}^n .

Предположим, что соотношения

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

(короче, $x' = \varphi(x)$) реализуют взаимно однозначное отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$, где Ω и Ω' — некоторые n -мерные области пространства \mathbb{R}^n . Отображение $x' = \varphi(x)$ называется *непрерывным* в точке $x_0 \in \Omega$, если любая ε -окрестность $O'_\varepsilon(x'_0)$ образа $x'_0 = \varphi(x_0)$ точки x_0 содержит δ -окрестность

$O'_\delta(x'_0)$, прообраз $\varphi^{-1}[O'_\delta(x'_0)]$ которой представляет окрестность точки x_0 . Если отображение $x' = \varphi(x)$ непрерывно в каждой точке $x \in \Omega$, то говорят, что оно непрерывно в Ω .

Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ называется *топологическим* отображением. Такие отображения называются еще гомеоморфизмами области Ω . Пусть $\Gamma(\Omega)$ — множество гомеоморфизмов φ области Ω . Очевидно, множеству $\Gamma(\Omega)$ принадлежит тождественное отображение: $x^{i'} = x^i$, $i = \overline{1, n}$. Всякий гомеоморфизм $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ осуществляет однозначную параметризацию области Ω . В этой связи координаты $x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'}$ точки $x' = \varphi(x)$ можно рассматривать как координаты точки области Ω . Иными словами, всякий гомеоморфизм $x' = \varphi(x) \in \Gamma(\Omega)$ определяет некоторую координатную систему в Ω , которую для краткости обозначим через (x') . Следовательно, если (x') и (x) — две координатные системы в Ω , то существует гомеоморфизм $\varphi \in \Gamma(\Omega)$ такой, что $x' = \varphi(x)$. Соотношения (2.1) в дальнейшем будут рассматриваться как преобразования координат точек области Ω . Кроме того, будем предполагать, что функции $\varphi^{i'}$, $i = \overline{1, n}$, принадлежат некоторому классу $C_k(\Omega)$, что будет обозначаться еще символом $\varphi \in C_k$. Если $\varphi \in C_k$ для любого $k \geq 0$, то будем иметь гомеоморфизмы класса C_∞ .

В курсе математического анализа доказывается локальная теорема существования гомеоморфизмов. В связи с важностью этой теоремы приведем ее формулировку.

Теорема 2.1. Пусть функции $\varphi^{i'}(x^1, x^2, \dots, x^n) \in C_k(\Omega)$, где k — некоторое натуральное число, большее единицы, или $k = \infty$, и в некоторой фиксированной точке $x_0(x_0^1, \dots, x_0^n) \in \Omega$ отличен от нуля функциональный детерминант (якобиан) преобразования (2.1), т. е.

$$I(x', x) = \frac{D(x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'})}{D(x^1, x^2, \dots, x^n)} = \det\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\right) \neq 0 \quad \text{при } x = x_0. \quad (2.2)$$

Тогда соотношение (2.1) осуществляет гомоморфизм $O(x_0) \Leftrightarrow O'(x'_0)$, где $O(x_0)$ и $O'(x'_0)$ — некоторые окрестности точек x_0 и $x'_0 = \varphi(x_0)$ соответственно.

Если условие (2.2) выполняется всюду в области Ω , то это обеспечивает независимость функций $\varphi^{i'}$, что, конечно, является необходимым условием для того, чтобы соотношения (2.1) осуществляли глобальный гомеоморфизм области Ω .

Определение 2.1. Отнесение области (или, вообще, пространства) к той или иной системе координат называется *параметризацией* области (пространства).

Координаты точки иногда называют также *параметрами*.

Введем обозначения

$$D_j^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}, \quad D_j^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда, очевидно, имеем соотношения $D_j^{i'} D_k^{j'} = \delta_k^{i'}$, $D_j^j D_k^{j'} = \delta_k^{j'}$, $\det(D_j^{i'}) \det(D_n^{k'}) = 1$. Следовательно, функциональные детерминанты (якобианы) преобразований координат удовлетворяют условиям

$$I(x', x) = \det(D_j^{i'}) \neq 0, \quad I^{-1}(x', x) = \det(D_j^j) \neq 0.$$

Если фиксировать какие-нибудь $n - 1$ из n координат x^1, x^2, \dots, x^n и изменять оставшуюся координату, то соответствующая точка x опишет линию, которая называется *координатной линией*. Если эта линия получена непрерывным изменением координаты x^i , то ее называют координатной линией (x^i) . Совокупность координатных линий $(x^1), (x^2), \dots, (x^n)$ образует в пространстве сеть линий координатной системы (x) . Предполагается, что в каждой точке рассматриваемой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ проходят n координатных линий и что касательные к этим линиям в точке их пересечения являются линейно независимой системой векторов. Можно доказать, что при соблюдении (2.2) это требование всегда выполняется.

Пусть Ω — некоторая область n -мерного (евклидова или риманова) пространства \mathbb{R}^n . Обозначим через $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) множество отображений $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$). Относительно каждой системы координат (x) в $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ отображение f (g) будет выражаться комплексной (вещественной) функцией $f(x)$ ($g(x)$) координат точек области Ω , которую назовем *компонентой* или *представлением* отображения f (g) относительно координатной системы (x) . Обозначим множество компонент (представлений) отображений из $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) относительно координатной системы (x)

через $\mathbb{C}_x(\Omega)$ ($\mathbb{R}_x(\Omega)$). Предполагаем, что для каждой координатной системы (x) множество $\mathbb{C}_x(\Omega)$ ($\mathbb{R}_x(\Omega)$) представляет кольцо. Это имеет место, например, если $\mathbb{C}_x(\Omega)$ ($\mathbb{R}_x(\Omega)$) представляет множество измеримых по Лебегу функций в области Ω . Операции (действия) сложения и произведения в $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) определяются следующим образом: если $f, g \in \mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$), то под $f + g$ и fg будем подразумевать элементы из $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$), компоненты которых относительно координатной системы (x) соответственно равны $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$. Тогда ясно, что $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) является кольцом. При этом $\mathbb{R}(\Omega)$ — подкольцо $\mathbb{C}(\Omega)$.

Очевидно, все рассуждения, которые имеют место для кольца $\mathbb{C}(\Omega)$, как правило, будут оставаться в силе и для подкольца $\mathbb{R}(\Omega)$. Теперь введем определения модуля и линейного пространства.

Определение 2.2. *Модуль* над кольцом \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}(\Omega)$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}(\Omega)$) есть множество V произвольных элементов, называемых векторами, удовлетворяющее следующим условиям («аксиомам линейного пространства»):

1. Для любых двух векторов \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 определен вектор \mathbb{A} , называемый *суммой* векторов \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 и обозначаемый через $\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$. При этом для любых двух векторов \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 имеем

$$\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_1$$

(свойство коммутативности сложения), а для любых трех векторов \mathbb{A}_1 , \mathbb{A}_2 и \mathbb{A}_3

$$(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) + \mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_1 + (\mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3)$$

(свойство ассоциативности сложения).

2. В множестве V имеется элемент \mathbb{O} , называемый *нулевым* вектором, удовлетворяющий для любого \mathbb{A} условию

$$\mathbb{A} + \mathbb{O} = \mathbb{A}.$$

3. Ко всякому вектору \mathbb{A} имеется вектор $-\mathbb{A}$, называемый *противоположным* вектору \mathbb{A} и удовлетворяющий условию

$$\mathbb{A} + (-\mathbb{A}) = \mathbb{O}.$$

4. Для любого вектора \mathbb{A} и любого элемента $\lambda \in \mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) определен вектор $\lambda\mathbb{A}$, называемый *произведением* вектора \mathbb{A} на элемент λ кольца $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$). При этом для двух векторов \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 и любого $\lambda \in \mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) имеем

- $\lambda(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2) = \lambda\mathbb{A}_1 + \lambda\mathbb{A}_2$ (первая дистрибутивность);
- для любого вектора \mathbb{A} и любых двух элементов λ_1 и λ_2 из $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) имеем $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbb{A} = \lambda_1\mathbb{A} + \lambda_2\mathbb{A}$ (вторая дистрибутивность) и
- $\lambda_1(\lambda_2\mathbb{A}) = (\lambda_1\lambda_2)\mathbb{A}$ (ассоциативность умножения на элементы из кольца $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$));
- наконец, если в кольце $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) имеется единица, то требуется выполнение условия $1\mathbb{A} = \mathbb{A}$.

Вот и все аксиомы модуля над кольцом $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$). Модуль над кольцом $\mathbb{C}(\Omega)$ ($\mathbb{R}(\Omega)$) часто просто называют $\mathbb{C}(\Omega)$ -модулем ($\mathbb{R}(\Omega)$ -модулем). Примером модуля является, например, множество векторных (тензорных) полей V над кольцом скалярных функций.

Заметим, что из аксиомы 2 следует, что модуль над кольцом \mathbb{K} всегда есть непустое множество векторов. Но состоять из одного нулевого вектора \mathbb{O} он может. В этом «нулевом» модуле действия таковы: $\mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$, $\lambda\mathbb{O} = \mathbb{O}$ при любом λ .

Определение 2.3. Если \mathbb{K} является полем, модуль называется *линейным (векторным) пространством* над полем \mathbb{K} . В частности, если поле коэффициентов $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то линейное пространство над \mathbb{K} называется вещественным линейным пространством. В том случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, имеем комплексное линейное пространство.

Следует заметить, что в качестве множества V , входящего в определение модуля (линейного пространства), можно рассматривать, например, множество тензоров любого заданного ранга p в некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть M представляет $\mathbb{C}(\Omega)$ -модуль (соответственно $\mathbb{R}(\Omega)$ -модуль). Обозначим через $M(\Omega)$ множество отображений $h : \Omega \rightarrow M$. Легко усмотреть, что $M(\Omega)$ также представляет $\mathbb{C}(\Omega)$ -модуль (соответственно $\mathbb{R}(\Omega)$ -модуль). Относительно каждой координатной системы (x) всякий элемент $h \in M(\Omega)$ выражается некоторой функцией $h(x)$ координат точки области Ω , которую назовем *компонентой* h относительно координатной системы (x) . Обозначим

множество функций $h(x)$ через $M_x(\Omega)$. Следовательно, $M_x(\Omega)$ представляет модуль над кольцом $\mathbb{C}_x(\Omega)$ ($\mathbb{R}_x(\Omega)$).

3. Локально гильбертовы модули тензоров

Рассмотрим некоторые общие вопросы тензорной алгебры, используя элементарные понятия алгебры и функционального анализа [3–5].

Модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathbb{C}_p(\Omega)$ множество тензоров ранга $p \geq 0$ из $\mathbb{C}(\Omega)$, где Ω — некоторая область n -мерного риманова пространства \mathbb{R}^n . Рассмотрим, вообще говоря, комплексные тензоры, которые можно представить в виде $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, где \mathbb{U} и \mathbb{V} — вещественные тензоры. Следовательно, $\mathbb{C}_0(\Omega)$ — кольцо скаляров (тензоров нулевого ранга). Нетрудно заметить, что множество $\mathbb{C}_p(\Omega)$ является модулем над кольцом скаляров $\mathbb{C}_0(\Omega)$, т. е. $\mathbb{C}_p(\Omega)$ представляет $\mathbb{C}_0(\Omega)$ -модуль.

Пусть $M_p(\Omega)$ — множество тензоров ранга p с элементами из некоторого модуля $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Конечно, $M_p(\Omega)$ представляет модуль над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Зная, что $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$ являются модулями над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ ($\mathbb{C}_0(\Omega)$ -модулем), в дальнейшем для краткости будем говорить «модули $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$ ». Число p назовем порядком модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $M_p(\Omega)$.

Если тензор $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то сопряженный тензор $\overline{\mathbb{W}} = \mathbb{U} - i\mathbb{V} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. В дальнейшем будем предполагать, что элементы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — непрерывные тензоры в области Ω . Кроме того, как и выше, будем предполагать, что переход от одних координат к другим осуществляется при помощи преобразований (2.1) некоторого класса C_k , $k \geq 1$. Поэтому, если тензор принадлежит классу C_m , $0 \leq m < k$, относительно одной, произвольно выбранной системы координат, то он принадлежит тому же классу относительно любой другой системы координат.

Следовательно, принадлежность тензора классу C_m , $m < k$, является его инвариантным свойством. При $k = \infty$ можно рассматривать тензоры класса C_∞ .

3.1. Внутреннее r -произведение тензоров. Пусть \mathbb{A} — тензор ранга $p + r$ с компонентами $A_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r}$, а \mathbb{B} — тензор ранга $r + q$ с компонентами $B^{l_1 l_2 \dots l_r j_1 j_2 \dots j_q}$.

Определение 3.1. Внутренним r -произведением тензоров \mathbb{A} и \mathbb{B} называется тензор, который обозначается через $\mathbb{D} = \mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B}$ и компоненты которого определяются следующим¹ образом:

$$D_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = (\mathbb{A} \overset{r}{\otimes} \mathbb{B})_{i_1 i_2 \dots i_p}{}^{j_1 j_2 \dots j_q} = A_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r} B^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_q}. \quad (3.1)$$

Итак, при внутреннем r -произведении тензоров происходит r -кратное сокращение индексов. Поэтому во внутреннем r -произведении могут участвовать тензоры, ранг каждого из которых не меньше r . Если не происходит сокращения индексов ($r = 0$), то такое произведение называется *прямым произведением тензоров*.

Если $p = q = 0$, то будем опускать символ $\overset{r}{\otimes}$ и просто писать $\mathbb{A}\mathbb{B}$. В этом случае внутреннее r -произведение назовем просто *внутренним произведением*. Оно, конечно, выражается формулой

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = A_{k_1 k_2 \dots k_r} B^{k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (3.2)$$

Следует заметить, что, если \mathbb{A} и \mathbb{B} — тензоры из $\mathbb{C}(\Omega)$ и внутреннее произведение $\mathbb{A}\mathbb{B}$ обращается в нуль для любого тензора \mathbb{B} , то $\mathbb{A} = 0$.

3.2. Локальное скалярное произведение тензоров. Локальная норма тензора. Угол между двумя тензорами. Введем в $\mathbb{C}_p(\Omega)$ понятие локального скалярного произведения тензоров. Если $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, $\mathbb{W}' = \mathbb{U}' + i\mathbb{V}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то выражение

$$(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \equiv \mathbb{W}\overline{\mathbb{W}'} = \mathbb{U}\mathbb{U}' + \mathbb{V}\mathbb{V}' + i(\mathbb{V}\mathbb{U}' - \mathbb{U}\mathbb{V}') \quad (3.3)$$

называется *локальным скалярным произведением* тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' в точке x области Ω . Здесь $\mathbb{U}\mathbb{U}'$, $\mathbb{V}\mathbb{V}'$, $\mathbb{V}\mathbb{U}'$ и $\mathbb{U}\mathbb{V}'$ обозначают внутренние произведения соответствующих вещественных тензоров (3.2). Например,

$$\mathbb{U}\mathbb{U}' = U_{i_1 i_2 \dots i_p} U'^{i_1 i_2 \dots i_p},$$

¹Определения операции свертки и следа эндоморфизма можно посмотреть в [3].

где индексы принимают значения $1, 2, \dots, n$. Аналогично в силу (3.1) можно ввести понятие r -локального скалярного произведения. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$. Тогда r -локальным скалярным произведением тензоров \mathbb{W} , \mathbb{W}' называется тензор, обозначаемый через $\mathbb{D} = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x^{(r)} = \mathbb{W} \otimes^r \overline{\mathbb{W}'}$, компоненты которого определяются в виде

$$D_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = w_{i_1 i_2 \dots i_p k_1 k_2 \dots k_r} \overline{w}^{k_1 k_2 \dots k_r j_1 j_2 \dots j_q}. \quad (3.4)$$

Очевидно, при $p = q = 0$ имеем

$$D = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \mathbb{W} \overline{\mathbb{W}'} = w_{k_1 k_2 \dots k_r} \overline{w}^{k_1 k_2 \dots k_r}. \quad (3.5)$$

Видно, что (3.5) совпадает с (3.3). Нетрудно заметить, соотношение (3.4) и, конечно, (3.5) сохраняют силу, если $\mathbb{W} \in M_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$.

Локальное скалярное произведение $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x$ тензоров $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ является скаляром $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \in M_0(\Omega)$.

Легко показать, что в каждой точке x области Ω оно обладает следующими свойствами:

1. $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \overline{(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x} \quad \forall \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.
2. $\lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\lambda \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \overline{\lambda} \mathbb{W}')_x \quad \forall \mathbb{W} \in M_p(\Omega), \forall \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $(\mathbb{W} + \mathbb{W}', \mathbb{W}'')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}'')_x + (\mathbb{W}', \mathbb{W}'')_x \quad \forall \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in M_p(\Omega), \forall \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$,
 $(\mathbb{W}, \mathbb{W}' + \mathbb{W}'')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x + (\mathbb{W}, \mathbb{W}'')_x \quad \forall \mathbb{W} \in M_p(\Omega), \forall \mathbb{W}', \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.

Из этого свойства следует, что $(\mathbb{W}, \mathbb{W}')$ — билинейная форма.

4. Если $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то $(\mathbb{W}, \mathbb{W})_x = \mathbb{U}\mathbb{U} + \mathbb{V}\mathbb{V} \geq 0$, причем знак равенства достигается только в том случае, когда $\mathbb{W}(x) = 0$, $x \in \Omega$.

Определение 3.2. Неотрицательная функция

$$\|\mathbb{W}\|_x = \sqrt{(\mathbb{W}, \mathbb{W})_x} = (\mathbb{U}\mathbb{U} + \mathbb{V}\mathbb{V})^{1/2} \geq 0 \quad \forall \mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega) \quad (3.6)$$

называется локальной нормой тензора \mathbb{W} .

Нетрудно доказать неравенство

$$|(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x| \leq \|\mathbb{W}\|_x \|\mathbb{W}'\|_x \quad \forall \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega). \quad (3.7)$$

В самом деле, пусть $\lambda = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \rho e^{i\varphi}$, где $\rho = |(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x|$ — вещественная положительная постоянная, $\varphi = \arg(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x$. Тогда

$$\|\mathbb{W} + \lambda \mathbb{W}'\|_x^2 = \|\mathbb{W}\|_x^2 + 2\rho |(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x| + \rho^2 \|\mathbb{W}'\|_x^2 \geq 0.$$

Это неравенство верно для любого положительного действительного ρ , откуда следует неравенство (3.7).

Теперь докажем неравенство треугольника

$$\|\mathbb{W} + \mathbb{W}'\|_x \leq \|\mathbb{W}\|_x + \|\mathbb{W}'\|_x \quad \forall \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega). \quad (3.8)$$

В силу (3.7) легко получаем неравенство

$$\|\mathbb{W} + \mathbb{W}'\|_x^2 \leq \|\mathbb{W}\|_x^2 + 2\|\mathbb{W}\|_x \|\mathbb{W}'\|_x + \|\mathbb{W}'\|_x^2 = (\|\mathbb{W}\|_x + \|\mathbb{W}'\|_x)^2.$$

Нетрудно заметить, что из последнего неравенства следует (3.8), ч.т.д.

Из изложенного выше заключаем, что модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в каждой точке области Ω обладает свойством гильбертова пространства. В этой связи назовем его *локальным гильбертовым пространством*.

Определение 3.3. Будем говорить, что тензоры $\mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортогональны в точке x , если

$$(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = \mathbb{W} \overline{\mathbb{W}'} = 0. \quad (3.9)$$

Очевидно, для ортогональных тензоров имеет место теорема Пифагора

$$\|\mathbb{W} + \mathbb{W}'\|_x^2 = \|\mathbb{W}\|_x^2 + \|\mathbb{W}'\|_x^2 \quad \forall \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega), x \in \Omega.$$

Заметим, что косинус угла между вещественными тензорами \mathbb{U}, \mathbb{U}' определяется формулой

$$\cos \psi = \frac{(\mathbb{U}, \mathbb{U}')_x}{\|\mathbb{U}\|_x \|\mathbb{U}'\|_x} \quad \forall \mathbb{U}, \mathbb{U}' \in \mathbb{C}_p(\Omega), x \in \Omega.$$

Отсюда, учитывая (3.7), получаем $|\cos \psi| \leq 1$.

3.3. Линейная зависимость и линейная независимость тензоров.

Определение 3.4. Выражение вида

$$\lambda_1 \mathbb{A}_1(x) + \lambda_2 \mathbb{A}_2(x) + \dots + \lambda_k \mathbb{A}_k(x), \quad (3.10)$$

где $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — тензоры из модуля $M_p(\Omega)$, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — коэффициенты из \mathbb{C} , называется *линейной комбинацией* тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ в точке $x \in \Omega$.

Определение 3.5. Линейная комбинация (3.10) называется *нетривиальной* в точке $x \in \Omega$, если в ней хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ отличен от нуля.

Определение 3.6. Линейная комбинация вида

$$0 \cdot \mathbb{A}_1(x) + 0 \cdot \mathbb{A}_2(x) + \dots + 0 \cdot \mathbb{A}_k(x)$$

называется *тривиальной*; она, очевидно, равна нулевому тензору.

Определение 3.7. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ из модуля $M_p(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ называется *линейно зависимой* в точке $x \in \Omega$, если существует хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих тензоров, равная нулевому тензору. В противном случае, т. е. если только тривиальная линейная комбинация этих тензоров равна нулевому тензору, система тензоров называется *линейно независимой* в этой точке.

Часто рассматривают определение, эквивалентное этому.

Определение 3.8. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ из модуля $M_p(\Omega)$ называется *линейно независимой* в точке $x \in \Omega$, если любая нетривиальная линейная комбинация этих тензоров отлична от нуля. В противном случае она называется *линейно зависимой* в этой точке.

Утверждение 3.1. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно зависима в точке $x \in \Omega$ в том и только в том случае, когда один из тензоров является линейной комбинацией остальных.

Утверждение 3.2. Если система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно зависима в точке $x \in \Omega$, а система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x), \mathbb{A}_{k+1}(x)$ из $M_p(\Omega)$ линейно зависима в этой точке, то тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ есть линейная комбинация тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$.

Доказательства этих утверждений ничем не отличаются от доказательств аналогичных утверждений для векторов [2, 73]. Поэтому на их доказательствах останавливаться не будем.

Теорема 3.1 (о линейной зависимости линейных комбинаций). Если тензоры $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ в точке $x \in \Omega$ являются линейными комбинациями тензоров $\mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x), \dots, \mathbb{B}_m(x)$ в этой же точке и $k > m$, то система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ линейно зависима.

Эта теорема доказывается методом математической индукции так же, как аналогичная теорема для системы строк (векторов) [73].

Определение 3.9. Система тензоров в точке $x \in \Omega$ называется *порождающей*, если все тензоры в этой точке рассматриваемого модуля являются их линейными комбинациями.

Определение 3.10. Если для модуля существует конечная порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$, то модуль называется *конечномерным* в этой точке, в противном случае — *бесконечномерным*.

Заметим, что в конечномерном модуле не могут существовать линейно независимые системы, число тензоров в которых больше, чем в порождающей системе тензоров, ибо в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций любая система, превосходящая по числу тензоров порождающую систему, линейно зависима.

Утверждение 3.3. Любая минимальная (по числу тензоров) порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ линейно независима в этой точке.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — минимальная порождающая система тензоров. Если она линейно зависима, то один из тензоров, скажем \mathbb{A}_k , есть линейная комбинация остальных, и всякая линейная комбинация тензоров $\mathbb{A}_1(x), \dots, \mathbb{A}_{k-1}(x), \mathbb{A}_k(x)$ есть линейная комбинация меньшей системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \dots, \mathbb{A}_{k-1}(x)$, которая тем самым оказывается порождающей системой тензоров. Полученное противоречие доказывает утверждение. \square

Утверждение 3.4. *Любая максимальная (по числу тензоров) линейно независимая система тензоров в точке $x \in \Omega$ является порождающей.*

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — максимальная линейно независимая система и \mathbb{A} — любой тензор модуля. Тогда система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x), \mathbb{A}$ не будет линейно независимой и в силу утверждения 3.2 тензор \mathbb{A} будет линейной комбинацией тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$, что доказывает утверждение. \square

Утверждение 3.5. *Любая линейно независимая порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ является минимальной среди порождающих и максимальной среди линейно независимых в этой же точке.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — линейно независимая порождающая система тензоров. Если $\mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x), \dots, \mathbb{B}_m(x)$ — какая-нибудь другая порождающая система, то $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ являются линейными комбинациями $\mathbb{B}_1(x), \mathbb{B}_2(x), \dots, \mathbb{B}_m(x)$ и отсюда следует, что $k \leq m$, ибо если было бы $k > m$, то в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ была бы линейно зависимой системой. Полученное противоречие доказывает минимальность среди порождающих линейно независимой порождающей системы тензоров. Пусть теперь $\mathbb{D}_1(x), \mathbb{D}_2(x), \dots, \mathbb{D}_l(x)$ — какая-либо линейно независимая система тензоров. Следовательно, они являются линейными комбинациями тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ и, очевидно, $l \leq k$, ибо при $l > k$ в силу теоремы о линейной зависимости линейных комбинаций $\mathbb{D}_1(x), \mathbb{D}_2(x), \dots, \mathbb{D}_l(x)$ составляли бы линейно зависимую систему. Этим утверждение доказано полностью. \square

Таким образом, утверждениями 3.3—3.5 устанавливается тождественность трех следующих понятий: минимальной порождающей системы тензоров, максимальной линейно независимой системы тензоров и линейно независимой порождающей системы тензоров.

Определение 3.11. Будем говорить, что модуль $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ является k -мерным и число k называется его *числом измерений*, или *размерностью*, если в нем существует линейно независимая система тензоров в той же точке $x \in \Omega$, состоящая из k тензоров, и нет никакой линейно независимой системы тензоров, состоящей из большего, чем k , число тензоров.

В силу определения 3.11 заключаем, что число измерений модуля $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ равно максимальному числу линейно независимых тензоров в этой точке.

Определение 3.12. Максимальная линейно независимая система тензоров модуля $M(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ называется *базисом* этого модуля в точке $x \in \Omega$.

Утверждение 3.6. *Пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — линейно независимая система тензоров в точке $x \in \Omega$ из модуля $M(\Omega)$, причем их число меньше размерности модуля. Тогда к ним можно присоединить тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ так, что система $\mathbb{A}_1(x), \dots, \mathbb{A}_k(x), \mathbb{A}_{k+1}(x)$ будет линейно независимой.*

Доказательство. Рассмотрим множество линейных комбинаций $\lambda_1 \mathbb{A}_1(x) + \lambda_2 \mathbb{A}_2(x) + \dots + \lambda_k \mathbb{A}_k(x)$. Оно, очевидно, не исчерпывает всего модуля, так как тензоры $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ не являются порождающей системой. Выберем тензор $\mathbb{A}_{k+1}(x)$, не являющийся линейной комбинацией тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$. Тогда $\mathbb{A}_1(x), \dots, \mathbb{A}_k(x), \mathbb{A}_{k+1}(x)$ — линейно независимая система, так как иначе в силу утверждения 3.2 $\mathbb{A}_{k+1}(x)$ был бы линейной комбинацией системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$. \square

Из утверждения 3.6 следует, что любую линейно независимую систему тензоров можно дополнить до базиса. Кроме того, это утверждение и его доказательства указывают на характер

произвола в выборе базиса модуля. В самом деле, если взять произвольный ненулевой тензор, то его можно достраивать до базиса, выбирая второй тензор как угодно, только не линейную комбинацию первого, третий как угодно, только не линейную комбинацию первых двух и т. д.

К базису можно «спуститься», исходя из порождающей системы. В этой связи имеет место утверждение.

Утверждение 3.7. *Любая порождающая система тензоров в точке $x \in \Omega$ содержит базис в этой точке.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — порождающая система тензоров. Если она линейно зависима, то один из ее тензоров есть линейная комбинация остальных, и его можно исключить из порождающей системы. Если оставшаяся система тензоров линейно зависима, то можно исключить еще один тензор и т. д. до тех пор, пока не получим линейно независимую порождающую систему, т. е. базис. \square

Заметим, что приведенные выше определения, утверждения, теоремы были рассмотрены в данной точке x области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, т. е. они имели локальный характер. Однако, если они имеют место в каждой точке области Ω , то будем говорить, что они имеют место в Ω .

Модуль $M_p(\Omega)$ над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$ конечномерен. Его размерность равна n^p . Действительно, $M_p(\Omega)$ принадлежит всякий тензор ранга p , который имеет n^p компонент из $M_p(\Omega)$ ($M_p(\Omega)$ — модуль над кольцом $\mathbb{C}_0(\Omega)$), которые можно задать произвольно относительно одной из систем координат. Это означает, что $\dim M_p(\Omega) = n^p$.

Нетрудно убедиться в справедливости следующего утверждения:

Утверждение 3.8. *Для линейной независимости системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$ необходимо, чтобы $k \leq n^p$.*

Рассмотрим матрицу

$$A_{ij}(x) = (\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Так как $(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x = \overline{(\mathbb{A}_j, \mathbb{A}_i)_x}$, то $A_{ij} = \overline{A_{ji}}$, т. е. A_{ij} — эрмитова матрица. Теперь нетрудно доказать теорему.

Теорема 3.2. *Система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$, принадлежащих модулю $\mathbb{C}_p(\Omega)$, линейно независима в точке x тогда и только тогда, когда*

$$A = \det(A_{ij}(x)) \neq 0, \quad x \in \Omega.$$

Если это условие выполняется в каждой точке Ω , то система тензоров линейно независима в Ω . Конечно, $A = \det(A_{ij}(x))$ — определитель Грама для системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$. Поэтому он для линейно независимой системы тензоров больше нуля.

Если один из тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, $k \leq n^p$ обращается в нуль или является линейной комбинацией остальных в точке $x \in \Omega$, то эта система тензоров линейно зависима в этой точке.

3.4. Ортонормальные и биортонормальные системы тензоров.

Определение 3.13. Система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ называется *ортонормальной* в точке $x \in \Omega$, если

$$(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Соответственно, система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ называется *ортонормальной* в области Ω , если она ортонормальна в каждой точке этой области.

Ортонормальная система тензоров линейно независима (в точке, в области), так как $\det(A_{ij}) = \det(\delta_{ij}) = 1$. Отсюда в свою очередь следует, что, если система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортонормальна, то необходимо $k \leq n^p$ (так как максимальная линейно независимая система тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x) \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ не может состоять из большего, чем $k = n^p$, числа тензоров).

Теорема 3.3. *Любую линейно независимую систему тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$, модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ можно ортонормировать, применяя метод ортогонализации Шмидта.*

Доказательство. Полагая

$$\mathbb{B}_\alpha = \frac{\mathbb{B}'_\alpha}{\|\mathbb{B}'_\alpha\|_x}, \quad x \in \Omega,$$

где $\mathbb{B}'_1 = \mathbb{A}_1$, $\mathbb{B}'_\alpha = \mathbb{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} (\mathbb{A}_\alpha, \mathbb{B}_\beta) \mathbb{B}_\beta$, $\alpha = \overline{2, k}$, получим ортонормальную систему тензоров $\mathbb{B}_1(x), \dots, \mathbb{B}_k(x)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, т.е. $(\mathbb{B}_i, \mathbb{B}_j) = \delta_{ij}$. \square

Нетрудно заметить, что в каждой фиксированной точке x области Ω

$$\mathbb{B}_\alpha = a_{\alpha 1} \mathbb{A}_1 + a_{\alpha 2} \mathbb{A}_2 + \dots + a_{\alpha \alpha} \mathbb{A}_\alpha, \quad a_{\alpha \alpha} \neq 0, \quad a_{\alpha \beta} \in \mathbb{C}.$$

Определение 3.14. Две системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \dots, \mathbb{A}^k(x)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ называются *биортонормальными*, если выполняются условия

$$(\mathbb{A}_i, \mathbb{A}^j)_x = \delta_i^j, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Утверждение 3.9. Если $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \dots, \mathbb{A}^k(x)$ — биортонормальные системы тензоров, то каждая из них по отдельности линейно независима.

Доказательство. Допустим, наоборот, что нетривиальная комбинация, например, тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ равна нулю, т.е.

$$\lambda_1 \mathbb{A}_1 + \lambda_2 \mathbb{A}_2 + \dots + \lambda_k \mathbb{A}_k = 0,$$

где среди $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ не все равны нулю одновременно. Умножая обе части этого равенства скалярно на \mathbb{A}^j , в силу биортонормальности этих систем получим $\lambda_j = 0$, $j = \overline{1, k}$. Пришли к противоречию, что доказывает линейную независимость системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$. Аналогично доказывается линейная независимость системы тензоров $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \dots, \mathbb{A}^k(x)$. \square

Теорема 3.4. Для всякой линейно независимой системы тензоров существует биортонормальная система.

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$, $k \leq n^p$ — линейно независимая система тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в области Ω . Обозначим $A_{ij}(x) = (\mathbb{A}_i, \mathbb{A}_j)_x$. Тогда в силу теоремы 3.2 $\det(A_{ij}(x)) \neq 0$ в Ω и, конечно, существует единственная матрица A^{ij} , удовлетворяющая условиям

$$A_{in} A^{nj} = \delta_i^j, \quad i, j, n = \overline{1, k}. \quad (3.11)$$

Так как A_{ij} — эрмитова матрица, то A^{ij} — также эрмитова матрица. В самом деле, переходя в последнем соотношении к сопряженному соотношению и учитывая $\overline{A_{in}} = A_{ni}$, находим

$$A_{ni} \overline{A^{nj}} = \delta_i^j, \quad i, j, n = \overline{1, k}. \quad (3.12)$$

Умножая обе части этого соотношения на A^{im} и учитывая (3.11), получим

$$A^{jm} = A_{ni} A^{im} \overline{A^{nj}} = \delta_n^m \overline{A^{nj}} = \overline{A^{mj}},$$

как и требуется.

В силу последнего соотношения (3.12) можно записать в виде

$$A_{ni} A^{jn} = \delta_i^j, \quad i, j, n = \overline{1, k}. \quad (3.13)$$

Таким образом, A_{ij} и A^{ij} — взаимно обратные эрмитовы матрицы.

Рассмотрим систему тензоров

$$\mathbb{A}^i = A^{in} \mathbb{A}_n, \quad i, n = \overline{1, k}. \quad (3.14)$$

Обращая эти соотношения, очевидно, получим

$$\mathbb{A}_i = A_{in} \mathbb{A}^n, \quad i, n = \overline{1, k}.$$

В силу (3.14) имеем

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}_j) = A^{in} (\mathbb{A}_n, \mathbb{A}_j) = A^{in} A_{nj}.$$

Отсюда с помощью (3.13) можно написать

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}_j) = (\mathbb{A}_j, \mathbb{A}^i) = \delta_j^i, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad (3.15)$$

т. е. системы тензоров $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ и $\mathbb{A}^1(x), \mathbb{A}^2(x), \dots, \mathbb{A}^k(x)$ биортогональны. Теорема доказана. \square

Следствие 3.4.1. Если $\mathbb{A}_1(x), \mathbb{A}_2(x), \dots, \mathbb{A}_k(x)$ — ортонормальная система тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^i = \mathbb{A}_i$, $i = \overline{1, k}$, $k \leq n^p$.

Следует заметить, что в силу (3.11) и (3.14) имеем

$$(\mathbb{A}^i, \mathbb{A}^j)_x = (A^{im} \mathbb{A}_m, A^{jn} \mathbb{A}_n)_x = A^{im} \overline{A^{jn}} (\mathbb{A}_m, \mathbb{A}_n)_x = A^{im} \overline{A^{jn}} A_{mn} = A^{im} A_{mn} A^{nj} = A^{im} \delta_m^j = A^{ij},$$

т. е.

$$A^{ij}(x) = (\mathbb{A}^i, \mathbb{A}^j)_x, \quad i, j = \overline{1, n^p}, \quad x \in \Omega.$$

3.5. Базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Разложение тензора относительно базиса. Так как $\dim \mathbb{C}_p(\Omega) = n^p$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, в силу определения размерности модуля максимальная линейно независимая система тензоров будет состоять из n^p тензоров. Следовательно, любую линейно независимую в области Ω систему тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ можно выбрать в качестве базиса этого модуля. На основании теоремы 3.4 существует биортонормальная система тензоров $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{n^p}$, которую также можно рассматривать в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Заметим, что если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ — ортонормальный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^i = \mathbb{A}_i$, $i = \overline{1, n^p}$.

Получим формулы разложения тензора относительно базиса модуля. Пусть $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ и $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^{n^p}$ — биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Тогда для любого тензора $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$ имеем разложение

$$\mathbb{W}(x) = W^i(x) \mathbb{A}_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i, j = \overline{1, n^p}, \quad (3.16)$$

где W^i , $i = \overline{1, n^p}$ называются коэффициентами разложения тензора \mathbb{W} относительно базиса $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$.

Умножая обе части (3.16) скалярно на тензоры \mathbb{A}^j , в силу (3.15) находим

$$W^j(x) = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^j)_x, \quad j = \overline{1, n^p}. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.17), соотношение (3.16) можно представить в виде

$$\mathbb{W}(x) = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^i)_x \mathbb{A}_i, \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1, n^p}. \quad (3.18)$$

Имеем также разложение

$$\mathbb{W}(x) = W_i(x) \mathbb{A}^i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad (3.19)$$

где аналогично (3.17) имеем

$$W_i(x) = (\mathbb{W}, \mathbb{A}_i)_x, \quad i = \overline{1, n^p}. \quad (3.20)$$

С помощью (3.20) из (3.19) получаем

$$\mathbb{W}(x) = (\mathbb{W}, \mathbb{A}_i)_x \mathbb{A}^i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = \overline{1, n^p}. \quad (3.21)$$

Подставляя (3.16) в правую часть (3.20), а (3.19) в правую часть (3.17), приходим к соотношениям

$$W_i(x) = A_{ij}(x) W^j(x), \quad W^i(x) = A^{ij}(x) W_j(x), \quad i, j = \overline{1, n^p},$$

которые связывают между собой коэффициенты разложения тензора \mathbb{W} относительно биортонормальных систем тензоров.

Если $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то локальное скалярное произведение этих тензоров представится в форме

$$(\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = W_i(x) \overline{W'}^i(x) = W^i(x) \overline{W'}_i(x).$$

Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ — ортонормальный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то имеем соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{W}(x) &= \sum_{i=1}^{n^p} (\mathbb{W}, \mathbb{A}_i)_x \mathbb{A}_i(x) \quad \forall \mathbb{W} \in M_p(\Omega), \\ (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x &= \sum_{i=1}^{n^p} W_i(x) \overline{W'}_i(x) \quad \forall \mathbb{W} \in M_p(\Omega), \quad \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega). \end{aligned}$$

3.6. Мультипликативные тензоры и их основные свойства. Обозначим прямое произведение тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ с компонентами из $\mathbb{C}(\Omega)$ через

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \otimes \mathbb{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k. \quad (3.22)$$

Определение 3.15. Тензоры вида (3.22) называются *мультипликативными тензорами*. Тензоры $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ являются *сомножителями* мультипликативного тензора \mathbb{A} .

Очевидно, компоненты мультипликативного тензора равны произведению компонент его сомножителей с сохранением порядка их следования. Например, если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ — тензоры модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, то имеем

$$A_{i_1 i_2 \dots i_k} = A_{1, i_1} A_{2, i_2} \dots A_{k, i_k}.$$

Следует заметить, что прямое произведение тензоров обладает свойством ассоциативности. Например, если $1 < i < k$, то будем иметь

$$\mathbb{A} = (\mathbb{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i-1}) \otimes (\mathbb{A}_i \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k).$$

Определение 3.16. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ — тензоры из модулей $\mathbb{C}_{p_1}(\Omega), \dots, \mathbb{C}_{p_k}(\Omega)$ соответственно, то мультипликативный тензор (3.22), который, конечно, принадлежит модулю $\mathbb{C}_{p_1 + \dots + p_k}(\Omega)$, называется тензором класса $\mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$.

Нетрудно усмотреть, что мультипликативные тензоры класса $\mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ представляют k -линейные формы. В самом деле, если f и g — произвольные скаляры, \mathbb{A}'_i и \mathbb{A}''_i — тензоры ранга p_i , то

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i-1} \otimes (f\mathbb{A}'_i + g\mathbb{A}''_i) \otimes \mathbb{A}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k &= f(\mathbb{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i-1} \otimes \mathbb{A}'_i \otimes \mathbb{A}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k) + \\ &+ g(\mathbb{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i-1} \otimes \mathbb{A}''_i \otimes \mathbb{A}_{i+1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k). \end{aligned}$$

Следует заметить, что множество мультипликативных тензоров не образует линейного многообразия, однако они обладают рядом важных свойств, благодаря которым они очень полезны для построения базисов модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ и f — скаляр из $\mathbb{C}_0(\Omega)$, то, очевидно, $f\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$. При этом на f умножается какой-нибудь один (любой) из сомножителей тензора \mathbb{A} .

Определение 3.17. Сомножители \mathbb{A}_i и \mathbb{A}_j мультипликативного тензора называются *подобными*, если $\mathbb{A}_i = f\mathbb{A}_j$, где f — скаляр.

При перестановке подобных сомножителей мультипликативный тензор, конечно, не изменяется.

Определение 3.18. Внутреннее (локальное скалярное) произведение мультипликативных тензоров равно произведению внутренних (локальных скалярных) произведений соответствующих сомножителей.

В силу этого определения, если $\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_k$ и $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \otimes \dots \otimes \mathbb{B}_k$ — мультипликативные тензоры класса $\mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$, то их внутреннее и их локальное скалярное произведения выражаются соответственно формулами

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{A}_1\mathbb{B}_1) \dots (\mathbb{A}_k\mathbb{B}_k), \quad (\mathbb{A}, \mathbb{B})_x = (\mathbb{A}_1, \mathbb{B}_1)_x \dots (\mathbb{A}_k, \mathbb{B}_k)_x, \quad x \in \Omega. \quad (3.23)$$

Нетрудно заметить, что справедливо

Утверждение 3.10. Два мультипликативных тензора класса $\mathbb{C}_{p_1, \dots, p_k}(\Omega)$ ортогональны тогда и только тогда, когда по крайней мере одна пара соответствующих сомножителей ортогональна.

Если $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, а \mathbb{A} и \mathbb{A}' — произвольные тензоры с компонентами соответственно из $\mathbb{C}(\Omega)$ и $M(\Omega)$, то внутреннее p -произведение и p -локальное скалярное произведение мультипликативных тензоров $\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}$ и $\mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}'$ выражаются соответственно соотношениями

$$(\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}) \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')\mathbb{A} \otimes \mathbb{A}', \quad (\mathbb{A} \otimes \mathbb{W}, \mathbb{W}' \otimes \mathbb{A}')_x^{(p)} = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')_x \mathbb{A} \otimes \bar{\mathbb{A}}'.$$

Теперь не представляет труда убедиться в справедливости утверждения.

Утверждение 3.11. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_k$ и $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^k$ — биортонормальные системы тензоров, например, модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то каждая из систем мультипликативных тензоров вида

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_m}, \quad \mathbb{A}^{j_1} \otimes \mathbb{A}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{j_m}, \\ \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_m} \otimes \mathbb{A}^{j_1} \otimes \mathbb{A}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{j_m}, \end{aligned}$$

где $i_l, j_l = \overline{q, k}$, $l = \overline{1, m}$, $m \leq k \leq n^p$, в отдельности линейно независима.

3.7. Построение базисов модуля. Рассмотрим способы построения базисов модулей тензоров любого ранга с помощью базисов модулей меньших размерностей.

Теорема 3.5. Если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ и $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_{n^q}$ — базисы модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}_q(\Omega)$, то система мультипликативных тензоров

$$\mathbb{D}_m = \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{B}_j, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad j = \overline{1, n^q},$$

является базисом модуля $\mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$.

Здесь m — номер последовательностей пар i, j , когда i и j принимают соответственно значения $1, 2, \dots, n^p$; $1, 2, \dots, n^q$, а m , конечно, принимает значения $1, 2, \dots, n^{p+q}$.

Доказательство. Рассмотрим систему тензоров

$$\mathbb{D}^m = \mathbb{A}^i \otimes \mathbb{B}^j, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad j = \overline{1, n^q}, \quad m = \overline{1, n^{p+q}},$$

где \mathbb{A}^i и \mathbb{B}^j — биортонормальные соответственно относительно \mathbb{A}_i и \mathbb{B}_j базисы модулей $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}_q(\Omega)$. На основании второго соотношения (3.23) имеем

$$(\mathbb{D}^m, \mathbb{D}^l)_x = (\mathbb{A}_i, \mathbb{A}^s)_x (\mathbb{B}_j, \mathbb{B}^r)_x = \delta_i^s \delta_j^r = \delta_m^l,$$

где m и l — номера числовых последовательностей i, j и s, r соответственно. Следовательно, системы тензоров \mathbb{D}_m и \mathbb{D}_l биортонормальны и поэтому в силу утверждения 3.9 и определения базиса являются базисами модуля $\mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$, что и требовалось доказать. \square

Обобщением этой теоремы является следующая теорема:

Теорема 3.6. Если $\mathbb{A}_{i_1}, \mathbb{A}^{i_1}, \dots, \mathbb{A}_{i_k}, \mathbb{A}^{i_k}$ — биортонормальные базисы соответственно модулей $\mathbb{C}_{p_1}(\Omega), \dots, \mathbb{C}_{p_k}(\Omega)$, где индексы принимают значения $i_1 = \overline{1, n^{p_1}}, i_2 = \overline{1, n^{p_2}}, \dots, i_k = \overline{1, n^{p_k}}$, то системы мультипликативных тензоров

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_k}, \quad \mathbb{A}^i = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{i_k},$$

где $i = \mathbb{N}^{\circ}(i_1, i_2, \dots, i_k)$, будут биортонормальными базисами модуля $\mathbb{C}_{p_1+\dots+p_k}(\Omega)$.

Из этой теоремы вытекает очевидное следствие.

Следствие 3.6.1. Пусть $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_n$ и $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2, \dots, \mathbb{A}^n$ — биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$. Тогда системы p -векторов

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \quad \mathbb{A}^i = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{i_p} \quad (3.24)$$

представляют биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Здесь индексы i_1, \dots, i_p принимают значения $1, 2, \dots, n$, а i обозначает номер элемента множества числовых последовательностей $\{i_1, \dots, i_p\}$ ($i = \mathbb{N}^{\circ}\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$), число элементов которого равно n^p . Очевидно, i принимает значения $1, \dots, n^p$.

Если $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_n$ — ортогональный базис модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, то система p -векторов (3.24) представляет ортогональный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Следует отметить, что нумерацию элементов множества числовых последовательностей $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$ можно осуществить, например, следующим образом: если $i = \mathbb{N}^{\circ}\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, то

$$i = i_1 + n(i_2 - 1) + \dots + n^{p-1}(i_p - 1) = 1 + \sum_{k=1}^p n^{k-1}(i_k - 1).$$

Теперь заметим, что для произвольного тензора $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$ наряду с (3.16) и (3.19) будем иметь разложения

$$\begin{aligned}\mathbb{W} &= W^i \mathbb{A}_i = W^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \\ \mathbb{W} &= W_i \mathbb{A}^i = W_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{i_p}, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (3.25)$$

Здесь $W_{i_1 i_2 \dots i_p}$ и $W^{i_1 i_2 \dots i_p}$ аналогично W_i и W^i называются *ковариантными* и *контравариантными компонентами* тензора \mathbb{W} относительно базисов $\mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{i_p}$ и $\mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_p}$. В дальнейшем эти базисы назовем p -векторными *мультипликативными базисами (мультибазисами)* и для них введем обозначения

$$\mathbb{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \mathbb{A}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \quad \mathbb{A}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbb{A}^{i_1} \otimes \mathbb{A}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}^{i_p}. \quad (3.26)$$

Тогда разложения (3.25) с помощью (3.26) можно еще записать в форме

$$\mathbb{W} = W^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{A}_{i_1 i_2 \dots i_p} = W_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{A}^{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}. \quad (3.27)$$

Вводя обозначения

$$A_{ij} = (A_i, A_j), \quad A^{ij} = (A^i, A^j), \quad A_j^i = \delta_j^i = (A^i, A_j), \quad i, j = \overline{1, n},$$

имеем соотношения

$$A_{im} A^{mj} = A_i^j = \delta_i^j, \quad A_i = A_{im} A^m, \quad A^i = A^{im} A_m, \quad i, j, m = \overline{1, n}.$$

В силу этих соотношений получаем

$$\begin{aligned}A_{i_1 i_2 \dots i_p} &= A_{i_1 j_1} \dots A_{i_p j_p} A^{j_1 j_2 \dots j_p}, & A^{i_1 i_2 \dots i_p} &= A^{i_1 j_1} \dots A^{i_p j_p} A_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\ W_{i_1 i_2 \dots i_p} &= A_{i_1 j_1} \dots A_{i_p j_p} W^{j_1 j_2 \dots j_p}, & W^{i_1 i_2 \dots i_p} &= A^{i_1 j_1} \dots A^{i_p j_p} W_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\ i_1, \dots, i_p &= \overline{1, n}, \quad j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

3.8. Базисы тензоров в трехмерном евклидовом пространстве. Пусть \mathbf{r}_i и \mathbf{r}^j — ковариантные и контравариантные базисные векторы координатной системы трехмерного евклидова пространства, которые представляют вектор-функции. С помощью этих базисов можно построить базисы для представления тензоров произвольного ранга трехмерного евклидова пространства. В самом деле, в силу следствия 3.6.1 системы p -векторов

$$\mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{r}_{i_1} \otimes \mathbf{r}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}_{i_p}, \quad \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = \mathbf{r}^{i_1} \otimes \mathbf{r}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}^{i_p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = 1, 2, 3 \quad (3.29)$$

представляют биортонормальные базисы модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$. В дальнейшем аналогично (3.26) базисы (3.29) назовем p -векторными мультипликативными базисами (мультибазисами) модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Пусть \mathbb{U} — тензор p -го ранга из $M_p(\Omega)$, где $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Тогда, используя (3.29), аналогично (3.27) будем иметь представления

$$\mathbb{U} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = 1, 2, 3. \quad (3.30)$$

Здесь аналогично (3.28) имеем соотношения

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} &= g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} \mathbb{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} & \mathbb{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \mathbb{R}_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\ U_{i_1 i_2 \dots i_p} &= g_{i_1 j_1} \dots g_{i_p j_p} U^{j_1 j_2 \dots j_p}, & U^{i_1 i_2 \dots i_p} &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} U_{j_1 j_2 \dots j_p}, \\ i_1, \dots, i_p &= 1, 2, 3, \quad j_1, \dots, j_p = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (3.31)$$

где

$$\begin{aligned}g_{ij} &= (\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j, & g^{ij} &= (\mathbf{r}^i, \mathbf{r}^j) = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}^j, & g_j^i &= \delta_j^i = \mathbf{r}^i \cdot \mathbf{r}_j, \\ g_{im} g^{mj} &= g_i^j, & \mathbf{r}_i &= g_{ij} \mathbf{r}^j, & \mathbf{r}^i &= g^{ij} \mathbf{r}_j, \quad i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}$$

3.9. Обобщение на случай риманова пространства. Введем в рассмотрение объекты, которые можно использовать как базисы модуля $M_p(\Omega)$ в случае произвольного риманова пространства n измерений. Сперва рассмотрим случай модуля $M_1(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ — биортонормальные базисы модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$. Тогда если $\mathbf{W} \in M_1(\Omega)$, то аналогично (3.18) и (3.21) для него имеем разложения

$$\mathbf{W} = (\mathbf{W}, \mathbf{A}^i) \mathbf{A}_i = (\mathbf{W}, \mathbf{A}_i) \mathbf{A}^i = \mathbf{W}^i \mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i \mathbf{A}^i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.32)$$

Обозначим через $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$ и $\mathbf{E}^1, \mathbf{E}^2, \dots, \mathbf{E}^n$ биортонормальные базисы модуля $\mathbb{R}_1(\Omega) \subset \mathbb{C}_1(\Omega)$, т. е. имеют место соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}^j) &= g_i^j, \quad (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}_j) = g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = (\mathbf{E}^i, \mathbf{E}^j) = g^{ji}, \\ g_{ik} g^{kj} &= g_i^j, \quad \mathbf{E}_i = g_{ij} \mathbf{E}^j, \quad \mathbf{E}^i = g^{ij} \mathbf{E}_j. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Далее пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i &= A_{i,j} \mathbf{E}^j = A_{i,j}^j \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{A}^i = A^{i,j} \mathbf{E}_j = A^{i,j} \mathbf{E}^j, \\ \mathbf{E}_i &= B_{i,j} \mathbf{A}^j = B_{i,j}^j \mathbf{A}_j, \quad \mathbf{E}^i = B^{i,j} \mathbf{A}_j = B^{i,j} \mathbf{A}^j. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Отсюда, следовательно, имеем

$$\begin{aligned} g_i^j &= (\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^j) = A_{i,m} \overline{A}^{j,m} = A_{i,m} \overline{A}^{j,m} = \overline{A}_{i,m} A^{j,m} = \overline{A}_{i,m} A^{j,m}, \\ g_i^j &= (\mathbf{E}_i, \mathbf{E}^j) = B_{i,m} \overline{B}^{j,m} = B_{i,m} \overline{B}^{j,m} = \overline{B}_{i,m} B^{j,m} = \overline{B}_{i,m} B^{j,m}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Теперь в силу, например, первого и третьего соотношений (3.34) получаем

$$\mathbf{A}_i = A_{i,m} \mathbf{E}^m = A_{i,m} B_{m,j} \mathbf{A}_j = A_{i,m} B^{m,j} \mathbf{A}_j,$$

откуда, учитывая линейную независимость системы векторов A_i , $i = \overline{1, n}$, находим

$$A_{i,m} B_{m,j} = A_{i,m} B^{m,j} = g_i^j. \quad (3.36)$$

На основании (3.35) и (3.36) заключаем, что

$$B_{m,j} = \overline{A}^{j,m} \quad B^{m,j} = \overline{A}^{j,m}, \quad B_{m,j} = \overline{A}_{j,m}, \quad B^{m,j} = \overline{A}_{j,m}, \quad (3.37)$$

где последние два соотношения получаются аналогично. Учитывая (3.37), из третьего и четвертого соотношений (3.34) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= \mathbf{A}_k \overline{A}^{k,i} = \mathbf{A}^k \overline{A}_{k,i} = \overline{\mathbf{A}}_k A^{k,i} = \overline{\mathbf{A}}^k A_{k,i}, \\ \mathbf{E}^i &= \mathbf{A}_k \overline{A}^{k,i} = \mathbf{A}^k \overline{A}_{k,i} = \overline{\mathbf{A}}_k A^{k,i} = \overline{\mathbf{A}}^k A_{k,i}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

В силу (3.38) из первых трех соотношений (3.33) будем иметь

$$g_i^j = A_{k,j} \overline{A}^{k,i}, \quad g_{ij} = A_{k,i} \overline{A}^{k,j}, \quad g^{ij} = A_{k,i} \overline{A}^{k,j}. \quad (3.39)$$

Таким образом, зная биортонормальные базисы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ и $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n$ модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$, можно построить биортонормальные базисы (3.38), которые обобщают на случай риманова многообразия базисные векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}^i евклидова пространства и с помощью которых любой тензор \mathbf{W} модуля $M_1(\Omega)$ представится в виде

$$\mathbf{W} = W_{,i} \mathbf{E}^i = W^{,i} \mathbf{E}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.40)$$

Заметим, что на основании (3.32), первых двух соотношений (3.34), (3.38) и (3.40) приходим к равенствам

$$\begin{aligned} W_{,i} &= \overline{A}_{i,m} W^{,m} = \overline{A}_{i,m} W_{,m}, \quad W^{,i} = \overline{A}^{i,m} W_{,m} = \overline{A}_{i,m} W_{,m}, \\ W_{,i} &= A^{m,i} W_m = A_{m,i} W^m, \quad W^{,i} = A^{m,i} W_m = A_{m,i} W^m. \end{aligned}$$

Нетрудно усмотреть, что в рассматриваемом случае в силу (3.39) единичный тензор риманова пространства можно представить в форме

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_k \otimes \overline{\mathbf{A}}^k = \mathbf{A}^k \otimes \overline{\mathbf{A}}_k = \overline{\mathbf{A}}_k \otimes \mathbf{A}^k = \overline{\mathbf{A}}^k \otimes \mathbf{A}_k. \quad (3.41)$$

Отметим, что для любого базиса $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$ соотношение (3.41) определяет один и тот же тензор риманова многообразия.

Теперь рассмотрим случай модуля $M_p(\Omega)$ любого порядка p риманова пространства произвольной размерности. В этом случае по аналогии с (3.38) введем в рассмотрение мультибазисы

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{i_1 \dots i_p} &= \mathbb{E}_{i_1} \otimes \mathbb{E}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}_{i_p} = (\mathbb{A}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{k_p}) \overline{A}_{i_1}^{k_1} \dots \overline{A}_{i_p}^{k_p}, \\ \mathbb{E}^{i_1 \dots i_p} &= \mathbb{E}^{i_1} \otimes \mathbb{E}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^{i_p} = (\mathbb{A}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{k_p}) \overline{A}^{k_1, i_1} \dots \overline{A}^{k_p, i_p}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Пользуясь обозначениями (3.24) и (3.26), мультибазисы (3.42) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{i_1 \dots i_p} &= \mathbb{E}_{i_1} \otimes \mathbb{E}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}_{i_p} = \mathbb{A}_k \overline{A}^k,_{i_1 \dots i_p} = \mathbb{A}_{k_1 \dots k_p} \overline{A}^{k_1, i_1} \dots \overline{A}^{k_p, i_p}, \\ \mathbb{E}^{i_1 \dots i_p} &= \mathbb{E}^{i_1} \otimes \mathbb{E}^{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{E}^{i_p} = \mathbb{A}_k \overline{A}^{k, i_1 \dots i_p} = \mathbb{A}_{k_1 \dots k_p} \overline{A}^{k_1, i_1} \dots \overline{A}^{k_p, i_p}, \\ k &= \overline{1, n^p}, \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad k_1, \dots, k_p = \overline{1, n}.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Нетрудно заметить, что, если $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, то аналогичные (3.27) соотношения можно записать в форме

$$\mathbb{W} = W^{,i_1 \dots i_p} \mathbb{E}_{i_1 \dots i_p} = W_{,i_1 \dots i_p} \mathbb{E}^{i_1 \dots i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}.$$

Легко усмотреть, что внутреннее p -произведение мультибазисов $\mathbb{E}_{i_1 \dots i_p}$ и $\mathbb{E}^{j_1 \dots j_p}$ выражается соотношением

$$E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \equiv \mathbb{E}_{i_1 \dots i_p} \mathbb{E}^{j_1 \dots j_p} \equiv \mathbb{E}_{i_1 \dots i_p} \overset{p}{\otimes} \mathbb{E}^{j_1 \dots j_p} = A_{k, i_1 \dots i_p} \overline{A}^{k, j_1 \dots j_p}.\quad (3.44)$$

В рассматриваемом случае обобщением тензора (3.41), очевидно, будет тензор

$$\overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \mathbb{A}_k \otimes \overline{\mathbb{A}}^k = \overline{\mathbb{A}}^k \otimes \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p} \otimes \overline{\mathbb{A}}^{i_1 \dots i_p} = \overline{\mathbb{A}}^{i_1 \dots i_p} \otimes \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p},\quad (3.45)$$

где $\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ означает, что этот тензор — тензор ранга $2p$. О нем речь пойдет ниже.

4. ТЕНЗОРНЫЕ МОДУЛИ ЧЕТНОГО ПОРЯДКА. КОЛЬЦО С ЕДИНИЦЕЙ $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Для модулей четного порядка можно определить вторую бинарную операцию — произведение, которая превращает их в кольцо с единицей. Введем определение умножения двух тензоров из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Определение 4.1. Произведением тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется внутреннее p -произведение этих тензоров $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'$.

Легко доказать, что если \mathbb{W} , \mathbb{W}' и \mathbb{W}'' — тензоры из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'') &= (\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}') \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'', \\ (\mathbb{W} + \mathbb{W}') \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'' &= \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'' + \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'', \\ \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}' + \mathbb{W}'') &= \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' + \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}''.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Соотношения (4.1) доказывают, что $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является кольцом. Докажем, что оно имеет единицу. Пусть $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ — некий базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Докажем, что тензор ранга (3.45) $2p$ является единицей кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что смешанные компоненты этого тензора выражаются соотношениями (3.44). Докажем это еще иным путем, что позволит получить также дополнительные условия.

Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда в силу (3.18) его можно представить в виде

$$\mathbb{W} = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^k) \mathbb{A}_k = \mathbb{A}_k \overline{A}^{k, j_1 \dots j_p} W_{j_1 \dots j_p}.$$

Отсюда, в свою очередь, получаем, что ковариантные компоненты тензора \mathbb{W} удовлетворяют соотношениям

$$W_{i_1 \dots i_p} = A_{k, i_1 \dots i_p} \overline{A}^{k, j_1 \dots j_p} W_{k, j_1 \dots j_p}.$$

Так как эти соотношения имеют место для произвольного тензора \mathbb{W} , то в силу (3.44) получим

$$E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = A_{k, i_1 \dots i_p} \overline{A}^{k, j_1 \dots j_p} = A_{k_1 \dots k_p, i_1 \dots i_p} \overline{A}^{k_1 \dots k_p, j_1 \dots j_p} = g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_p}^{j_p}.\quad (4.2)$$

Очевидно, (4.2) сохраняет силу при жонглировании индексами.

Теперь докажем, что $\mathbb{E}^{(2p)}$ — единица кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В этой связи надо доказать, что если $\mathbb{W} \in M_{2p}(\Omega)$, то справедливо соотношение

$$\mathbb{W} = \mathbb{W} \otimes^p \mathbb{E}^{(2p)} = \mathbb{E}^{(2p)} \otimes^p \mathbb{W}. \quad (4.3)$$

Действительно, с помощью определения произведения и (4.2) соотношение (4.3) в компонентах можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} &= (\mathbb{W} \otimes^p \mathbb{E}^{(2p)})_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = W_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_p} g_{k_1}^{j_1} \dots g_{k_p}^{j_p}, \\ W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} &= (\mathbb{E}^{(2p)} \otimes^p \mathbb{W})_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = g_{i_1}^{k_1} \dots g_{i_p}^{k_p} W_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_p}. \end{aligned}$$

Эти соотношения доказывают (4.3). Таким образом, для любого базиса $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ тензор (3.45) является единицей кольца $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Не представляет труда доказать, что тензор (3.45) еще можно представить в виде

$$\mathbb{E}^{(2p)} = \mathbb{E}_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p} = \mathbb{E}^{i_1 \dots i_p} \mathbb{E}_{i_1 \dots i_p}, \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}. \quad (4.4)$$

В самом деле, в силу (3.43) и (4.2) компоненты инвариантной суммы $\mathbb{E}_{k_1 \dots k_p} \mathbb{E}^{k_1 \dots k_p}$ представляются в виде

$$(\mathbb{E}_{k_1 \dots k_p} \mathbb{E}^{k_1 \dots k_p})_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = g_{k_1 i_1} \dots g_{k_p i_p} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_p j_p} = g_{i_1}^{j_1} \dots g_{i_p}^{j_p},$$

что доказывает справедливость представления (4.4).

4.1. Алгебра $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Докажем, что кольцо $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является и банаховой алгеброй. С этой целью надо доказать, что для любых двух тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\mathbb{W} \otimes^p \mathbb{W}'\|_x \leq \|\mathbb{W}\|_x \|\mathbb{W}'\|_x, \quad x \in \Omega. \quad (4.5)$$

Докажем более общее неравенство, из которого (4.5) можно получить как частный случай. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ и $\mathbb{B} \in \mathbb{C}_{q+r}(\Omega)$. Рассмотрим их внутреннее r -произведение

$$(\mathbb{A} \otimes^r \mathbb{B})_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = A_{i_1 \dots i_p}^{k_1 \dots k_r} B_{k_1 \dots k_r}^{j_1 \dots j_q} \quad (4.6)$$

и докажем, что верно неравенство

$$\|\mathbb{A} \otimes^r \mathbb{B}\|_x \leq \|\mathbb{A}\|_x \|\mathbb{B}\|_x. \quad (4.7)$$

Заметим, что в левой и правой частях неравенства (4.7) фигурируют инвариантные выражения. В связи с этим достаточно доказать, что оно справедливо в каждой точке многообразия относительно локально декартовой системы координат.

Пусть x — фиксированная точка многообразия. Рассмотрим локально декартову систему координат, относительно которой имеем $(g_{ij})_x = \delta_{ij}$. Тогда $(g^{ij})_x = \delta^{ij}$ и, очевидно, компоненты всех типов любого тензора в точке x одинаковы. Поэтому соотношение (4.6) в точке x можно представить в виде

$$(\mathbb{A} \otimes^r \mathbb{B})_{ij} = \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj}.$$

Здесь $i = \mathfrak{N}_p(i_1, \dots, i_p)$, $j = \mathfrak{N}_q(j_1, \dots, j_q)$, $i = \overline{1, n^p}$, $j = \overline{1, n^q}$. Нетрудно заметить, что из последнего соотношения получаем

$$\|\mathbb{A} \otimes^r \mathbb{B}\|_x^2 = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{j=1}^{n^q} \left| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \right|_x^2. \quad (4.8)$$

На основании неравенства Коши—Буняковского имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} B_{kj} \right|_x^2 \leq \left| \sum_{k=1}^{n^r} A_{ik} \right|_x^2 \left| \sum_{k=1}^{n^r} B_{kj} \right|_x^2.$$

С помощью этого неравенства из (4.8) находим

$$\|\mathbb{A} \otimes^r \mathbb{B}\|_x^2 \leq \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|_x^2 \sum_{j=1}^{n^q} \sum_{k=1}^{n^r} |B_{kj}|_x^2. \quad (4.9)$$

Учитывая, что относительно локально декартовой системы координат для любого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+r}(\Omega)$ имеем

$$\|\mathbb{A}\|_x^2 = A_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r} \overline{A^{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_r}} = \sum_{i=1}^{n^p} \sum_{k=1}^{n^r} |A_{ik}|_x^2,$$

из (4.9) следует

$$\|\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}\|_x^2 \leq \|\mathbb{A}\|_x^2 \|\mathbb{B}\|_x^2, \quad x \in \Omega,$$

откуда следует (4.7). Итак, доказана справедливость неравенства (4.5) и этим установлено, что $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является алгеброй.

4.2. Мультипликативная группа M_{2p} . Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. С целью сокращения письма введем обозначение

$$W_{i \cdot}^{\cdot j} = W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p},$$

где $i = \mathbb{N}_0\{i_1, \dots, i_p\}$, $j = \mathbb{N}_0\{j_1, \dots, j_p\}$, $i, j = \overline{1, n^p}$. Нетрудно доказать, что детерминант порядка n^p

$$\det \mathbb{W} = \det(W_{i \cdot}^{\cdot j}), \quad i, j = \overline{1, n^p}$$

является скаляром (инвариантом).

В самом деле, с помощью компонент дискриминантного тензора детерминант можно представить в виде

$$\det \mathbb{W} = \det(W_{m \cdot}^{\cdot n}) = \frac{1}{n^p!} C_{i_1, \dots, i_{n^p}} C^{j_1 \dots j_{n^p}} W_{j_1 \cdot}^{\cdot i_1} \dots W_{j_{n^p} \cdot}^{\cdot i_{n^p}}. \quad (4.10)$$

Из этого представления видно, что правая часть инвариантна при переходе от одной системы координат к другой, так как по зацепленным в правой части (4.10) индексам преобразования производятся контраградиентно.

Докажем это еще другим путем. При переходе от одной системы координат к другой имеем

$$W_{i \cdot}^{\cdot j} = W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = D_{i_1}^{i'_1} \dots D_{i_p}^{i'_p} D_{j'_1}^{j_1} \dots D_{j'_p}^{j_p} W_{i'_1 \dots i'_p}^{j'_1 \dots j'_p}.$$

Это соотношение можно записать в краткой форме

$$W_{i \cdot}^{\cdot j} = D_{i \cdot}^{i'} D_{j'}^j W_{i'}^{\cdot j'}, \quad (4.11)$$

где введены обозначения

$$D_{i \cdot}^{i'} = D_{i_1}^{i'_1} \dots D_{i_p}^{i'_p}, \quad D_{j'}^j = D_{j'_1}^{j_1} \dots D_{j'_p}^{j_p}.$$

Здесь i, i' и j, j' принимают значения $1, \dots, n^p$. Учитывая, что детерминант произведения квадратных матриц равен произведению детерминантов этих матриц, из (4.11) получим

$$\det W_{i \cdot}^{\cdot j} = \det D_{i'}^{i'} \det D_{j'}^j \det W_{i'}^{\cdot j'}. \quad (4.12)$$

Следовательно,

$$D_{i'}^i D_{j'}^j = D_{i_1}^{i'_1} D_{j'_1}^{j_1} \dots D_{i_p}^{i'_p} D_{j'_p}^{j_p} = \delta_{j'_1}^{i_1} \dots \delta_{j'_p}^{i_p} = \delta_j^i,$$

откуда находим

$$\det(D_{i'}^i D_{j'}^j) = \det(D_{i'}^{i'}) \det(D_{j'}^j) = \det(\delta_j^i) = 1.$$

В силу последнего соотношения из (4.12) будем иметь

$$\mathbb{W} = \det(W_{i \cdot}^{\cdot j}) = \det(W_{i'}^{\cdot j'}),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $\det \mathbb{W}$ является инвариантной характеристикой (инвариантом) тензора \mathbb{W} алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно доказать справедливость соотношения

$$\det(\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}') = \det \mathbb{W} \det \mathbb{W}', \quad \mathbb{W}, \mathbb{W}' \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega). \quad (4.13)$$

Действительно,

$$(\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}')_{i \cdot}^{\cdot j} = (\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}')_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = W'_{i_1 \dots i_p}{}^{k_1 \dots k_p} W_{k_1 \dots k_p}^{j_1 \dots j_p} = W_{i \cdot}^{\cdot k} W'_{k \cdot}^{\cdot j}.$$

Отсюда с учетом того, что детерминант произведения матриц равняется произведению детерминантов этих матриц, получаем (4.13).

Теперь введем несколько определений.

Определение 4.2. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через \mathbb{W}_\times и вычисляемый по формуле

$$\mathbb{W}_\times = W_{\times \cdot j}^{i \cdot} A_i \otimes A^j = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W} = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i \cdot}^{j \cdot}} A_i \otimes A^j, \quad (4.14)$$

$$i, j = \overline{1, n^p}, \quad i = \mathfrak{N}_0(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathfrak{N}_0(j_1, \dots, j_p),$$

называется тензором алгебраических дополнений $(2p)$ -го ранга и $n^p - 1$ порядка тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Следовательно, компоненты тензора алгебраических дополнений $(2p)$ -го ранга и $n^p - 1$ порядка — алгебраические дополнения $n^p - 1$ порядка определителя матрицы компонент тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Видно, что тензор (4.14) можно представить в развернутой форме

$$W_\times = W_{\times \cdot j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_p} \otimes A^{j_1} \otimes \dots \otimes A^{j_p} = \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}} A_{i_1} \otimes \dots \otimes A_{i_p} \otimes A^{j_1} \otimes \dots \otimes A^{j_p},$$

$$i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}.$$

Определение 4.3. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через \mathbb{M} и вычисляемый по формуле

$$\mathbb{M} = M_{\cdot j}^{i \cdot} A_i \otimes A^j = \sum_{i, j=1}^{n^p} (-1)^{i+j} \frac{\partial \det \mathbb{W}}{\partial W_{i \cdot}^{j \cdot}} A_i \otimes A^j, \quad (4.15)$$

$$i = \mathfrak{N}_0(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathfrak{N}_0(j_1, \dots, j_p), \quad i, j = \overline{1, n^p},$$

называется *тензором миноров* $(2p)$ -го ранга и $n^p - 1$ порядка тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Очевидно, компоненты тензора миноров $(2p)$ -го ранга и $n^p - 1$ порядка представляют миноры $n^p - 1$ порядка (опредетителя) матрицы компонент тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Ниже в третьей главе даются определения тензора и расширенного тензора миноров, а также тензора и расширенного тензора алгебраических дополнений более высокого ранга и меньшего порядка для действительного тензора $(2p)$ -го ранга.

Определение 4.4. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через \mathbb{W}^T и определенный формулой

$$\mathbb{W}^T = (W_{i \cdot}^{j \cdot} A^i \otimes A_j)^T = W_{i \cdot}^{j \cdot} A_j \otimes A^i = W_{i \cdot}^{j \cdot} A^i \otimes A_j =$$

$$= W_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} A_{j_1} \otimes \dots \otimes A_{j_p} \otimes A^{i_1} \otimes \dots \otimes A^{i_p},$$

$$i, j = \overline{1, n^p}, \quad i = \mathfrak{N}_0(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathfrak{N}_0(j_1, \dots, j_p), \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

называется *транспонированным* с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 4.5. Тензор, обозначаемый через $\widetilde{\mathbb{W}}$ и получающийся из тензора алгебраических дополнений $(2p)$ -го ранга и $n^p - 1$ порядка с помощью операции транспонирования, называется *союзным (присоединенным)* с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 4.6. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через \mathbb{W}^* и вычисляемый по формуле $\mathbb{W}^* = \overline{\mathbb{W}}^T$, называется *сопряженным* с $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тензором (или тензор $\mathbb{W}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, комплексно-сопряженный с транспонированным к $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, называется сопряженным с \mathbb{W}).

Определение 4.7. Тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется *унитарным*, если обратный к нему совпадает со своим сопряженным.

Итак, если \mathbb{W} — унитарный тензор, то $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$.

Отметим основные свойства унитарных тензоров, аналогичные свойствам ортогональных тензоров.

1. Унитарность $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ влечет унитарность \mathbb{W}^{-1} . Действительно, $\mathbb{W}^{-1} = \mathbb{W}^*$, а унитарность

$$\mathbb{W}^* \text{ следует из равенства } \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}.$$

2. Произведение унитарных тензоров — унитарный тензор. В самом деле,

$$\mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 \overset{p}{\otimes} (\mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2)^* = \mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1^* = \mathbb{W}_1 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}.$$

3. Единичный тензор — унитарный тензор. Действительно, $\overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}^*} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Эти свойства означают, что унитарные тензоры образуют группу.
4. Модуль определителя унитарного тензора равен единице. В самом деле,

$$\det(\overset{p}{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}^*}) = \det \overset{p}{\mathbb{W}} \det \overset{p}{\mathbb{W}^*} = \det \overset{p}{\mathbb{W}} \overline{\det \overset{p}{\mathbb{W}}} = |\det \overset{p}{\mathbb{W}}|^2 = \overset{(2p)}{\det \mathbb{E}} = 1, \text{ т. е. } |\det \overset{p}{\mathbb{W}}| = 1.$$

Определение 4.8. Если тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ совпадает со своим транспонированным ($\overset{p}{\mathbb{W}^T} = \overset{p}{\mathbb{W}}$), то такой тензор называется симметричным.

Определение 4.9. Тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, который совпадает со своим сопряженным ($\overset{p}{\mathbb{W}^*} = \overset{p}{\mathbb{W}}$), называется эрмитовым или самосопряженным.

Заметим, что диагональные элементы эрмитова тензора вещественны.

Определение 4.10. Тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, который равен своему транспонированному с обратным знаком ($\overset{p}{\mathbb{W}^T} = -\overset{p}{\mathbb{W}}$), называется кососимметричным.

Диагональные элементы кососимметричного тензора равны нулю.

Определение 4.11. Тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется нормальным, если он коммутирует со своим сопряженным ($\overset{p}{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}^*} = \overset{p}{\mathbb{W}^*} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}}$).

Заметим, что эрмитов тензор и унитарный тензор являются частными случаями нормального тензора.

На основании (4.10) и (4.14) нетрудно доказать, что союзный тензор $\widetilde{\overset{p}{\mathbb{W}}}$ удовлетворяет соотношению

$$\overset{p}{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \widetilde{\overset{p}{\mathbb{W}}} = \widetilde{\overset{p}{\mathbb{W}}} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \det \overset{p}{\mathbb{W}}. \quad (4.16)$$

Определение 4.12. Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый через $\overset{p}{\mathbb{W}^{-1}}$ и удовлетворяющий соотношению

$$\overset{p}{\mathbb{W}} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}^{-1}} = \overset{p}{\mathbb{W}^{-1}} \overset{p}{\otimes} \overset{p}{\mathbb{W}} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \quad (4.17)$$

называется обратным для тензора $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Приведем теорему о существовании и единственности обратного тензора для тензора четного ранга.

Теорема 4.1. Для того, чтобы тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}(\Omega)$ имел единственный обратный, необходимо и достаточно, чтобы его детерминант был отличен от нуля.

Доказательство этой теоремы, которое ничем не отличается от доказательства соответствующей теоремы для матриц [73], можно найти в [5].

Определение 4.13. Тензор $\overset{p}{\mathbb{W}} \in \mathbb{C}(\Omega)$ называется неособенным (невыврожденным) в точке, если $\det \overset{p}{\mathbb{W}} \neq 0$ в этой точке. Если это условие выполняется во всей области Ω , то тензор называется неособенным в области Ω .

С помощью (4.16) и (4.17) заключаем, что если $\det \overset{p}{\mathbb{W}} \neq 0$, то обратный для $\overset{p}{\mathbb{W}}$ тензор имеет вид

$$\overset{p}{\mathbb{W}^{-1}} = \frac{1}{\det \overset{p}{\mathbb{W}}} \widetilde{\overset{p}{\mathbb{W}}}.$$

Учитывая (4.13), из (4.17) получаем

$$\det \overset{p}{\mathbb{W}} \det \overset{p}{\mathbb{W}^{-1}} = 1.$$

Нетрудно показать, что имеют место следующие свойства:

1. $(\overset{p}{\mathbb{A}} + \overset{p}{\mathbb{B}})^T = \overset{p}{\mathbb{A}}^T + \overset{p}{\mathbb{B}}^T, \quad (\overset{p}{\mathbb{A}} + \overset{p}{\mathbb{B}})^* = \overset{p}{\mathbb{A}}^* + \overset{p}{\mathbb{B}}^*,$
2. $(\lambda \overset{p}{\mathbb{A}})^T = \lambda \overset{p}{\mathbb{A}}^T, \quad (\lambda \overset{p}{\mathbb{A}})^* = \bar{\lambda} \overset{p}{\mathbb{A}}^*,$
3. $(\overset{p}{\mathbb{A}} \overset{p}{\mathbb{B}})^T = \overset{p}{\mathbb{B}}^T \overset{p}{\mathbb{A}}^T, \quad (\overset{p}{\mathbb{A}} \overset{p}{\mathbb{B}})^* = \overset{p}{\mathbb{B}}^* \overset{p}{\mathbb{A}}^*,$
4. $(\overset{p}{\mathbb{A}}^{-1})^T = (\overset{p}{\mathbb{A}}^T)^{-1}, \quad (\overset{p}{\mathbb{A}}^{-1})^* = (\overset{p}{\mathbb{A}}^*)^{-1},$
5. $(\overset{p}{\mathbb{A}}^T)^T = \overset{p}{\mathbb{A}}, \quad (\overset{p}{\mathbb{A}}^*)^* = \overset{p}{\mathbb{A}}.$

В силу свойств третьей строки (4.18) легко доказать справедливость утверждения.

Утверждение 4.1. Произведение в смысле алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ двух симметричных (эрмитовых) тензоров является симметричным (эрмитовым) тогда и только тогда, когда эти тензоры перестановочны между собой.

Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — вещественный тензор, то $\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^T$. Следовательно, эрмитов вещественный тензор всегда является симметричным. Следует заметить, что с каждым тензором $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ связаны два эрмитова тензора $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ и два симметричных тензора $\mathbb{A}\mathbb{A}^T$ и $\mathbb{A}^T\mathbb{A}$.

Обозначим через M_{2p} множество невырожденных тензоров алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Если $\mathbb{W} \in M_{2p}$ и $\mathbb{W}' \in M_{2p}$, то $\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}' \in M_{2p}$, так как на основании (4.13) имеем

$$\det(\mathbb{W} \otimes \mathbb{W}') = \det \mathbb{W} \det \mathbb{W}' \neq 0.$$

Легко доказать, что M_{2p} является мультипликативной группой с единицей $\overset{(2p)}{\mathbb{E}}$.

Любой элемент группы M_{2p} можно использовать для представления тензоров модуля $M_p(\Omega)$ n -мерного риманова пространства. Действительно, пусть $\mathbb{A} \in M_{2p}$. Тогда для любого тензора $\mathbb{W} \in M_p$ имеем

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}, \quad \text{где} \quad \mathbb{W}' = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^{-1},$$

или

$$\mathbb{W} = \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}'', \quad \text{где} \quad \mathbb{W}'' = \mathbb{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}.$$

Заметим, что произведения вида $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ или $\mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}$, где $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{W} \in M_p(\Omega)$, осуществляют отображения $M_p(\Omega) \rightarrow M_p(\Omega)$, т. е. они являются эндоморфизмами модуля $M_p(\Omega)$. Если $\mathbb{A} \in M_{2p}$, то эти отображения являются автоморфизмами.

5. ЗАДАЧА О НАХОЖДЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРОВ ТЕНЗОРА РАНГА $2p$

Поставим следующую задачу:

Пусть \mathbb{A} — некоторый тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Найти все тензоры \mathbb{W} модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \tag{5.1}$$

где λ — скаляр.

Уравнение (5.1) всегда имеет тривиальное решение $\mathbb{W} = 0$. В дальнейшем, говоря о решении уравнения (5.1), будем иметь в виду только нетривиальные решения $\mathbb{W} \neq 0$. Итак, наша цель заключается в изучении условий существования нетривиальных решений уравнения (5.1) и указании способов их построения.

Если для некоторого скаляра λ уравнение (5.1) имеет решение $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то λ называется собственным значением тензора \mathbb{A} , а \mathbb{W} — правым собственным¹ тензором, соответствующим собственному значению λ .

Следовательно, можно рассмотреть и следующую задачу: найти все тензоры \mathbb{W}' модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \mu \mathbb{W}', \tag{5.2}$$

где μ — скаляр.

Если уравнение (5.2) для некоторого скаляра μ имеет нетривиальное решение $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, то μ называется собственным числом тензора \mathbb{A} , а \mathbb{W}' — левым собственным тензором, соответствующим собственному значению μ . Далее в основном речь пойдет о правом собственном тензоре, ибо для левого собственного тензора все подобные вопросы рассматриваются аналогично.

Заметим, что если \mathbb{W} — решение уравнения (5.1) для некоторого скаляра λ , то $\alpha \mathbb{W}$, где α — произвольный скаляр, также будет его решением. Очевидно, всегда можно выбрать скаляр α так, чтобы удовлетворить условию

$$\|\alpha \mathbb{W}\|_x = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

¹В [4] дано понятие собственного элемента и вводятся инварианты подобия эндоморфизма. Доказывается теорема Гамильтона—Кэли и т.п. При рассмотренном в [4] подходе многие известные результаты матричной алгебры [7] нетрудно перенести на случай пространств эндоморфизмов, порожденных тензорами четного ранга. Ниже рассмотрены некоторые подчиняющиеся подобному переносу вопросы.

В самом деле, для этого достаточно положить $\alpha = (\|\mathbb{W}\|_x)^{-1}$. Таким образом, решение уравнения (5.1) всегда можно нормировать условием

$$\|\mathbb{W}\|_x = 1, \quad x \in \Omega. \quad (5.3)$$

В этой связи в дальнейшем все время будем иметь в виду нормированные решения уравнения (5.1).

Если для собственного значения λ уравнение (5.1) имеет k линейно независимых решений $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$, то их линейная комбинация $\alpha_1 \mathbb{W}_1 + \dots + \alpha_k \mathbb{W}_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — произвольные скаляры, также будет решением. Эти решения в силу теоремы 3.3 можно ортонормировать и полагать, что выполнены условия

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = W_{i,k_1,\dots,k_p} \overline{W}_{j,k_1,\dots,k_p} = \delta_{ij}. \quad (5.4)$$

Пусть \mathbb{W} — решение уравнения (5.1) для некоторого собственного значения λ . Умножая обе части уравнения (5.1) на комплексно-сопряженный тензор $\overline{\mathbb{W}}$ и учитывая (5.3), получим

$$\lambda = \overline{\mathbb{W}} \otimes \mathbb{A} \otimes \mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}} \mathbb{A} \mathbb{W} = \overline{W}^{i_1 \dots i_p} A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} W^{j_1 \dots j_p}. \quad (5.5)$$

Правая часть этого равенства инвариантна относительно преобразований координат. Отсюда заключаем, что всякое собственное значение тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если такое существует, является скаляром (инвариантом). Учитывая, что $\mathbb{W} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \otimes \mathbb{W} \equiv \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \mathbb{W}$, уравнение (5.1) можно представить в виде

$$(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \mathbb{W} = 0 \quad ((\mathbb{A} - \lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}) \mathbb{W} = 0). \quad (5.6)$$

Нетрудно заметить, что в компонентах (5.6) можно записать в форме

$$(\lambda E_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} - A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}) W_{j_1 \dots j_p} = 0, \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

или коротко можно представить еще так:

$$(\lambda \delta_i^j - A_i^j) W_j = 0, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \quad (5.7)$$

Отсюда заключаем, что система уравнений (5.7) (тензорное уравнение (5.1)) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда выполняется условие

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = 0. \quad (5.8)$$

В виде (5.8) получили уравнение, которое инвариантно относительно преобразований координат, так как, как было доказано выше, детерминант тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ инвариант. Заметим, что

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \det(\lambda \delta_i^j - A_i^j)$$

является детерминантом порядка n^p . Поэтому, представив уравнение (5.8) в развернутом виде, получим алгебраическое уравнение относительно λ степени n^p

$$\det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \lambda^{n^p} - a_1 \lambda^{n^p-1} + a_2 \lambda^{n^p-2} + \dots + (-1)^{n^p-1} a_{n^p-1} \lambda + (-1)^{n^p} a_{n^p} = 0, \quad (5.9)$$

где a_1, \dots, a_{n^p} — скаляры, которые зависят от инвариантов тензора \mathbb{A} . Нетрудно заметить, что, исходя из (5.2), получим те же самые соотношения (5.8) и (5.9) относительно μ . Отсюда следует, что $\lambda = \mu$. Для левых и правых собственных тензоров собственные значения одинаковы. Вычислим a_1 и a_{n^p} , где a_1 — коэффициент при λ^{n^p-1} в определителе $\det(\lambda \delta_i^j - A_i^j)$. Параметр λ входит, причем в первой степени, только в диагональные элементы этого определителя. Следовательно, каждое слагаемое определителя, содержащее λ^{n^p-1} , имеет в качестве сомножителей по крайней мере n^p-1 диагональных элементов, но тогда и последний сомножитель тоже должен быть диагональным элементом. Таким образом, коэффициент при λ^{n^p-1} равен коэффициенту при λ^{n^p-1} в полиноме (слагаемом определителя) $(\lambda - A_1^1)(\lambda - A_2^2) \dots (\lambda - A_{n^p}^{n^p})$, т. е. равен $(A_1^1 + A_2^2 + \dots + A_{n^p}^{n^p})$. Следовательно,

$$a_1 = I_1(\mathbb{A}) = \text{tr} \mathbb{A} = A_i^i = A_{i_1 \dots i_p}^{i_1 \dots i_p},$$

где $I_1(\mathbb{A})$ обозначает первый инвариант тензора \mathbb{A} , а $\text{tr} \mathbb{A}$ — след тензора \mathbb{A} .

Для подсчета свободного члена a_{n^p} в (5.9) положим $\lambda = 0$. Тогда получим $(-1)^{n^p} a_{n^p} = \det(-\mathbb{A}) = (-1)^{n^p} \det \mathbb{A}$, откуда $a_{n^p} = \det \mathbb{A}$. Остальные коэффициенты тоже можно подсчитать, но это несколько сложнее. О них речь пойдет ниже.

Определение 5.1. Тензор $\lambda \mathbb{E}^{(2p)} - \mathbb{A}$ называется *характеристическим тензором* для тензора \mathbb{A} . Полином $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{E}^{(2p)} - \mathbb{A})$ называется *характеристическим полиномом*, а уравнение $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{E}^{(2p)} - \mathbb{A}) = 0$ — *характеристическим уравнением* тензора \mathbb{A} .

Заметим, что характеристический полином и характеристическое уравнение тензора \mathbb{A} не зависят от выбора системы координат. Если $\det \mathbb{A} \neq 0$, то уравнение (5.9) не имеет корней, равных нулю. Другими словами, если тензор $\mathbb{A} \in M_{2p}$, то все его собственные значения отличны от нуля. Если же $\det \mathbb{A} = 0$, то уравнение (5.9) имеет хотя бы один корень, равный нулю. Следует заметить, что так как тензор \mathbb{A} тождественно не равен нулю, то уравнение (5.9) всегда имеет и ненулевые корни, т. е. тензор \mathbb{A} всегда имеет ненулевые собственные значения.

Допустим, что $\det \mathbb{A} \neq 0$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^p}$ — корни уравнения (5.9), которые, конечно, отличны от нуля. Среди этих корней некоторые (или все) могут быть кратными. Всякий корень алгебраического уравнения считается корнем столько раз, какова его кратность. Корни уравнения (5.9), вообще говоря, являются комплексными. Если λ — корень уравнения (5.9) кратности $k \leq n^p$, то однородная система уравнений (5.7) может иметь k линейно независимых решений $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$, и все они являются тензорами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Кроме того, эту систему решений, как было сказано выше, всегда можно считать ортонормальной.

Утверждение 5.1. Если λ и λ' — два различных собственных значения тензора \mathbb{A} , то соответствующие им любые два собственных тензора \mathbb{W} и \mathbb{W}' линейно независимы.

Доказательство. Допустим противное, т. е. $\mathbb{W} = \alpha \mathbb{W}'$, где α — скаляр. Тогда имеем

$$\lambda \mathbb{W} = \mathbb{A} \mathbb{W} = \alpha \mathbb{A} \mathbb{W}' = \alpha \lambda' \mathbb{W}' = \lambda' \mathbb{W},$$

ибо $\mathbb{W} \neq 0$, поэтому отсюда следует, что $\lambda = \lambda'$. Получили противоречие. Тем самым утверждение доказано. \square

Теорема 5.1. Собственные тензоры тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующие попарно различным характеристическим числам, линейно независимы.

Эту теорему, используя утверждение 5.1, можно доказать методом математической индукции.

Теорема 5.2. Если $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3, \dots$ — собственные тензоры из $\mathbb{C}_p(\Omega)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующие одному и тому же собственному значению λ , то их линейная комбинация $C_1 \mathbb{W}_1 + C_2 \mathbb{W}_2 + C_3 \mathbb{W}_3 + \dots$ либо равна нулю, либо также является собственным тензором тензора \mathbb{A} при том же числе λ .

Доказательство. В самом деле, из $\mathbb{A} \mathbb{W}_k = \lambda \mathbb{W}_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, следует равенство

$$\mathbb{A}(C_1 \mathbb{W}_1 + C_2 \mathbb{W}_2 + C_3 \mathbb{W}_3 + \dots) = \lambda(C_1 \mathbb{W}_1 + C_2 \mathbb{W}_2 + C_3 \mathbb{W}_3 + \dots),$$

что доказывает теорему. \square

Следовательно, линейно независимые собственные тензоры, соответствующие одному и тому же собственному числу λ , образуют базис собственного подмодуля, каждый тензор которого есть собственный тензор при том же λ . В частности, каждый собственный тензор порождает одномерный собственный подмодуль.

Следует заметить, что линейная комбинация собственных тензоров тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, соответствующих различным характеристическим числам, вообще говоря, не будет собственным тензором тензора \mathbb{A} .

Определение 5.2. Два тензора \mathbb{A} и \mathbb{B} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, связанные соотношением

$$\mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{T}, \quad (5.10)$$

где \mathbb{T} — некоторый невырожденный тензор, называются *подобными*.

Легко усмотреть, что отношение подобия между тензорами модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является отношением эквивалентности, т. е. имеют место три свойства подобия тензоров: рефлексивность (тензор \mathbb{A} всегда подобен самому себе), симметричность (если \mathbb{A} подобен \mathbb{B} , то и \mathbb{B} подобен \mathbb{A}), транзитивность (если \mathbb{A} подобен \mathbb{B} и \mathbb{B} подобен \mathbb{D} , то \mathbb{A} подобен \mathbb{D}).

Из (5.10) следует, что подобные тензоры имеют всегда равные детерминанты. Действительно,

$$\det \mathbb{B} = (\det \mathbb{T}^{-1}) \det \mathbb{A} \det \mathbb{T} = \det \mathbb{A}.$$

Равенство детерминантов $\det \mathbb{B} = \det \mathbb{A}$ является необходимым, но не достаточным условием для подобия тензоров \mathbb{A} и \mathbb{B} .

Нетрудно заметить, что в силу (5.10) получаем

$$\lambda \mathbb{E} - \mathbb{B} = \mathbb{T}^{-1} \otimes (\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}) \otimes \mathbb{T}.$$

Отсюда в свою очередь находим

$$\det(\lambda \mathbb{E} - \mathbb{B}) = \det(\lambda \mathbb{E} - \mathbb{A}).$$

Таким образом, подобные тензоры имеют один и тот же характеристический многочлен (одно и то же характеристическое уравнение), а также одни и те же собственные значения.

Не представляет большого труда выписать выражения для коэффициентов характеристического уравнения с помощью собственных значений тензора \mathbb{A} . В самом деле, воспользовавшись теоремой Виета [60], будем иметь

$$\begin{aligned} I_1(\mathbb{A}) &\equiv a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_{n^p}, \\ I_2(\mathbb{A}) &\equiv a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_1\lambda_{n^p} + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \dots + \lambda_2\lambda_{n^p} + \\ &\quad + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \dots + \lambda_3\lambda_{n^p} + \dots + \lambda_{n^p-1}\lambda_{n^p}, \\ &\dots\dots\dots \\ I_{n^p-1}(\mathbb{A}) &\equiv a_{n^p-1} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n^p-1} + \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n^p-2}\lambda_{n^p} + \dots + \lambda_2\lambda_3\dots\lambda_{n^p}, \\ I_{n^p}(\mathbb{A}) &\equiv a_{n^p} = \lambda_1\lambda_2\dots\lambda_{n^p-1}\lambda_{n^p}. \end{aligned}$$

Здесь $I_k(\mathbb{A})$, $k = \overline{1, n^p}$, обозначает инвариант k -го порядка тензора \mathbb{A} . Итак, тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $\det \mathbb{A} \neq 0$, имеет n^p линейно независимых алгебраических инвариантов.

В заключение отметим, что корни $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^p}$ уравнения (5.9) и только они являются собственными значениями тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Этим корням соответствуют n^p собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$, которые линейно независимы и нормированы. Эта система тензоров, вообще говоря, не ортогональна, но каждая ее подсистема, которая состоит из собственных тензоров, соответствующих какому-нибудь кратному собственному значению, ортонормальна.

5.1. Приведение к каноническому виду (главным осям) тензора ранга $2p$. Прежде всего отметим, что имеет место утверждение.

Утверждение 5.2. *Если система тензоров $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$ линейно независима, то система тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \dots, \overline{\mathbb{W}}_k$ также линейно независима.*

Из этого утверждения и сказанного в конце предыдущего пункта следует справедливость утверждения.

Утверждение 5.3. *Система собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а также система тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \dots, \overline{\mathbb{W}}_{n^p}$ (по отдельности) составляют базисы модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.*

На основании этого утверждения и теоремы 3.5 можно доказать утверждение.

Утверждение 5.4. *Системы мультитензоров*

$$\mathbb{W}_i \otimes \mathbb{W}_j, \quad \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad \overline{\mathbb{W}}_i \otimes \mathbb{W}_j, \quad \overline{\mathbb{W}}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad i, j = \overline{1, n^p},$$

где $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ — система собственных тензоров тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, являются базисами (каждая в отдельности) алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

В силу этого утверждения, очевидно, всякий тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить в виде

$$\mathbb{A} = A^i_j \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \tag{5.11}$$

Учитывая (5.11) в уравнениях

$$\mathbb{A} \mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad < k = \overline{1, n^p} >,$$

находим

$$A^i_j(\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j)\mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \langle k = \overline{1, n^p} \rangle.$$

Отсюда, учитывая, что

$$(\mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}^j)\mathbb{W}_k = \mathbb{W}_i(\overline{\mathbb{W}}^j \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k) = \mathbb{W}_i(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}^j) = \mathbb{W}_i \delta_k^j,$$

получим

$$A^i_k \mathbb{W}_i = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \langle k = \overline{1, n^p} \rangle.$$

Из этого соотношения в силу линейной независимости тензоров \mathbb{W}_k будем иметь

$$A^i_k = \lambda_k \delta_k^i, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad \langle k = \overline{1, n^p} \rangle.$$

Теперь на основании последнего соотношения (5.11) представится в виде

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \quad (5.12)$$

Соотношение (5.12), очевидно, в компонентах можно записать в форме

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k W_{k, i_1 \dots i_p} \overline{W}^{k, j_1 \dots j_p}. \quad (5.13)$$

Соотношения (5.12) или (5.13) важны для выявления структуры каждого тензора \mathbb{A} алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В частности, всякий тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ выражается через инвариантные характеристики этого тензора — собственные значения λ_k и соответствующие им собственные тензоры. Представление тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в виде (5.12) называется приведением этого тензора к каноническому виду (главным осям). Оно имеет большое применение в различных областях математики и механики.

Теперь рассмотрим случай, когда несколько собственных значений тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ равны нулю. Очевидно, все собственные значения тензора не могут быть нулями, ибо тогда мы имели бы тривиальный случай $\mathbb{A} = 0$.

Нетрудно заметить, что $\det \mathbb{A}$ равняется произведению собственных значений тензора \mathbb{A} , т. е.

$$\det \mathbb{A} = a_{n^p} = \lambda_1 \dots \lambda_{n^p}. \quad (5.14)$$

Очевидно, (5.14) получается еще по теореме Виета. Из (5.14) следует, что некоторые собственные значения тензора \mathbb{A} равны нулю тогда и только тогда, когда $\det \mathbb{A} = 0$. Пусть r — ранг детерминанта $\det \mathbb{A}$ (ранг матрицы компонент тензора \mathbb{A}), который, конечно, является скалярной характеристикой тензора \mathbb{A} . Тогда однородная система уравнений

$$A_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} W_{j_1 \dots j_p} = 0 \quad (A_i^j W_j = 0), \\ i, j = \overline{1, n^p}, \quad i = \mathfrak{N}_0(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathfrak{N}_0(j_1, \dots, j_p), \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n^p},$$

имеет r линейно независимых решений $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_r$. При этом в силу сказанного в конце предыдущего пункта эта система тензоров, являющихся тензорами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, ортонормальна. Очевидно, в рассматриваемом случае кратность собственного значения $\lambda = 0$ равна рангу r определителя $\det \mathbb{A}$. Предположим, что

$$\lambda_{n^p-r+1} = \lambda_{n^p-r+2} = \dots = \lambda_{n^p} = 0, \quad \lambda_i \neq 0, \quad \text{если } i = \overline{1, n^p-r}.$$

В таком случае соотношение (5.12) получит вид

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p-r} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k.$$

Следует заметить, что собственные тензоры \mathbb{W}_k , $k = \overline{1, n^p-r}$, соответствующие ненулевым собственным значениям, не образуют полного базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Для того, чтобы получить полный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, к ним следует добавить r тензоров $\mathbb{W}'_1, \dots, \mathbb{W}'_r$, являющихся нетривиальными решениями однородного уравнения $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = 0$.

Таким образом, собственные тензоры тензора \mathbb{A} алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ образуют базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, а их парные прямые произведения являются базисом алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теперь рассмотрим важный частный случай, когда тензор \mathbb{A} удовлетворяет условию

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \overline{A}_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p} \quad (\mathbb{A} = \mathbb{A}^*), \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}. \quad (5.15)$$

Тогда для любых двух тензоров \mathbb{W} и $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ имеем

$$\overline{\mathbb{W}'} \mathbb{A} \mathbb{W} = \overline{\mathbb{W}'}^{i_1 \dots i_p} A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} W^{j_1 \dots j_p} = W^{j_1 \dots j_p} \overline{A}_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p} \overline{\mathbb{W}'}^{i_1 \dots i_p} = \mathbb{W} \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}'}. \quad (5.16)$$

Итак, получим инвариантное относительно преобразований координат равенство

$$\overline{\mathbb{W}'} \mathbb{A} \mathbb{W} = \mathbb{W} \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}'}. \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что условие (5.15) выражает инвариантное свойство тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тензоры алгебры, обладающие этим свойством, называются эрмитовыми. В случае действительного (вещественного) тензора эрмитовость означает симметричность вида

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = A_{j_1 \dots j_p i_1 \dots i_p}.$$

Допустим, \mathbb{A} — эрмитов тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, λ — его собственное значение, а \mathbb{W} — соответствующий собственный тензор. Тогда, конечно, будем иметь

$$\mathbb{A} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \quad \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}} = \overline{\lambda \mathbb{W}}. \quad (5.17)$$

Умножая первое соотношение (5.17) на $\overline{\mathbb{W}}$, второе — на \mathbb{W} , а затем из одного вычитая другое, в силу (5.3) и (5.16) получим

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \mathbb{W} \overline{\mathbb{W}} = (\lambda - \overline{\lambda}) (\mathbb{W}, \mathbb{W}) = \lambda - \overline{\lambda} = \overline{\mathbb{W}} \mathbb{A} \mathbb{W} - \mathbb{W} \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}} = 0,$$

т. е. $\lambda = \overline{\lambda}$. Таким образом, собственные значения эрмитова тензора являются действительными.

Пусть λ и λ' — два различных собственных значения эрмитова тензора \mathbb{A} алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а \mathbb{W} и \mathbb{W}' — соответствующие им собственные тензоры. Тогда справедливы соотношения

$$\mathbb{A} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \quad \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}'} = \lambda' \overline{\mathbb{W}'}. \quad (5.18)$$

Если умножим первое из этих соотношений на $\overline{\mathbb{W}'}$, второе — на \mathbb{W} , а потом из одного вычтем другое, то на основании (5.16) получим

$$(\lambda - \lambda') \mathbb{W} \overline{\mathbb{W}'} = \overline{\mathbb{W}'} \mathbb{A} \mathbb{W} - \mathbb{W} \overline{\mathbb{A}} \overline{\mathbb{W}'} = 0,$$

ибо по условию $\lambda \neq \lambda'$, поэтому отсюда находим, что $\mathbb{W} \overline{\mathbb{W}'} = (\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$, т. е. \mathbb{W} и \mathbb{W}' ортогональны.

Таким образом, если \mathbb{A} — эрмитов тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то его собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_{n^p}$ действительны, а собственные тензоры образуют ортонормальную систему. В этом случае $\mathbb{W}_i = \mathbb{W}^i$ и соотношение (5.12) представляется в форме

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k. \quad (5.18)$$

Для компонент тензора \mathbb{A} будем иметь выражение

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k W_{k, i_1 \dots i_p} \overline{W}_{k, j_1 \dots j_p}.$$

Если \mathbb{A} — вещественный эрмитов тензор, то его собственные тензоры также будут вещественными. Следовательно что для вещественного эрмитова тензора соотношение (5.18) примет вид

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \mathbb{W}_k. \quad (5.19)$$

Отсюда для компонент имеем представление

$$A_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k W_{k, i_1 \dots i_p} W_{k, j_1 \dots j_p}.$$

Легко убедиться в том, что любую натуральную степень тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно определить формулой

$$\mathbb{A}^n = \underbrace{\mathbb{A} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}}_n.$$

Если тензор представлен в главных осях (5.12), то будем иметь

$$\mathbb{A}^n = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^n \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \quad (5.20)$$

На основании представления (5.12) можно ввести определение степени тензора с любым числовым показателем в виде

$$\mathbb{A}^\alpha = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^\alpha \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \quad (5.21)$$

Здесь предполагаем, что \mathbb{A}^α определяется для тех значений α , для которых определена степень λ_k^α . Следовательно, если $\det \mathbb{A} \neq 0$, то $\mathbb{A}^0 = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Кроме того, в этом случае имеем

$$\mathbb{A}^{-1} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{-1} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \quad (5.22)$$

Нетрудно выразить инварианты обратного тензора \mathbb{A}^{-1} через инварианты тензора \mathbb{A} . В самом деле, осуществляя простые выкладки, в силу (5.22) получим

$$I_k(\mathbb{A}^{-1}) = I_{n^p-k}^{-1}(\mathbb{A}) I_{n^p-k}(\mathbb{A}), \quad k = \overline{1, n^p-1}, \quad I_{n^p}(\mathbb{A}^{-1}) = I_{n^p}^{-1}(\mathbb{A}). \quad (5.23)$$

Нетрудно найти инварианты любой степени тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т. е. $I_k(\mathbb{A}^m)$, где $k = \overline{1, n^p}$, а m — произвольное натуральное число.

Следует заметить, что в качестве алгебраических инвариантов тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно рассматривать $I_k(\mathbb{A})$, $k = \overline{1, n^p}$, или $I_k(\mathbb{A}^m)$, $m = \overline{1, n^p}$. Легко найти связь между этими инвариантами, т. е. одни выражать через другие. Например, имеет место формула

$$I_2(\mathbb{A}) = \frac{1}{2} [I_1^2(\mathbb{A}) - I_1(\mathbb{A}^2)],$$

справедливость которой легко доказать, выражая инварианты с помощью собственных значений тензора \mathbb{A} . Для нахождения остальных соотношений, выражающих одни инварианты через другие, необходимо знание теоремы Гамильтона—Кэли для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, о которой речь пойдет ниже.

Любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить в виде суммы симметричного и кососимметричного (антисимметричного) тензоров следующим соотношением:

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}^S + \mathbb{A}^A, \quad \mathbb{A} = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^T), \quad \mathbb{A}^A = \frac{1}{2}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^T).$$

Аналогично тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно представить суммой шарового тензора и девиатора

$$\mathbb{A} = \frac{1}{n^p} I_1(\mathbb{A}) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} + dev \mathbb{A}.$$

Следовательно, $I_1(dev \mathbb{A}) = 0$.

ГЛАВА 2

МНОГОЧЛЕНЫ С ТЕНЗОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ. ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРЕМА БЕЗУ. ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА—КЭЛИ

6. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ДЕЙСТВИЯ НАД ТЕНЗОРНЫМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

С каждым тензором $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, так же, как с каждой квадратной матрицей, связаны два многочлена: характеристический и минимальный. Эти многочлены играют большую роль в различных вопросах теории тензоров. Например, понятие функции тензора целиком основывается на понятии минимального многочлена тензора.

Определение 6.1. Тензор $\mathbb{B}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, компонентами которого являются многочлены относительно λ , называется *многочленом с тензорными коэффициентами*, или *тензорным многочленом*, или еще *λ -тензором*.

В силу определения компоненты тензорного многочлена $\mathbb{B}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляются в виде

$$B_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}(\lambda) = B_{0, i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \lambda^m + B_{1, i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \lambda^{m-1} + \dots + B_{m, i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p}.$$

Тогда тензорный многочлен можно записать в форме

$$\mathbb{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^m \mathbb{B}_k \lambda^{m-k} = \mathbb{B}_0 \lambda^m + \mathbb{B}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{B}_{m-1} \lambda + \mathbb{B}_m, \quad (6.1)$$

где

$$\mathbb{B}_k = B_{k, i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_p} \mathbf{A}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}^{i_p} \mathbf{A}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{A}_{j_p} = B_{k, i}^{j} \mathbf{A}^i \otimes \mathbf{A}_j, \\ i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, n^p}, \quad i = \mathfrak{N}_0(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathfrak{N}_0(j_1, \dots, j_p).$$

Число m называется *степенью* тензорного многочлена, если $\mathbb{B}_0 \neq 0$. Число $2p$ называется *порядком* тензорного многочлена.

Определение 6.2. Тензорный многочлен (6.1) называется *регулярным*, если $\det \mathbb{B}_0 \neq 0$.

В отличие от тензорного многочлена, обычный многочлен со скалярными коэффициентами назовем *скалярным многочленом*.

Рассмотрим основные операции над тензорными многочленами.

6.1. Сумма и разность двух тензорных многочленов. Пусть даны два тензорных многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ одинакового порядка. Пусть m — наибольшая из степеней этих многочленов. Тогда их можно представить следующим образом:

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0 \lambda^m + \mathbb{B}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{B}_m, \quad \mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{D}_0 \lambda^m + \mathbb{D}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{D}_m.$$

Суммой и разностью этих тензорных многочленов называются следующие тензорные многочлены:

$$\mathbb{B}(\lambda) \pm \mathbb{D}(\lambda) = (\mathbb{B}_0 \pm \mathbb{D}_0) \lambda^m + (\mathbb{B}_1 \pm \mathbb{D}_1) \lambda^{m-1} + \dots + (\mathbb{B}_m \pm \mathbb{D}_m).$$

Следовательно, сумма (разность) двух тензорных многочленов одного и того же порядка является тензорным многочленом степени, не превосходящей наибольшей из степеней данных тензорных многочленов.

6.2. Произведение двух тензорных многочленов. Пусть даны два тензорных многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ степеней m и s соответственно:

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0 \lambda^m + \mathbb{B}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{B}_m \quad (\mathbb{B}_0 \neq 0), \\ \mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{D}_0 \lambda^s + \mathbb{D}_1 \lambda^{s-1} + \dots + \mathbb{D}_s \quad (\mathbb{D}_0 \neq 0). \quad (6.2)$$

Тогда произведением $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$ называется тензорный многочлен вида

$$\mathbb{B}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{B}_0\mathbb{D}_0 \lambda^{m+s} + (\mathbb{B}_0\mathbb{D}_1 + \mathbb{B}_1\mathbb{D}_0) \lambda^{m+s-1} + \\ + (\mathbb{B}_0\mathbb{D}_2 + \mathbb{B}_1\mathbb{D}_1 + \mathbb{B}_2\mathbb{D}_0) \lambda^{m+s-2} + \dots + \mathbb{B}_m\mathbb{D}_s. \quad (6.3)$$

Здесь, конечно, под произведением понимается внутреннее p -произведение, т. е. $\mathbb{B}(\lambda)\mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda) \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}(\lambda)$, $\mathbb{B}_r \mathbb{D}_l = \mathbb{B}_r \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}_l$, $r = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, s}$. Заметим, что внутреннее p -произведение тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ некоммутативно, т. е. если рассмотрим произведение $\mathbb{D}(\lambda)\mathbb{B}(\lambda)$, то получим, вообще говоря, другой тензорный многочлен. В отличие от произведения скалярных многочленов, произведение тензорных многочленов (6.3) может иметь степень, меньшую $m + s$. В самом деле, в (6.3) произведение тензоров $\mathbb{B}_0\mathbb{D}_0$ может равняться нулю при $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\mathbb{D}_0 \neq 0$. Однако можно доказать, что если хотя бы один из тензоров \mathbb{B}_0 и \mathbb{D}_0 — невырожденный тензор и $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\mathbb{D}_0 \neq 0$, то $\mathbb{B}_0\mathbb{D}_0 \neq 0$.

Таким образом, произведение двух тензорных многочленов алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ равно тензорному многочлену, степень которого меньше или равна сумме степеней сомножителей. Если хотя бы один из двух сомножителей — регулярный тензорный многочлен, то в этом случае степень произведения двух тензорных многочленов равна сумме степеней сомножителей.

Представим (6.1) в виде

$$\mathbb{B}(\lambda) = \lambda^m \mathbb{B}_0 + \lambda^{m-1} \mathbb{B}_1 + \dots + \mathbb{B}_m. \quad (6.4)$$

Очевидно, обе записи (6.1) и (6.4) при скалярном λ дают один и тот же результат. Однако, если вместо скалярного аргумента λ в (6.1) и (6.4) подставить какой-нибудь тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то, вообще говоря, получим различные значения, так как степени тензора \mathbb{A} могут не быть коммутативными с тензорными коэффициентами $\mathbb{B}_0, \dots, \mathbb{B}_m$. Подставляя $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в (6.1) и (6.4) вместо λ , получим соответственно

$$\mathbb{B}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}_0 \mathbb{A}^m + \mathbb{B}_1 \mathbb{A}^{m-1} + \dots + \mathbb{B}_m, \quad (6.5)$$

$$\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) = \mathbb{A}^m \mathbb{B}_0 + \mathbb{A}^{m-1} \mathbb{B}_1 + \dots + \mathbb{B}_m. \quad (6.6)$$

Назовем $\mathbb{B}(\mathbb{A})$ правым, а $\hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A})$ — левым значением тензорного многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ при подстановке тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ вместо λ .

Теперь представим (6.2) в форме

$$\mathbb{B}(\lambda) = \sum_{k=0}^m \mathbb{B}_{m-k} \lambda^k, \quad \mathbb{D}(\lambda) = \sum_{r=0}^s \mathbb{D}_{s-r} \lambda^r$$

и рассмотрим их произведение. Имеем

$$\mathbb{P}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda) \mathbb{D}(\lambda) = \sum_{k=0}^m \mathbb{B}_{m-k} \lambda^k \sum_{r=0}^s \mathbb{D}_{s-r} \lambda^r = \sum_{k=0}^m \sum_{r=0}^s \mathbb{B}_{m-k} \mathbb{D}_{s-r} \lambda^{k+r} = \sum_{l=0}^{m+s} \left(\sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k} \mathbb{D}_{s-r} \right) \lambda^l,$$

т. е.

$$\mathbb{P}(\lambda) = \sum_{l=0}^{m+s} \left(\sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k} \mathbb{D}_{s-r} \right) \lambda^l = \sum_{l=0}^{m+s} \lambda^l \sum_{k+r=l} \mathbb{B}_{m-k} \mathbb{D}_{s-r}.$$

Отсюда, подставляя вместо λ тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, аналогично (6.5) и (6.6) получим

$$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}) \mathbb{D}(\mathbb{A}), \quad \hat{\mathbb{P}}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) \hat{\mathbb{D}}(\mathbb{A}). \quad (6.7)$$

Следует заметить, что первое соотношение (6.7) имеет место, если тензор \mathbb{A} коммутирует со всеми тензорными коэффициентами \mathbb{D}_{m-k} , $k = \overline{1, m}$. Аналогично второе соотношение (6.7) написано с учетом того, что тензор \mathbb{A} коммутирует со всеми тензорами \mathbb{B}_{s-r} , $r = \overline{1, s}$.

Таким образом, правое (левое) значение произведения двух тензорных многочленов равно произведению правых (левых) значений сомножителей, если тензор-аргумент \mathbb{A} коммутирует со всеми тензорными коэффициентами правого (левого) сомножителя. Если $\mathbb{Q}(\lambda)$ — сумма двух тензорных многочленов $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda)$ алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то всегда справедливы соотношения

$$\mathbb{Q}(\mathbb{A}) = \mathbb{B}(\mathbb{A}) + \mathbb{D}(\mathbb{A}), \quad \hat{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{B}}(\mathbb{A}) + \hat{\mathbb{D}}(\mathbb{A}).$$

6.3. Правое и левое деление тензорных многочленов. Обобщенная теорема Безу. Теорема Гамильтона—Кэли. Рассмотрим два тензорных¹ многочлена $\mathbb{B}(\lambda)$ и $\mathbb{D}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (6.2) и предположим, что $\mathbb{B}_0 \neq 0$ и $\det \mathbb{D}_0 \neq 0$, т. е. $\mathbb{D}(\lambda)$ — регулярный многочлен.

Определение 6.3. Будем говорить, что тензорные многочлены $\mathbb{Q}(\lambda)$ и $\mathbb{R}(\lambda)$ являются соответственно *правым частным* и *правым остатком* при делении $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$, если

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda) \mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}(\lambda) \quad (6.8)$$

и степень $\mathbb{R}(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$.

Определение 6.4. Будем говорить, что тензорные многочлены $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ и $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$ являются соответственно *левым частным* и *левым остатком* при делении $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$, если

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{D}(\lambda) \hat{\mathbb{Q}}(\lambda) + \hat{\mathbb{R}}(\lambda) \quad (6.9)$$

и степень $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$.

¹Рассмотренные ниже вопросы и теоремы аналогичны вопросам и теоремам о матричных многочленах, приведенных в [7].

Следует заметить, что при правом делении, т. е. при нахождении правого частного и правого остатка, на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ частное $\mathbb{Q}(\lambda)$ умножается справа (6.8), а при левом делении на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ частное $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ умножается слева (6.9). Тензорные многочлены $\mathbb{Q}(\lambda)$ и $\mathbb{R}(\lambda)$, вообще говоря, не совпадают с многочленами $\hat{\mathbb{Q}}(\lambda)$ и $\hat{\mathbb{R}}(\lambda)$.

Теорема 6.1. *Как правое, так и левое деление тензорных многочленов алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ (одного и того же порядка) всегда выполнимо и однозначно, если делитель — регулярный тензорный многочлен.*

Доказательство. Рассмотрим правое деление $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$. Если $m < s$, то можно положить $\mathbb{Q}(\lambda) = 0$ и $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda)$. При $m \geq s$ для нахождения частного $\mathbb{Q}(\lambda)$ и остатка $\mathbb{R}(\lambda)$ используем обычную схему (обычный алгоритм) деления многочлена на многочлен. Разделим старший член делимого $\mathbb{B}_0 \lambda^m$ на старший член делителя $\mathbb{D}_0 \lambda^s$. Получим старший член искомого частного $\mathbb{B}_0 \mathbb{D}_0^{-1} \lambda^{m-s}$. Умножая этот член на делитель $\mathbb{D}(\lambda)$ справа и вычитая полученный результат из $\mathbb{B}(\lambda)$, найдем первый остаток $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$. Следовательно, можем написать

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{B}_0 \mathbb{D}_0^{-1} \lambda^{m-s} \mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{B}^{(1)}(\lambda). \quad (6.10)$$

Степень m_1 тензорного многочлена $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$ меньше m , где

$$\mathbb{B}^{(1)}(\lambda) = \mathbb{B}_0^{(1)} \lambda^{m_1} + \mathbb{B}_1^{(1)} \lambda^{m_1-1} + \dots + \mathbb{B}_{m_1}^{(1)}, \quad \mathbb{B}_0^{(1)} \neq 0. \quad (6.11)$$

Если $m_1 \geq s$, то, повторяя этот процесс, находим

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^{(1)}(\lambda) &= \mathbb{B}_0^{(1)} \mathbb{D}_0^{-1} \lambda^{m_1-s} \mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{B}^{(2)}(\lambda), \\ \mathbb{B}^{(2)}(\lambda) &= \mathbb{B}_0^{(2)} \lambda^{m_2} + \mathbb{B}_1^{(2)} \lambda^{m_2-1} + \dots + \mathbb{B}_{m_2}^{(2)}, \quad \mathbb{B}_0^{(2)} \neq 0, \quad m_2 < m_1, \end{aligned} \quad (6.12)$$

и т. д. Так как степени тензорных многочленов $\mathbb{B}(\lambda)$, $\mathbb{B}^{(1)}(\lambda)$, $\mathbb{B}^{(2)}(\lambda)$, ... убывают, то на некотором шаге приходим к остатку $\mathbb{R}(\lambda)$, степень которого будет меньше s , т. е. будем иметь

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda) \mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}(\lambda), \quad (6.13)$$

где в силу (6.10)–(6.12) $\mathbb{Q}(\lambda)$ имеет выражение

$$\mathbb{Q}(\lambda) = \mathbb{B}_0 \mathbb{D}_0^{-1} \lambda^{m-s} + \mathbb{B}_0^{(1)} \mathbb{D}_0^{-1} \lambda^{m_1-s} + \dots$$

Докажем однозначность правого деления от противного. Пусть, кроме (6.13), имеем второе представление

$$\mathbb{B}(\lambda) = \mathbb{Q}^*(\lambda) \mathbb{D}(\lambda) + \mathbb{R}^*(\lambda), \quad (6.14)$$

где степень тензорного многочлена $\mathbb{R}^*(\lambda)$ меньше степени $\mathbb{D}(\lambda)$, т. е. меньше s .

Вычитая почленно (6.14) из (6.13), получаем

$$[\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda)] \mathbb{D}(\lambda) = \mathbb{R}^*(\lambda) - \mathbb{R}(\lambda). \quad (6.15)$$

Так как $\det \mathbb{D}_0 \neq 0$, поэтому степень левой части (6.15) равняется сумме степеней $\mathbb{D}(\lambda)$ и $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda)$, и если $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda) \neq 0$, будет не меньше s . Это невозможно, ибо степень тензорного многочлена в правой части (6.15) меньше s . Таким образом, $\mathbb{Q}(\lambda) - \mathbb{Q}^*(\lambda) = 0$. Тогда из (6.15) следует, что $\mathbb{R}(\lambda) - \mathbb{R}^*(\lambda) = 0$, т. е. $\mathbb{Q}(\lambda) = \mathbb{Q}^*(\lambda)$, $\mathbb{R}(\lambda) = \mathbb{R}^*(\lambda)$, что и требовалось доказать. \square

Совершенно аналогично доказываются существование и единственность левого частного и левого остатка (выполнимость и однозначность левого деления). Заметим, что возможность и однозначность левого деления $\mathbb{B}(\lambda)$ на $\mathbb{D}(\lambda)$ следуют из возможности и однозначности правого деления транспонированных тензорных многочленов $\mathbb{B}^T(\lambda)$ и $\mathbb{D}^T(\lambda)$. Очевидно, из регулярности $\mathbb{D}(\lambda)$ следует регулярность $\mathbb{D}^T(\lambda)$.

Теорема 6.2 (обобщенная теорема Безу). *При правом (левом) делении тензорного многочлена $\mathbb{F}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ на тензорный бином $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, остаток от деления равен $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ ($\hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A})$).*

Доказательство. Рассмотрим произвольный тензорный многочлен $\mathbb{F}(\lambda) \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ степени m

$$\mathbb{F}(\lambda) = \mathbb{F}_0 \lambda^m + \mathbb{F}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbb{F}_{m-1} \lambda + \mathbb{F}_m, \quad \mathbb{F}_0 \neq 0,$$

и разделим его справа и слева на тензорный бином $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, где $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Получим

$$\mathbb{F}(\lambda) = \mathbb{Q}(\lambda) (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) + \mathbb{R}, \quad \mathbb{F}(\lambda) = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \hat{\mathbb{Q}}(\lambda) + \hat{\mathbb{R}}. \quad (6.16)$$

В рассматриваемом случае правый остаток \mathbb{R} и левый остаток $\hat{\mathbb{R}}$ не зависят от λ , так как их степень меньше степени бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Заменяя в соотношениях (6.16) λ на тензор \mathbb{A} и учитывая, что тензор \mathbb{A} коммутирует с тензорными коэффициентами бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, для правого $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ и левого $\hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A})$ значений (6.7) тензорного многочлена $\mathbb{F}(\lambda)$ будем иметь

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \mathbb{Q}(\mathbb{A})(\mathbb{A} - \mathbb{A}) + \mathbb{R} = \mathbb{R}, \quad \hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A}) = (\mathbb{A} - \mathbb{A}) \hat{\mathbb{Q}}(\mathbb{A}) + \hat{\mathbb{R}} = \hat{\mathbb{R}}.$$

Теорема Безу доказана. \square

Пример. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $P(\lambda)$ — скалярный многочлен относительно λ . Тогда тензорный многочлен $\mathbb{F}(\lambda) = P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{P}(\mathbb{A})$ делится (слева и справа) без остатка на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Это следует из обобщенной теоремы Безу, поскольку в рассматриваемом случае $\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \hat{\mathbb{F}}(\mathbb{A}) = 0$.

Теорема 6.3 (Гамильтона—Кэли). *Всякий тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ присоединенный тензорный многочлен для тензорного бинома $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Тогда в силу (4.16) можно написать

$$P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \det (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \tilde{\mathbb{B}}(\lambda) (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \tilde{\mathbb{B}}(\lambda). \quad (6.17)$$

Соотношение (6.17) показывает, что тензорный многочлен $P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится справа и слева на бином $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ без остатка. На основании обобщенной теоремы Безу это возможно тогда и только тогда, когда остаток равен нулю, т. е. $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \mathbb{P}(\mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = 0$, что и требовалось доказать.

Приведем второй способ доказательства этой теоремы, предполагающий каноническое представление тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу определения степени тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, представленного в главных осях (5.20), имеем

$$\mathbb{A}^{n^p} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{n^p} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k. \quad (6.18)$$

Подставляя в (6.18) вместо $\lambda_k^{n^p}$ его значение, вычисленное из характеристического уравнения (5.9) и пользуясь определением степени тензора, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{n^p} &= \sum_{k=1}^{n^p} \left[\sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A}) \lambda_k^{n^p-s} \right] \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k = \\ &= \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A}) \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k^{n^p-s} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k = \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^{s+1} I_s(\mathbb{A}) \mathbb{A}^{n^p-s}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathbb{A}^{n^p} + \sum_{s=1}^{n^p} (-1)^s I_s(\mathbb{A}) \mathbb{A}^{n^p-s} = \mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0,$$

что и требовалось доказать. \square

Пример. Пусть $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_2(\Omega)$. Найти присоединенный тензорный многочлен $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для тензорного бинома $\lambda \overset{(2)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$.

Ответ: $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \underline{\mathbb{E}} \lambda^2 + \underline{\mathbb{B}}_1 \lambda + \underline{\mathbb{B}}_2$, где $\underline{\mathbb{B}}_1 = I_1(\underline{\mathbb{A}}) \underline{\mathbb{E}} - \underline{\mathbb{A}}$, $\underline{\mathbb{B}}_2 = I_2(\underline{\mathbb{A}}) \underline{\mathbb{E}} - I_1(\underline{\mathbb{A}}) \underline{\mathbb{A}} + \underline{\mathbb{A}}^2$.

Теперь, прежде чем определить коэффициенты присоединенного тензора в общем случае, докажем важные теоремы.

Теорема 6.4. *Детерминант тензора, получающегося из произвольного скалярного полинома при замене его аргумента на любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, равняется произведению значений полинома на собственных числах тензора \mathbb{A} .*

Обозначая через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а через $F(z)$ — некоторый скалярный многочлен переменного (аргумента) z , сформулированную теорему математически можно представить следующим образом:

$$\det \mathbb{F}(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k). \quad (6.19)$$

Доказательство. Так как по условию теоремы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ — все характеристические (собственные) числа тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то характеристический многочлен этого тензора представляется в виде

$$P(\lambda) = \det(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{n^p}) = \prod_{k=1}^{n^p} (\lambda - \lambda_k). \quad (6.20)$$

В правой части (6.20) каждый множитель $\lambda - \lambda_k$, $k = \overline{1, n^p}$, повторяется столько раз, какова кратность корня λ_k .

Для нахождения собственных чисел тензора $\mathbb{F}(\mathbb{A})$ разложим $F(z)$ на линейные множители, полагая, что его степень равна s . Будем иметь

$$\begin{aligned} F(z) &= a_0(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_s) = \\ &= (-1)^s a_0(z_1 - z)(z_2 - z) \dots (z_s - z) = (-1)^s a_0 \prod_{i=1}^s (z_i - z). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Отсюда, следовательно, находим

$$F(\lambda_k) = (-1)^s a_0 \prod_{i=1}^s (z_i - \lambda_k), \quad k = \overline{1, n^p}. \quad (6.22)$$

Подставляя в (6.21) вместо z тензор \mathbb{A} , получим

$$F(\mathbb{A}) = (-1)^s a_0 (z_1 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} (z_2 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \dots \overset{p}{\otimes} (z_s \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}). \quad (6.23)$$

Учитывая, что детерминант произведения тензоров равен произведению детерминантов этих тензоров (4.13), из (6.23) в силу (6.20) и (6.22) найдем

$$\begin{aligned} \det \mathbb{F}(\mathbb{A}) &= (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \det(z_1 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \det(z_2 \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \dots \det(z_s \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) = \\ &= (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \prod_{i=1}^s P(z_i) = (-1)^{sn^p} a_0^{n^p} \prod_{i=1}^s \prod_{k=1}^{n^p} (z_i - \lambda_k) = \prod_{k=1}^{n^p} [(-1)^s a_0 \prod_{i=1}^s (z_i - \lambda_k)] = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k), \end{aligned}$$

т. е.

$$\det \mathbb{F}(\mathbb{A}) = \prod_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k),$$

что и требовалось доказать. \square

Следствие 6.4.1. *Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ — все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то для любых двух скалярных полиномов $G(z)$ и $F(z)$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} \det [\mathbb{G}(\mathbb{A}) \pm \mathbb{F}(\mathbb{A})] &= \prod_{k=1}^{n^p} [G(\lambda_k) \pm F(\lambda_k)], \\ \det [\mathbb{G}(\mathbb{A})\mathbb{F}(\mathbb{A})] &= \prod_{k=1}^{n^p} G(\lambda_k)F(\lambda_k) = \prod_{k=1}^{n^p} G(\lambda_k) \prod_{i=1}^{n^p} F(\lambda_i). \end{aligned} \quad (6.24)$$

В частности, если в качестве $G(z)$ выбрать $G(z) = \mu z^0 = \mu$, где μ — некоторый параметр, то из первого равенства (6.24) получим

$$\det [\mu \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{F}(\mathbb{A})] = \prod_{k=1}^{n^p} [\mu - F(\lambda_k)]. \quad (6.25)$$

Соотношение (6.25) можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Следствие 6.4.2. Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ — все собственные числа (с учетом кратностей) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $F(z)$ — некоторый скалярный многочлен переменного z , то $F(\lambda_1), F(\lambda_2), \dots, F(\lambda_{n^p})$ — все характеристические числа тензора $\mathbb{F}(\mathbb{A})$.

Нетрудно заметить, что верно

Следствие 6.4.3. Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$, то для любого неотрицательного целого m тензор \mathbb{A}^m имеет собственные числа $\lambda_1^m, \lambda_2^m, \dots, \lambda_{n^p}^m$.

Теперь выведем формулу, выражающую присоединенный тензор $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ через тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и его инварианты (коэффициенты характеристического уравнения). Тогда тем самым определим обещанные выше его коэффициенты в общем случае. С этой целью разделим характеристический многочлен тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n^p} (-1)^k a_k \lambda^{n^p-k}, \quad a_0 = 1,$$

на $\lambda - \mu$ с остатком. Нетрудно показать, что в результате этого деления получим

$$P(\lambda) = B(\lambda, \mu)(\lambda - \mu) + P(\mu). \quad (6.26)$$

Здесь многочлен двух аргументов $B(\lambda, \mu)$ имеет выражение

$$B(\lambda, \mu) = \lambda^{n^p-1} + B_1 \lambda^{n^p-2} + B_2 \lambda^{n^p-3} + \dots + B_{n^p-2} \lambda + B_{n^p-1}, \quad (6.27)$$

где

$$B_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i \mu^{k-i}, \quad k = \overline{1, n^p-1}, \quad a_0 = 1. \quad (6.28)$$

Подставляя вместо λ и μ в (6.26) коммутирующие между собой тензоры $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ и \mathbb{A} соответственно и учитывая, что по теореме Гамильтона—Кэли $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0$, находим

$$P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \mathbb{P}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}) = \mathbb{B}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A})(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}). \quad (6.29)$$

Сравнивая (6.29) с (6.17), в силу однозначности частного и (6.27) получим, что искомая формула для присоединенного тензора представится в форме

$$\tilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \mathbb{B}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A}) = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} \lambda^{n^p-1} + \mathbb{B}_1 \lambda^{n^p-2} + \mathbb{B}_2 \lambda^{n^p-3} + \dots + \mathbb{B}_{n^p-2} \lambda + \mathbb{B}_{n^p-1}, \quad (6.30)$$

где с помощью (6.28) подлежащие определению коэффициенты присоединенного тензора будут иметь вид

$$\mathbb{B}_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i a_i \mathbb{A}^{k-i}, \quad k = \overline{1, n^p-1}, \quad a_0 = 1. \quad (6.31)$$

Учитывая (6.30), соотношение (6.29) представится в форме

$$P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}) \tilde{\mathbb{B}}(\lambda) = \tilde{\mathbb{B}}(\lambda) (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}). \quad (6.32)$$

Нетрудно доказать, что тензоры $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \dots, \mathbb{B}_{n^p-1}$ можно вычислять последовательно из следующих рекуррентных соотношений:

$$\mathbb{B}_k = \mathbb{A} \mathbb{B}_{k-1} + (-1)^k a_k \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \quad k = \overline{1, n^p-1}, \quad \mathbb{B}_0 = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}. \quad (6.33)$$

При этом заметим, что

$$\mathbb{A} \mathbb{B}_{n^p-1} + (-1)^{n^p} a_{n^p} \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = 0. \quad (6.34)$$

Легко усмотреть, что соотношения (6.33) и (6.34) получаются из (6.17), если в правой и левой частях этого равенства приравнять друг другу коэффициенты при одинаковых степенях λ . Рекуррентные равенства (6.33) легко доказать и с помощью (6.31).

Подставляя в (6.34) выражение для \mathbb{B}_{n^p-1} из (6.31), получим $\mathbb{P}(\mathbb{A}) = 0$, т. е. другое доказательство теоремы Гамильтона—Кэли, которое явно не опирается на использование обобщенной теоремы Безу. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — невырожденный тензор, то $a_{n^p} = \det \mathbb{A} \neq 0$ и из (6.34) вытекает

$$\mathbb{A}^{-1} = (-1)^{n^p-1} a_{n^p}^{-1} \mathbb{B}_{n^p-1} = (-1)^{n^p-1} I_{n^p}^{-1}(\mathbb{A}) \mathbb{B}_{n^p-1}. \quad (6.35)$$

Пусть λ_0 — какое-нибудь собственное число тензора \mathbb{A} . Тогда, так как $P(\lambda_0) = 0$, из (6.17) следует

$$\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) = \lambda_0 \tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0). \quad (6.36)$$

Представим тензор $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) &= \tilde{B}^i \cdot_j \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \tilde{\mathbf{B}} \cdot_j \mathbb{A}^j = \tilde{\mathbf{B}} \cdot^j \mathbb{A}_j = \tilde{\mathbf{B}} \cdot_{j_1 \dots j_p} \mathbb{A}^{j_1 \dots j_p} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot^{j_1 \dots j_p} \mathbb{A}_{j_1 \dots j_p}, \\ i, j &= \overline{1, n^p}, \quad i = \mathcal{N}_e(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathcal{N}_e(j_1, \dots, j_p), \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0) &= \tilde{B}^i \cdot_j \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{A}^j = \mathbb{A}^i \tilde{\mathbf{B}}_i \cdot = \mathbb{A}_i \tilde{\mathbf{B}}^{i \cdot} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot_j \mathbb{A}^j = \tilde{\mathbf{B}} \cdot^j \mathbb{A}_j = \mathbb{A}^{i_1 \dots i_p} \tilde{\mathbf{B}}_{i_1 \dots i_p} \cdot = \\ &= \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p} \tilde{\mathbf{B}}^{i_1 \dots i_p \cdot} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot_{j_1 \dots j_p} \mathbb{A}^{j_1 \dots j_p} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot^{j_1 \dots j_p} \mathbb{A}_{j_1 \dots j_p}, \quad \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p} = \mathbb{A}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{A}_{i_p}, \\ i, j &= \overline{1, n^p}, \quad i = \mathcal{N}_e(i_1, \dots, i_p), \quad j = \mathcal{N}_e(j_1, \dots, j_p), \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad j_1, \dots, j_p = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

и назовем $\tilde{\mathbf{B}}_i \cdot$ ($\tilde{\mathbf{B}}^{i \cdot}$) и $\tilde{\mathbf{B}} \cdot_j$ ($\tilde{\mathbf{B}} \cdot^j$) соответственно *левыми* и *правыми ковариантными (контравариантными) составляющими* тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$. Тогда нетрудно заметить, что (6.36) для ковариантных составляющих тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ можно записать в форме

$$\tilde{\mathbf{B}}_i \cdot (\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \tilde{\mathbf{B}}_i \cdot (\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \tilde{\mathbf{B}} \cdot_j (\lambda_0) = \lambda_0 \tilde{\mathbf{B}} \cdot_j (\lambda_0). \quad (6.37)$$

Отсюда, поднимая индексы i и j , получим аналогичные (6.37) соотношения для контравариантных составляющих тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$. На основании (6.37) и аналогичных формул для контравариантных составляющих тензора $\mathbb{B}(\lambda_0)$ заключаем, что ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ представляют соответственно левые и правые собственные тензоры, соответствующие собственному значению λ_0 тензора \mathbb{A} .

Резюмируя вышесказанное, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 6.5. *Если коэффициенты характеристического многочлена (уравнения) тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ известны, то присоединенная матрица $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ для тензора $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ может быть найдена по формуле (6.30), а если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — невырожденный тензор, то по формуле (6.35) можно найти обратный тензор \mathbb{A}^{-1} . Если λ_0 — собственное значение тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda_0)$ являются соответственно левыми и правыми собственными тензорами тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ при $\lambda = \lambda_0$.*

Следует отметить, что Д. К. Фадеев предложил метод одновременного определения коэффициентов характеристического многочлена и матричных коэффициентов присоединенной матрицы [7, 73]. Другой эффективный метод для вычисления коэффициентов характеристического многочлена связан с именем А. Н. Крылова [7]. Следовательно, аналогично изложенному выше материалу эти методы также нетрудно обобщить на случай тензора \mathbb{A} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

7. Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Введем определения.

Определение 7.1. Скалярный многочлен $F(\lambda)$ называется аннулирующим многочленом тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $F(\mathbb{A}) = 0$.

Определение 7.2. Аннулирующий многочлен $G(\lambda)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называется минимальным многочленом этого тензора.

Из теоремы Гамильтона—Кэли следует, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является аннулирующим для этого тензора. Однако в общем случае он не является минимальным.

Теорема 7.1. *Произвольный аннулирующий многочлен тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда делится без остатка на его минимальный многочлен.*

Доказательство. Разделим произвольный аннулирующий многочлен $F(\lambda)$ на минимальный $G(\lambda)$. Будем иметь

$$F(\lambda) = G(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

где степень $R(\lambda)$ меньше степени $G(\lambda)$. Подставляя вместо λ в последнее соотношение \mathbb{A} , получим

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \mathbb{G}(\mathbb{A})\mathbb{Q}(\mathbb{A}) + \mathbb{R}(\mathbb{A}). \quad (7.1)$$

Поскольку $\mathbb{F}(\mathbb{A}) = 0$ и $\mathbb{G}(\mathbb{A}) = 0$, то из (7.1) следует, что $\mathbb{R}(\mathbb{A}) = 0$. Однако степень $R(\lambda)$ меньше степени минимального многочлена $G(\lambda)$. Поэтому $R(\lambda) = 0$, ибо в противном случае существовал бы аннулирующий многочлен, степень которого была бы меньше степени минимального многочлена. Этим теорема доказана. \square

Теорема 7.2 (о единственности минимального многочлена). *Минимальный многочлен тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ единствен.*

Доказательство. Пусть существуют два минимальных многочлена $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$ для одного и того же тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда каждый из них делится на другой многочлен без остатка и, так как эти многочлены имеют одну и ту же степень, то они отличаются друг от друга постоянным множителем. Этот постоянный множитель равен единице, поскольку равны единице старшие коэффициенты многочленов $G_1(\lambda)$ и $G_2(\lambda)$, т. е. $G_1(\lambda) = G_2(\lambda)$. Теорема доказана. \square

Далее получим формулу, связывающую минимальный многочлен с характеристическим. Обозначая через $D_{n^p-1}(\lambda)$ наибольший общий делитель со старшим коэффициентом, равным единице, всех компонент тензора миноров $n^p - 1$ порядка характеристического тензора $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$ для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т. е. наибольший общий делитель всех компонент присоединенного тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ для характеристического тензора $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$, будем иметь

$$\tilde{\mathbb{B}}(\lambda) = D_{n^p-1}(\lambda)\tilde{\mathbb{C}}(\lambda), \quad (7.2)$$

где $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ — некий многочленный тензор (λ -тензор), который называется приведенным присоединенным тензором для $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Учитывая (7.2), из (6.17) получим

$$P(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)D_{n^p-1}(\lambda). \quad (7.3)$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ делится без остатка на $D_{n^p-1}(\lambda)$. В этом можно убедиться непосредственно, разлагая характеристический определитель по элементам какой-либо строки или какого-либо столбца. Вводя обозначение $K(\lambda) = P(\lambda)/D_{n^p-1}(\lambda)$ и сокращая обе части (7.3) на $D_{n^p-1}(\lambda)$, находим

$$K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\tilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \tilde{\mathbb{C}}(\lambda)(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}). \quad (7.4)$$

Из (7.4) видно, что $K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится без остатка слева и справа на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Поэтому на основании теоремы Безу $\mathbb{K}(\mathbb{A}) = 0$. Таким образом, многочлен $K(\lambda)$ является аннулирующим для тензора \mathbb{A} . Докажем, что он является минимальным многочленом.

Обозначим минимальный многочлен через $K_1(\lambda)$. Тогда в силу теоремы $K(\lambda)$ делится без остатка на $K_1(\lambda)$:

$$K(\lambda) = K_1(\lambda)L(\lambda). \quad (7.5)$$

Так как $\mathbb{K}_1(\mathbb{A}) = 0$, то в силу обобщенной теоремы Безу тензорный многочлен $K_1(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ делится, например, слева без остатка на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$:

$$K_1(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\tilde{\mathbb{C}}_1(\lambda). \quad (7.6)$$

С помощью (7.5) и (7.6) получаем

$$K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\tilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda). \quad (7.7)$$

Из соотношений (7.4) и (7.7) видно, что как $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$, так и $\tilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda)$ — левые частные при делении $K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$ на $\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}$. Из-за однозначности деления имеем $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \tilde{\mathbb{C}}_1(\lambda)L(\lambda)$. Из этого равенства следует, что $L(\lambda)$ является общим делителем всех компонент многочленного тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$. С другой стороны, наибольший общий делитель всех компонент приведенного присоединенного тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ равен единице, ибо этот тензор был получен из тензора $\tilde{\mathbb{B}}(\lambda)$ путем деления его компонент на $D_{n^{p-1}}(\lambda)$. Поэтому $L(\lambda) = \text{const}$. Однако старшие коэффициенты $K(\lambda)$ и $K_1(\lambda)$ равны единице, ввиду чего из (7.5) следует $L(\lambda) = 1$, т. е. $K(\lambda) = K_1(\lambda)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, для минимального многочлена установлена следующая формула:

$$K(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{D_{n^{p-1}}(\lambda)}. \quad (7.8)$$

Далее аналогично (6.26) имеем

$$K(\lambda) = C(\lambda, \mu)(\lambda - \mu) + K(\mu),$$

а для приведенного присоединенного тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ сходное с (6.30) соотношение получит вид

$$\tilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \mathbb{C}(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}}, \mathbb{A}).$$

Следовательно, подобно (6.32) справедливо равенство

$$K(\lambda) \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = (\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A})\tilde{\mathbb{C}}(\lambda) = \tilde{\mathbb{C}}(\lambda)(\lambda \overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{A}).$$

Переходя в последнем соотношении к детерминантам, находим

$$[K(\lambda)]^{n^p} = P(\lambda) \det \tilde{\mathbb{C}}(\lambda). \quad (7.9)$$

Таким образом, с помощью (7.8) и (7.9) заключаем, что характеристический многочлен $P(\lambda)$ делится без остатка на минимальный многочлен $K(\lambda)$, а некоторая степень $K(\lambda)$ делится без остатка на $P(\lambda)$. Отсюда в свою очередь следует, что совокупность всех отличных друг от друга корней многочленов $P(\lambda)$ и $K(\lambda)$ одна и та же. Другими словами, корнями $K(\lambda)$ являются все отличные друг от друга характеристические числа тензора \mathbb{A} .

Если

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1}(\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{n_r}, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ при } i \neq j; \quad n_i > 0, \quad i, j = \overline{1, r},$$

то

$$K(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{m_r}, \quad 0 < m_k \leq n_k, \quad k = \overline{1, r}.$$

Следует отметить еще одно важное свойство приведенного присоединенного тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$. Пусть λ_0 — какое-нибудь характеристическое число тензора \mathbb{A} . Поскольку $K(\lambda_0) = 0$, то подобно (6.36) из (7.4) получим соотношение

$$\tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) = \lambda_0 \tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0). \quad (7.10)$$

Заметим, что всегда $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0) \neq 0$. В самом деле, в противном случае все компоненты приведенного присоединенного тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda)$ делились бы без остатка на $\lambda - \lambda_0$, что невозможно.

Из (7.10) аналогично (6.37) будем иметь

$$\tilde{\mathbb{C}}_{i.}(\lambda_0) \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \lambda_0 \tilde{\mathbb{C}}_{i.}(\lambda_0), \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \tilde{\mathbb{C}}_{.j}(\lambda_0) = \lambda_0 \tilde{\mathbb{C}}_{.j}(\lambda_0), \quad i, j = \overline{1, n^p}. \quad (7.11)$$

В силу (7.11) и подобных соотношений для контравариантных составляющих можно сказать, что ненулевые левые и правые ковариантные (контравариантные) составляющие тензора $\tilde{\mathbb{C}}(\lambda_0)$ (такие всегда имеются) являются соответственно левыми и правыми собственными тензорами, соответствующими собственному значению λ_0 тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Далее, не останавливаясь на изучении тензорных функций тензорных аргументов, отметим только, что если $F(z)$ — аналитическая функция, то соответствующую аналитическую тензорную функцию тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно определить следующим образом:

$$\mathbb{F}(\mathbb{A}) = \sum_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k) \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k,$$

где представление тензора \mathbb{A} дано соотношением (5.12). В частности,

$$\sin \mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \sin \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k, \quad e^{\mathbb{A}} = \sum_{k=1}^{n^p} e^{\lambda_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}^k$$

и т. д.

7.1. Минимальный многочлен тензора модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно заданного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Минимальный многочлен. Рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся минимального многочлена тензора и модуля. Пусть \mathbb{W} — произвольный тензор из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, а \mathbb{A} — некоторый тензор алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$). Составим ряд тензоров

$$\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{A}^2\mathbb{W}, \mathbb{A}^3\mathbb{W}, \dots, \quad (7.12)$$

являющихся элементами модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{A}^k\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}_0$). Так как $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — конечный модуль, то найдется такое целое число m ($0 \leq m \leq n^p$), что тензоры $\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}, \dots, \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W}$ будут линейно независимыми, а тензор $\mathbb{A}^m\mathbb{W}$ будет их линейной комбинацией, т. е.

$$\mathbb{A}^m\mathbb{W} = -b_1\mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} - b_2\mathbb{A}^{m-2}\mathbb{W} - \dots - b_m\mathbb{W}. \quad (7.13)$$

Рассмотрим многочлен

$$M(\lambda) = \lambda^m + b_1\lambda^{m-1} + \dots + b_{m-1}\lambda + b_m. \quad (7.14)$$

Тогда соотношение (7.13) можно представить в виде

$$\mathbb{M}(\mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = 0.$$

Определение 7.3. Скалярный многочлен $N(\lambda)$ называется *аннулирующим многочленом* тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если $N(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0$.

Определение 7.4. Аннулирующий многочлен $M(\lambda)$ тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называется *минимальным многочленом* тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Нетрудно доказать, что из всех аннулирующих многочленов тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ построенный выше многочлен (7.14) — минимальный многочлен тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 7.3. Произвольный аннулирующий многочлен $N(\lambda)$ тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ делится без остатка (нацело) на минимальный многочлен $M(\lambda)$ тензора \mathbb{W} .

Доказательство. В самом деле, пусть

$$N(\lambda) = M(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda), \quad (7.15)$$

где $Q(\lambda)$ и $R(\lambda)$ — частное и остаток от деления $N(\lambda)$ на $M(\lambda)$. При этом степень $R(\lambda)$ меньше степени $M(\lambda)$. Тогда легко видеть, что из (7.15) получим

$$\mathbb{N}(\mathbb{A})\mathbb{W} = \mathbb{Q}(\mathbb{A})\mathbb{M}(\mathbb{A})\mathbb{W} + \mathbb{R}(\mathbb{A})\mathbb{W}.$$

Отсюда в свою очередь находим $\mathbb{R}(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0$. Итак, $R(\lambda)$, степень которого меньше степени $M(\lambda)$, является аннулирующим многочленом тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора, что невозможно. Значит, $R(\lambda) = 0$. Теорема доказана. \square

Из доказанной теоремы следует, что каждому тензору $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ соответствует только один минимальный многочлен.

Рассмотрим некоторый базис $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $M_1(\lambda), M_2(\lambda), \dots, M_{n^p}(\lambda)$ минимальные многочлены базисных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$ соответственно относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а через $N(\lambda)$ — наименьшее общее кратное этих многочленов со старшим коэффициентом, равным единице. Следовательно, $N(\lambda)$ будет аннулирующим многочленом для всех базисных тензоров

$$\mathbb{A}_i = \mathbb{A}_{i_1 \dots i_p}, \quad i = \overline{1, n^p}, \quad i = \mathbb{N}_0(i_1, i_2, \dots, i_p), \quad i_1, \dots, i_p = \overline{1, n}.$$

Так как произвольный тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ представляется в виде $\mathbb{W} = W^i \mathbb{A}_i = W^{i_1, \dots, i_p} \mathbb{A}_{i_1, \dots, i_p}$, то

$$N(\mathbb{A})\mathbb{W} = W^i N(\mathbb{A})\mathbb{A}_i = W^{i_1, \dots, i_p} N(\mathbb{A})\mathbb{A}_{i_1, \dots, i_p} = 0,$$

т. е.

$$N(\mathbb{A})\mathbb{W} = 0.$$

Таким образом, $M(\lambda)$ является аннулирующим многочленом всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Нетрудно видеть, что, если $N_*(\lambda)$ — произвольный аннулирующий многочлен всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то он будет аннулирующим многочленом базисных тензоров $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$. Следовательно, $N_*(\lambda)$ должен быть общим кратным минимальных многочленов $M_1(\lambda), M_2(\lambda), \dots, M_{n^p}(\lambda)$ этих базисных тензоров, ввиду чего многочлен $N_*(\lambda)$ должен делиться на наименьшее общее кратное $N(\lambda)$ без остатка. Таким образом, из всех аннулирующих многочленов всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ построенный выше многочлен $N(\lambda)$ имеет наименьшую степень и старший коэффициент 1. Такой многочлен однозначно определяется заданием модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и называется минимальным многочленом модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Из доказанной выше теоремы 7.3 следует единственность минимального многочлена модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Несмотря на то, что построение минимального многочлена $N(\lambda)$ было связано с определенным базисом $\mathbb{A}_1, \dots, \mathbb{A}_{n^p}$, он не зависит от выбора базиса. Это, конечно, следует из единственности минимального многочлена модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Нетрудно доказать справедливость теоремы:

Теорема 7.4. *Минимальный многочлен модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно некоторого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ делится без остатка на минимальный многочлен любого тензора этого модуля относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.*

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, связанные с расщеплением модуля на инвариантные подмодули. Введем определения:

Определение 7.5. Подмножество $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ называется *подмодулем* модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, если оно само является модулем над тем же кольцом, что и $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Определение 7.6. Будем говорить, что модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ *расщепляется* на два подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$, и писать

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''_p(\Omega),$$

если известно, что:

1. $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ не имеют общих тензоров, кроме нуля,
2. любой тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ представляется в виде суммы

$$\mathbb{W} = \mathbb{W}' + \mathbb{W}'', \tag{7.16}$$

где $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$, а $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)$.

Из условия 1 следует единственность представления (7.16). В самом деле, пусть \mathbb{W} имеет другое представление

$$\mathbb{W} = \widetilde{\mathbb{W}}' + \widetilde{\mathbb{W}}'' \quad (\widetilde{\mathbb{W}}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega), \widetilde{\mathbb{W}}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)).$$

Тогда, вычитая почленно последнее равенство из (7.16), получим $\mathbb{W}' - \widetilde{\mathbb{W}}' = \widetilde{\mathbb{W}}'' - \mathbb{W}''$, т. е. равенство между отличными от нуля тензорами $\mathbb{W}' - \widetilde{\mathbb{W}}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\widetilde{\mathbb{W}}'' - \mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)$, что невозможно в силу 1. Итак, условие 1 можно заменить требованием единственности представления (7.16).

Следовательно, определение расщепления модуля распространяется на любое число слагаемых подмодулей.

Пусть $\mathbb{A}'_1, \mathbb{A}'_2, \dots, \mathbb{A}'_k$ и $\mathbb{A}''_1, \mathbb{A}''_2, \dots, \mathbb{A}''_l$ — базисы соответственно модулей $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$. Тогда нетрудно доказать, что все эти $k + l$ тензоров линейно независимы и составляют базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, т. е. из базисов слагаемых подмодулей составляется базис всего модуля. Очевидно, $k + l = n^p$.

Определение 7.7. Подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ называется *инвариантным* относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, если из $\mathbb{W} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ следует $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ ($\mathbb{A}\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}'_p(\Omega)$).

Перефразируем некоторые теоремы из [7] применительно к рассматриваемому случаю.

Теорема 7.5 (1-я теорема о расщеплении модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ на инвариантные подмодули).

Если минимальный многочлен $N(\lambda)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляется в виде произведения двух взаимно простых многочленов $N_1(\lambda)$ и $N_2(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице, $N(\lambda) = N_1(\lambda)N_2(\lambda)$, то модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ расщепляется на два инвариантных подмодуля $\mathbb{C}_p^1(\Omega)$ и $\mathbb{C}_p^2(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega)$), минимальными многочленами которых являются соответственно множители $N_1(\lambda)$ и $N_2(\lambda)$.

Из этой теоремы следует следующая

Теорема 7.6. Если минимальный многочлен модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ представляется в виде произведения некоторых степеней неприводимых многочленов $N_1(\lambda), N_2(\lambda), \dots, N_s(\lambda)$ со старшими коэффициентами, равными единице,

$$N(\lambda) = [N_1(\lambda)^{m_1}] [N_2(\lambda)^{m_2}] \dots [N_s(\lambda)^{m_s}],$$

то модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ расщепляется на s инвариантных подмодулей $\mathbb{C}_p^1(\Omega), \mathbb{C}_p^2(\Omega), \dots, \mathbb{C}_p^s(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega) + \dots + \mathbb{C}_p^s(\Omega)$), минимальными многочленами которых служат соответственно многочлены $N_1(\lambda), N_2(\lambda), \dots, N_s(\lambda)$.

Лемма 7.1. Если минимальные многочлены тензоров $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ взаимно просты, то минимальный многочлен суммы тензоров $\mathbb{W}' + \mathbb{W}''$ равен произведению минимальных многочленов слагаемых тензоров.

Эта лемма применяется при доказательстве следующей теоремы:

Теорема 7.7. В модуле $\mathbb{C}_p(\Omega)$ всегда существует тензор, минимальный многочлен которого совпадает с минимальным многочленом всего модуля.

Пусть теперь $L(\lambda) = \lambda^m + C_1\lambda^{m-1} + \dots + C_{m-1}\lambda + C_m$ — минимальный многочлен тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда нетрудно доказать, что тензоры

$$\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{A}^2\mathbb{W}, \dots, \mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} \quad (7.17)$$

линейно независимы и

$$\mathbb{A}^m\mathbb{W} = -C_1\mathbb{A}^{m-1}\mathbb{W} - C_2\mathbb{A}^{m-2}\mathbb{W} - \dots - C_m\mathbb{W}. \quad (7.18)$$

Следовательно, тензоры (7.17) составляют базис некоторого m -мерного подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$. В связи со специальным видом базиса (7.17) и равенством (7.18) этот подмодуль называется *циклическим* относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тензор \mathbb{W} называется порождающим тензором подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Можно также говорить, что тензор \mathbb{W} порождает подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Заметим, что тензор \mathbb{A} переводит первый из тензоров (7.17) во второй, второй — в третий и т. д. Согласно (7.18) последний базисный тензор (7.17) переводится тензором \mathbb{A} в линейную комбинацию базисных тензоров. Итак, тензор \mathbb{A} переводит любой базисный тензор в тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Очевидно, он и произвольный тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ переводит в тензор из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. Таким образом, циклический подмодуль относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, порожденный тензором $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$, всегда инвариантен относительно \mathbb{A} .

Любой тензор $\mathbb{X} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ можно представить в виде линейной комбинации базисных тензоров (7.17)

$$\mathbb{X} = K(\lambda)\mathbb{W},$$

где $K(\lambda)$ — многочлен от λ степени не больше $m - 1$. Перебирая возможные многочлены $K(\lambda)$ степени не больше $m - 1$, получим все тензоры из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$. При этом каждый тензор $\mathbb{X} \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ получим только один раз, т. е. только при одном многочлене $K(\lambda)$.

Теорема 7.8. Минимальный многочлен порождающего тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ в то же время будет и минимальным многочленом всего циклического подмодуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 7.9 (2-я теорема о расщеплении модуля на инвариантные подмодули). *Модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ всегда можно расщепить на циклические относительно данного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ подмодули $\mathbb{C}_p^1(\Omega), \mathbb{C}_p^2(\Omega), \dots, \mathbb{C}_p^r(\Omega)$ с минимальными многочленами $N_1(\lambda), N_2(\lambda), \dots, N_r(\lambda)$,*

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega) + \dots + \mathbb{C}_p^r(\Omega),$$

так, чтобы $N_1(\lambda)$ совпадал с минимальным многочленом $N(\lambda)$ всего модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ и каждый $N_i(\lambda)$ был делителем $N_{i-1}(\lambda)$, $i = 2, 3, \dots, r$.

Теорема 7.10 (о критерии цикличности модуля). *Модуль циклический тогда и только тогда, когда его число измерений совпадает со степенью его минимального многочлена.*

Теорема 7.11. *Модуль тогда и только тогда является циклическим, когда он расщепляется на такие инвариантные подмодули, которые сами являются циклическими и имеют взаимно простые минимальные многочлены.*

Теорема 7.12. *Модуль не расщепляется на инвариантные подмодули тогда и только тогда, когда он циклический и его минимальный многочлен — некоторая степень неприводимого многочлена.*

Теорема 7.13 (3-я теорема о расщеплении модуля на инвариантные подмодули). *Модуль всегда можно расщепить на циклические инвариантные подмодули*

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^1(\Omega) + \mathbb{C}_p^2(\Omega) + \dots + \mathbb{C}_p^t(\Omega),$$

так, чтобы минимальный многочлен каждого из этих циклических подмодулей был степенью неприводимого многочлена.

Эта теорема дает расщепление модуля на нерасщепимые далее инвариантные подмодули.

8. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СОПРЯЖЕННОМ, НОРМАЛЬНОМ, ЭРМИТОВОМ И УНИТАРНОМ ТЕНЗОРАХ МОДУЛЯ $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$

Введем определение, отличное от вышеприведенного определения сопряженного тензора алгебры $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Определение 8.1. Тензор \mathbb{A}^* называется *сопряженным* по отношению к тензору $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$, если для любых двух тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' из $\mathbb{C}_p(\Omega)$ выполняется равенство

$$(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_x. \quad (8.1)$$

Нетрудно заметить, что для любых тензоров $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеют место соотношения

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^T, \quad \mathbb{W} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}. \quad (8.2)$$

Тогда¹ с помощью первого равенства (8.2) получим

$$(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W} \mathbb{A}^T, \mathbb{W}')_x = \overline{\mathbb{W} \mathbb{A}^T \mathbb{W}'} = \overline{\mathbb{W} \mathbb{A}^T} \mathbb{W}' = (\mathbb{W}, \overline{\mathbb{A}^T} \mathbb{W}')_x.$$

Таким образом,

$$(\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \overline{\mathbb{A}^T} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_x. \quad (8.3)$$

Вычитая из (8.1) почленно (8.3), находим

$$(\mathbb{W}, (\mathbb{A}^* - \overline{\mathbb{A}^T}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}')_x = 0.$$

Отсюда в силу произвольности \mathbb{W} и \mathbb{W}' имеем $\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}^T}$. Это совпадает с вышеприведенным определением. Принимая за определение $\mathbb{A}^* = \overline{\mathbb{A}^T}$, нетрудно доказать (8.1). Действительно, подставляя вместо $\overline{\mathbb{A}^T}$ в правую часть (8.3) \mathbb{A}^* , получим (8.1).

Следовательно, для каждого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ существует сопряженный тензор \mathbb{A}^* и притом только один.

¹В дальнейшем часто знак внутреннего p -произведения $\overset{p}{\otimes}$ и знак локальности x будем опускать.

Используя вторую формулу (8.2) и (8.1), не представляет труда доказать справедливость соотношения

$$(\mathbb{W} \otimes^p \mathbb{A}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}' \otimes^p \mathbb{A}^*)_x.$$

Действительно,

$$(\mathbb{W} \otimes^p \mathbb{A}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{A}^T \otimes^p \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^{*T} \otimes^p \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{W}' \otimes^p \mathbb{A}^*)_x.$$

Теорема 8.1. *Любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда можно представить в виде*

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + i\mathbb{A}_2, \quad (8.4)$$

где \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 — эрмитовы тензоры (эрмитовы компоненты тензора \mathbb{A}). Эрмитовы компоненты однозначно определяются заданием тензора \mathbb{A} . Тензор \mathbb{A} нормален тогда и только¹ тогда, когда его эрмитовы компоненты \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 коммутируют между собой.

Доказательство. Пусть имеет место представление (8.4). Тогда, переходя в обеих частях (8.4) к сопряженному, получим

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{A}_1 - i\mathbb{A}_2, \quad (8.5)$$

Рассматривая (8.4) и (8.5) как систему уравнений относительно \mathbb{A}_1 и \mathbb{A}_2 и разрешая эту систему, найдем тензоры

$$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}(\mathbb{A} + \mathbb{A}^*), \quad \mathbb{A}_2 = \frac{1}{2i}(\mathbb{A} - \mathbb{A}^*), \quad (8.6)$$

которые, очевидно, являются эрмитовыми. Обратно, определяя эрмитовы тензоры с помощью (8.6), нетрудно заметить, что они связаны с \mathbb{A} равенством (8.4).

Пусть \mathbb{A} — нормальный тензор, т. е. $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Тогда из (8.6) вытекает $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2\mathbb{A}_1$. Обратно, из $\mathbb{A}_1\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_2\mathbb{A}_1$ с помощью (8.4) и (8.5) следует $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$. Теорема доказана. \square

Определение 8.2. Будем говорить, что тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ ортогонален подмножеству $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ и писать $\mathbb{W} \perp \mathbb{C}'_p(\Omega)$, если он ортогонален любому тензору из $\mathbb{C}'_p(\Omega)$.

Определение 8.3. Будем говорить, что два подмножества $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ взаимно ортогональны и писать $\mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''_p(\Omega)$, если любой тензор из одного подмножества ортогонален любому тензору из другого подмножества.

Заметим, что ортогональность тензоров и множеств тензоров можно рассматривать как в произвольной точке $x \in \Omega$, так и в области Ω . Нетрудно видеть, что взаимно ортогональные подмножества $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ являются подмодулями, и каждый тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ однозначно представляется в виде суммы $\mathbb{W} = \mathbb{W}' + \mathbb{W}''$, где $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)$, т. е. имеет место расщепление

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''_p(\Omega), \quad \mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''_p(\Omega).$$

Следовательно, сумма размерностей подмодулей $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ равняется размерности модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Заметим, что в рассматриваемом случае $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ называется ортогональным дополнением к $\mathbb{C}''_p(\Omega)$. Очевидно, $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ будет ортогональным дополнением к $\mathbb{C}'_p(\Omega)$.

Теорема 8.2. *Если некоторый подмодуль $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то ортогональное дополнение $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ этого подмодуля инвариантно относительно \mathbb{A}^* .*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ и $\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}''_p(\Omega)$. Тогда из $\mathbb{A}\mathbb{W}' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$ следует $(\mathbb{A}\mathbb{W}', \mathbb{W}'') = 0$. Отсюда с помощью (8.1) получим $(\mathbb{W}', \mathbb{A}^*\mathbb{W}'') = 0$. Так как \mathbb{W}' — произвольный тензор модуля $\mathbb{C}'_p(\Omega)$, то $\mathbb{A}^*\mathbb{W}'' \in \mathbb{C}'_p(\Omega)$, что и требовалось доказать. \square

Определение 8.4. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется тензором простой структуры, если он имеет n^p линейно независимых собственных тензоров, где n^p — число измерений модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что имеет место следующее утверждение.

¹Рассмотренные в данной работе теоремы аналогичны теоремам о линейном операторе [7]. Вообще говоря, при отождествлении тензора четного ранга $2p$ ($p > 1$) с эндоморфизмом тензорного пространства (модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$) многие вопросы о линейном операторе автоматически переносятся на случай пространств эндоморфизмов, порожденных тензорами четного ранга. Общие вопросы о пространствах эндоморфизмов можно смотреть в [3, 4].

Утверждение 8.1. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет простую структуру, если все корни характеристического уравнения различны между собой.

Заметим, что обратное утверждение неверно, т. е. существуют тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни.

Теорема 8.3. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то сопряженный тензор \mathbb{A}^* также имеет простую структуру, при этом можно так выбрать полные системы собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ и $\mathbb{W}'_1, \mathbb{W}'_2, \dots, \mathbb{W}'_{n^p}$ тензоров \mathbb{A} и \mathbb{A}^* , чтобы они были биортонормальны, т. е. $(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}'_i) = \delta_{ki}$, $i, k = \overline{1, n^p}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ — полная система нормированных собственных тензоров $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Эти тензоры выберем в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$) подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, образующими тензорами которого являются тензоры $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}\} \setminus \{\mathbb{W}_k\}$ ($k = \overline{1, n^p}$). Следовательно, $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ при каждом значении k является $(n^p - 1)$ -мерным инвариантным подмодулем модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно \mathbb{A} . Тогда, рассматривая одномерный подмодуль $\mathbb{C}_p^{(k)'}(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$), порожденный нормированным тензором $\mathbb{W}'_k \perp \mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$), нетрудно заметить, что он будет одномерным ортогональным дополнением подмодуля $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$). Тогда в силу теоремы 8.2 $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ инвариантен относительно \mathbb{A}^* , т. е.

$$\mathbb{A}^* \mathbb{W}'_k = \mu_k \mathbb{W}'_k, \quad \mathbb{W}'_k \neq 0, \quad k = \overline{1, n^p}.$$

Из $\mathbb{W}'_k \perp \mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ следует $(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}'_k) = 1 \neq 0$, ибо в противном случае тензор \mathbb{W}'_k должен был бы равняться нулю. Таким образом,

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}'_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n^p},$$

что и требовалось доказать. \square

Следует заметить, что из биортонормированности тензоров $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ и $\mathbb{W}'_1, \dots, \mathbb{W}'_{n^p}$ вытекает линейная независимость каждой (в отдельности) из этих систем тензоров.

Теорема 8.4. Общий собственный тензор $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ тензоров $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ соответствует комплексно сопряженным собственным значениям этих тензоров.

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — общий собственный тензор тензоров $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, т. е. $\mathbb{A}\mathbb{W} = \lambda\mathbb{W}$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{W} = \mu\mathbb{W}$, $\mathbb{W} \neq 0$. Тогда, учитывая эти равенства, из (8.1) при $\mathbb{W}' = \mathbb{W}$ получим $\lambda(\mathbb{W}\mathbb{W}) = \bar{\mu}(\mathbb{W}, \mathbb{W})$. Отсюда следует $\lambda = \bar{\mu}$. Теорема доказана. \square

Теорема 8.5. Для всякого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ существует $(n^p - 1)$ -мерный инвариантный подмодуль $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{W}' \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — собственный тензор $\mathbb{A}^* \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega)$ — одномерный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензором \mathbb{W}' . Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$ ортогональное дополнение к одномерному модулю $\mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega)$. Так как $\mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega)$ инвариантен относительно \mathbb{A}^* и $\mathbb{A} = (\mathbb{A}^*)^*$, то в силу теоремы 8.2 подмодуль $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, что и требовалось доказать. \square

На основании этой теоремы совершенно аналогично можно доказать существование подмодуля $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$, инвариантного относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Продолжая это рассуждение, построим цепочку из n^p последовательно вложенных инвариантных подмодулей тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$:

$$\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) \subset \dots \subset \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p^{(n^p)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega).$$

Здесь индекс в скобках наверху указывает размерность подмодуля.

Теорема 8.6 (теорема Шура). Для любого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ можно построить базис, в котором тензор имеет треугольную форму (матрица компонент тензора треугольна).

Доказательство. Пусть \mathbb{W}_1 — нормированный тензор из $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$. Выберем в $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ нормированный тензор \mathbb{W}_2 такой, что $(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2) = 0$. В $\mathbb{C}_p^{(3)}(\Omega)$ рассмотрим нормированный тензор \mathbb{W}_3 такой, что $(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_3) = 0$ и $(\mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3) = 0$. Продолжая этот процесс, построим ортонормированный базис $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$, обладающий тем свойством, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(k)}(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$), натянутый на первые k базисных тензоров $\mathbb{W}_1, \dots, \mathbb{W}_k$, инвариантен относительно тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Обозначая через $\|A_{ij}\|_1^{n^p}$ матрицу тензора \mathbb{A} , имеем $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j = \sum_{i=1}^{n^p} A_{ij} \mathbb{W}_i$, где $A_{ij} = (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j, \mathbb{W}_i)$. Так как $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j$ принадлежит $\mathbb{C}_p^{(j)}(\Omega)$, то при $i > j$ $A_{ij} = (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_j, \mathbb{W}_i) = 0$. Итак, матрица компонент тензора является верхней треугольной, а тензор \mathbb{A} имеет представление

$$\mathbb{A} = \sum_{i,j=1}^{n^p} A_{ij} \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad A_{ij} = 0 \text{ при } i > j,$$

что и требовалось доказать. \square

Заметим, что теорему Шура легко доказать с помощью общей теоремы о приведении тензора к жордановой форме и последовательной ортогонализации жорданова базиса. Однако приведенное доказательство по существу использует только существование собственного тензора \mathbb{A} .

Теперь докажем лемму, устанавливающую одно свойство коммутирующих тензоров из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Лемма 8.1. *Коммутирующие (перестановочные) тензоры \mathbb{A} и \mathbb{B} ($\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} = \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}$) из модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда имеют общий собственный тензор.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — собственный тензор тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}$, $\mathbb{W} \neq 0$, и в силу коммутативности тензоров \mathbb{A} и \mathbb{B} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеем

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B}^k \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{B}^k \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.7)$$

Пусть в системе тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{B}^2 \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \dots$ первые m ($0 \leq m \leq n^p$) тензоров линейно независимы, в то время как $(m+1)$ -й тензор $\mathbb{B}^m \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$ уже является линейной комбинацией предыдущих тензоров. Нетрудно заметить, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(m)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный системой тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{B}\mathbb{W}, \dots, \mathbb{B}^{m-1}\mathbb{W}$, будет инвариантен относительно \mathbb{B} . Откуда следует, что в подмодуле $\mathbb{C}_p^{(m)}(\Omega)$ будет существовать собственный тензор \mathbb{X} тензора \mathbb{B} , т. е. $\mathbb{B}\mathbb{X} = \mu\mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq 0$. С другой стороны, на основании соотношений (8.7) заключаем, что тензоры $\mathbb{W}, \mathbb{B}\mathbb{W}, \dots, \mathbb{B}^{m-1}\mathbb{W}$ являются собственными тензорами тензора \mathbb{A} , соответствующими одному и тому же собственному значению λ . Следовательно, любая линейная комбинация этих тензоров, в частности, и тензор \mathbb{X} , будет собственным тензором тензора \mathbb{A} , отвечающим собственному значению λ . Итак, доказано существование общего собственного тензора перестановочных тензоров \mathbb{A} и \mathbb{B} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. \square

С помощью этой леммы можно доказать следующую теорему.

Теорема 8.7. *Нормальный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров.*

Доказательство. Пусть \mathbb{A} — произвольный¹ нормальный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В рассматриваемом случае тензоры \mathbb{A} и \mathbb{A}^* коммутируют между собой и поэтому в силу доказанной выше леммы 8.1 имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_1 \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Тогда на основании теоремы 8.4 имеем

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1 = \lambda_1 \mathbb{W}_1, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_1 = \overline{\lambda}_1 \mathbb{W}_1, \quad \mathbb{W}_1 \neq 0.$$

Обозначим через $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$ одномерный подмодуль, порожденный тензором \mathbb{W}_1 , а через $\mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega)$ — ортогональное дополнение для $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$, т. е.

$$\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega), \quad \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) \perp \mathbb{C}_p^{(1)'}(\Omega).$$

¹Под полной ортонормированной системой тензоров тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ понимается ортонормированная система из n^p тензоров, где n^p — число измерений модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$. Более подробно об этом понятии говорится в третьей главе.

Так как $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$ инвариантен относительно \mathbb{A} и \mathbb{A}^* , то в силу теоремы 8.2 подмодуль $\mathbb{C}_p^{(1)'(\Omega)}$ также инвариантен относительно этих тензоров. Следовательно, в инвариантном подмодуле $\mathbb{C}_p^{(1)'(\Omega)}$ перестановочные тензоры \mathbb{A} и \mathbb{A}^* имеют общий собственный тензор \mathbb{W}_2 :

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 = \lambda_2 \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_2 = \bar{\lambda}_2 \mathbb{W}_2, \quad \mathbb{W}_2 \neq 0.$$

Очевидно, $\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$. Обозначая через $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ двумерный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензорами \mathbb{W}_1 и \mathbb{W}_2 , а через $\mathbb{C}_p^{(2)'(\Omega)}$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(2)'(\Omega)$, $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) \perp \mathbb{C}_p^{(2)'(\Omega)}$), аналогично можно установить существование в $\mathbb{C}_p^{(2)'(\Omega)}$ общего собственного тензора \mathbb{W}_3 тензоров \mathbb{A} и \mathbb{A}^* . Очевидно, $\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_1$ и $\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_2$. Продолжая этот процесс, получим n^p попарно ортогональных общих собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензоров \mathbb{A} и \mathbb{A}^* :

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k &= \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \bar{\lambda}_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{W}_k \neq 0, \\ (\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) &= 0 \quad \text{при } i \neq k, \quad i, k = \overline{1, n^p}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Заметим, что тензоры $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ всегда можно считать нормированными, т. е. $(\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n^p}$. При этом, конечно, соотношения (8.8) сохраняют силу. Теорема доказана. \square

Из доказанной теоремы, в частности, из соотношений (8.8) вытекает

Теорема 8.8. *Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ нормален, то каждый собственный тензор тензора \mathbb{A} является собственным тензором сопряженного тензора \mathbb{A}^* , т. е. если тензор \mathbb{A} нормален, то тензоры \mathbb{A} и \mathbb{A}^* имеют одни и те же собственные тензоры.*

Имеет место и обратная теорема.

Теорема 8.9. *Если тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров, то он — нормальный тензор.*

Доказательство. Пусть тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$, т. е.

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \mathbb{W}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \quad (8.9)$$

Надо доказать, что \mathbb{A} — нормальный тензор. Действительно, положим $\mathbb{X}_k = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k - \bar{\lambda}_k \mathbb{W}_k$. Тогда в силу свойств скалярного умножения имеем

$$(\mathbb{W}_i, \mathbb{X}_k) = (\mathbb{W}_i, \mathbb{A}^* \mathbb{W}_k) - \lambda_k (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = (\mathbb{A} \mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) - \lambda_k (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = (\lambda_i - \lambda_k) \delta_{ik} = 0, \quad i, k = \overline{1, n^p}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{X}_k = \mathbb{A}^* \mathbb{W}_k - \bar{\lambda}_k \mathbb{W}_k = 0, \quad k = \overline{1, n^p}.$$

т. е. имеют место соотношения

$$\mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_k = \bar{\lambda}_k \mathbb{W}_k, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n^p}. \quad (8.10)$$

На основании (8.9) и (8.10) легко находим

$$(\mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \mathbb{W}_i, \quad (\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^*) \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_i = \lambda_i \bar{\lambda}_i \mathbb{W}_i, \quad k = \overline{1, n^p},$$

откуда в свою очередь получаем $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}$, что требовалось доказать. \square

Таким образом, наряду с «внешней» ($\mathbb{A} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$) получена следующая «внутренняя» (спектральная) характеристика нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$:

Теорема 8.10. *Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является нормальным, когда этот тензор имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров.*

Нетрудно заметить, что эту теорему можно перефразировать в следующем виде:

Теорема 8.11. *Тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является нормальным тензором, когда он имеет простую структуру.*

Следует заметить, что если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то его можно представить в собственном (каноническом) базисе в виде

$$\mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i. \quad (8.11)$$

Видно, что имеют место соотношения

$$\mathbb{A}^* = \sum_{j=1}^{n^p} \overline{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j, \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k, \quad (8.12)$$

а тензор $\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^*\mathbb{A}$ имеет неотрицательные собственные значения.

Теорема 8.12. Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — нормальный тензор, то тензор $\mathbb{A}(\mathbb{A}^*)$ представим в виде тензорного многочлена от тензора $\mathbb{A}^*(\mathbb{A})$. При этом два многочлена определяются заданием характеристических чисел тензора \mathbb{A} .

Доказательство. По интерполяционной формуле Лагранжа определим два многочлена $F(\lambda)$ и $G(\lambda)$ из условий

$$F(\lambda_k) = \overline{\lambda}_k, \quad G(\overline{\lambda}_k) = \lambda_k, \quad k = \overline{1, n^p},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$ — собственные значения \mathbb{A} . Тогда на основании этих формул, (8.11) и первого равенства (8.12) находим

$$\begin{aligned} \mathbb{F}(\mathbb{A}) &= \sum_{k=1}^{n^p} F(\lambda_k) \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} \overline{\lambda}_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{A}^*, \\ \mathbb{G}(\mathbb{A}^*) &= \sum_{k=1}^{n^p} G(\overline{\lambda}_k) \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{A}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{F}(\mathbb{A}), \quad \mathbb{A} = \mathbb{G}(\mathbb{A}^*),$$

что и требовалось доказать. \square

Докажем и следующую теорему.

Теорема 8.13. Если $\mathbb{C}'_p(\Omega)$ — инвариантный подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ относительно нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{C}'_p(\Omega)$, то и $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ является инвариантным подмодулем тензора \mathbb{A} .

Доказательство. Пусть $\mathbb{C}'_p(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$ — инвариантный подмодуль относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{C}'_p(\Omega) + \mathbb{C}''_p(\Omega) = \mathbb{C}_p(\Omega)$, $\mathbb{C}'_p(\Omega) \perp \mathbb{C}''_p(\Omega)$. Тогда согласно теореме 8.2 подмодуль инвариантен относительно \mathbb{A}^* . Однако в силу теоремы 8.12 $\mathbb{A} = \mathbb{G}(\mathbb{A}^*)$, где $G(\lambda)$ — многочлен. Поэтому $\mathbb{C}''_p(\Omega)$ инвариантен относительно \mathbb{A} . Теорема доказана. \square

Теперь рассмотрим эрмитов тензор. Так как эрмитов тензор является частным видом нормального тензора, то для него справедливы все теоремы и соотношения, относящиеся к нормальному тензору.

Докажем теорему, выражающую наряду с «внешней» ($\mathbb{A}^* = \mathbb{A}$) «внутреннюю» характеристику эрмитова тензора.

Теорема 8.14. Тензор \mathbb{H} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является эрмитовым (самосопряженным) тогда и только тогда, когда он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с вещественными собственными значениями.

Доказательство. Пусть тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Надо доказать, что он имеет вещественные характеристические числа. Действительно, так как эрмитов тензор является частным видом нормального тензора, то в силу теоремы 8.10 он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров, и его можно представить в форме

$$\mathbb{H} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \mathbb{W}_i \overset{p}{\otimes} \overline{\mathbb{W}}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \quad (8.13)$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\mathbb{H}^* = \sum_{i=1}^{n^p} \bar{\lambda}_i \mathbb{W}_i \otimes \bar{\mathbb{W}}_i \quad ((\mathbb{W}_i \otimes \bar{\mathbb{W}}_j)^* = \mathbb{W}_j \otimes \bar{\mathbb{W}}_i),$$

и из равенства $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$ следует $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, $i = \overline{1, n^p}$. Обратно, пусть тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормированную (ортонормальную) систему собственных тензоров с вещественными собственными значениями. Надо доказать, что он — эрмитов тензор. В самом деле, такой тензор в силу теоремы 8.10 — нормальный тензор и для него имеет место представление (8.13), откуда, учитывая $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, получаем

$$\mathbb{H}^* = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \bar{\mathbb{W}}_i. \quad (8.14)$$

На основании (8.13) и (8.14) заключаем, что $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}$. Теорема доказана. \square

Аналогичная теорема для унитарного тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, выражающая наряду с «внешней» ($\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$) его «внутреннюю» характеристику, формулируется следующим образом:

Теорема 8.15. *Тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является унитарным, когда он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с собственными значениями, модули которых равны единице.*

Доказательство. Пусть \mathbb{U} — унитарный тензор. Надо доказать, что он имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров с характеристическими числами, модули которых равны единице. В самом деле, так как унитарный тензор — частный вид нормального тензора, то он на основании теоремы 8.10 имеет полную ортонормальную систему тензоров и представление

$$\mathbb{U} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \bar{\mathbb{W}}_i, \quad (\mathbb{W}_i, \mathbb{W}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n^p}. \quad (8.15)$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{U}^* = \sum_{j=1}^{n^p} \bar{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \bar{\mathbb{W}}_j. \quad (8.16)$$

С помощью (8.15), (8.16) и унитарности тензора \mathbb{U} находим

$$\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \mathbb{U}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \sum_{i=1}^{n^p} \lambda_i \bar{\lambda}_i \mathbb{W}_i \otimes \bar{\mathbb{W}}_i = \overset{(2p)}{\mathbb{E}} = \sum_{j,k=1}^{n^p} \delta_{jk} \mathbb{W}_j \otimes \bar{\mathbb{W}}_k,$$

откуда следует

$$\lambda_i \bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 = 1, \quad i = \overline{1, n^p}. \quad (8.17)$$

Обратно, пусть тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеет полную ортонормальную систему собственных тензоров с характеристическими числами, по модулю равными единице. Тогда имеют место соотношения (8.15)–(8.17), из которых следует $\mathbb{U} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}^* = \mathbb{U}^* \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}$. Теорема доказана. \square

8.1. Неотрицательные и положительно определенные эрмитовы тензоры. Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Введем следующее определение.

Определение 8.5. Эрмитов тензор $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ называется неотрицательным, если для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) \geq 0,$$

и положительно определенным, если для любого тензора $\mathbb{W} \neq 0$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) > 0,$$

Теорема 8.16. *Эрмитов тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ тогда и только тогда является неотрицательным (положительно определенным), когда все его собственные числа неотрицательны (положительны).*

Доказательство. Пусть $\mathbb{H} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Выбирая в качестве базиса модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ тензора \mathbb{H} , для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и тензора \mathbb{H} будем иметь представления:

$$\mathbb{W} = \sum_{i=1}^{n^p} W_i \mathbb{W}_i, \quad \mathbb{H} = \sum_{j=1}^{n^p} \lambda_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j. \quad (8.18)$$

Учитывая, что $(\mathbb{W}, \mathbb{W}_i) = W_i$, с помощью соотношений (8.18) получим

$$(\mathbb{H} \otimes^p \mathbb{W}, \mathbb{W}) = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k |W_k|^2,$$

откуда следует справедливость теоремы. \square

Эта теорема выражает «внутреннюю» характеристику неотрицательного и положительно определенного эрмитова тензора.

Нетрудно доказать, что примерами неотрицательных эрмитовых тензоров являются тензоры $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$, где \mathbb{A} — произвольный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Действительно, для произвольного тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ имеем

$$(\mathbb{A}\mathbb{A}^*\mathbb{W}, \mathbb{W}) = (\mathbb{A}^*\mathbb{W}, \mathbb{A}^*\mathbb{W}) \geq 0, \quad (\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{W}) = (\mathbb{A}\mathbb{W}, \mathbb{A}\mathbb{W}) \geq 0.$$

Если $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — невырожденный тензор, то $\mathbb{A}\mathbb{A}^*$ и $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ — положительно определенные эрмитовы тензоры.

Тензоры $\sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$ и $\sqrt{\mathbb{A}^*\mathbb{A}}$ называются *левым* и *правым модулями* тензора \mathbb{A} . У нормального тензора левый и правый модули равны.

Теорема 8.17 (теорема о полярном разложении тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$). *Произвольный тензор \mathbb{A} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде*

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \otimes^p \mathbb{U}, \quad \mathbb{A} = \mathbb{U}_1 \otimes^p \mathbb{H}_1, \quad (8.19)$$

где \mathbb{H}, \mathbb{H}_1 — неотрицательные эрмитовы, а \mathbb{U}, \mathbb{U}_1 — унитарные тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тензор \mathbb{A} нормален тогда и только тогда, когда \mathbb{H} и \mathbb{U} (\mathbb{H}_1 и \mathbb{U}_1) коммутируют.

Доказательство. Из представлений (8.19) следует, что \mathbb{H} и \mathbb{H}_1 являются соответственно левым и правым модулями тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Действительно,

$$\mathbb{A} \otimes^p \mathbb{A}^* = \mathbb{H} \otimes^p \mathbb{U} \otimes^p \mathbb{U}^* \otimes^p \mathbb{H} = \mathbb{H}^2, \quad \mathbb{A}^* \mathbb{A} = \mathbb{H}_1 \mathbb{U}_1^* \mathbb{U}_1 \mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1^2.$$

Следует заметить, что достаточно доказать справедливость первого соотношения (8.19), ибо, применяя это разложение к тензору \mathbb{A}^* , будем иметь $\mathbb{A}^* = \mathbb{H}\mathbb{U}$, а отсюда находим $\mathbb{A} = \mathbb{U}^{-1}\mathbb{H}$, т. е. вторую формулу (8.19).

Сначала докажем первое равенство (8.19) для частного случая, когда \mathbb{A} — невырожденный тензор ($\det \mathbb{A} \neq 0$). Считая, что $\mathbb{H} = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$ ($\det \mathbb{H} \neq 0$) — положительно определенный тензор как квадратный корень из положительно определенного тензора и $\mathbb{U} = \mathbb{H}^{-1}\mathbb{A}$, докажем унитарность тензора \mathbb{U} . Имеем

$$\mathbb{U} \otimes^p \mathbb{U}^* = \mathbb{H}^{-1} \mathbb{A} \mathbb{A}^* \mathbb{H} = \mathbb{H}^{-1} \mathbb{H}^2 \mathbb{H}^{-1} = \mathbb{E}^{(2p)}.$$

Таким образом в рассматриваемом случае справедливость первого равенства (8.19) доказана.

Заметим, что в данном случае не только \mathbb{H} , но и \mathbb{U} однозначно определяются заданием невырожденного тензора \mathbb{A} .

Теперь рассмотрим общий случай, когда \mathbb{A} может быть и вырожденным тензором. Прежде всего докажем, что полная ортонормальная система собственных тензоров тензора $\mathbb{A}^*\mathbb{A}$ всегда преобразуется тензором \mathbb{A} снова в ортогональную же систему тензоров. Действительно, пусть

$$\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \mu_k^2 \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{W}_k \in \mathbb{C}_p(\Omega), \quad (\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = \delta_{ki}, \quad \mu_k \geq 0, \quad k, i = \overline{1, n^p}.$$

Тогда получаем равенства

$$(\mathbb{A}\mathbb{W}_k, \mathbb{A}\mathbb{W}_i) = (\mathbb{A}^*\mathbb{A}\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = \mu_k^2 (\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_i) = \mu_k^2 \delta_{ki}, \quad k, i = \overline{1, n^p},$$

которые доказывают высказанное предложение.

Далее, определяя ортонормированную систему тензоров $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_{n^p}$ соотношениями

$$\mathbb{A}\mathbb{W}_k = \rho_k \mathbb{X}_k, \quad k, i = \overline{1, n^p} \quad (\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \rho_k \mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k})$$

и тензоры \mathbb{H} и \mathbb{U} равенствами

$$\mathbb{H} = \sum_{k=1}^{n^p} \rho_k \mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{X}_k} \quad \mathbb{U} = \sum_{k=1}^{n^p} \mathbb{X}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k}, \quad (8.20)$$

нетрудно видеть, что

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U},$$

где в силу (8.20) \mathbb{H} — неотрицательный эрмитов тензор, ибо он имеет полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_{n^p}$ и неотрицательные собственные числа μ_1, \dots, μ_{n^p} , а \mathbb{U} — унитарный тензор, что можно проверить непосредственно.

Таким образом, для произвольного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ имеют место представления (8.19), при этом эрмитовы тензоры \mathbb{H} и \mathbb{H}_1 всегда однозначно определяются заданием тензора \mathbb{A} (они — соответственно левый и правый модули тензора \mathbb{A}), а унитарные тензоры \mathbb{U} и \mathbb{U}_1 определяются однозначно только в случае невырожденного \mathbb{A} .

Теперь докажем вторую часть теоремы. Из первого соотношения (8.19) находим

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{H}^2, \quad \mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{U}^* \mathbb{H}^2 \mathbb{U}. \quad (8.21)$$

Если \mathbb{A} — нормальный тензор ($\mathbb{A}\mathbb{A}^* = \mathbb{A}^* \mathbb{A}$), то из (8.21) получим

$$\mathbb{H}^2 = \mathbb{U}^* \mathbb{H}^2 \mathbb{U} = (\mathbb{U}^* \mathbb{H} \mathbb{U})^2.$$

Отсюда, извлекая квадратный корень, будем иметь

$$\mathbb{H} = \mathbb{U}^* \mathbb{H} \mathbb{U} \quad (\mathbb{U}^{-1} = \mathbb{U}^*),$$

откуда приходим к соотношению $\mathbb{U}\mathbb{H} = \mathbb{H}\mathbb{U}$, доказывающему коммутативность тензоров \mathbb{H} и \mathbb{U} . Обратно, если \mathbb{U} и \mathbb{H} коммутируют, то из (8.21) следует, что \mathbb{A} — нормальный тензор. Теорема доказана. \square

Собственные значения тензора $\mathbb{H} = \sqrt{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}$, которые на основании (8.21) являются также собственными значениями тензора $\mathbb{H}_1 = \sqrt{\mathbb{A}^* \mathbb{A}}$, называются *сингулярными числами* тензора \mathbb{A} .

Пусть тензоры $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — полная ортогональная система собственных тензоров произвольного унитарного тензора $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Тогда тензор \mathbb{U} можно представить в виде

$$\mathbb{U} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k} = \sum_{k=1}^{n^p} e^{i\varphi_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k}, \quad (8.22)$$

где $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$, ибо $|\lambda_k| = 1$ и $\varphi_k, k = \overline{1, n^p}$, — вещественные числа. Определим эрмитов тензор \mathbb{F} следующим образом:

$$\mathbb{F} = \sum_{k=1}^{n^p} \varphi_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k}. \quad (8.23)$$

Нетрудно заметить, что в силу (8.23) получим

$$e^{i\mathbb{F}} = \sum_{k=1}^{n^p} e^{i\varphi_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}_k}. \quad (8.24)$$

Сравнивая (8.22) с (8.24), заключаем, что

$$\mathbb{U} = e^{i\mathbb{F}}. \quad (8.25)$$

Таким образом, унитарный тензор $\mathbb{U} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде (8.25), где $\mathbb{F} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор. Обратно, если $\mathbb{F} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — эрмитов тензор, то $\mathbb{U} = e^{i\mathbb{F}}$ — унитарный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

На основании (8.25) вместо (8.19) можно рассматривать следующие представления:

$$\mathbb{A} = \mathbb{H} \overset{p}{\otimes} e^{i\mathbb{F}}, \quad \mathbb{A} = e^{i\mathbb{F}_1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{H}_1, \quad (8.26)$$

где $\mathbb{H}, \mathbb{F}, \mathbb{H}_1, \mathbb{F}_1$ — эрмитовы тензоры. При этом \mathbb{H} и \mathbb{H}_1 — неотрицательные тензоры.

Следует заметить, что соотношения (8.26) являются аналогом представления комплексного числа z в виде $z = re^{i\varphi}$, где $r = |z| \geq 0$ и φ — вещественное число. Заметим также, что в формуле (8.25) тензор \mathbb{F} не определяется однозначно заданием тензора \mathbb{U} . В самом деле, тензор \mathbb{F} определяется при помощи чисел φ_k , $k = \overline{1, n^p}$, к каждому из которых можно прибавить произвольное кратное 2π , не изменяя представление (8.22).

В основе равенства (8.25) лежит тот факт, что функциональная зависимость

$$\lambda = e^{i\varphi} \quad (\lambda_k = e^{i\varphi_k}, \quad k = \overline{1, n^p}) \quad (8.27)$$

отображает n^p произвольных чисел $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n^p}$ вещественной оси (вещественную ось) на некоторые числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n^p}$, лежащие на окружности $|\lambda| = 1$, и наоборот.

Трансцендентную зависимость (8.27) можно заменить рациональной зависимостью

$$\lambda = \frac{1 + i\varphi}{1 - i\varphi} \quad (\lambda_k = \frac{1 + i\varphi_k}{1 - i\varphi_k}, \quad k = \overline{1, n^p}), \quad (8.28)$$

отображающей вещественную ось $\varphi = \bar{\varphi}$ на окружность $|\lambda| = 1$. При этом бесконечно удаленная точка на вещественной оси переходит в точку $\lambda = -1$. Разрешая (8.28) относительно φ , находим

$$\varphi = i \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \quad (\varphi_k = i \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k}, \quad k = \overline{1, n^p}). \quad (8.29)$$

Так как $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ — полная ортонормальная система собственных тензоров \mathbb{U} и \mathbb{F} , то

$$\mathbb{U} \otimes^p \mathbb{W}_k = \lambda_k \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{F} \otimes^p \mathbb{W}_k = \varphi_k \mathbb{W}_k, \quad k = \overline{1, n^p}. \quad (8.30)$$

Нетрудно видеть, что соотношения (8.30) вытекают также из (8.22) и (8.23) соответственно.

Учитывая (8.28) и (8.29), из (8.30) будем иметь

$$\mathbb{U} \otimes^p \mathbb{W}_k = \frac{1 + i\varphi}{1 - i\varphi} \mathbb{W}_k, \quad \mathbb{F} \otimes^p \mathbb{W}_k = i \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \mathbb{W}_k, \quad k = \overline{1, n^p}. \quad (8.31)$$

Умножая равенства (8.31) тензорно справа на $\bar{\mathbb{W}}_k$ и суммируя полученные соотношения от 1 до n^p , получим

$$\begin{aligned} \mathbb{U} \otimes^p \sum_{k=1}^{n^p} (1 - i\varphi_k) \mathbb{W}_k \otimes \bar{\mathbb{W}}_k &= \sum_{k=1}^{n^p} (1 + i\varphi_k) \mathbb{W}_k \otimes \bar{\mathbb{W}}_k, \\ \mathbb{F} \otimes^p \sum_{k=1}^{n^p} (1 + \lambda_k) \mathbb{W}_k \otimes \bar{\mathbb{W}}_k &= i \sum_{k=1}^{n^p} (1 - \lambda_k) \mathbb{W}_k \otimes \bar{\mathbb{W}}_k. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (8.22) и (8.23) приходим к двум взаимно обратным формулам

$$\mathbb{U} = \left(\mathbb{E} + i\mathbb{F} \right) \otimes^p \left(\mathbb{E} - i\mathbb{F} \right)^{-1}, \quad \mathbb{F} = i \left(\mathbb{E} - \mathbb{U} \right) \otimes^p \left(\mathbb{E} + \mathbb{U} \right)^{-1}, \quad (8.32)$$

которые называются *формулами Кэли*. Формулы (8.32) устанавливают взаимно однозначное соответствие между произвольными эрмитовыми тензорами \mathbb{F} и теми унитарными тензорами \mathbb{U} , у которых среди собственных чисел нет -1 .

Заметим, что особую точку -1 можно заменить любым числом λ_0 ($|\lambda_0| = 1$). С этой целью вместо (8.28) надо рассматривать дробно-линейную функцию, отображающую вещественную ось $\varphi = \bar{\varphi}$ на окружность $|\lambda| = 1$ и переводящую точку $\varphi = \infty$ в точку $\lambda = \lambda_0$. При этом соответствующим образом изменятся соотношения (8.29) и (8.32).

8.2. Тензоры модуля $\mathbb{R}(\Omega)$. Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, где \mathbb{R}^n — n -мерное евклидово пространство. Как было сказано выше, $\mathbb{R}(\Omega)$ — подкольцо кольца $\mathbb{C}(\Omega)$, и все рассуждения, относящиеся к $\mathbb{C}(\Omega)$ остаются в силе и для $\mathbb{R}(\Omega)$. В частности, то же самое относится и к модулям $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Поэтому, не останавливаясь в рассматриваемом случае на подробном изложении материала, рассмотрим некоторые вопросы, касающиеся тензоров модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Введем определения.

Определение 8.6. Тензор \mathbb{A}^T называется *транспонированным тензором* для тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в точке $x \in \Omega$, если для любых двух тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' из модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ имеет место соотношение

$$(\mathbb{A} \otimes^p \mathbb{W}, \mathbb{W}')_x = (\mathbb{W}, \mathbb{A}^T \otimes^p \mathbb{W}')_x. \quad (8.33)$$

Основные свойства транспонированных тензоров выражены формулами первого столбца (4.18).

Определение 8.7. Тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется нормальным, если

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}^T = \mathbb{A}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{A}.$$

Определение 8.8. Симметрический тензор $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) называется *неотрицательным*, если для любого тензора $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) \geq 0$, и *положительно определенным*, если для любого тензора $\mathbb{W} \neq 0$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ $(\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{W}) > 0$.

Заметим, что любой тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда представим, и притом однозначно, в виде $\mathbb{A} = \mathbb{S} + \mathbb{K}$, где \mathbb{S} ($\mathbb{S}^T = \mathbb{S}$) — симметрический, а \mathbb{K} ($\mathbb{K}^T = -\mathbb{K}$) — кососимметрический тензор.

Определение 8.9. Тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется *ортогональным*, если для любых двух тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' из модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$

$$(\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}, \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}'). \quad (8.34)$$

В силу (8.33) из (8.34) следует $(\mathbb{W}, \mathbb{Q}^T \mathbb{Q} \mathbb{W}') = (\mathbb{W}, \mathbb{W}')$, откуда находим

$$\mathbb{Q}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = \overset{(2p)}{\mathbb{E}}. \quad (8.35)$$

Обратно, из равенства (8.35) для произвольных тензоров \mathbb{W} и \mathbb{W}' вытекает (8.34). Из (8.35) имеем $(\det \mathbb{Q})^2 = 1$, т. е. $\det \mathbb{Q} = \pm 1$.

Определение 8.10. Ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется *тензором первого рода* (собственно ортогональным тензором), если $\det \mathbb{Q} = 1$, и *второго рода*, если $\det \mathbb{Q} = -1$.

Заметим, что ортогональные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ образуют группу, которая называется *ортогональной группой*.

Симметрический, кососимметрический и ортогональный тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ суть частные виды нормального тензора.

В рассматриваемом случае теорему, аналогичную (8.2), можно сформулировать следующим образом:

Теорема 8.18. Если некоторый подмодуль $\mathbb{R}'_p(\Omega) \subset \mathbb{R}_p(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то ортогональное дополнение $\mathbb{R}''_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}'_p(\Omega) \perp \mathbb{R}''_p(\Omega)$) этого подмодуля инвариантно относительно \mathbb{A}^T .

Для исследования тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ целесообразно расширять модули $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответственно до некоторых унитарных модулей $\tilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ и $\tilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Это расширение производится следующим образом:

1. Тензоры модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называются вещественными тензорами.
2. Вводятся в рассмотрение комплексные тензоры $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$, где \mathbb{U} и \mathbb{V} — вещественные тензоры из рассматриваемого вещественного модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$).
3. Естественным образом определяются операции сложения комплексных тензоров и умножения на комплексный скаляр.

Тогда совокупность всех комплексных тензоров образует $\tilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ -модуль ($\tilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$ -модуль), содержащий в себе $\mathbb{R}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$).

4. Скалярное произведение и внутреннее r -произведение определяются аналогично введенным выше определениям.

Если выбрать вещественный базис, т. е. базис в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$), то $\tilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ ($\tilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$) будет представлять собой совокупность тензоров, которые будут иметь комплексные компоненты в этом базисе, а тензоры из \mathbb{R}_p ($\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$) — вещественные компоненты. Характеристическое (вековое) уравнение вещественного тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ имеет вещественные коэффициенты, поэтому вместе с комплексным корнем λ кратности m оно имеет и корень $\bar{\lambda}$ кратности m .

Утверждение 8.2. Комплексно сопряженным характеристическим числам вещественного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответствуют комплексно сопряженные собственные тензоры модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Доказательство. Действительно, из $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}$ следует $\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \overline{\mathbb{W}} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{W}}$. \square

Из этого утверждения следует справедливость теоремы.

Теорема 8.19. *Если комплексному собственному значению λ вещественного тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответствует линейно независимая система собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_m$ из модуля $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$, то собственному числу $\overline{\lambda}$ соответствует линейная независимая система собственных тензоров $\overline{\mathbb{W}}_1, \overline{\mathbb{W}}_2, \dots, \overline{\mathbb{W}}_m$.*

Пусть $\mathbb{W} = \mathbb{U} + i\mathbb{V}$ — собственный тензор из модуля $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, соответствующий собственному числу $\lambda = \mu + i\nu$, где μ и ν — действительные числа. Тогда, как легко усмотреть,

$$\mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U} = \mu \mathbb{U} - \nu \mathbb{V}, \quad \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V} = \nu \mathbb{U} + \mu \mathbb{V}. \quad (8.36)$$

Рассмотрим тензор $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры с собственными значениями

$$\lambda_k = \mu_{2k-1} + i\mu_{2k}, \quad \overline{\lambda}_k = \mu_{2k-1} - i\mu_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \lambda_l = \mu_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}, \quad (8.37)$$

где μ_k ($k = \overline{1, n^p}$) — действительные числа, причем $\mu_{2k} \neq 0$ ($k = \overline{1, m}$).

Тогда соответствующие этим собственным значениям собственные тензоры $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ представим в виде

$$\mathbb{W}_k = \mathbb{U}_{2k-1} + i\mathbb{U}_{2k}, \quad \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{U}_{2k-1} - i\mathbb{U}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \mathbb{W}_l = \mathbb{U}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}. \quad (8.38)$$

Нетрудно доказать, что тензоры

$$\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \dots, \mathbb{U}_{n^p} \quad (8.39)$$

образуют базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. При этом имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_{2k-1} &= \mu_{2k-1} \mathbb{U}_{2k-1} - \mu_{2k} \mathbb{U}_{2k}, \\ \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_{2k} &= \mu_{2k} \mathbb{U}_{2k-1} - \mu_{2k-1} \mathbb{U}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{U}_l &= \mu_l \mathbb{U}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}, \end{aligned} \quad (8.40)$$

где первые два соотношения (8.40) выписаны с помощью (8.36). Заметим, что из ортонормальности базиса (8.38) в $\widetilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ следует ортогональность базиса (8.39) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Теперь введем обозначения

$$\mathbb{Z}_i \equiv \mathbb{W}_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad \mathbb{Z}_j \equiv \overline{\mathbb{W}}_j, \quad j = \overline{m+1, 2m}; \quad \mathbb{Z}_l \equiv \mathbb{U}_l, \quad \lambda_l = \mu_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}.$$

Тогда, очевидно, имеют место соотношения $(\mathbb{Z}_r, \mathbb{Z}_s) = \delta_{rs}$, $r, s = \overline{1, n^p}$, и тензор \mathbb{A} можно представить в виде (5.12):

$$\mathbb{A} = \sum_{k=1}^{n^p} \lambda_k \mathbb{Z}_k \otimes \overline{\mathbb{Z}}_k.$$

Отсюда, следовательно, получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i + \sum_{j=m+1}^{2m} \overline{\lambda}_j \overline{\mathbb{W}}_j \otimes \mathbb{W}_j + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i + \sum_{j=1}^m \overline{\lambda}_j \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}}_j + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l = \\ &= 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbb{A} = 2 \sum_{i=1}^m \operatorname{Re}(\lambda_i \mathbb{W}_i \otimes \overline{\mathbb{W}}_i) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \quad (8.41)$$

Нетрудно заметить, что в силу первых двух соотношений (8.37) и (8.38)

$$\operatorname{Re}(\lambda_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k) = \mu_{2k-1} (\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k-1} + \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k}) + \mu_{2k} (\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k} - \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k-1}), \quad k = \overline{1, m}.$$

Учитывая эти равенства, из (8.41) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= 2 \sum_{k=1}^m [\mu_{2k-1}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k-1} + \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k}) + \mu_{2k}(\mathbb{U}_{2k-1} \otimes \mathbb{U}_{2k} - \mathbb{U}_{2k} \otimes \mathbb{U}_{2k-1})] + \\ &+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{U}_l \otimes \mathbb{U}_l. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Введем обозначения:

$$\mathbb{V}_k = \sqrt{2} \mathbb{U}_k, \quad k = \overline{1, 2m}; \quad \mathbb{V}_l = \mathbb{U}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}. \quad (8.43)$$

Тогда легко показать, что из ортонормальности базиса (8.38) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ следует ортонормальность базиса (8.43) в $\mathbb{R}_p(\Omega)$. В силу (8.43) из (8.40) и (8.42) получим соответственно

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_{2k-1} &= \mu_{2k-1} \mathbb{V}_{2k-1} - \mu_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \\ \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_{2k} &= \mu_{2k} \mathbb{V}_{2k-1} - \mu_{2k-1} \mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_l &= \mu_l \mathbb{V}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}; \end{aligned} \quad (8.44)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \sum_{k=1}^m [\mu_{2k-1}(\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k}) + \mu_{2k}(\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1})] + \\ &+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_l \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \end{aligned} \quad (8.45)$$

Определение 8.11. Представление (8.45) называется *каноническим представлением* тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры, а тензор \mathbb{A} , имеющий вид (8.45), — *каноническим тензором*.

Из (8.45) видно, что тензор \mathbb{A} в базисе (8.43) имеет квазидиагональную матрицу следующего вида:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} \mu_1 & \mu_2 \\ -\mu_2 & \mu_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \mu_3 & \mu_4 \\ -\mu_4 & \mu_3 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} \mu_{2m-1} & \mu_{2m} \\ -\mu_{2m} & \mu_{2m-1} \end{array} \right), \mu_{2m+1}, \mu_{2m+2}, \dots, \mu_{n^p} \right). \quad (8.46)$$

Таким образом, для каждого тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ существует базис (8.43) (вообще, неортонормальный), с помощью которого можно построить базис для $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, имеющий вид $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j$, $i, j = \overline{1, n^p}$, в котором тензор \mathbb{A} имеет каноническое представление (8.45), а матрица его компонент — квазидиагональную форму (8.46).

Из вышеизложенного следует справедливость теоремы.

Теорема 8.20. *Всякий тензор из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ простой структуры вещественно подобен каноническому тензору.*

Итак, если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, а $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический тензор, то существует невырожденный тензор $\mathbb{T} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{T} = \overline{\mathbb{T}}$) такой, что имеет место соотношение

$$\mathbb{B} = \mathbb{T} \otimes^p \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{T}^{-1} \quad (\mathbb{A} = \mathbb{T}^{-1} \otimes^p \mathbb{B} \otimes^p \mathbb{T}).$$

Следует заметить, что транспонированный тензор \mathbb{A}^T для $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ после расширения становится сопряженным тензором \mathbb{A}^* для \mathbb{A} в $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Очевидно, нормальный, симметрический, кососимметрический и ортогональный тензоры в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ после расширения становятся соответственно нормальным, эрмитовым, умноженным на i эрмитовым и унитарным вещественным тензорами в $\widetilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$. Из вышесказанного следует, что для нормального тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в $\mathbb{R}_p(\Omega)$ существует система ортонормальных собственных тензоров (8.43) (базис $\mathbb{R}_p(\Omega)$), для которых имеют место соотношения (8.44). Кроме того, с помощью базиса (8.43) можно построить канонический базис для $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, в котором тензор \mathbb{A} имеет представление (8.45). Поэтому верна

Теорема 8.21. *Всякий вещественный нормальный тензор из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — некоторый вещественный тензор, а $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический тензор (8.44), то существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}$) такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{A} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad (\mathbb{A} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}).$$

У симметрического тензора $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ все собственные значения вещественны, ибо после расширения этот тензор становится эрмитовым. Поэтому для симметрического тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в равенствах (8.44) и (8.45) следует положить $m = 0$. Тогда получим

$$\mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_l = \mu_l \mathbb{V}_l, \quad (\mathbb{V}_i, \mathbb{V}_l) = \delta_{il}, \quad i, l = \overline{1, n^p}; \quad \mathbb{S} = \sum_{l=1}^{n^p} \mu_l \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \quad (8.47)$$

Определение 8.12. Равенство (8.47) называется каноническим представлением симметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а сам тензор, представленный в таком виде, — *каноническим симметрическим тензором*.

Следовательно, матрица компонент канонического симметрического тензора диагональна.

Теорема 8.22. *Всякий симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда имеет ортонормированную систему собственных тензоров с вещественными собственными числами.*

Из этой теоремы вытекает

Теорема 8.23. *Всякий вещественный симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому симметрическому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{B}^T = \mathbb{B}$) — произвольный симметрический тензор, а $\mathbb{S} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический симметрический тензор (последнее соотношение (8.47)), то на основании последней теоремы существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}$) такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad (\mathbb{S} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}).$$

У кососимметрического тензора $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{K}^T = -\mathbb{K}$) все характеристические числа чисто мнимые (после расширения этот тензор равен произведению i на эрмитов тензор). Для этого тензора в формулах (8.44) и (8.45) надо положить $\mu_{2k-1} = 0$, $k = \overline{1, m}$; $\mu_l = 0$, $l = \overline{2m+1, n^p}$, после чего они получают вид

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k-1} &= -\mu_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \quad \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{V}_{2k} = \mu_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \quad \mathbb{K} \otimes \mathbb{V}_l = 0, \quad k = \overline{1, m}, \quad l = \overline{2m+1, n^p}; \\ \mathbb{K} &= \sum_{k=1}^m \mu_{2k} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1}) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} 0 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \end{aligned} \quad (8.48)$$

Определение 8.13. Последнее соотношение (8.48) называется каноническим представлением кососимметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а сам тензор, имеющий вид (8.48), — *каноническим кососимметрическим тензором*.

Нетрудно заметить, что матрица компонент канонического кососимметрического тензора имеет вид

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & \mu_2 \\ -\mu_2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \mu_4 \\ -\mu_4 & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & \mu_{2m} \\ -\mu_{2m} & 0 \end{pmatrix}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n^p - 2m} \right).$$

Так как \mathbb{K} является нормальным тензором, то базис (8.43) можно считать ортонормальным. Следовательно, справедлива теорема

Теорема 8.24. *Всякий вещественный кососимметрический тензор вещественно и ортогонально подобен каноническому кососимметрическому тензору.*

Если $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{B}^T = -\mathbb{B}$) — некоторый кососимметрический тензор, а $\mathbb{K} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический кососимметрический тензор, то в силу этой теоремы существует ортогональный тензор $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}$) такой, что

$$\mathbb{B} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{Q}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}). \quad (8.49)$$

Все характеристические числа ортогонального тензора $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}^T)^{-1} = \overline{\mathbb{Q}}$) по модулю равны единице (после расширения он становится унитарным). В связи с этим в случае ортогонального тензора в формулах (8.44) и (8.45) следует положить

$$\mu_{2k-1}^2 + \mu_{2k}^2 = 1, \quad k = \overline{1, m}, \quad \mu_l = \pm 1, \quad l = \overline{2m+1, n^p}.$$

При этом базис (8.43) можно считать ортонормальным. Полагая, что $\mu_{2k-1} = \cos \varphi_k$, $\mu_{2k} = \sin \varphi_k$, $k = \overline{1, m}$, для ортогонального тензора формулы (8.44) и (8.45) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \mathbb{O} \otimes^p \mathbb{V}_{2k-1} &= \cos \varphi_k \mathbb{V}_{2k-1} - \sin \varphi_k \mathbb{V}_{2k}, \\ \mathbb{O} \otimes^p \mathbb{V}_{2k} &= \sin \varphi_k \mathbb{V}_{2k-1} + \cos \varphi_k \mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \mathbb{O} \otimes^p \mathbb{V}_l &= \pm \mathbb{V}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}; \\ \mathbb{O} &= \sum_{k=1}^m [\cos \varphi_k (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k}) + \\ &\quad + \sin \varphi_k (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1})] + \sum_{l=2m+1}^{n^p} \pm 1 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \end{aligned} \tag{8.50}$$

Определение 8.14. Соотношение (8.50) называется каноническим представлением ортогонального тензора $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а тензор \mathbb{O} , представленный в такой форме, — *каноническим ортогональным тензором*.

На основании (8.50) видно, что матрица компонент канонического ортогонального тензора представляется следующим образом:

$$\left(\left(\begin{array}{cc} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} \cos \varphi_m & \sin \varphi_m \\ -\sin \varphi_m & \cos \varphi_m \end{array} \right), \overbrace{\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1}^{n^p - 2m} \right).$$

Следовательно, имеет место

Теорема 8.25. *Всякий ортогональный тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда вещественно и ортогонально подобен каноническому ортогональному тензору.*

Из этой теоремы следует, что если $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — некоторый ортогональный тензор, а $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — канонический ортогональный тензор, то существует ортогональный тензор $\mathbb{Q}_1 \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ такой, что

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1 \otimes^p \mathbb{O} \otimes^p \mathbb{Q}_1^{-1} \quad (\mathbb{O} = \mathbb{Q}_1^{-1} \otimes^p \mathbb{Q} \otimes^p \mathbb{Q}_1). \tag{8.51}$$

8.3. Полярное разложение тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Формулы Кэли. Выше было рассмотрено полярное разложение тензора модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Совершенно аналогично можно рассматривать полярное разложение тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Теорема 8.26. *Произвольный тензор \mathbb{A} модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ всегда представим в виде произведения*

$$\mathbb{A} = \mathbb{S} \otimes^p \mathbb{O}, \quad \mathbb{A} = \mathbb{O}_1 \otimes^p \mathbb{S}_1, \tag{8.52}$$

где \mathbb{S} и \mathbb{S}_1 — неотрицательные симметрические, а \mathbb{O} и \mathbb{O}_1 — ортогональные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. При этом $\mathbb{S} = \sqrt{\mathbb{A} \otimes^p \mathbb{A}^T}$, $\mathbb{S}_1 = \sqrt{\mathbb{A}^T \otimes^p \mathbb{A}}$, причем \mathbb{A} — нормальный тензор тогда и только тогда, когда \mathbb{S} и \mathbb{O} (\mathbb{S}_1 и \mathbb{O}_1) коммутируют между собой.

Заметим, что тензоры \mathbb{S} и \mathbb{S}_1 в (8.52) однозначно определяются заданием тензора \mathbb{A} . Если \mathbb{A} — невырожденный тензор, то однозначно определяются и ортогональные тензоры \mathbb{O} и \mathbb{O}_1 .

Рассмотрим некоторые представления ортогонального тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Пусть $\mathbb{B} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — произвольный кососимметрический тензор ($\mathbb{B}^T = -\mathbb{B}$). Тогда

$$\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}} \tag{8.53}$$

является ортогональным тензором первого рода. Действительно,

$$\mathbb{Q}^T = e^{\mathbb{B}^T} = e^{-\mathbb{B}} = \mathbb{Q}^{-1} \quad \text{и} \quad \det \mathbb{Q} = 1.$$

Заметим, что если k_1, k_2, \dots, k_{n^p} — собственные числа тензора \mathbb{B} , то $\mu_1 = e^{k_1}, \mu_2 = e^{k_2}, \dots, \mu_{n^p} = e^{k_{n^p}}$ — собственные числа тензора $\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}$. При этом

$$\det \mathbb{Q} = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_{n^p} = e^{\sum_{i=1}^{n^p} k_i} = e^0 = 1,$$

ибо $\sum_{i=1}^{n^p} k_i = 0$. Теперь покажем, что любой ортогональный тензор первого рода представим в форме (8.53). С этой целью представим канонический ортогональный тензор первого рода в виде (см. (8.41) и последнее соотношение (8.50))

$$\mathbb{O} = \sum_{k=1}^m (e^{i\varphi_k} \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k + e^{-i\varphi_k} \overline{\mathbb{W}}_k \otimes \mathbb{W}_k) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} e^{i2\pi l} \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \quad (8.54)$$

Определим кососимметрический тензор \mathbb{K} равенством

$$\mathbb{K} = \sum_{k=1}^m (i\varphi_k \mathbb{W}_k \otimes \overline{\mathbb{W}}_k - i\varphi_k \overline{\mathbb{W}}_k \otimes \mathbb{W}_k) + \sum_{l=2m+1}^{n^p} 0 \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \quad (8.55)$$

Нетрудно представить, что (8.55) — другая форма записи канонического кососимметрического тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. последнее соотношение (8.48)).

Видно, что в силу (8.54) и (8.55)

$$\mathbb{O} = e^{\mathbb{K}}. \quad (8.56)$$

С помощью (8.49) и (8.51) из (8.56) будем иметь

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{O} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{K}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1} = e^{\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{K} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^{-1}} = e^{\mathbb{B}},$$

т. е. $\mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}$, что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим ортогональный тензор второго рода. С целью его представления введем в рассмотрение специальный тензор \mathbb{D} соотношением

$$\mathbb{D} = \sum_{i=1}^{n^p-1} \mathbb{X}_i \otimes \mathbb{X}_i - \mathbb{X}_{n^p} \otimes \mathbb{X}_{n^p},$$

где $\mathbb{X}_k \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ ($k = \overline{1, n^p}$) — некоторый ортонормированный базис, т. е. $\mathbb{X}_r \overset{p}{\otimes} \mathbb{X}_s = \delta_{rs}$ ($r, s = \overline{1, n^p}$).

Нетрудно заметить, что $\det \mathbb{D} = -1$, $\mathbb{D}^{-1} = \mathbb{D} = \mathbb{D}^T$. Тогда $\mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}$ — ортогональные тензоры первого рода, если \mathbb{Q} — ортогональный тензор второго рода. Следовательно, эти тензоры представимы в виде

$$\mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = e^{\mathbb{B}}, \quad \mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D} = e^{\mathbb{B}_1},$$

где \mathbb{B} и \mathbb{B}_1 — кососимметрические тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Из последних соотношений легко получим формулы представления ортогонального тензора второго рода в форме

$$\mathbb{Q} = \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}_1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}. \quad (8.57)$$

Если \mathbb{D} и \mathbb{B} представлены в одном и том же базисе, составленном, например, из базиса (8.43), то, конечно, \mathbb{D} и \mathbb{B} будут коммутировать между собой, и вместо двух формул (8.57) будем иметь одну формулу

$$\mathbb{Q} = \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} e^{\mathbb{B}} = e^{\mathbb{B}} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D} \quad (\mathbb{B}^T = -\mathbb{B}, \mathbb{D} \overset{p}{\otimes} \mathbb{B} = \mathbb{B} \overset{p}{\otimes} \mathbb{D}).$$

Теперь, как и в случае нахождения соотношений (8.32), не представляет труда получить формулы Кэли. Однако те же самые формулы можно получить из (8.32), если в них \mathbb{U} и \mathbb{F} заменить соответственно на \mathbb{Q} и $i\mathbb{B}$. В результате такой замены находим

$$\mathbb{Q} = \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B} \right) \overset{p}{\otimes} \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{B} \right)^{-1}, \quad \mathbb{B} = \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{Q} \right) \overset{p}{\otimes} \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{Q} \right)^{-1}. \quad (8.58)$$

Равенства (8.58) устанавливают взаимно однозначное соответствие между кососимметричными тензорами и теми ортогональными тензорами, которые не имеют собственного числа -1 . Вместо (8.58) можно рассматривать формулы

$$\mathbb{Q} = - \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{B} \right) \overset{p}{\otimes} \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{B} \right)^{-1}, \quad \mathbb{B} = \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} + \mathbb{Q} \right) \overset{p}{\otimes} \left(\overset{(2p)}{\mathbb{E}} - \mathbb{Q} \right)^{-1}.$$

В этом случае особой точкой является число $+1$.

8.4. Коммутирующие нормальные тензоры. Методом математической индукции можно доказать, что лемма 8.1 о существовании общего собственного тензора для двух коммутирующих тензоров \mathbb{A} и \mathbb{B} модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедлива для любого конечного и бесконечного чисел коммутирующих тензоров.

Лемма 8.2. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то эти тензоры всегда имеют общий собственный тензор.*

Доказательство. Сперва рассмотрим случай, когда множество коммутирующих тензоров конечно. Пусть даны m попарно коммутирующих тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу леммы 8.1 для двух коммутирующих тензоров лемма 8.2 справедлива. Допустим ее справедливость для первых $m-1$ тензоров и докажем для m тензоров. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ — общий собственный тензор тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_{m-1}$, т. е. $\mathbb{A}_i \otimes^p \mathbb{W} = \lambda_i \mathbb{W}$ ($i = \overline{1, m-1}$), $\mathbb{W} \neq 0$. В силу коммутативности тензоров \mathbb{A}_i ($i = \overline{1, m-1}$) и \mathbb{A}_m имеем

$$\mathbb{A}_i \otimes^p \mathbb{A}_m^k \otimes \mathbb{W} = \lambda_i \mathbb{A}_m^k \otimes \mathbb{W}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (8.59)$$

Пусть теперь в системе тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{A}_m \otimes^p \mathbb{W}, \mathbb{A}_m^2 \otimes^p \mathbb{W}, \mathbb{A}_m^3 \otimes^p \mathbb{W}, \dots$ первые r ($0 \leq r \leq n^p$) тензоров линейно независимы, в то время как $(r+1)$ -й тензор $\mathbb{A}_m^r \otimes^p \mathbb{W}$ уже является линейной комбинацией предыдущих тензоров. Легко усмотреть, что подмодуль $\mathbb{C}_p^{(r)}(\Omega) \subset \mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный системой тензоров $\mathbb{W}, \mathbb{A}_m \otimes^p \mathbb{W}, \dots, \mathbb{A}_m^{(r-1)} \otimes^p \mathbb{W}$, будет инвариантен относительно \mathbb{A}_m . Откуда вытекает, что в подмодуле $\mathbb{C}_p^{(r)}(\Omega)$ будет существовать собственный тензор \mathbb{X} тензора \mathbb{A}_m , т. е. $\mathbb{A}_m \otimes^p \mathbb{X} = \mu \mathbb{X}$, $\mathbb{X} \neq 0$. С другой стороны, с помощью соотношений (8.59) заключаем, что тензоры $\mathbb{W}, \mathbb{A}_m \otimes^p \mathbb{W}, \dots, \mathbb{A}_m^{(r-1)} \otimes^p \mathbb{W}$ являются собственными тензорами тензора \mathbb{A}_i ($i = \overline{1, m-1}$), соответствующими одному и тому же собственному значению λ_i ($i = \overline{1, m-1}$). Следовательно, любая линейная комбинация этих тензоров, в частности, и тензор \mathbb{X} , будет собственным тензором тензора \mathbb{A}_i ($i = \overline{1, m-1}$), отвечающим собственному значению λ_i ($i = \overline{1, m-1}$). Таким образом, доказано существование общего собственного тензора $\mathbb{X} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ m попарно коммутирующих тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_m$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$.

Теперь рассмотрим случай бесконечного множества попарно коммутирующих тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Так как такое множество может содержать только конечное число s ($0 \leq s \leq n^{2p}$) линейно независимых тензоров, то общий собственный тензор последних будет общим собственным тензором всех тензоров из рассматриваемого множества. Теорема доказана полностью. \square

Для множества попарно коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ справедлива

Теорема 8.27. *Если дано конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, то все эти тензоры имеют общую полную ортонормальную систему собственных тензоров.*

Доказательство. Пусть дано произвольное конечное или бесконечное множество попарно коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \dots$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. В силу леммы 8.2 все они имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_1 \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Обозначим подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензором \mathbb{W}_1 , через $\mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega)$, а ортогональное дополнение к нему — через $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$. На основании теоремы 8.13 подмодуль $\mathbb{C}_p^{(n^p-1)}$ модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(1)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}(\Omega)$) инвариантен относительно $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \dots$. Поэтому все эти тензоры имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_2 \in \mathbb{C}_p^{(n^p-1)}$. Теперь обозначим подмодуль модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, порожденный тензорами \mathbb{W}_1 и \mathbb{W}_2 ($\mathbb{W}_1 \perp \mathbb{W}_2$), через $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$ и рассмотрим ортогональное дополнение к $\mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega)$, обозначаемое $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ ($\mathbb{C}_p(\Omega) = \mathbb{C}_p^{(2)}(\Omega) + \mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$). Следовательно, согласно теореме 8.13 $\mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ инвариантен относительно $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots$. Поэтому они имеют общий собственный тензор $\mathbb{W}_3 \in \mathbb{C}_p^{(n^p-2)}(\Omega)$ ($\mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_1, \mathbb{W}_3 \perp \mathbb{W}_2$). Продолжая этот процесс, получим ортогональную систему $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{(n^p)}$ общих собственных тензоров для $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots$. Нормируя эти тензоры,

будем иметь общую ортонормальную систему собственных тензоров для попарно коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \dots$ модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$. Теорема доказана. \square

Следует заметить, что если $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \dots$ — попарно коммутирующие нормальные тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$ — их общая система ортонормальных собственных тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$, то справедливы соотношения

$$\mathbb{A}_i \otimes^p \mathbb{W}_j = \lambda_{ij} \mathbb{W}_j, \quad j = \overline{1, n^p}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (8.60)$$

где λ_{ij} — собственное значение тензора \mathbb{A}_i , соответствующим собственным тензором которого является \mathbb{W}_j .

Следовательно, для каждого тензора из $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3, \dots$ будем иметь представление

$$\mathbb{A}_i = \sum_{j=1}^{n^p} \lambda_{ij} \mathbb{W}_j \otimes \overline{\mathbb{W}_j}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8.61)$$

Теперь рассмотрим коммутирующие нормальные тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Сформулируем аналогичную (8.27) теорему.

Теорема 8.28. *Если дано любое множество коммутирующих нормальных тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то все эти тензоры имеют общий канонический базис, составленный из ортонормального базиса модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ ($0 \leq s \leq n^p$) — линейно независимые тензоры среди рассматриваемого множества тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Расширим модули $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ соответственно до некоторых унитарных модулей $\tilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ и $\tilde{\mathbb{R}}_{2p}(\Omega)$ подобно тому, как это было сделано выше. Тогда тензоры $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ согласно теореме 8.27 в $\tilde{\mathbb{R}}_p(\Omega)$ будут иметь общую полную ортонормальную систему собственных тензоров $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_{n^p}$. При этом будут выполняться соотношения (8.60) и (8.61).

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$:

$$\mathbb{A} = \nu_1 \mathbb{A}_1 + \nu_2 \mathbb{A}_2 + \dots + \nu_s \mathbb{A}_s.$$

При любых вещественных значениях $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$ тензор \mathbb{A} является вещественным нормальным тензором в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и, следовательно, будем иметь равенства

$$\mathbb{A} \otimes^p \mathbb{W}_i = \Lambda_i \mathbb{W}_i, \quad \Lambda_i = \sum_{j=1}^s \mu_j \lambda_{ij}, \quad i = \overline{1, n^p}. \quad (8.62)$$

Собственные числа Λ_i ($i = \overline{1, n^p}$) тензора \mathbb{A} являются линейными формами относительно $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$. Так как \mathbb{A} — вещественный тензор, то $\Lambda_k, k = \overline{1, n^p}$, аналогично (8.37) можно разбить на попарно комплексно сопряженные и вещественные части:

$$\Lambda_k = M_{2k-1} + iM_{2k}, \quad \overline{\Lambda}_k = M_{2k-1} - iM_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \Lambda_l = M_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}. \quad (8.63)$$

Здесь $M_{2k-1}, M_{2k}, k = \overline{1, m}, M_l, l = \overline{2m+1, n^p}$ — вещественные линейные формы от $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$. Соответствующие собственным значениям (8.63) собственные тензоры в (8.62) аналогично (8.38) можно представить в виде

$$\mathbb{W}_k = \mathbb{U}_{2k-1} + i\mathbb{U}_{2k}, \quad \overline{\mathbb{W}}_k = \mathbb{U}_{2k-1} - i\mathbb{U}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \quad \mathbb{W}_l = \mathbb{U}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p},$$

где тензоры $\mathbb{U}_1, \mathbb{U}_2, \dots, \mathbb{U}_{n^p}$, конечно, образуют ортогональный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Нормируя эти тензоры, получим ортонормальный базис $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_{n^p}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, тензоры которого определяются соотношениями (8.43). Далее аналогичные (8.44) и (8.45) соотношения можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_{2k-1} &= M_{2k-1} \mathbb{V}_{2k-1} - M_{2k} \mathbb{V}_{2k}, \quad \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_{2k} = M_{2k} \mathbb{V}_{2k-1} + M_{2k-1} \mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \mathbb{A} \otimes^p \mathbb{V}_l &= M_l \mathbb{V}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}; \\ \mathbb{A} &= \sum_{k=1}^m [M_{2k-1} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k}) + M_{2k} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1})] + \\ &+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} M_l \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Так как все тензоры рассматриваемого множества можно получить из \mathbb{A} при конкретных значениях $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$, то тензоры $\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, \dots, \mathbb{V}_{n^p}$, образующие ортонормальный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, являются общими для всех тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$. С помощью этого базиса можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, имеющий вид $\mathbb{V}_i \otimes \mathbb{V}_j$, $i, j = \overline{1, n^p}$, и являющийся общим каноническим базисом для рассматриваемого множества тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ из модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. В этом общем базисе матрицы компонент тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ имеют квазидиагональный вид. Следовательно, аналогичные (8.64) соотношения для каждого тензора из $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ представятся в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{V}_{2k-1} &= \mu_{i,2k-1} \mathbb{V}_{2k-1} - \mu_{i,2k} \mathbb{V}_{2k}, \quad \mathbb{A}_i \otimes \mathbb{V}_{2k} = \mu_{i,2k} \mathbb{V}_{2k-1} + \mu_{i,2k-1} \mathbb{V}_{2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \mathbb{A}_l \otimes \mathbb{V}_l &= \mu_{i,l} \mathbb{V}_l, \quad l = \overline{2m+1, n^p}, \quad i = \overline{1, s}; \\ \mathbb{A}_i &= \sum_{k=1}^m [\mu_{i,2k-1} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k-1} + \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k}) + \mu_{i,2k} (\mathbb{V}_{2k-1} \otimes \mathbb{V}_{2k} - \mathbb{V}_{2k} \otimes \mathbb{V}_{2k-1})] + \\ &+ \sum_{l=2m+1}^{n^p} \mu_{i,l} \mathbb{V}_l \otimes \mathbb{V}_l, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned} \quad (8.65)$$

где было принято, что

$$\begin{aligned} \lambda_{j,k} &= \mu_{j,2k-1} + i\mu_{j,2k}, \quad \bar{\lambda}_{j,k} = \mu_{j,2k-1} - i\mu_{j,2k}, \quad k = \overline{1, m}, \\ \lambda_{j,l} &= \mu_{j,l}, \quad l = \overline{2m+1, n^p}, \quad j = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Теорема доказана. \square

Следствие 8.28.1. Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$, например, \mathbb{A}_α ($0 \leq \alpha \leq s$) является симметрическим, то в соответствующих формулах (8.65) и (8.66) следует положить $\mu_{\alpha,2k} = 0$, $k = \overline{1, m}$.

Следствие 8.28.2. Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$, например, \mathbb{A}_β ($0 \leq \beta \leq s$) является кососимметрическим, то в соответствующих соотношениях (8.65) и (8.66) надо положить $\mu_{\beta,2k-1} = 0$, $k = \overline{1, m}$.

Следствие 8.28.3. Если какой-нибудь из коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$, например, \mathbb{A}_γ ($0 \leq \gamma \leq s$) является ортогональным тензором, то в соответствующих равенствах (8.65) и (8.66) нужно принять $\mu_{\gamma,2k-1} = \cos \varphi_k$, $\mu_{\gamma,2k} = \sin \varphi_k$, $k = \overline{1, m}$; $\mu_{\gamma,l} = \pm 1$, $l = \overline{2m+1, n^p}$.

Следствие 8.28.4. Если среди коммутирующих нормальных тензоров $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, \dots, \mathbb{A}_s$ имеются какие-нибудь симметрические, кососимметрические и ортогональные тензоры, то для получения аналогичных (8.65) и (8.66) соотношений для этих тензоров следует воспользоваться следствиями 8.28.1–8.28.3 соответственно.

Следует заметить, что вышеприведенные построения можно было производить иным путем. В частности, сохраняя используемые выше обозначения, можно было ввести определения отображения модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$ и линейного оператора следующим образом:

Определение 8.15. Будем говорить, что задано отображение \mathbb{A} модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$, и писать $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$, если каждому элементу \mathbb{U} модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ поставлен в соответствие определенный элемент $\mathbb{V} = \mathbb{A}\mathbb{U}$, содержащийся в модуле $\mathbb{C}_q(\Omega)$.

Определение 8.16. Отображение \mathbb{A} модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$ называется линейным оператором (обозначение $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$), если выполнены следующие аксиомы:

1. $\mathbb{A}(\mathbb{W}_1 + \mathbb{W}_2) = \mathbb{A}\mathbb{W}_1 + \mathbb{A}\mathbb{W}_2$ для любых \mathbb{W}_1 и \mathbb{W}_2 из $\mathbb{C}_p(\Omega)$;
2. $\mathbb{A}(\alpha\mathbb{W}) = \alpha\mathbb{A}\mathbb{W}$ для любого $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$ и любого $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$ (из кольца скаляров).

Если $p = q$, то \mathbb{A} называется *линейным оператором* в модуле $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Далее введем понятие *суммы операторов* $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$ и $\mathbb{B} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$ следующим образом: $(\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{W} = \mathbb{A}\mathbb{W} + \mathbb{B}\mathbb{W}$, где $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Очевидно, что $\mathbb{A} + \mathbb{B}$ — линейный оператор, $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$. Аналогично вводится понятие *произведения линейного оператора \mathbb{A} на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$* , а именно $(\alpha\mathbb{A})\mathbb{W} = \alpha(\mathbb{A}\mathbb{W})$, для любого $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$.

Определим и *произведение линейных операторов*. Если $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$, $\mathbb{B} : \mathbb{C}_q(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_r(\Omega)$, то произведение линейных операторов \mathbb{A} и \mathbb{B} определяется по правилу $(\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{W} = \mathbb{B}(\mathbb{A}\mathbb{W})$, $\mathbb{W} \in \mathbb{C}_p(\Omega)$. Произведение $\mathbb{B}\mathbb{A}$ является линейным оператором и отображает $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в $\mathbb{C}_r(\Omega)$.

После введения этих операций можно дать важнейшее понятие — *пространство линейных операторов*.

Определение 8.17. Совокупность всех линейных операторов, отображающих модуль $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в модуль $\mathbb{C}_q(\Omega)$, образующая модуль с введенными выше операциями сложения операторов \mathbb{A} и \mathbb{B} и умножения оператора \mathbb{A} на скаляр $\alpha \in \mathbb{C}_0(\Omega)$, называется *модулем линейных операторов* и обозначается $(\mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega))$.

Если $p = q$, то модуль линейных операторов $(\mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_p(\Omega))$ с рассмотренными выше операциями (сложения, произведения на скаляр и произведения двух операторов) является кольцом.

Таким образом, построили новый модуль $(\mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega))$, элементами которого являются линейные операторы.

Рассмотрим теперь частный случай линейного отображения \mathbb{A} модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ в $\mathbb{C}_0(\Omega)$. Дадим в связи с этим следующее определение:

Определение 8.18. Линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_0$ называется *линейным функционалом*.

Таким образом, функционал отображает модуль в кольцо скаляров.

Перефразируя и другие определения из линейной алгебры и функционального анализа [2, 7, 13, 25, 66] и др., нетрудно заметить, что изложенное выше остается в силе, если вместо тензора $\mathbb{A} \in \mathbb{C}_{p+q}(\Omega)$ ($\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$) рассмотрим линейный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_q(\Omega)$ ($\mathbb{A} : \mathbb{C}_p(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}_p(\Omega)$). Следовательно, аналогично изложенному выше изучение частного случая, когда вместо $\mathbb{C}_r(\Omega)$ рассматриваются $\mathbb{R}_r(\Omega)$, не представляет труда.

Наконец, дадим определение тензора, которое не зависит от выбора системы координат.

Определение 8.19. Комплексный (вещественный) тензор ранга $r \in \mathbb{N}_0$ — элемент модуля $\mathbb{C}_r(\Omega)$ ($\mathbb{R}_r(\Omega)$).

В конце этой главы приведем важные практические упражнения, выполнение которых позволит во многих случаях представить в удобной форме законы и уравнения МДТТ.

Упражнение 1. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора второго ранга.

Упражнение 2. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора второго ранга.

Упражнение 3. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора второго ранга.

Упражнение 4. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 5. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 6. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора четвертого ранга.

Упражнение 7. Найти собственные тензоры и собственные значения изотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 8. Найти собственные тензоры и собственные значения трансверсально-изотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 9. Найти собственные тензоры и собственные значения ортотропного тензора шестого ранга.

Упражнение 10. Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} модуля $\mathbb{C}_1(\Omega)$ ($\mathbb{R}_1(\Omega)$) связаны между собой соотношением $\mathbf{b} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \mathbf{a}$, где $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — тензор второго ранга модуля $\mathbb{C}_2(\Omega)$ ($\mathbb{R}_2(\Omega)$), а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Представить это соотношение в собственных векторах и собственных значениях тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, если: 1) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — изотропный тензор; 2) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — трансверсально-изотропный тензор; 3) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — ортотропный тензор; 4) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — произвольный тензор; 5) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — эрмитов тензор; 6) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — симметричный тензор; 7) $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — кососимметричный тензор.

Упражнение 11. Два тензора второго ранга $\underline{\underline{\mathbf{P}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$ модуля $\mathbb{C}_2(\Omega)$ ($\mathbb{R}_2(\Omega)$) связаны между собой соотношением $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}}$, где $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — тензор четвертого ранга модуля $\mathbb{C}_4(\Omega)$ ($\mathbb{R}_4(\Omega)$), а $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Представить это соотношение в собственных тензорах и собственных значениях тензора $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$, если: 1) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — изотропный тензор; 2) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — трансверсально-изотропный тензор; 3) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — ортотропный тензор; 4) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — произвольный тензор; 5) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — эрмитов тензор; 6) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — симметричный тензор; 7) $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ — кососимметричный тензор.

Упражнение 12. Выполнить предыдущее упражнение в тех случаях, когда компоненты тензора $\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{A}}}}}$ обладают различными свойствами симметрии.

Упражнение 13. Выполнить предыдущие упражнения в том случае, когда $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

ГЛАВА 3

ПОСТРОЕНИЕ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ИЗОТРОПНЫХ, ГИРОТРОПНЫХ, ОРТОТРОПНЫХ И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕНЗОРОВ

Рассмотрим несколько методов построения систем линейно независимых изотропных, гиротропных, ортотропных и трансверсально-изотропных тензоров. Сформулируем некоторые утверждения и теоремы.

9. ОБ ИЗОТРОПНЫХ ТЕНЗОРАХ В \mathbb{R}^3

Как известно [19–21, 24, 54], $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i = g_{ij} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j$ — единственный тензор среди изотропных тензоров второго ранга такой, что любой другой изотропный тензор второго ранга $\underline{\underline{\mathbf{a}}}$ с помощью него представляется в виде $\underline{\underline{\mathbf{a}}} = a \underline{\underline{\mathbf{E}}}$, где a — скаляр, т. е. произвольный изотропный тензор второго ранга — шаровой тензор.

Тензоры

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_{(1)} = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^j, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_{(2)} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_{(3)} = \mathbf{r}_i \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} \mathbf{r}^i = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}^j \mathbf{r}^i \quad (9.1)$$

представляют собой три линейно независимых (несводимых друг к другу) тензора четвертого ранга. Общее выражение для произвольного изотропного тензора четвертого ранга — их линейная комбинация

$$\underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}} = \sum_{k=1}^3 a_k \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{C}}}}}_{(k)}.$$

Из структуры изотропных тензоров второго и четвертого (9.1) ранга, нетрудно усмотреть, что они получаются из соответствующих мультипликативных базисов путем свертывания (зацепления) попарно индексов у базисных векторов и перебора всевозможных случаев такого зацепления. В качестве примера составим еще все линейно независимые изотропные тензоры шестого ранга. Мультипликативный базис тензора шестого ранга — $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$. Свертывая индексы попарно произвольным образом, получим какой-нибудь изотропный тензор шестого ранга. Например, имеем

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m = \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} \underline{\underline{\underline{\underline{\mathbf{E}}}}} \quad (9.2)$$

Остальные получаются из (9.2) перестановкой базисных векторов. Очевидно, переставляя базисные векторы в (9.2), в общем случае получим $6! = 720$ перестановок (изотропных тензоров шестого ранга). Среди этих тензоров лишь пятнадцать линейно независимых (несводимых друг к

другу) [21, 54]. Для их получения рассмотрим, например, следующие тензоры:

$$\mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \quad \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i. \quad (9.3)$$

Видно, что в тензорах (9.3) базисный вектор \mathbf{r}^i занимает всевозможные места. Теперь, оставляя на месте в (9.3) векторы \mathbf{r}_i и \mathbf{r}^i и переставляя остальные, из каждого тензора получим еще по два тензора:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_m \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \\ & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m \mathbf{r}^i, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Нетрудно заметить, что, используя обозначения изотропных тензоров четвертого ранга и единичного тензора второго ранга, (9.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{E}} &= \underline{\mathbb{C}}_{(1)}\underline{\mathbb{E}} = \underline{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{C}}_{(1)}, & \underline{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{C}}_{(2)}, & \underline{\mathbb{E}}\underline{\mathbb{C}}_{(3)}, \\ \underline{\mathbb{C}}_{(2)}\underline{\mathbb{E}}, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \underline{\mathbb{E}} \mathbf{r}^k, \\ \underline{\mathbb{C}}_{(3)}\underline{\mathbb{E}}, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m \mathbf{r}^k, \\ \mathbf{r}_i \underline{\mathbb{E}} \mathbf{r}_m \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}_m \mathbf{r}^k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, & \mathbf{r}_i \mathbf{r}_m \underline{\mathbb{E}} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^m, \\ \mathbf{r}_i \underline{\mathbb{C}}_{(1)} \mathbf{r}^i, & \mathbf{r}_i \underline{\mathbb{C}}_{(2)} \mathbf{r}^i, & \mathbf{r}_i \underline{\mathbb{C}}_{(3)} \mathbf{r}^i. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Следует заметить, что девять из тензоров (9.4) получаются при однократном умножении изотропных тензоров четвертого ранга (9.1), т. е.

$$\underline{\mathbb{C}}_{ij} = \underline{\mathbb{C}}_{(i)} \cdot \underline{\mathbb{C}}_{(j)}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (9.6)$$

Остальные шесть тензоров содержатся в качестве слагаемых [21] в тензорном произведении дискриминантного тензора $\underline{\mathbb{C}} = C_{ijk} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k$ на себя. В самом деле, получаем

$$\underline{\mathbb{C}}\underline{\mathbb{C}} = \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k [\mathbf{r}_i (\mathbf{r}_j \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j (\mathbf{r}_k \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k) + \mathbf{r}_k (\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)]. \quad (9.7)$$

Следовательно, произвольный тензор шестого ранга $\underline{\mathbb{C}}$ представляется в виде линейной комбинации тензоров (9.6) и тензоров, имеющих в правой части (9.7) в качестве слагаемых, т. е. тензор $\underline{\mathbb{C}}$ можно представить соотношением

$$\underline{\mathbb{C}} = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} \underline{\mathbb{C}}_{(i)} \cdot \underline{\mathbb{C}}_{(j)} + \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k [\mathbf{r}_i (b_1 \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k + b_2 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_j) + \mathbf{r}_j (b_3 \mathbf{r}_k \mathbf{r}_i + b_4 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_k) + \mathbf{r}_k (b_5 \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j + b_6 \mathbf{r}_j \mathbf{r}_i)]. \quad (9.8)$$

Далее, не останавливаясь на подробном изложении материала, касающегося изотропных тензоров в \mathbb{R}^3 , отметим, что имеют место теоремы:

Теорема 9.1. *Изотропные тензоры нечетного ранга не существуют.*

Теорема 9.2. *Изотропный тензор заданного четного ранга в \mathbb{R}^3 может быть построен из соответствующего мультипликативного базиса путем попарного свертывания индексов у базисных векторов.*

Теорема 9.3. *Все линейно независимые (несводимые друг к другу) изотропные тензоры заданного четного ранга содержатся в множестве перестановок, которое получается с помощью всевозможных перестановок базисных векторов в каком-либо изотропном тензоре того же ранга, составленном из соответствующего мультипликативного базиса путем попарного свертывания индексов у базисных векторов.*

10. ОБ ОРТОТРОПНЫХ ТЕНЗОРАХ В \mathbb{R}^2 И \mathbb{R}^3 . ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОРТОТРОПНЫХ ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО РАНГА

Построим линейно независимые ортотропные тензоры второго, четвертого и шестого рангов. Сформулируем некоторые теоремы, позволяющие построить ортотропные тензоры.

Введем определения:

Определение 10.1. Группа преобразований координат

$$x_{\alpha'} = a_{\alpha} x_{\alpha} \quad < \alpha = 1, 2, 3 >,$$

где a_{α} — следующие наборы чисел (a_1, a_2, a_3) :

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1), \quad (-1, 1, 1), \quad (1, -1, 1), \quad (1, 1, -1), \\ &(1, -1, -1), \quad (-1, 1, -1), \quad (-1, -1, 1), \quad (-1, -1, -1), \end{aligned}$$

называется *группой ортотропии в \mathbb{R}^3* .

Определение 10.2. Группа преобразований координат

$$x_{\alpha'} = a_{\alpha} x_{\alpha} \quad < \alpha = 1, 2 >,$$

где a_{α} — следующие наборы чисел (a_1, a_2) :

$$(1, 1), \quad (-1, 1), \quad (1, -1), \quad (-1, -1),$$

называется *группой ортотропии в \mathbb{R}^2* .

Заметим, что группу ортотропии в \mathbb{R}^3 , которая является подгруппой полной ортогональной группы преобразований координат I , можно описать с помощью следующих матриц [54]:

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ S_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ D_3 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

а группу ортотропии в \mathbb{R}^2 можно представить в виде следующих матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.2)$$

Описание группы с помощью матриц называется ее *матричным представлением*. Если число матриц при матричном представлении группы конечно, то группа называется *точечной*. В противном случае группа называется *бесконечной*, или *непрерывной*.

Следует заметить, что группа ортотропии в \mathbb{R}^3 содержит группу инверсии, группы отражений относительно плоскостей и группы симметрии относительно осей в \mathbb{R}^3 , а группа ортотропии в \mathbb{R}^2 состоит из групп инверсии и отражений относительно осей в \mathbb{R}^2 .

Введем определение ортотропного тензора.

Определение 10.3. Тензор, группой симметрии которого является группа ортотропии в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2), называется *ортотропным тензором* в \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2).

Определение 10.4. Группа преобразований координат, относительно которой не меняются значения компонент тензора, называется *группой симметрии* этого тензора.

Далее построим линейно независимые ортотропные тензоры второго, четвертого и шестого рангов. Прежде чем построить эти тензоры, заметим, что число линейно независимых тензоров заданного ранга, группой симметрии которых является точечная группа, вычисляется по формуле [9, 24, 54]:

$$k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \chi^n(g_m), \quad (10.3)$$

где N — порядок группы (число матриц при матричном представлении группы), g_m , $m = \overline{1, N}$, — матрицы группы симметрии, $\chi(g_m)$ — характер матричного представления группы симметрии, n — ранг тензоров.

На основании [19–21, 24, 54, 68] и др. можно заключить, что справедливы следующие теоремы:

Теорема 10.1. *Ортотропные тензоры нечетного ранга не существуют.*

Теорема 10.2. *Ортотропные тензоры четного ранга $r = 2k$, где k — произвольное конечное натуральное число, можно получить из мультипликативного базиса тензора того же ранга, образуя из него тензор, состоящий из $k = r/2$ пар одноименных базисных векторов при условии, что по повторяющимся индексам суммирование не производится.*

Следует заметить, что выбор пар базисных векторов, которым присваивается одинаковое имя, совершенно произволен. В частности, базисные векторы, носящие одинаковое имя, могут оказаться рядом друг с другом или вдали друг от друга. Например, ортотропный тензор шестого ранга можно получить из мультипликативного базиса $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$, если \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j присвоим одно имя, \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_l — другое, а \mathbf{r}_m и \mathbf{r}_n — третье. В результате получим следующие ортотропные тензоры шестого ранга:

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \langle \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \rangle. \quad (10.4)$$

Здесь \mathbf{r}_α — ортонормированный базис.

В (10.4) одноименные базисные векторы¹ находятся рядом друг с другом. Конечно, можно было рассматривать тензоры, получающиеся из (10.4) произвольной перестановкой базисных векторов, например,

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \langle \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \rangle. \quad (10.5)$$

В (10.5) одноименные базисные векторы с именами α и β находятся вдали друг от друга. Очевидно, из (10.4) и (10.5) следует, что пары одноименных базисных векторов тоже могут иметь одинаковое имя. Таковыми являются, например, тензоры

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha, \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta, \quad \langle \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \rangle.$$

Нетрудно заметить, что из какой-либо перестановки ортотропного тензора шестого ранга (например, из (10.4)) можно получить путем перестановок все множество ортотропных тензоров шестого ранга.

Очевидно, из множества всех $6! = 720$ перестановок (10.4), содержащего и одинаковые ортотропные тензоры, всегда можно выбрать линейно независимые тензоры, число которых меньше общего числа перестановок. Следовательно, все сказанное выше относительно тензора шестого ранга распространяется на тензор любого четного ранга, что можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 10.3. *Все линейно независимые ортотропные тензоры заданного четного ранга содержатся в множестве перестановок базисных векторов какого-либо ортотропного тензора того же ранга, составленного из соответствующего мультипликативного базиса путем попарного присвоения одинаковых имен его базисным векторам.*

Если построены изотропные тензоры заданного четного ранга, то нетрудно построить из них соответствующие ортотропные тензоры. В этой связи справедлива

Теорема 10.4. *Ортотропные тензоры заданного четного ранга можно получить из изотропных тензоров того же ранга путем замены одноименных базисных векторов с индексами из букв латинского алфавита на одноименные соответствующие базисные векторы с индексами из букв греческого алфавита (например, $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_k \mathbf{r}^i \mathbf{r}^k$ заменяется тензором $\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta$).*

Заметим, что замена одноименных индексов из букв латинского алфавита на одноименные индексы из букв греческого алфавита равносильна запрету суммирования по повторяющимся индексам из букв латинского алфавита. Поэтому теорему 10.4 коротко можно сформулировать в следующем виде:

Из изотропных тензоров, представленных с помощью базисных векторов ортонормированного базиса, соответствующие ортотропные тензоры получаются отменой (запретом) суммирования по повторяющимся латинским индексам.

Имеет место и следующая теорема:

¹Запись $\langle \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3 \rangle$ означает, что α, β, γ принимают значения 1, 2, 3 и по повторяющимся индексам суммирование не производится

Теорема 10.5. Из всех линейно независимых изотропных тензоров заданного четного ранга, составленных с помощью базисных векторов ортонормированного базиса, путем запрета суммирования по повторяющимся индексам получается множество ортотропных тензоров, среди которых имеются все линейно независимые ортотропные тензоры.

Используя теорему 10.5, с помощью изотропных тензоров шестого ранга (9.4) построим все ортотропные тензоры шестого ранга. По условию теоремы 10.5 после простых размышлений из (9.4) получим следующие линейно независимые ортотропные тензоры шестого ранга:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \beta \neq \gamma; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \beta \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \beta \neq \alpha; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \gamma \neq \alpha; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\gamma, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \\
& \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\gamma \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha; \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{10.6}$$

Нетрудно заметить, что из первого объекта (10.6), придавая все указанные значения индексам, получаем 27 тензоров; из второго объекта первой строки, объектов второй строки и первого объекта четвертой строки получаем по 18 тензоров; из объектов третьей строки, второго объекта пятой строки и первого объекта седьмой строки получаем по 12 тензоров, а из остальных шести объектов получаем по 6 тензоров. Простой подсчет показывает, что число линейно независимых ортотропных тензоров шестого ранга равно 183. Следовательно, такое же число получается с помощью формулы, имеющей место в теории характеров матричных представлений групп [9, 24, 54].

Следует заметить, что общее выражение для ортотропного тензора шестого ранга — линейная комбинация 183 ортотропных тензоров шестого ранга (10.6). Иными словами, ортотропный тензор шестого ранга имеет 183 линейно независимых компонента. Конечно, если тензор обладает симметрией, то число линейно независимых компонент уменьшается. На рассмотрении симметрий тензора останавливаться не будем.

Ниже, используя изложенный выше материал, рассмотрим подробнее ортотропные тензоры второго и четвертого ранга.

Ортотропный тензор второго ранга. Тензорный базис группы ортотропии составляют тензоры [19, 20, 24, 54, 68]

$$\boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)} = \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \quad (\gamma_{ij}^{(\alpha)} = \delta_{\alpha i} \delta_{\alpha j}, \quad \boldsymbol{\gamma}^{(\alpha)} = \gamma_{ij}^{(\alpha)} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j), \quad < \alpha = 1, 2, 3 >. \tag{10.7}$$

Нетрудно заметить, что в силу теоремы 10.5 из изотропного тензора второго ранга $\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}^i$ получаем те же самые тензоры (10.7). Итак, число линейно независимых ортотропных тензоров второго ранга равняется трем. Поэтому произвольный ортотропный тензор второго ранга $\underline{\mathbf{a}}$ — линейная комбинация этих тензоров

$$\underline{\mathbf{a}} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\alpha} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha = a_{11} \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1 + a_{22} \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2 + a_{33} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \tag{10.8}$$

В компонентах (10.8) можно представить в виде

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^3 a_{\alpha\alpha} \gamma_{ij}^{(\alpha)} = a_{11} \delta_{1i} \delta_{1j} + a_{22} \delta_{2i} \delta_{2j} + a_{33} \delta_{3i} \delta_{3j}. \tag{10.9}$$

Ортотропный тензор четвертого ранга. В силу теоремы 10.5 аналогично (10.6) все линейно независимые ортотропные тензоры четвертого ранга можно получить из изотропных тензоров (9.1). В самом деле, поступая так же, как при получении тензоров (10.6), из (9.1) будем иметь

$$\mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta; \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta, \quad \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha, \quad < \alpha \neq \beta >; \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{10.10}$$

Итак, всего имеем 21 ортотропный тензор четвертого ранга. Следовательно, произвольный ортотропный тензор четвертого ранга представляется в виде линейной комбинации тензоров (10.10),

т. е.

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} = C_{ijkl} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 C_{\alpha\alpha\beta\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta=1}^3 C_{\alpha\beta\alpha\beta} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta + \sum_{\alpha \neq \beta=1}^3 C_{\alpha\beta\beta\alpha} \mathbf{r}_\alpha \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\beta \mathbf{r}_\alpha. \quad (10.11)$$

Используя [54] обозначения (10.7), в компонентах (10.11) можно записать в форме

$$C_{ijkl} = \sum_{\alpha, \beta=1}^3 C_{\alpha\alpha\beta\beta} \gamma_{ij}^{(\alpha)} \gamma_{kl}^{(\beta)} + \sum_{\omega \neq \varepsilon=1}^3 C_{\omega\varepsilon\omega\varepsilon} \gamma_{ik}^{(\omega)} \gamma_{jl}^{(\varepsilon)} + \sum_{\eta \neq \vartheta=1}^3 C_{\eta\vartheta\eta\vartheta} \gamma_{il}^{(\eta)} \gamma_{jk}^{(\vartheta)}. \quad (10.12)$$

В развернутом виде (10.12) имеет представления

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C_{1111} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{1122} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{1133} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{2211} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{2222} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{2233} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{3311} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{3322} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{1212} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + C_{1221} \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \\ & + C_{2112} \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)} + C_{2121} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + \\ & + C_{1313} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{1331} \gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \\ & + C_{3113} \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)} + C_{3131} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + \\ & + C_{2323} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{2332} \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(3)} + \\ & + C_{3223} \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(2)} + C_{3232} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Если компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ обладают симметрией $C_{ijkl} = C_{klij}$, то вместо (10.13) после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & C_{1111} \gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(1)} + C_{2222} \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(2)} + C_{3333} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)} + \\ & + C_{1122} (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(2)} + \gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(1)}) + C_{1133} (\gamma_{ij}^{(1)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(1)}) + \\ & + C_{2233} (\gamma_{ij}^{(2)} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(2)}) + C_{1212} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(2)} + \\ & + C_{1221} (\gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(2)} + \gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(1)}) + C_{2121} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(1)} + C_{1313} \gamma_{ik}^{(1)} \gamma_{jl}^{(3)} + \\ & + C_{1331} (\gamma_{il}^{(1)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(1)}) + C_{3131} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(1)} + C_{2323} \gamma_{ik}^{(2)} \gamma_{jl}^{(3)} + \\ & + C_{2332} (\gamma_{il}^{(2)} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} \gamma_{jk}^{(2)}) + C_{3232} \gamma_{ik}^{(3)} \gamma_{jl}^{(2)}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

В правой части (10.14) имеем 15 независимых компонент, т. е. в моментной теории ортотропный тензор четвертого ранга имеет 15 независимых компонент.

Теперь, если допустим, что компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$, кроме указанных выше, обладают еще симметрией $C_{ijkl} = C_{jikl}$, то из (10.14) получим такое же представление компонент ортотропного тензора, какое имеет место в классической теории упругости [17, 18, 54, 57, 59] (см. также [9, 46, 53, 61, 79]).

11. О ГИРОТРОПНЫХ В \mathbb{R}^2 И ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ В \mathbb{R}^3 ТЕНЗОРАХ

Далее рассмотрим операцию сужения индексов и связанные с ней некоторые вопросы [5]. Построим гиротропные и трансверсально-изотропные тензоры второго, третьего, четвертого, пятого и шестого рангов. Укажем несколько способов построения трансверсально-изотропных тензоров. Сформулируем некоторые теоремы и утверждения.

Вспомним, что строчные латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а прописные латинские индексы — 1, 2. Греческие индексы пробегают значения в зависимости от обстоятельств. Докажем простую теорему.

Теорема 11.1. Пусть имеется трехмерный тензор $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ произвольного ранга с компонентами $A_{j_1 j_2 \dots j_q}^{i_1 i_2 \dots i_p}$ относительно группы преобразований координат

$$x^{i'} = x^i(x^1, x^2, x^3). \quad (11.1)$$

Если все строчные латинские индексы, принимающие значения 1, 2, 3, заменить соответствующими прописными латинскими индексами, пробегающие значения 1, 2, то получится экстенсив \mathbb{A} с компонентами $A_{J_1 J_2 \dots J_q}^{I_1 I_2 \dots I_p}$, который является тензором того же ранга относительно группы преобразований координат

$$x^{I'} = x^{I'}(x^1, x^2), \quad x^3 = x^3. \quad (11.2)$$

Доказательство. Докажем эту теорему для случая тензора второго ранга. Пусть $A_{j'}^{i'}$ — смешанные компоненты этого тензора. Очевидно, имеем

$$A_{j'}^{i'} = D_i^{i'} D_{j'}^j A_{j'}^i, \quad D_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_{j'}^j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}. \quad (11.3)$$

Полагая в первом соотношении (11.3) $i' = I$, $j' = J$ и учитывая в силу (11.2) равенства $D_3^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^3} = 0$, $D_{J'}^3 = \frac{\partial x^3}{\partial x^{J'}} = 0$, получаем

$$A_{J'}^{I'} = D_I^{I'} D_{J'}^J A_{J'}^I, \quad D_I^{I'} = \frac{\partial x^{I'}}{\partial x^I}, \quad D_{J'}^J = \frac{\partial x^J}{\partial x^{J'}}. \quad (11.4)$$

Соотношениями (11.4) теорема 11.1 доказана. \square

Теперь, прежде чем сформулировать более общую теорему, введем определения.

Определение 11.1. Замена одного индекса другим у какой-нибудь величины, который пробегает меньшее (большее) множество значений, называется операцией *сужения (расширения) индекса*.

Определение 11.2. Замена строчного латинского индекса прописным латинским индексом называется операцией *минимального сужения индекса*.

Определение 11.3. Замена строчного латинского индекса тройкой называется операцией *максимального сужения индекса*.

Определение 11.4. Замена некоторых строчных латинских индексов у компонент произвольного трехмерного тензора (мультипликативного базиса) прописными латинскими индексами, а остальных индексов тремя называется операцией *сужения компонент* тензора (мультипликативного базиса).

Определение 11.5. Замена некоторых немых строчных латинских индексов в представлении трехмерного тензора немymi прописными латинскими индексами, а остальных немых индексов тройкой называется операцией *сужения тензора*.

Определение 11.6. Операция, при которой происходит минимальное сужение каждого индекса (немого индекса) у какой-нибудь величины (в представлении пространственного тензора), называется операцией *минимального сужения* этой величины (пространственного тензора).

Определение 11.7. Операция, при которой происходит максимальное сужение каждого индекса (немого индекса) у какой-нибудь величины (в представлении пространственного тензора), называется операцией *максимального сужения* этой величины (пространственного тензора).

Определение 11.8. Тензор относительно группы преобразований (11.2), получающийся с помощью операции минимального сужения пространственного тензора, называется *минимальным сужением*.

Определение 11.9. Тензор относительно группы преобразований (11.2), получающийся с помощью операции максимального сужения пространственного тензора, называется *максимальным сужением*.

Утверждение 11.1. Максимальное сужение компонент пространственного тензора — скаляр относительно группы преобразований (11.2).

Определение 11.10. Число троек среди индексов вследствие операции сужения индексов у какой-нибудь величины (компонент тензора, мультипликативного базиса) называется *порядком сужения* этой величины (компонент тензора, мультипликативного базиса).

Утверждение 11.2. *Порядок сужения тензора равен порядку сужения компонент тензора или мультипликативного базиса.*

Теперь сформулируем обещанную выше теорему.

Теорема 11.2. *Вследствие операции сужения индексов из пространственного тензора получается тензор относительно группы преобразований координат (11.2).*

Эта более общая теорема доказывается аналогично теореме 11.1. Эти теоремы легко обобщить на случай n -мерного пространства. Здесь обобщениями заниматься не будем.

Нетрудно доказать, что имеет место

Утверждение 11.3. *Мультипликативный базис (мультибазис) любого порядка, составленный из базисных векторов \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}^3 , является инвариантным объектом (тензором) относительно группы преобразований координат (11.2). Кроме того, при тензорном умножении какого-либо мультибазиса, составленного из базисных векторов \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}^3 , слева и справа на любой тензор относительно группы преобразований координат (11.1) образуются инвариантные объекты (тензоры) относительно группы преобразований координат (11.2). Если такие мультибазисы расположить между базисными векторами в представлении какого-либо тензора относительно группы преобразований координат (11.1), то получим тензор относительно группы преобразований координат (11.2).*

Заметим, что операцию сужения индексов порядка $m = r + s$, где $r \leq p$, $s \leq q$, компонент $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ тензора \mathbb{A} можно осуществить при помощи свертывания индексов у этих компонент с индексами произведения компонент ЕТВР вида

$$g_3^{i_1} g_3^{i_2} \dots g_3^{i_r} g_{I_{r+1}}^{i_{r+1}} g_{I_{r+2}}^{i_{r+2}} \dots g_{I_p}^{i_p} g_{j_1}^3 g_{j_2}^3 \dots g_{j_s}^3 g_{j_{s+1}}^{J_{s+1}} g_{j_{s+2}}^{J_{s+2}} \dots g_{j_q}^{J_q}.$$

Свертывая индексы $i_1, i_1, \dots, i_r, j_1, j_1, \dots, j_s$ последнего выражения с различными индексами компонент пространственного тензора, получим, вообще говоря, компоненты различных тензоров относительно группы преобразований координат (11.2).

Следует заметить, что сказанное выше справедливо и для более частных случаев групп преобразований координат, чем (11.2), при условии, что при всех рассматриваемых группах преобразований координат третья координата остается неизменной ($x^{3'} = x^3$). В частности, вместо (11.2) можно рассматривать группу преобразований координат

$$x^{I'} = a_{j'}^{I'} x^J, \quad x^{3'} = x^3, \quad (11.5)$$

где $a_{j'}^{I'}$ — постоянные величины, или группу трансверсальной изотропии

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ x_3' = x_3, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \end{cases} \quad (11.6)$$

которую еще называют группой преобразований T_3 .

11.1. О двумерных гиротропных тензорах. Введем определение двумерного гиротропного тензора.

Определение 11.11. Двумерный тензор называется *гиротропным*, если группа симметрии этого тензора — собственно ортогональная группа (группа вращения) в \mathbb{R}^2 .

Эта группа преобразований координат представляется в виде

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi, \\ x_2' = -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (11.7)$$

Следует заметить, что число линейно независимых трансверсально-изотропных и двумерных гиротропных тензоров n -го ранга, компоненты которых не обладают никакой симметрией, вычисляется [9, 24, 54] по формуле

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi^n(g_\varphi) d\varphi, \quad (11.8)$$

где n — ранг тензора, $\chi^n(g_\varphi)$ — характер матричного представления рассматриваемой группы преобразований, g_φ — матрица группы преобразований.

Заметим, что числа линейно независимых трансверсально-изотропных и двумерных гиротропных тензоров n -го ранга совпадают с числами линейно независимых компонент этих тензоров соответственно.

Далее рассмотрим различные способы составления (построения) линейно независимых двумерных и трансверсально-изотропных тензоров и построим эти тензоры до шестого ранга включительно.

В силу формулы (11.8), в которой g_φ — матрица группы преобразований (11.7), легко доказать, что имеет место

Теорема 11.3. *Двумерные гиротропные тензоры нечетных рангов не существуют.*

На основании той же формулы нетрудно показать, что число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров нулевого ранга (скаляров) равно 1. Любой другой двумерный гиротропный тензор определяется с точностью до постоянного множителя. Аналогично можно доказать, что число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров второго ранга равно 2. В самом деле, учитывая, что для группы преобразований (11.7) характер матричного представления $\chi(g_\varphi) = 2 \cos \varphi$, из (11.8) получим

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2.$$

Нетрудно доказать, что линейно независимыми двумерными гиротропными тензорами второго ранга являются тензоры: $\mathbf{I} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}^I$ — двумерный единичный тензор второго ранга, который в то же время — двумерный изотропный тензор второго ранга, и $\mathbf{C} = C_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J$ — двумерный дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивиты) второго ранга. Следовательно, общее выражение двумерного гиротропного тензора второго ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, — линейная комбинация этих тензоров. Теперь рассмотрим двумерные гиротропные тензоры четвертого ранга. В этом случае число линейно независимых тензоров равно 6. Действительно, имеем

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^4 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(3 + 4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi) d\varphi = 6.$$

Аналогично вычисляется число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров шестого ранга. Оно равно 20. В самом деле, находим

$$k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2 \cos \varphi)^6 d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(10 + 15 \cos 2\varphi + 6 \cos 4\varphi + \cos 6\varphi) d\varphi = 20.$$

Можно вычислить число линейно независимых двумерных гиротропных тензоров более высокого ранга.

Заметим, что двумерные гиротропные тензоры в то же время являются трансверсально-изотропными тензорами, и в силу того, что они будут рассмотрены ниже, здесь на их построении мы останавливаться не будем.

11.2. О трансверсально-изотропных тензорах. Введем определение трансверсально-изотропного тензора.

Определение 11.12. Тензор называется *трансверсально-изотропным*, или *монотропным*, если группа симметрии этого тензора — группа трансверсальной изотропии (11.6).

В рассматриваемом случае число линейно независимых тензоров n -го ранга находится по формуле (11.8), где теперь $\chi(g_\varphi) = 1 + 2 \cos \varphi$, что следует из (11.6).

Осуществляя простые выкладки, легко доказать, что число линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров: а) равно 1 для множества тензоров нулевого ранга; б) равно 1 для множества тензоров первого ранга; в) равно 3 для множества тензоров второго ранга; г) равно 7 для множества тензоров третьего ранга; д) равно 19 для множества тензоров четвертого ранга; е) равно 51 для множества тензоров пятого ранга; з) равно 141 для множества тензоров шестого ранга.

Далее рассмотрим способы построения трансверсально-изотропных тензоров и построим линейно независимые тензоры до шестого ранга включительно.

Известно [54], что тензорный базис группы трансверсальной изотропии составляют тензоры

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I = \underline{\gamma}^{(1)} + \underline{\gamma}^{(2)}, \quad \underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \quad (11.9)$$

или тензоры

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i, \quad \underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3, \quad (11.10)$$

где \mathbf{r}_i — единичный базисный вектор. Другими словами, тензоры (11.9) и (11.10) являются образующими тензорами группы трансверсальной изотропии.

Очевидно, с помощью этих тензоров, группируя их подходящим образом и перебирая всевозможные случаи, можно составить множество всех линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров заданного ранга. Это — один из различных способов построения этих тензоров. Назовем его методом группировки и перебора.

Нетрудно заметить, что трансверсально-изотропный тензор нулевого ранга — скаляр, а любой другой скаляр определяется с точностью до постоянного множителя. Аналогично легко показать, что трансверсально-изотропный тензор первого ранга — \mathbf{r}_3 , а общее выражение для трансверсально-изотропного тензора первого ранга имеет вид $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{r}_3$, где λ — некоторое число.

Так как число линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров второго ранга равняется 3 и два тензора $\underline{\mathbf{I}}$ и $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ — линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры второго ранга, то третий тензор второго ранга должен быть составлен с помощью \mathbf{r}_3 . Очевидно, таким тензором будет $\mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3$.

Таким образом, линейно независимыми трансверсально-изотропными тензорами второго ранга являются тензоры

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I, \quad \underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \underline{\gamma}^{(3)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \quad (11.11)$$

Общий вид трансверсально-изотропного тензора второго ранга $\underline{\mathbf{a}}$, компоненты которого не обладают никакой симметрией, — линейная комбинация тензоров (11.11), т. е.

$$\underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\boldsymbol{\epsilon}} + c \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \quad (11.12)$$

Если $\underline{\mathbf{a}}$ — симметричный тензор ($\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}^T$), то $b = 0$, и из (11.12) получим следующее представление

$$\underline{\mathbf{a}} = a \underline{\mathbf{I}} + c \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \quad \text{при} \quad \underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}^T. \quad (11.13)$$

Нетрудно доказать, что имеют места следующие утверждения:

Утверждение 11.4. Для любого изотропного или трансверсально-изотропного тензора $\underline{\mathbf{A}}$ тензоры

$$\epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{A}} \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{A}} \mathbf{r}_I, \quad \mathbf{r}_3 \underline{\mathbf{A}} \mathbf{r}_3$$

являются трансверсально-изотропными тензорами.

Утверждение 11.5. Изотропные тензоры в то же время являются трансверсально-изотропными тензорами.

Утверждение 11.6. Тензоры

$$\mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_L, \quad \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \quad \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_L$$

являются трансверсально-изотропными тензорами.

Нетрудно заметить, что с помощью тензоров (11.9) или (11.10), группируя их и перебирая всевозможные случаи, а также учитывая утверждения 11.4–11.6, можно составить множество всех линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров заданного ранга. Это один из различных способов построения этих тензоров. Назовем его *методом группировки и перебора*. С помощью этого метода, используя тензоры (11.9) или (11.11) и \mathbf{r}_3 (группируя их и учитывая

утверждение 11.4), нетрудно построить семь линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров. Они имеют вид

$$\mathbf{I}\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3\mathbf{I}, \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I, \mathbf{e}\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3\mathbf{e}, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3 = \gamma^{(3)}\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3\gamma^{(3)}. \quad (11.14)$$

Трансверсально-изотропный тензор третьего ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией тензоров (11.14).

Легко показать, что три из тензоров (11.14) содержатся в представлении пространственного гиротропного тензора $\underline{\underline{\epsilon}}$ (тензора третьего ранга)

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \mathbf{e}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3\mathbf{e} - \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J.$$

Итак, пространственный гиротропный тензор — специальная линейная комбинация трех из семи линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров третьего ранга.

Нетрудно построить и линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга. Эти тензоры можно составить методом группировки и перебора тензоров (11.11) и с помощью утверждений 11.4–11.6. В результате получим следующие тензоры:

$$\begin{aligned} &\mathbf{I}\mathbf{I}, \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J, \mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_I, \mathbf{e}\mathbf{e}, \epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_I\mathbf{r}_L, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K, \epsilon_{IJ}\epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_L, \\ &\epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{e}\mathbf{r}_J, \mathbf{I}\mathbf{e}, \mathbf{e}\mathbf{I}, \mathbf{r}_I\mathbf{e}\mathbf{r}_I, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_J, \mathbf{I}\gamma^{(3)}, \gamma^{(3)}\mathbf{I}, \mathbf{e}\gamma^{(3)}, \gamma^{(3)}\mathbf{e}, \mathbf{r}_I\gamma^{(3)}\mathbf{r}_I, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\gamma^{(3)}\mathbf{r}_J, \\ &\gamma^{(3)}\gamma^{(3)}, \mathbf{r}_3\mathbf{I}\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_3\mathbf{r}_3\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_I, \mathbf{r}_3\mathbf{e}\mathbf{r}_3, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J, \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_3\mathbf{r}_J. \end{aligned} \quad (11.15)$$

Итак, всего построено 25 трансверсально-изотропных тензоров четвертого ранга. Однако не все они линейно независимы. Как известно, число последних равняется 19, т. е. среди тензоров (11.15) имеются шесть лишних. Нетрудно доказать, что тензоры, которые содержат \mathbf{r}_3 (их число равно 13), линейно независимы. Из оставшихся 12 двумерных тензоров надо выбрать шесть линейно независимых, которые, очевидно, вместе с остальными 13 тензорами создадут линейно независимую систему. Введем для двумерных тензоров следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} &= \mathbf{I}\mathbf{I}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} = \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_I, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(4)} = \mathbf{I}\mathbf{e}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(5)} = \epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_I\mathbf{r}_L, \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(6)} &= \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_J, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(1)} = \mathbf{e}\mathbf{e}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(2)} = \epsilon_{IJ}\epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_L, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(3)} = \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{e}\mathbf{r}_J, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(4)} = \mathbf{e}\mathbf{I}, \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(5)} &= \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_J\mathbf{r}_K, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(6)} = \mathbf{r}_I\mathbf{e}\mathbf{r}_I. \end{aligned} \quad (11.16)$$

Нетрудно доказать, что между тензорами (11.16) имеются следующие связи:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(1)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(2)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(3)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(4)} &= \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(6)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(5)}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(5)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(6)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(4)}, \underline{\underline{\mathbf{a}}}_{(6)} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(5)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(4)}. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Таким образом, шестью соотношениями (11.17) между собой связаны 12 тензоров (11.16). Отсюда можно заключить, что в качестве линейно независимых можно выбрать шесть любых линейно независимых тензоров из множества 12 тензоров (11.16). В частности, например, в качестве линейно независимых можно выбрать первые шесть тензоров из (11.16) или последние шесть.

Следует заметить, что тензоры (11.16) в то же время являются двумерными гиротропными тензорами четвертого ранга. Так как в качестве линейно независимых двумерных гиротропных (трансверсально-изотропных) можно рассматривать, например, тензоры

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} = \mathbf{I}\mathbf{I}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} = \mathbf{r}_I\mathbf{r}_J\mathbf{r}_I\mathbf{r}_J, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_I, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(4)} = \mathbf{I}\mathbf{e}, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(5)} = \epsilon_{KL}\mathbf{r}_I\mathbf{r}_K\mathbf{r}_I\mathbf{r}_L, \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(6)} = \epsilon_{IJ}\mathbf{r}_I\mathbf{I}\mathbf{r}_J, \quad (11.18)$$

то двумерный гиротропный (трансверсально-изотропный) тензор четвертого ранга $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$, компоненты которого не обладают никакой симметрией, будет являться линейной комбинацией этих тензоров, т. е.

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = C_{IJKL}\mathbf{r}^I\mathbf{r}^J\mathbf{r}^K\mathbf{r}^L = \sum_{k=1}^6 C_k \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(k)}, \quad (11.19)$$

где C_k , $k = \overline{1,6}$ — некоторые отличные от нуля постоянные. Заметим, что первые три тензора из (11.18) представляют собой двумерные изотропные тензоры четвертого ранга, которые, конечно, являются минимальными сужениями соответствующих пространственных изотропных тензоров четвертого ранга. Поэтому для них сохранены те же самые обозначения, которые имели пространственные тензоры. Если компоненты тензора $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ обладают симметрией $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$,

то $C_4 = C_5 = C_6 = 0$ (равенство нулю этих постоянных будет доказано ниже), и в этом случае вместо (11.19) будем иметь

$$\underline{\mathbb{C}} = C_{IJKL} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J \mathbf{r}^K \mathbf{r}^L = \sum_{k=1}^3 C_k \underline{\mathbb{C}}_{(k)}. \quad (11.20)$$

Заметим, что (11.20) является представлением двумерного изотропного (гиротропного) тензора четвертого ранга, компоненты которого обладают симметрией $C_{IJKL} = C_{KLIJ}$. Видно, что он имеет три независимых компоненты.

Теперь вернемся к рассмотрению пространственного случая. Для тензоров, которые содержат \mathbf{r}_3 , введем обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{C}}_{(7)} &= \mathbf{I} \underline{\gamma}^{(3)}, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(8)} = \underline{\epsilon} \underline{\gamma}^{(3)}, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(9)} = \underline{\gamma}^{(3)} \mathbf{I}, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(10)} = \underline{\gamma}^{(3)} \underline{\epsilon}, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(11)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \\ \underline{\mathbb{C}}_{(12)} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(13)} = \mathbf{r}_I \underline{\gamma}^{(3)} \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(14)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \underline{\gamma}^{(3)} \mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(15)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{I} \mathbf{r}_3, \\ \underline{\mathbb{C}}_{(16)} &= \mathbf{r}_3 \underline{\epsilon} \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(17)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(18)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbb{C}}_{(19)} = \underline{\gamma}^{(3)} \underline{\gamma}^{(3)}. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Следовательно, тензоры (11.18) и (11.21) представляют собой все линейно независимые пространственные трансверсально-изотропные тензоры четвертого ранга. Поэтому пространственный трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, имеет 19 независимых компонент и является линейной комбинацией тензоров (11.18) и (11.21), т. е.

$$\underline{\mathbb{C}} = C_{ijkl} \mathbf{r}^i \mathbf{r}^j \mathbf{r}^k \mathbf{r}^l = \sum_{k=1}^{19} C_k \underline{\mathbb{C}}_{(k)}, \quad (11.22)$$

где C_k , $k = \overline{1, 19}$ — некоторые, отличные от нуля, постоянные.

Представим (11.22) в компонентах:

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_1 I_{ij} I_{kl} + C_2 I_{ik} I_{jl} + C_3 I_{il} I_{jk} + C_4 I_{ij} \epsilon_{kl} + C_5 I_{ik} \epsilon_{jl} + \\ &+ C_6 \epsilon_{il} I_{jk} + C_7 I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + C_8 \epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + C_9 \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl} + C_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl} + \\ &+ C_{11} I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{12} \epsilon_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + C_{13} I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + C_{14} \epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + C_{15} \gamma_{il}^{(3)} I_{jk} + \\ &+ C_{16} \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk} + C_{17} \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + C_{18} \gamma_{ik}^{(3)} \epsilon_{jl} + C_{19} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}, \end{aligned} \quad (11.23)$$

где $I_{ij} = \delta_{Mi} \delta_{Mj}$, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{MN} \delta_{Mi} \delta_{Nj} = -\epsilon_{ji}$.

На основании (11.23) легко усмотреть, что отличными от нуля являются следующие компоненты:

$$\begin{aligned} C_{IJKL} &= C_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + C_2 \delta_{IK} \delta_{JL} + C_3 \delta_{IL} \delta_{JK} + C_4 \delta_{IJ} \epsilon_{KL} + C_5 \delta_{IK} \epsilon_{JL} + C_6 \epsilon_{IL} \delta_{JK}, \\ C_{IJ33} &= C_7 \delta_{IJ} + C_8 \epsilon_{IJ}, \quad C_{33KL} = C_9 \delta_{KL} + C_{10} \epsilon_{KL}, \quad C_{I3K3} = C_{11} \delta_{IK} + C_{12} \epsilon_{IK}, \\ C_{I33L} &= C_{13} \delta_{IL} + C_{14} \epsilon_{IL}, \quad C_{3JK3} = C_{15} \delta_{JK} + C_{16} \epsilon_{JK}, \quad C_{3J3L} = C_{17} \delta_{JL} + C_{18} \epsilon_{JL}, \\ C_{3333} &= C_{19}. \end{aligned} \quad (11.24)$$

С помощью (11.24) простым подсчетом приходим к тому, что трансверсально-изотропный тензор четвертого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, имеет 41 отличную от нуля компоненту, среди которых число независимых компонент равно 19. Из первого соотношения (11.24) легко получаем

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_1 + C_2 + C_3, \quad C_{1112} = -C_{2221} = C_4 + C_5 + C_6, \\ C_{1122} &= C_{2211} = C_1, \quad C_{1121} = -C_{2212} = -C_4, \\ C_{1212} &= C_{2121} = C_2, \quad C_{1211} = -C_{2122} = -C_5, \\ C_{1221} &= C_{2112} = C_3, \quad C_{2111} = -C_{1222} = -C_6. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Отсюда видно, что имеют место соотношения

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221} = C_{2211} + C_{2121} + C_{2112}, \\ C_{1112} &= -C_{2221} = -(C_{1121} + C_{1211} + C_{2111}) = C_{2212} + C_{2122} + C_{1222}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Из остальных соотношений (11.24) находим

$$\begin{aligned}
C_{1133} &= C_{2233} = C_7, & C_{1233} &= -C_{2133} = C_8, \\
C_{3311} &= C_{3322} = C_9, & C_{3312} &= -C_{3321} = C_{10}, \\
C_{1313} &= C_{2323} = C_{11}, & C_{1323} &= -C_{2313} = C_{12}, \\
C_{1331} &= C_{2332} = C_{13}, & C_{1332} &= -C_{2331} = C_{14}, \\
C_{3113} &= C_{3223} = C_{15}, & C_{3123} &= -C_{3213} = C_{16}, \\
C_{3131} &= C_{3232} = C_{17}, & C_{3132} &= -C_{3231} = C_{18}, & C_{3333} &= C_{19}.
\end{aligned} \tag{11.27}$$

На основании (11.25) и (11.27) компоненты C_{ijkl} тензора \mathfrak{C} представим в матричном виде. Будем иметь

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1121} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & -C_{1121} & -C_{1112} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3311} & C_{3333} & C_{3312} & -C_{3312} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{1222} & -C_{1211} & -C_{1233} & C_{1221} & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1331} & C_{1323} & C_{1332} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{3113} & C_{3131} & C_{3123} & C_{3132} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{1323} & -C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{3123} & -C_{3132} & C_{3113} & C_{3131} \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

Теперь допустим, что компоненты C_{ijkl} обладают симметрией $C_{ijkl} = C_{klij}$. Тогда, меняя местами пар индексов IJ и KL в первом соотношении (11.24) и приравнявая правые части полученного соотношения и первого соотношения (11.24), получим

$$C_4(\delta_{IJ}\epsilon_{KL} - \epsilon_{IJ}\delta_{KL}) + C_6(\epsilon_{IL}\delta_{JK} - \delta_{IL}\epsilon_{JK}) = 0.$$

Так как это соотношение выполняется при любых значениях I, J, K, L , из простых вычислений находим $C_4 = 0$, $C_6 = 0$. С учетом этого и вторых равенств второй и третьей строк (11.25) и второго соотношения (11.26) можно доказать, что $C_5 = 0$.

Тогда из первого соотношения (11.24) получим соотношение

$$C_{IJKL} = C_1\delta_{IJ}\delta_{KL} + C_2\delta_{IK}\delta_{JL} + C_3\delta_{IL}\delta_{JK},$$

которое, конечно, является представлением (11.20) в компонентах, а из остальных соотношений находим

$$C_7 = C_9, \quad C_8 = C_{10}, \quad C_{12} = 0, \quad C_{13} = C_{15}, \quad C_{14} = -C_{16}, \quad C_{18} = 0. \tag{11.29}$$

Вводя обозначения

$$\begin{aligned}
a_k &\equiv C_k, & a_4 &\equiv C_7 = C_9, & a_5 &\equiv C_8 = C_{10}, & a_6 &\equiv C_{11}, \\
a_7 &\equiv C_{13} = C_{15}, & a_8 &\equiv C_{14} = -C_{16}, & a_9 &\equiv C_{17}, & a_{10} &\equiv C_{19}
\end{aligned}$$

и учитывая (11.29), соотношения (11.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
C_{ijkl} &= a_1 I_{ij} I_{kl} + a_2 I_{ik} I_{jl} + a_3 I_{il} I_{jk} + a_4 (I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl}) + a_5 (\epsilon_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} \epsilon_{kl}) + \\
&+ a_6 I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + a_7 (I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} I_{jk}) + a_8 (\epsilon_{il} \gamma_{jk}^{(3)} - \gamma_{il}^{(3)} \epsilon_{jk}) + a_9 \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl} + a_{10} \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}.
\end{aligned} \tag{11.30}$$

Отсюда или из (11.24) имеем

$$\begin{aligned}
C_{IJKL} &= C_{KLIJ} = a_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + a_2 \delta_{IK} \delta_{JL} + a_3 \delta_{IL} \delta_{JK}, & C_{IJ33} &= C_{33IJ} = a_4 \delta_{IJ} + a_5 \epsilon_{IJ}, \\
C_{I3K3} &= a_6 \delta_{IK}, & C_{I33L} &= C_{3LI3} = a_7 \delta_{IL} + a_8 \epsilon_{IL}, & C_{3J3L} &= a_9 \delta_{JL}, & C_{3333} &= a_{10}.
\end{aligned} \tag{11.31}$$

Нетрудно заметить, что из (11.26) остается соотношение

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221} = C_{2211} + C_{2121} + C_{2112}. \tag{11.32}$$

Таким образом, если компоненты тензора $\underline{\underline{C}}$ симметричны относительно первой и последней пар индексов, то тензор имеет 10 независимых компонент. В рассматриваемом случае матрица (11.28) получит вид

$$(C) = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & C_{3312} & -C_{3312} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{3312} & C_{1212} & C_{1221} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{3312} & C_{1221} & C_{1212} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1331} & 0 & C_{1332} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1331} & C_{3131} & -C_{1332} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_{1332} & C_{1313} & C_{1331} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1332} & 0 & C_{1331} & C_{3131} & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.33)$$

где в силу (11.32) имеем

$$C_{1111} = C_{1122} + C_{1212} + C_{1221}. \quad (11.34)$$

Видно, что в матрице (11.33) отличны от нуля 29 компонент, из которых независимы 10.

Далее, если допустить, что компоненты тензора $\underline{\underline{C}}$, кроме симметрии относительно первой и последней пар индексов, обладают еще симметрией относительно, например, последних двух индексов, т. е., если $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk}$, то из (11.31) находим

$$a_2 = a_3, \quad a_5 = 0, \quad a_6 = a_7 = a_9, \quad a_8 = 0. \quad (11.35)$$

На основании (11.35) заключаем, что в рассматриваемом случае тензор $\underline{\underline{C}}$ имеет пять независимых компонент. При этом симметрия относительно первых двух индексов компонент следует из уже имеющихся симметрий. Вводя обозначения

$$\Lambda_1 = a_1, \quad \Lambda_2 = a_2, \quad \Lambda_3 = a_4, \quad \Lambda_4 = a_6, \quad \Lambda_5 = a_{10},$$

(11.30) можно представить в виде

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{ijlk} = \Lambda_1 I_{ij} I_{kl} + \Lambda_2 (I_{ik} I_{jl} + I_{il} I_{jk}) + \Lambda_3 (I_{ij} \gamma_{kl}^{(3)} + \gamma_{ij}^{(3)} I_{kl}) + \Lambda_4 (I_{ik} \gamma_{jl}^{(3)} + I_{il} \gamma_{jk}^{(3)} + \gamma_{il}^{(3)} I_{jk} + \gamma_{ik}^{(3)} I_{jl}) + \Lambda_5 \gamma_{ij}^{(3)} \gamma_{kl}^{(3)}. \quad (11.36)$$

Отсюда или из (11.31) получаем

$$C_{IJKL} = \Lambda_1 \delta_{IJ} \delta_{KL} + \Lambda_2 (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}), \quad C_{IJ33} = \Lambda_3 \delta_{IJ}, \quad C_{I3K3} = \Lambda_4 \delta_{IK}, \quad C_{3333} = \Lambda_5.$$

Кроме того, из (11.32) имеем $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$. Заметим, что (11.36) совпадает с точностью до обозначения коэффициентов с представлением этих компонент, которое приведено в [17, 18, 54, 57, 59] (см. также [9, 46, 53, 79]).

Аналогично методом группировки и перебора можно построить линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры любого ранга, в частности, и тензоры пятого и шестого рангов. Однако ниже мы построим линейно независимые тензоры пятого и шестого рангов иным путем, который назовем *методом свертки (свертывания) и перебора*.

Из структур тензоров (11.9), (11.11), (11.14), (11.18) и (11.22) видно, что их еще можно построить из соответствующих мультипликативных базисов (мультибазисов), составляя из них с помощью сужения индексов те мультибазисы (не из всех мультибазисов, полученных сужением индексов, можно построить рассматриваемые тензоры), на основании которых путем свертывания индексов с индексами двумерных символов Кронекера и Леви-Чивиты можно построить искомые тензоры. Следует заметить, что трансверсально-изотропные тензоры четного (нечетного) ранга можно построить из мультибазисов, которые получаются из соответствующих мультибазисов с помощью четных (нечетных) порядков сужения.

Сказанное выше можно оформить в виде теоремы.

Теорема 11.4. *Для построения трансверсально-изотропных тензоров четного (нечетного) ранга достаточно из соответствующего мультибазиса с помощью четных (нечетных) порядков сужения составить всевозможные мультибазисы и индексы полученных путем операции*

сужения мультибазисов свернуть с индексами двумерных символов Кронекера и Леви-Чивиты, перебирая всевозможные случаи. При этом в множестве тензоров заданного ранга, построенном указанным выше методом, содержатся все линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры.

Ниже, используя эту теорему, построим линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры пятого и шестого рангов. Сперва построим тензоры пятого ранга. В этой связи с помощью нечетных порядков (первого, третьего, пятого) сужения мультибазиса $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m$ переберем всевозможные базисы. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L; \\ & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (11.37)$$

Итак, всего получили 16 мультибазисов, с помощью которых, свертывая их с двумерными символами Кронекера δ_{MN} и Леви-Чивиты ϵ_{ST} и перебирая всевозможные случаи свертки, получим множество трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга, среди которых будут линейно независимые тензоры. Видно, что число мультибазисов в (11.37), порядок сужения которых равен 1, равняется $C_5^1 = 5$; число мультибазисов, порядок сужения которых равен 3, равно $C_5^3 = 10$, и наконец, в (11.37) имеется один $C_5^5 = 1$ мультибазис (максимальное сужение пространственного мультибазиса), который состоит из одних \mathbf{r}_3 .

Теперь к каждому мультибазису, содержащему один раз \mathbf{r}_3 (первые пять из (11.37)), применим операцию свертывания, аналогичные использованным для составления тензоров (11.18). Тогда из каждого мультибазиса получим по шесть линейно независимых тензоров. При этом в представлении каждого из полученных тензоров \mathbf{r}_3 займет вполне определенное место. Например, из первого мультибазиса указанным выше способом получим тензоры, которые можно получить из (11.18), если справа им приписать \mathbf{r}_3 . Аналогично из пятого мультибазиса получаются тензоры, которые можно получить, если тензорам (11.18) слева приписать \mathbf{r}_3 . Из второго мультибазиса получаются тензоры, которые можно получить, если на четвертое место (слева направо) среди базисных векторов каждого тензора (11.18) поместить \mathbf{r}_3 . Аналогично из третьего и четвертого мультибазисов можно построить тензоры, которые получим, поместив \mathbf{r}_3 на третье и второе места соответственно среди базисных векторов каждого тензора (11.18). Таким образом, из первых пяти мультибазисов (11.37) всего находим 30 линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга.

Нетрудно заметить, что из каждого мультибазиса, содержащего три раза \mathbf{r}_3 , можно построить по два трансверсально-изотропных тензора, свертывая каждый из них первый раз с двумерным символом Кронекера, а другой раз с двумерным символом Леви-Чивиты. Так как число мультибазисов, содержащих три раза \mathbf{r}_3 , равно 10, то всего из них получим 20 линейно независимых тензоров пятого ранга. Последний мультибазис из (11.37), который есть максимальное сужение, является трансверсально-изотропным тензором пятого ранга.

Таким образом, из (11.37) методом свертки и перебора построили систему линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров пятого ранга, состоящую из 51 тензора, как и требуется. С целью сокращения письма выписывать их не будем. Заметим только, что доказать линейную независимость построенных тензоров не представляет никакой сложности, поэтому на этом останавливаться не будем.

Разумеется, трансверсально-изотропный тензор пятого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией 51 тензора и, следовательно, имеет 51 линейно независимую компоненту. Рассмотрение различных случаев симметрии не представляет труда, поэтому и на этом останавливаться не будем.

Теперь построим линейно независимые трансверсально-изотропные тензоры шестого ранга. Прежде всего заметим, что из мультибазисов, которые получаются вследствие нечетного порядка сужения трехмерного мультибазиса шестого порядка $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$, нельзя составить искомые тензоры. Действительно, для составления какого-нибудь трансверсально-изотропного тензора из мультибазиса, полученного сужением соответствующего пространственного мультибазиса, надо учитывать, что он должен содержать четное число базисных векторов с прописными латинскими

индексами, так как только в таком случае можно свертывать его с двумерными символами Кронекера и Леви-Чивиты (символы имеют по два индекса). При этом мультибазис, в котором число прописных латинских индексов равняется нулю, т. е. все индексы в нем равны 3, в любом случае будет один (он называется *максимальным сужением* и является трансверсально-изотропным тензором; в этом случае четное число равно нулю).

В силу теоремы 11.4 в рассматриваемом случае посредством четных порядков (нулевого, второго, четвертого и шестого) сужения пространственного мультибазиса $\mathbf{r}_i \mathbf{r}_j \mathbf{r}_k \mathbf{r}_l \mathbf{r}_m \mathbf{r}_n$ надо составить всевозможные мультибазисы. Сперва составим такие, которые не содержат \mathbf{r}_3 (такой мультибазис, называемый *минимальным сужением* пространственного мультибазиса, будет $C_6^0 = 1$) и содержат \mathbf{r}_3 два раза (число таких мультибазисов будет $C_6^2 = 15$). Будем иметь

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_M \mathbf{r}_N, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L; \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L; \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_L, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L, \\ & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L. \end{aligned} \quad (11.38)$$

Теперь нетрудно составить мультибазисы, которые содержат \mathbf{r}_3 четыре раза. Действительно, такие мультибазисы (их число будет равняется $C_6^4 = 15$) можно получить из мультибазисов, содержащих \mathbf{r}_3 два раза, заменяя в них прописные латинские индексы на 3, а индексы, равные 3, на прописные латинские индексы. Следовательно, мультибазис, который содержит шесть раз \mathbf{r}_3 и называется максимальным сужением пространственного мультибазиса, будет $C_6^6 = 1$. В результате получим следующие мультибазисы:

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J; \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \\ & \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3; \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3; \\ & \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Теперь сначала из первого мультибазиса (11.38) составим все линейно независимые двумерные трансверсально-изотропные (гиротропные) тензоры шестого ранга, число которых, как было показано выше, равно 20. Следует заметить, что множество этих тензоров содержат все линейно независимые двумерные изотропные тензоры шестого ранга, получающиеся из пространственных изотропных тензоров (9.5) вследствие операции минимального сужения. Следовательно, имеет место

Утверждение 11.7. *Двумерные изотропные тензоры являются минимальными сужениями соответствующих трехмерных изотропных тензоров. При этом минимальные сужения линейно независимых трехмерных изотропных тензоров представляют собой линейно независимые двумерные изотропные тензоры.*

В силу этого утверждения из тензоров (9.5) посредством операции минимального сужения получим все 15 двумерных линейно независимых изотропных тензоров шестого ранга. Вводя обозначения для тензоров шестого ранга через $\mathbb{C}_{(\alpha)}$ и сохраняя использованные выше обозначения для двумерного ЕТВР и тензоров четвертого рангов (11.18), имеем следующие линейно независимые двумерные изотропные тензоры шестого ранга:

$$\begin{aligned} & \mathbb{C}_{(1)} = \mathbf{I} \mathbf{I} \mathbf{I} = \mathbb{C}_{(1)} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbb{C}_{(1)}, \quad \mathbb{C}_{(2)} = \mathbf{I} \mathbb{C}_{(2)}, \quad \mathbb{C}_{(3)} = \mathbf{I} \mathbb{C}_{(3)}, \quad \mathbb{C}_{(4)} = \mathbb{C}_{(2)} \mathbf{I}, \\ & \mathbb{C}_{(5)} = \mathbb{C}_{(3)} \mathbf{I}, \quad \mathbb{C}_{(6)} = \mathbf{r}_I \mathbb{C}_{(1)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(7)} = \mathbf{r}_I \mathbb{C}_{(2)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(8)} = \mathbf{r}_I \mathbb{C}_{(3)} \mathbf{r}_I, \quad \mathbb{C}_{(9)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \\ & \mathbb{C}_{(10)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(11)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(12)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \quad \mathbb{C}_{(13)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K, \\ & \mathbb{C}_{(14)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J, \quad \mathbb{C}_{(15)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Так как тензоры (11.40) в то же время являются двумерными трансверсально-изотропными тензорами шестого ранга, то в виде (11.40) имеем 15 линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных (гиротропных) тензоров шестого ранга. До полной системы линейно независимых тензоров не хватает 5 тензоров. Очевидно, в качестве их можно взять любые отличные от (11.40)

пять линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга, которые вместе с тензорами (11.40) будут составлять линейно независимую систему из 20 тензоров. С целью построения недостающих тензоров рассмотрим тензоры

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{I}} &= \mathbf{r}_I \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(1)} = \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{I}}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(2)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(3)} = \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{I}} \mathbf{r}_I, \\ \underline{\boldsymbol{\epsilon}} &= \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(4)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{I}} \mathbf{r}_J, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(5)} = \underline{\mathbf{I}} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(6)} = \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_L. \end{aligned} \quad (11.41)$$

Следует заметить, что с помощью тензоров (11.41) можно составить все линейно независимые двумерные трансверсально-изотропные тензоры шестого ранга. Для этого достаточно тензоры $\underline{\mathbf{I}}$ и $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}$ сгруппировать друг с другом и с остальными тензорами, а также, используя утверждение 11.4, составить тензоры шестого ранга. Это еще один способ построения искомым тензоров. Нетрудно заметить, что тензоры

$$\underline{\mathbf{C}}_{(16)} = \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{C}}_{(4)} \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(17)} = \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{C}}_{(5)} \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(18)} = \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{C}}_{(6)} \mathbf{r}_I, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(19)} = \underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{C}}_{(5)}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(20)} = \underline{\mathbf{C}}_{(4)} \underline{\mathbf{I}}, \quad (11.42)$$

образованные указанным выше методом с помощью первого и последних трех тензоров (11.41) и которые, конечно, еще можно получить методом свертки и перебора, являются линейно независимыми. Кроме того, они и тензоры (11.40) вместе составляют линейно независимую систему. Таким образом, в качестве линейно независимых двумерных трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга могут быть рассмотрены тензоры (11.41) и (11.42), число которых равно 20.

Теперь заметим, что из каждого мультибазиса (11.38), начиная со второго, используя те свертывания, которые были бы применены при составлении тензоров (11.18) методом свертки и перебора (каждый из них содержат по четыре базисных вектора с прописными латинскими индексами), получим по 6 линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга. Так как число таких базисов равно 15, то всего получим $6 \times 15 = 90$ тензоров. Они будут линейно независимыми. Теперь выпишем некоторые из этих тензоров. Например, для того, чтобы из второго мультибазиса (11.38) получить искомые тензоры, достаточно тензорам (11.18) справа приписать $\underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)} = \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_3$. Продолжая нумерацию тензоров шестого ранга, имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{(21)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(1)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(22)} = \underline{\mathbf{C}}_{(2)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(23)} = \underline{\mathbf{C}}_{(3)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}, \\ \underline{\mathbf{C}}_{(24)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(4)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(25)} = \underline{\mathbf{C}}_{(5)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(26)} = \underline{\mathbf{C}}_{(6)} \underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}. \end{aligned} \quad (11.43)$$

Нетрудно заметить, что из 11-го мультибазиса (11.38) можно получить тензоры, полученные из (11.43), меняя местами тензоры $\underline{\mathbf{C}}_{(\alpha)}$, $\alpha = \overline{1,6}$ и $\underline{\boldsymbol{\gamma}}^{(3)}$. Выпишем еще тензоры, которые получим из третьего мультибазиса (11.38). Будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{C}}_{(27)} &= \underline{\mathbf{I}} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(28)} = \mathbf{r}_I \mathbf{r}_J \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(29)} = \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{I}} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \\ \underline{\mathbf{C}}_{(30)} &= \underline{\mathbf{I}} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(31)} = \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{C}}_{(32)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \underline{\mathbf{I}} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (11.44)$$

Следует заметить, что из этого мультибазиса аналогично шести последним (11.16) можно составить следующие тензоры:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}_{(1)} &= \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(2)} = \epsilon_{IJ} \epsilon_{KL} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_L \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(3)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3, \\ \underline{\mathbf{A}}_{(4)} &= \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(5)} = \epsilon_{IJ} \mathbf{r}_I \mathbf{r}_K \mathbf{r}_J \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_K \mathbf{r}_3, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(6)} = \mathbf{r}_I \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{r}_3 \mathbf{r}_I \mathbf{r}_3, \end{aligned}$$

для которых аналогичные (11.17) соотношения представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{A}}_{(1)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(28)} - \underline{\mathbf{C}}_{(29)}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(2)} = \underline{\mathbf{C}}_{(27)} - \underline{\mathbf{C}}_{(29)}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(3)} = \underline{\mathbf{C}}_{(27)} - \underline{\mathbf{C}}_{(28)}, \\ \underline{\mathbf{A}}_{(4)} &= \underline{\mathbf{C}}_{(32)} - \underline{\mathbf{C}}_{(31)}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(5)} = \underline{\mathbf{C}}_{(32)} - \underline{\mathbf{C}}_{(30)}, \quad \underline{\mathbf{A}}_{(6)} = \underline{\mathbf{C}}_{(31)} - \underline{\mathbf{C}}_{(30)}, \end{aligned}$$

т. е. они выражаются через тензоры (11.44). Совершенно аналогично можно составить искомые тензоры из остальных мультибазисов (11.38). Поэтому с целью сокращения письма на их построении останавливаться не будем.

Далее из каждого мультибазиса (11.39), кроме последнего, свертывая их с двумерными символами Кронекера и Леви-Чивиты, можно построить по два линейно независимых трансверсально-изотропных тензора шестого ранга. Очевидно, из 15 мультибазисов всего получим $2 \times 15 = 30$ тензоров. Последний мультибазис (максимальное сужение) представляет собой трансверсально-изотропный тензор шестого ранга. Простой подсчет показывает, что всего составлено $20 + 90 + 30 + 1 = 141$

трансверсально-изотропный тензор шестого ранга. Система этих тензоров будет линейно независимой.

Таким образом, трансверсально-изотропный тензор шестого ранга, компоненты которого не обладают никакой симметрией, является линейной комбинацией системы линейно независимых трансверсально-изотропных тензоров шестого ранга, состоящей из 141 тензора, т. е. такой тензор имеет 141 линейно независимую компоненту. Следовательно, если компоненты тензора обладают какой-нибудь симметрией, то число независимых компонент такого тензора меньше 141. Из изложенного выше видно, что не представляет большого труда приведенными выше методами при необходимости построить линейно независимые изотропные, ортотропные и трансверсально-изотропные тензоры произвольного ранга $n > 6$.

ГЛАВА 4

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА И ТЕНЗОРНО-БЛОЧНОЙ МАТРИЦЫ ЛЮБОГО ЧЕТНОГО РАНГА

Рассмотрены задачи на собственные значения тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга. В явном виде построена полная ортонормированная система собственных тензоров для симметрического тензора любого четного ранга, а также полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов для симметрической тензорно-блочной матрицы любого четного ранга. Приведены некоторые приложения к механике.

12. О ТЕНЗОРАХ МОДУЛЯ $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с тензорами модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и носящие вспомогательный характер при дальнейшем изложении материала. Здесь $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — множество действительных тензоров ранга $2p$, p — некоторое неотрицательное целое число, Ω — некоторая область n -мерного риманова пространства \mathbb{R}^n . Следовательно, $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_p(\Omega)$ (множество действительных тензоров ранга p) являются модулями над кольцом скаляров $\mathbb{R}_0(\Omega)$ (множеством действительных тензоров нулевого ранга), т. е. $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_p(\Omega)$ представляют $\mathbb{R}_0(\Omega)$ -модуль [5, 36, 80]. Тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ можно представить в различных мультибазисах. Например, если ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{C}$ — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то они могут иметь отличные друг от друга представления:

$${}^{2p}\mathbf{A} = A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = A^{i \cdot j} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j, \quad (12.1)$$

$${}^{2p}\mathbf{C} = C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}^{j_1} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{j_p} = C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} = C^{i \cdot j} \mathbf{R}_i \cdot^j, \quad (12.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} &= \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}_{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_p}, \quad \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbf{r}^{j_1} \mathbf{r}^{j_2} \dots \mathbf{r}^{j_p}, \quad \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}^{j_1} \mathbf{r}_{i_2} \mathbf{r}^{j_2} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{j_p}, \\ i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p &= \overline{1, n}, \quad \mathbf{r}_s \cdot \mathbf{r}^t = \delta_s^t, \quad s, t = \overline{1, n}, \quad i = \mathbb{N}^0\{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \\ j &= \mathbb{N}^0\{j_1, j_2, \dots, j_p\}, \quad \mathbf{R}_i \otimes^p \mathbf{R}^j = \delta_i^j, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p. \end{aligned}$$

Здесь δ_i^j — дельта Кронекера, \otimes^p — знак внутреннего p -произведения [5, 36, 80]. Следовательно, \mathbf{r}_s и \mathbf{r}^t , $s, t = \overline{1, n}$ — биортонормальные системы базисов относительно скалярного произведения или внутреннего 1-произведения \otimes , $\mathbf{R}_i \mathbf{R}^j$, $i, j = \overline{1, N}$ — биортонормальные системы мультибазисов или базисов модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ относительно операции внутреннего p -произведения (p -кратного внутреннего произведения).

Заметим, что в дальнейшем для тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ в зависимости от удобства применяются p -индексное и одноиндексное представления. Так что, если ${}^p\mathbf{U} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$, то будем иметь

$${}^p\mathbf{U} = U_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_i \mathbf{R}^i = U^i \mathbf{R}_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (12.3)$$

Следует отметить, что в научной литературе в основном рассматривается представление тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в виде (12.1), и такие типы тензоров довольно хорошо изучены [5, 9–11, 36, 54, 80] и другие. Однако, к сожалению, автору мало известно о работах, в которых рассматривались

тензоры типа (12.2). Такие тензоры находят применение в приложениях (см. ниже), поэтому их рассмотрение заслуживает внимания¹.

Следует отметить, что соотношениями (12.1) и (12.2) даны $2p$ -индексное и двуиндексное представления тензоров ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{C}$ модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. При этом в двуиндексном представлении ранг тензора сохраняется, что позволяет упростить выкладки, связанные с этими тензорами. Отметим также, что нумерацию элементов множества числовых последовательностей $\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, $i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}$ можно производить, например, следующим образом: если $i = \mathbb{N}_2\{i_1, i_2, \dots, i_p\}$, то $i = i_1 + \sum_{k=2}^p n^{k-1}(i_k - 1)$ или $i = i_p + \sum_{k=1}^{p-1} n^k(i_{p-k} - 1)$, $i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}$.

Далее, предполагая, если противное не будет оговорено, что ${}^{2p}\mathbf{A}$ обозначает тензор типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а ${}^{2p}\mathbf{C}$ — тензор типа (12.2), введем некоторые определения.

Определение 12.1. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{A}^T$ и определяемый формулой

$${}^{2p}\mathbf{A}^T = (A_{ij}^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j)^T = A_{ij}^i \mathbf{R}_j \mathbf{R}_i = A_{ij}^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = A_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (12.4)$$

$$N = n^p, \quad i = \mathbb{N}_2\{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \quad j = \mathbb{N}_2\{j_1, j_2, \dots, j_p\}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

называется *транспонированным* с ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 12.2. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{C}^T$ и определяемый формулой

$${}^{2p}\mathbf{C}^T = C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} = C_{ij}^i \mathbf{R}_{ij}^j, \quad \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbf{r}^{j_1} \mathbf{r}_{i_1} \dots \mathbf{r}^{j_p} \mathbf{r}_{i_p}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (12.5)$$

$$N = n^p, \quad i = \mathbb{N}_2\{i_1, i_2, \dots, i_p\}, \quad j = \mathbb{N}_2\{j_1, j_2, \dots, j_p\}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

называется *транспонированным* с ${}^{2p}\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ тензором.

Определение 12.3. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, который равен своему транспонированному, называется *симметрическим*.

Определение 12.4. Тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, который коммутирует со своим транспонированным, называется *нормальным*.

На основании определения 12.4 заключаем, что симметрический тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ является нормальным. См. ниже аналогичные приведенным выше определения для комплексных тензоров.

В модуле $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ помимо операций сложения и умножения на скаляр можно вводить операции внутреннего p -произведения и внутреннего $(2p)$ -произведения (скалярного умножения) для тензоров типа (12.1), а также операции p -произведения (p -кратного произведения) и $(2p)$ -произведения (скалярного умножения) для тензоров типа (12.2). Определим эти операции. Пусть ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{B}$ — тензоры типа (12.1), а ${}^{2p}\mathbf{C}$ и ${}^{2p}\mathbf{D}$ — типа (12.2).

Определение 12.5. Внутренним p -произведением тензоров ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^{2p}\mathbf{B}$ типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется тензор, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{A} \otimes^p {}^{2p}\mathbf{B}$, компоненты которого определяются следующим образом:

$$({}^{2p}\mathbf{A} \otimes^p {}^{2p}\mathbf{B})_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} = A_{k_1 k_2 \dots k_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} B_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_p}. \quad (12.6)$$

В силу (12.6), очевидно, имеем

$${}^{2p}\mathbf{A} \otimes^p {}^{2p}\mathbf{B} = A_{k_1 k_2 \dots k_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} B_{j_1 j_2 \dots j_p}^{k_1 k_2 \dots k_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p}. \quad (12.7)$$

Из (12.6) видно, что при внутреннем p -произведении двух тензоров у каждого тензора, участвующего в этой операции, происходит p -кратное сокращение индексов. В этой связи во внутреннем p -произведении могут участвовать только те тензоры, ранг которых не меньше p . Кроме того, на основании (12.6) (см. также (12.7)) заключаем, что при внутреннем p -произведении тензоров типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в результате получается тензор такого же ранга и типа, что и сомножители. Число p назовем *кратностью* внутреннего p -произведения. Если $p=0$, т. е. если при произведении тензоров не происходит сокращение индексов, то такое произведение называется

¹Напоминаем, что применяются обычные правила тензорного исчисления [5, 9–11, 21, 36, 37, 54, 80, 81]. В частности, по повторяющимся индексам в одночлене происходит суммирование. Знак прямого тензорного умножения « \otimes » часто опускается, индекс « T » в верхнем правом углу означает операцию транспонирования.

прямым произведением. В этом случае вместо ${}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{B}$ будем писать ${}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{B}$. Если ${}^p\mathbf{A}$ и ${}^p\mathbf{B}$ — тензоры p -го ранга модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, то при внутреннем p -произведении этих тензоров часто будем опускать знак \otimes и просто писать ${}^p\mathbf{A}{}^p\mathbf{B}$ или $({}^p\mathbf{A}, {}^p\mathbf{B})$. В этом случае внутреннее p -произведение назовем просто внутренним или скалярным произведением. Оно, конечно, выражается формулой

$${}^p\mathbf{A}{}^p\mathbf{B} = ({}^p\mathbf{A}, {}^p\mathbf{B}) = A_{i_1 i_2 \dots i_p} B^{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (12.8)$$

Следовательно, аналогично (12.8) имеем

$${}^{2p}\mathbf{A}{}^{2p}\mathbf{B} = ({}^{2p}\mathbf{A}, {}^{2p}\mathbf{B}) = A_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} B_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p}.$$

Следует заметить, что, если внутреннее произведение ${}^m\mathbf{A}{}^m\mathbf{B}$, где ${}^m\mathbf{A}$ и ${}^m\mathbf{B}$ тензоры модуля $\mathbb{R}_m(\Omega)$, m — произвольное неотрицательное целое число, обращается в нуль для любого тензора ${}^m\mathbf{B}$, то ${}^m\mathbf{A} = 0$.

Определение 12.6. Два тензора ${}^m\mathbf{A}$ и ${}^m\mathbf{B}$ модуля $\mathbb{R}_m(\Omega)$, где m — произвольное неотрицательное целое число, называются *ортгоналными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. $({}^m\mathbf{A}, {}^m\mathbf{B}) = {}^m\mathbf{A} \otimes {}^m\mathbf{B} = 0$.

Определение 12.7. Тензор, обозначаемый ${}^{2p}\mathbf{C} \overset{p}{\odot} {}^{2p}\mathbf{D}$ и компоненты которого определяются следующим образом:

$$({}^{2p}\mathbf{C} \overset{p}{\odot} {}^{2p}\mathbf{D})_{l_1 l_2 \dots l_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} = C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} D_{l_1 l_2 \dots l_p}^{j_1 j_2 \dots j_p}, \quad (12.9)$$

называется p -произведением (p -кратным произведением) тензоров ${}^{2p}\mathbf{C}$ и ${}^{2p}\mathbf{D}$ типа (12.2) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Из (12.9) видно, что тензор ${}^{2p}\mathbf{C} \overset{p}{\odot} {}^{2p}\mathbf{D}$ будет иметь выражение

$$\begin{aligned} {}^{2p}\mathbf{C} \overset{p}{\odot} {}^{2p}\mathbf{D} &= C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} D_{l_1 l_2 \dots l_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}^{l_1} \mathbf{r}_{i_2} \mathbf{r}^{l_2} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{l_p} = \\ &= C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} D_{l_1 l_2 \dots l_p}^{k_1 k_2 \dots k_p} (\mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}^{j_1} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{j_p}) \overset{p}{\odot} (\mathbf{r}_{k_1} \mathbf{r}^{l_1} \dots \mathbf{r}_{k_p} \mathbf{r}^{l_p}) = \\ &= C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} D_{l_1 l_2 \dots l_p}^{k_1 k_2 \dots k_p} (\mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}^{j_1} \cdot \mathbf{r}_{k_1} \mathbf{r}^{l_1}) (\mathbf{r}_{i_2} \mathbf{r}^{j_2} \cdot \mathbf{r}_{k_2} \mathbf{r}^{l_2}) \dots (\mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{j_p} \cdot \mathbf{r}_{k_p} \mathbf{r}^{l_p}). \end{aligned} \quad (12.10)$$

На основании (12.10) заключаем, что при p -произведении двух тензоров типа (12.2) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ первая пара базисных векторов (начиная слева) тензора ${}^{2p}\mathbf{C}$ однократно умножается на первую пару базисных векторов тензора ${}^{2p}\mathbf{D}$, вторая пара на вторую пару и т. д., последняя пара на последнюю пару. При таком умножении в результате получается тензор, ранг и тип которого такие же, как у сомножителей. Число p , как и выше при внутреннем p -произведении, назовем *кратностью* p -произведения. Если $p = 0$, то, так же как при внутреннем p -произведении, не происходит сокращения индексов, и мы имеем дело с прямым тензорным произведением. Следовательно, и в этом случае аналогично внутреннему p -произведению происходит p -кратное сокращение индексов у каждого тензора-сомножителя. Если кратность произведения равна $2p$, то в этом случае по определению имеем

$${}^{2p}\mathbf{C} \overset{2p}{\odot} {}^{2p}\mathbf{D} = {}^{2p}\mathbf{C} \overset{2p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{D} = ({}^{2p}\mathbf{C}, {}^{2p}\mathbf{D}) = C_{j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} D_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} \quad (12.11)$$

Следует отметить, что в модуле $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ относительно введенных выше операций умножения имеются единичные тензоры. В частности, относительно операции внутреннего p -произведения в множестве тензоров типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ единичным тензором $(2p)$ -го ранга является тензор

$$\begin{aligned} {}^{2p}\mathbf{E} &= \mathbf{r}_{i_1} \mathbf{r}_{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_p} \mathbf{r}^{i_1} \mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}^{i_p} = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i = g_i^j \mathbf{R}^i \mathbf{R}_j = \\ &= g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_p}^{j_p} \mathbf{r}^{i_1} \mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}^{i_p} \mathbf{r}_{j_1} \mathbf{r}_{j_2} \dots \mathbf{r}_{j_p}, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Следовательно, для любого тензора ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ типа (12.1) будем иметь

$${}^{2p}\mathbf{A} \overset{p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{E} = {}^{2p}\mathbf{E} \overset{p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{A} = {}^{2p}\mathbf{A}. \quad (12.13)$$

С помощью ${}^{2p}\mathbf{E}$ первый инвариант тензора ${}^{2p}\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ типа (12.1) выражается формулой

$$I_1({}^{2p}\mathbf{A}) = {}^{2p}\mathbf{A} \overset{2p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{E} = {}^{2p}\mathbf{E} \overset{2p}{\otimes} {}^{2p}\mathbf{A} = ({}^{2p}\mathbf{E}, {}^{2p}\mathbf{A}) = A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (12.14)$$

Аналогично (12.12) относительно операции p -произведения в множестве тензоров типа (12.2) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ единичный тензор $(2p)$ -го ранга имеет вид

$${}^{2p}\mathbf{G} = \overbrace{{}^2\mathbf{E}^2\mathbf{E} \dots {}^2\mathbf{E}}^p = \mathbf{r}_{i_1}\mathbf{r}^{i_1}\mathbf{r}_{i_2}\mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_p}\mathbf{r}^{i_p} = g_{j_1}^{i_1}g_{j_2}^{i_2} \dots g_{j_p}^{i_p}\mathbf{r}_{i_1}\mathbf{r}^{j_1}\mathbf{r}_{i_2}\mathbf{r}^{j_2} \dots \mathbf{r}_{i_p}\mathbf{r}^{j_p}, \quad (12.15)$$

где ${}^2\mathbf{E} = \mathbf{r}_i\mathbf{r}^i = g_i^j\mathbf{r}^i\mathbf{r}_j$, $i, j = \overline{1, n}$ — единичный тензор второго ранга относительно операции однократного умножения. Здесь $g_{i_k}^{j_k} = \mathbf{r}_{i_k} \cdot \mathbf{r}^{j_k}$, $k = \overline{1, p}$, $g_i^j = \mathbf{R}_i \otimes \mathbf{R}^j$, $i, j = \overline{1, N}$.

Для любого тензора ${}^{2p}\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ типа (12.2) аналогично (12.13) имеет место соотношение

$${}^{2p}\mathbf{C} \otimes {}^{2p}\mathbf{G} = {}^{2p}\mathbf{G} \otimes {}^{2p}\mathbf{C} = {}^{2p}\mathbf{C}. \quad (12.16)$$

Первый инвариант тензора ${}^{2p}\mathbf{C} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ типа (12.2) посредством единичного тензора ${}^{2p}\mathbf{G}$ аналогично (12.14) представляется в форме

$$I_1({}^{2p}\mathbf{C}) = {}^{2p}\mathbf{C} \otimes {}^{2p}\mathbf{G} = {}^{2p}\mathbf{G} \otimes {}^{2p}\mathbf{C} = ({}^{2p}\mathbf{G}, {}^{2p}\mathbf{C}) = C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_1 i_2 \dots i_p}. \quad (12.17)$$

Определители обоих типов тензоров определяются как определители смешанных компонент этих тензоров, т. е.

$$\det({}^{2p}\mathbf{A}) = \det(A^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p}) = \det(A^j_i), \quad \det({}^{2p}\mathbf{C}) = \det(C^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_p}) = \det(C^j_i), \quad (12.18)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p.$$

Определители этих тензоров — инвариантные величины. О других инвариантах этих тензоров речь пойдет ниже при рассмотрении проблемы построения полной системы собственных тензоров для тензора любого четного ранга.

13. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРОВ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРА ЛЮБОГО ЧЕТНОГО РАНГА

Задача на собственные значения для комплексного тензора любого четного ранга была рассмотрена в [5]. Эта проблема более подробно изучалась в [35]. Однако, в явном виде не была построена полная ортонормированная система собственных тензоров. Ниже эта проблема решается для симметричного тензора типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. также [39, 40]). С точки зрения приложения к механике большой интерес представляет решение этой проблемы для положительно определенного симметричного тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, который, конечно, является частным случаем симметричного тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. В этой связи решение этой проблемы для симметричного тензора означает, что она будет решена и для частного случая.

Определение 13.1. Симметричный тензор ${}^{2p}\mathbf{A}$ типа (12.1) модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется *положительно определенным*, если образуемая по нему квадратичная форма ${}^p\mathbf{U} \otimes {}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^p\mathbf{U}$ положительна для любого отличного от нуля тензора ${}^p\mathbf{U}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Заметим, что, когда из контекста видно, о тензорах каких рангов идет речь, с целью сокращения письма индексы у тензоров в верхнем левом углу мы часто будем опускать, т. е. вместо ${}^{2p}\mathbf{A}$ и ${}^p\mathbf{U}$ будем писать \mathbf{A} и \mathbf{U} соответственно. Однако, в тех случаях, когда их присутствие необходимо, они применяются.

Сформулируем теперь задачу на собственные значения некоторого тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Задача на собственные значения для $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Для некоторого тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ найти все тензоры \mathbf{U} модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}, \quad (13.1)$$

где λ — скаляр.

Естественно, можно рассматривать и следующую задачу: для некоторого тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ найти все тензоры \mathbf{V} модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{A} = \mu \mathbf{V}, \quad (13.2)$$

где μ — скаляр.

Уравнения (13.1) и (13.2) всегда имеют тривиальные решения $\mathbf{U} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ соответственно, где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор p -го модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. В этой связи в дальнейшем, говоря о решениях уравнений (13.1) и (13.2), всегда будем иметь в виду только нетривиальные решения. При этом следует отметить, что нетривиальные решения уравнения (13.1) и (13.2) определяются с точностью до произвольного скалярного множителя, поэтому при желании подбором скалярных множителей всегда можно их нормировать так, чтобы нормы решений равнялись единице. Таким образом, если $\mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ — нетривиальное решение уравнения (13.1), то будем считать, что его норма

$$\|\mathbf{U}\| = \sqrt{\mathbf{U} \otimes^p \mathbf{U}} = \sqrt{(\mathbf{U}, \mathbf{U})} = \sqrt{U_{i_1 i_2 \dots i_p} U^{i_1 i_2 \dots i_p}} = 1.$$

Наша цель — изучить условия существования нетривиальных решений уравнений (13.1) и (13.2) и указать способы их построения.

Если для некоторого скаляра $\lambda(\mu)$ уравнение (13.1) ((13.2)) имеет нетривиальное решение $\mathbf{U} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ ($\mathbf{V} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$), то $\lambda(\mu)$ называется *собственным значением* тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а $\mathbf{U} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ ($\mathbf{V} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$) — *правым (левым) собственным тензором*, соответствующим собственному значению $\lambda(\mu)$.

Нетрудно заметить, что из (13.1) и (13.2) получим системы линейных однородных уравнений

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \otimes^p \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \otimes^p (\mu \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (13.3)$$

относительно неизвестных тензоров \mathbf{U} и \mathbf{V} модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Нетривиальные решения системы уравнений (13.1) и (13.2) существуют тогда и только тогда, когда их определители равны нулю:

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0, \quad \det(\mu \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0,$$

откуда следует, что $\lambda = \mu$. Однако при произвольном $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, вообще говоря, $\mathbf{U} \neq \mathbf{V}$. Если $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, то $\mathbf{U} = \mathbf{V}$.

Полином N -ой степени $P(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$ по λ называется *определяющим*, или *характеристическим*, *полиномом* тензора \mathbf{A} , а уравнение $P(\lambda) = 0$ — его *определяющим*, или *характеристическим*, *уравнением*.

Таким образом, из сказанного выше заключаем, что для нахождения правого и левого собственных тензоров для произвольного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ вместо (13.3) следует рассматривать следующие системы однородных линейных уравнений:

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \otimes^p \mathbf{U} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{V} \otimes^p (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (13.4)$$

При этом достаточно рассматривать, например, первое уравнение из (13.4), так как второе уравнение можно рассматривать аналогично первому. Хотя, найдя правые собственные тензоры для $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ из первой системы уравнений (13.4), с их помощью, не решая вторую систему, можно построить левые собственные тензоры; и наоборот, найдя левые собственные тензоры для \mathbf{A} , на их основании можно определить правые собственные тензоры. Ниже подробно изучен случай положительно определенного симметричного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Для симметричного тензора, как было сказано выше, и тем более для положительно определенного симметричного тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ нет различия между правым и левым собственными тензорами. Кроме того, в этом случае всегда существует полная система собственных тензоров.

Нетрудно заметить, что, например, первую систему уравнений (13.4) в компонентах можно записать следующим образом:

$$(\lambda E_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p} - A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_p}) U_{j_1 j_2 \dots j_p} = 0, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n},$$

или, используя двуиндексное для тензоров $(2p)$ -го ранга и одноиндексное для тензоров p -го ранга представления, будем иметь

$$(\lambda \delta_i^j - A_i^j) U_j = 0, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad N = n^p. \quad (13.5)$$

Видно, что в виде (13.5) получили однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных U_j , $i, j = \overline{1, N}$. Число уравнений совпадает с числом неизвестных. Следовательно, аналогично сказанному выше относительно систем уравнений (13.3), система уравнений (13.5) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0. \quad (13.6)$$

Запишем (13.6) в развернутом виде. Будем иметь

$$\lambda^N - I_1(\mathbf{A})\lambda^{N-1} + I_2(\mathbf{A})\lambda^{N-2} + \dots + (-1)^s I_s(\mathbf{A})\lambda^{N-s} + \dots + (-1)^N I_N(\mathbf{A}) = 0, \quad (13.7)$$

где

$$N = n^p, \quad I_N(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} = \frac{1}{N!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_N} A_{\cdot j_1}^{i_1} A_{\cdot j_2}^{i_2} \dots A_{\cdot j_N}^{i_N}, \quad \delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_N} = C_{i_1 i_2 \dots i_N} C^{j_1 j_2 \dots j_N},$$

$$i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s = \overline{1, N},$$

$\delta_{i_1 i_2 \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_N}$ — обобщенная дельта Кронекера, $C_{i_1 i_2 \dots i_N}$ и $C^{j_1 j_2 \dots j_N}$ — компоненты обобщенного дискриминантного тензора, $I_m(\mathbf{A})$, $m = \overline{1, N}$ — алгебраические (классические) инварианты тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, которые вычисляются по формулам

$$I_s(2^p \mathbf{A}) = I_1(2^{ps} \mathbf{M}) = \frac{1}{s!} I_1(2^{ps} \mathbb{M}) = I_1(2^{p(N-s)} \mathbf{M}_*) = \frac{1}{(N-s)!} I_1(2^{p(N-s)} \mathbb{M}_*), \quad (13.8)$$

$$s = \overline{0, N}, \quad N = n^p.$$

Тензоры $2^{ps} \mathbf{M}$ и $2^{ps} \mathbb{M}$, называемые *тензором* и *расширенным тензором миноров* ($2ps$)-го ранга и s -го порядка соответственно, представляются в виде

$$2^{ps} \mathbf{M} = M_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} \mathbf{R}_{i_1} \mathbf{R}^{j_1} \mathbf{R}_{i_2} \mathbf{R}^{j_2} \dots \mathbf{R}_{i_s} \mathbf{R}^{j_s}, \quad M_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = \begin{vmatrix} A_{\cdot j_1}^{i_1} & A_{\cdot j_2}^{i_1} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_1} \\ A_{\cdot j_1}^{i_2} & A_{\cdot j_2}^{i_2} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\cdot j_1}^{i_s} & A_{\cdot j_2}^{i_s} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_s} \end{vmatrix}, \quad (13.9)$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq N, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq N,$$

$$2^{ps} \mathbb{M} = \mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} \mathbf{R}_{i_1} \mathbf{R}^{j_1} \mathbf{R}_{i_2} \mathbf{R}^{j_2} \dots \mathbf{R}_{i_s} \mathbf{R}^{j_s}, \quad \mathcal{M}_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = \begin{vmatrix} A_{\cdot j_1}^{i_1} & A_{\cdot j_2}^{i_1} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_1} \\ A_{\cdot j_1}^{i_2} & A_{\cdot j_2}^{i_2} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{\cdot j_1}^{i_s} & A_{\cdot j_2}^{i_s} & \dots & A_{\cdot j_s}^{i_s} \end{vmatrix}, \quad (13.10)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s = \overline{1, N},$$

а тензоры $2^{p(N-s)} \mathbf{M}_*$ и $2^{p(N-s)} \mathbb{M}_*$, называемые *тензором* и *расширенным тензором алгебраических дополнений* $2p(N-s)$ -го ранга и s -го порядка соответственно, имеют выражения

$$2^{p(N-s)} \mathbf{M}_* = M_{*i_1 i_2 \dots i_{N-s}}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s}} \mathbf{R}^{i_1} \mathbf{R}_{j_1} \mathbf{R}^{i_2} \mathbf{R}_{j_2} \dots \mathbf{R}^{i_{N-s}} \mathbf{R}_{j_{N-s}},$$

$$M_{*i_1 i_2 \dots i_{N-s}}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s}} = \frac{1}{s!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_{N-s} i_{N-s+1} \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s} j_{N-s+1} \dots j_N} A_{\cdot j_{N-s+1}}^{i_{N-s+1}} \dots A_{\cdot j_N}^{i_N}, \quad (13.11)$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{N-s} \leq N, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-s} \leq N,$$

$$i_{N-s+1}, \dots, i_N, j_{N-s+1}, \dots, j_N = \overline{1, N},$$

$$2^{p(N-s)} \mathbb{M}_* = \mathcal{M}_{*i_1 i_2 \dots i_{N-s}}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s}} \mathbf{R}^{i_1} \mathbf{R}_{j_1} \mathbf{R}^{i_2} \mathbf{R}_{j_2} \dots \mathbf{R}^{i_{N-s}} \mathbf{R}_{j_{N-s}},$$

$$\mathcal{M}_{*i_1 i_2 \dots i_{N-s}}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s}} = \frac{1}{s!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_{N-s} i_{N-s+1} \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_{N-s} j_{N-s+1} \dots j_N} A_{\cdot j_{N-s+1}}^{i_{N-s+1}} \dots A_{\cdot j_N}^{i_N}, \quad (13.12)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_N, j_1, j_2, \dots, j_N = \overline{1, N}.$$

При этом полагаем, что

$$I_0(2^p \mathbf{A}) = I_1(0 \mathbf{M}) = I_1(0 \mathbb{M}) = I_1(2^{pN} \mathbf{M}_*) = \frac{1}{N!} I_1(2^{pN} \mathbb{M}_*) = 1, \quad (13.13)$$

$$I_N(2^p \mathbf{A}) = I_1(2^{pN} \mathbf{M}) = \frac{1}{N!} I_1(2^{pN} \mathbb{M}) = I_1(0 \mathbf{M}_*) = I_1(0 \mathbb{M}_*) = \det(2^p \mathbf{A}) = |2^p \mathbf{A}|.$$

Следует отметить, что соответствующие тензору миноров (13.9) и расширенному тензору миноров (13.10) тензор алгебраических дополнений $(2ps)$ -го ранга и $(N-s)$ -го порядка и расширенный тензор алгебраических дополнений $(2ps)$ -го ранга и $(N-s)$ -го порядка соответственно представляются в форме

$${}^{2ps}\mathbf{M}_* = M_{*i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_s} \mathbf{R}^{i_1} \mathbf{R}_{j_1} \mathbf{R}^{i_2} \mathbf{R}_{j_2} \dots \mathbf{R}^{i_s} \mathbf{R}_{j_s},$$

$$M_{*i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_s} = \frac{\partial^s |{}^{2p}\mathbf{A}|}{\partial A_{j_1}^{i_1} \partial A_{j_2}^{i_2} \dots \partial A_{j_s}^{i_s}} = \frac{1}{(N-s)!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_s j_{s+1} \dots j_N} A_{j_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots A_{j_N}^{i_N}, \quad (13.14)$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq N, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq N,$$

$$i_{s+1}, \dots, i_N, j_{s+1}, \dots, j_N = \overline{1, N},$$

$${}^{2ps}\mathbb{M}_* = \frac{\partial^s |{}^{2p}\mathbf{A}|}{\partial ({}^{2p}\mathbf{A})^s} = \mathcal{M}_{*i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_s} \mathbf{R}^{i_1} \mathbf{R}_{j_1} \mathbf{R}^{i_2} \mathbf{R}_{j_2} \dots \mathbf{R}^{i_s} \mathbf{R}_{j_s},$$

$$\mathcal{M}_{*i_1 i_2 \dots i_s}^{j_1 j_2 \dots j_s} = \frac{1}{(N-s)!} \delta_{i_1 i_2 \dots i_s i_{s+1} \dots i_N}^{j_1 j_2 \dots j_s j_{s+1} \dots j_N} A_{j_{s+1}}^{i_{s+1}} \dots A_{j_N}^{i_N}, \quad (13.15)$$

$$i_1, i_2, \dots, i_N, j_1, j_2, \dots, j_N = \overline{1, N}.$$

Из соответствующих формул (13.9) – (13.12) и (13.14), (13.15) видно, что тензор и расширенный тензор миноров, а также тензор и расширенный тензор алгебраических дополнений суть кососимметричные тензоры типа (12.2) (их компоненты полностью кососимметричны как относительно последовательности нижних индексов, так и относительно последовательности верхних индексов). В этой связи первые инварианты, имеющиеся в соотношении (13.8), нужно вычислять по формуле (12.17).

Используя соотношения, вытекающие из формул Ньютона [7, 15, 74], связывающих степенные суммы с основными (элементарными) симметрическими полиномами и выражающие, в свою очередь, основные симметрические полиномы через степенные суммы и обратно [15, 74], инварианты $S_k = I_k({}^{2p}\mathbf{A})$, $k = \overline{1, N}$ (см. (13.8)), входящие в (13.7), можно еще определить следующим образом:

$$S_k = I_k({}^{2p}\mathbf{A}) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & s_{k-5} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, N}, \quad (13.16)$$

где

$$s_k = I_1(({}^{2p}\mathbf{A})^k), \quad k = \overline{1, N}, \quad ({}^{2p}\mathbf{A})^k = \overbrace{{}^{2p}\mathbf{A} \otimes {}^{2p}\mathbf{A} \otimes \dots \otimes {}^{2p}\mathbf{A}}^k. \quad (13.17)$$

Обратные к (13.16) соотношения представляются в виде

$$s_k = I_1(({}^{2p}\mathbf{A})^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3S_3 & S_2 & S_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & S_{k-4} & \dots & S_1 & 1 \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \dots & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (13.18)$$

Следует отметить, что, имея выражения для тензора миноров (13.9) и соответствующего ему тензора алгебраических дополнений (13.14), обобщенную теорему Лапласа о разложении определителя можно записать в виде

$${}^{2ps}\mathbf{M} \overset{ps}{\odot} {}^{2ps}\mathbf{M}_*^T = {}^{2ps}\mathbf{M}^T \overset{ps}{\odot} {}^{2ps}\mathbf{M}_* = |{}^{2p}\mathbf{A}| {}^{2ps}\mathbf{C}, \quad (13.19)$$

где

$${}^{2ps}\mathbf{C} = C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} \mathbf{R}_{i_1} \mathbf{R}_{j_1} \mathbf{R}_{i_2} \mathbf{R}_{j_2} \dots \mathbf{R}_{i_s} \mathbf{R}_{j_s}, \quad \mathbf{R}_i \overset{p}{\otimes} \mathbf{R}^j = \delta_i^j, \quad C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = C^{i_1 i_2 \dots i_s} C_{j_1 j_2 \dots j_s},$$

$$i, j = \overline{1, N}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq N, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq N.$$

Для расширенного тензора миноров (13.10) и соответствующего тензора алгебраических дополнений (13.15) аналогичное (13.19) соотношение будет иметь форму

$${}^{2ps}\mathbb{M} \overset{ps}{\odot} {}^{2ps}\mathbb{M}^T = {}^{2ps}\mathbb{M}^T \overset{ps}{\odot} {}^{2ps}\mathbb{M} = s! |{}^{2p}\mathbf{A}| {}^{2ps}\mathbb{C}, \quad (13.20)$$

где

$${}^{2ps}\mathbb{C} = C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} \mathbf{R}_{i_1} \mathbf{R}^{j_1} \mathbf{R}_{i_2} \mathbf{R}^{j_2} \dots \mathbf{R}_{i_s} \mathbf{R}^{j_s}, \quad C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = C^{i_1 i_2 \dots i_s} C_{j_1 j_2 \dots j_s},$$

$$i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s = \overline{1, N}.$$

Нетрудно заметить, что в компонентах (13.19) можно записать следующим образом:

$$M_{k_1 k_2 \dots k_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} M_{*j_1 j_2 \dots j_s}^{k_1 k_2 \dots k_s} = M_{j_1 j_2 \dots j_s}^{k_1 k_2 \dots k_s} M_{*k_1 k_2 \dots k_s}^{i_1 i_2 \dots i_s} = |{}^{2p}\mathbf{A}| C_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_s},$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_s \leq N, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_s \leq N,$$

$$(1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_s \leq N), \quad (13.21)$$

а запись в компонентах (13.20) получится из равенства (13.21), если в нем M и C заменить на M и C соответственно и индексам придавать произвольные значения, т. е. $i_m, j_m, k_m = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, s}$.

Заметим, что если $p = 1$, то из (13.19) или из (13.21) получим обычную теорему Лапласа.

Далее приведем некоторые определения и теоремы из [36, 80], применяемые при дальнейшем изложении материала данной главы (см. также соответствующие определения и теоремы во второй главе).

Определение 13.2. Система правых (левых) собственных тензоров для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$), состоящая из $N = n^p$ линейно независимых тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$), называется *полной системой правых (левых) собственных тензоров* для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$).

Вспомним, что здесь $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{C}_p(\Omega)$ — модули комплексных тензоров $(2p)$ -го и p -го ранга соответственно (над кольцом комплексных скаляров). Нетрудно видеть, что полная система правых (левых) собственных тензоров для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$) является некоторым базисом модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$), размерность которого равна N . Число N — также степень характеристического уравнения тензора \mathbf{A} .

Определение 13.3. Тензор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ называется *тензором простой структуры*, если он имеет N линейно независимых собственных тензоров, где $N = n^p$ — число измерений модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$.

Сформулируем теперь важную теорему 8.3 (см. также [36, 80]) в немного иной форме.

Теорема 13.1. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то сопряженный тензор \mathbf{A}^* также имеет простую структуру, и при этом можно так выбрать полные системы собственных тензоров \mathbb{U}_k , $k = \overline{1, N}$ и \mathbb{V}^l , $l = \overline{1, N}$ из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ для тензоров \mathbf{A} и \mathbf{A}^* соответственно, чтобы они были биортонормальны, т. е. чтобы имели место соотношения

$$(\mathbb{U}_k, \mathbb{V}^l) = \mathbb{U}_k \overset{p}{\otimes} \overline{\mathbb{V}^l} = \delta_k^l, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Здесь, конечно, $(\mathbb{U}_k, \mathbb{V}^l)$ означает скалярное произведение комплексных тензоров \mathbb{U}_k и \mathbb{V}^l из модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что аналогичную теореме 13.1 теорему для тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ можно сформулировать следующим образом.

Теорема 13.2. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то левая и правая полные системы собственных тензоров для \mathbf{A} можно выбрать таким образом, чтобы они были биортонормальны.

Введем еще определения, которые находят многократное применение в дальнейшем.

Определение 13.4. Система тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_m$ ($1 \leq m \leq N$) модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ или модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ называется *ортонормированной*, если выполняются условия

$$(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (13.22)$$

Заметим, что в модуле $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$) всегда существует ортонормированный базис, так как из любой линейно независимой системы тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$) процедурой ортонормирования Грама—Шмидта [5, 36, 80] всегда можно получить ортонормированную систему тензоров. Заметим также, что ортонормированный базис модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$) состоит из $N = n^p$ тензоров, так как размерность модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$) равна N .

Определение 13.5. Ортонормированная система собственных тензоров $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$), состоящая из N тензоров модуля $\mathbb{C}_p(\Omega)$ ($\mathbb{R}_p(\Omega)$), называется *полной ортонормированной системой собственных тензоров*.

Определение 13.6. Тензор четного ранга называется *квадратным*, если матрица его компонент квадратная.

Определение 13.7. Тензор четного ранга называется *левым*, или *нижним* (*правым*, или *верхним*), *треугольным* [*унитреугольным*], если матрица его компонент левая или нижняя (правая или верхняя) треугольная [*унитреугольная*].

Следует заметить, что на основании определения 4.11 заключаем, что единичный (единичный), унитарный (ортогональный) и эрмитовый (симметричный) тензоры модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ ($\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$), а также кососимметричный тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — нормальные тензоры. Кососимметричный тензор модуля $\mathbb{C}_{2p}(\Omega)$ является нормальным, если его действительная и мнимая части коммутируют. В силу теоремы 8.7 все эти тензоры имеют полную ортонормированную систему собственных тензоров.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 13.3. Если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — тензор простой структуры, то он имеет полные системы правых и левых [нормированных] собственных тензоров, и если найдена полная система правых (левых) [нормированных] собственных тензоров, то биортонормальная для нее система будет полной системой левых (правых) [нормированных] собственных тензоров.

Доказательство. Проведем доказательство в том случае, когда известна полная система правых собственных тензоров, так как остальные случаи можно рассматривать аналогично. Итак, пусть \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$ — полная система правых собственных тензоров для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, т. е.

$$\mathbf{A} \otimes^p \mathbf{U}_k = \lambda_k \mathbf{U}_k, \quad \langle k = \overline{1, N} \rangle. \quad (13.23)$$

Обозначим через \mathbf{U}^l , $l = \overline{1, N}$, биортонормальную для \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$ систему. Тогда имеют место условия биортонормальности

$$\mathbf{U}_k \otimes^p \mathbf{U}^l = \mathbf{U}^l \otimes^p \mathbf{U}_k = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, N}. \quad (13.24)$$

Умножая (в качестве операции умножения рассматривается внутреннее p -произведение) обе¹ части (13.23) слева на \mathbf{U}^l и учитывая (13.24), получим

$$\mathbf{U}^l \otimes^p \mathbf{A} \otimes^p \mathbf{U}_k = \lambda_k \delta_k^l, \quad \langle k = \overline{1, N} \rangle, \quad l = \overline{1, N}. \quad (13.25)$$

Далее, умножая обе части (13.25) на тензорное произведение $\mathbf{U}_l \mathbf{U}^k$ со следующим суммированием по l и k от 1 до N включительно и учитывая, что единичный тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ относительно операции внутреннего p -произведения можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}^k \mathbf{U}_k, \quad (13.26)$$

получим каноническое представление тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в форме

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k. \quad (13.27)$$

Наконец, умножая обе части (13.27) слева на \mathbf{U}^l и учитывая (13.24), будем иметь

$$\mathbf{U}^l \otimes^p \mathbf{A} = \lambda_l \mathbf{U}^l, \quad \langle l = \overline{1, N} \rangle,$$

¹Запись $\langle k = \overline{1, N} \rangle$ означает, что по повторяющемуся индексу k не происходит суммирования. Аналогичная запись применяется и в дальнейшем.

что и завершает доказательство теоремы. \square

Заметить, что при доказательстве теоремы одновременно получили каноническое представление тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в виде (13.27). Отметим также, что для какой-нибудь системы линейно независимых тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ построить соответствующую биортонормальную систему тензоров не представляет труда. Прежде всего заметим, что так как, как было сказано выше, N — размерность модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, то для линейной независимости некоторой системы тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_k$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ необходимо, чтобы $1 \leq k \leq N = n^p$.

Рассмотрим теперь матрицу

$$G_{ij} = G_{ji} = (\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j), \quad i, j = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq N = n^p. \quad (13.28)$$

Видно, что G — определитель Грама, составленный для системы тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_k$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$ (скалярное произведение — внутреннее p -произведение). Поэтому в силу теоремы 3.2 система тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_k$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$, линейно независима тогда и только тогда, когда $G = \det(G_{ij}) \neq 0$.

На основании теоремы 3.2 теперь можно доказать следующую теорему (см. также теорему 3.4):

Теорема 13.4. *Для любой линейно независимой системы тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_k$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$, существует биортонормальная система $\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots, \mathbf{U}^k$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_k$ — линейно независимая система тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$. Тогда в силу теоремы 3.2 определитель Грама G для этой системы отличен от нуля и, конечно, существует единственная обратная к (13.28) матрица G^{kl} , $k, l = \overline{1, N}$, удовлетворяющая условиям

$$G_{il}G^{lj} = \delta_i^j, \quad i, j, l = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13.29)$$

Рассмотрим теперь систему тензоров

$$\mathbf{U}^i = G^{il}\mathbf{U}_l, \quad i, l = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13.30)$$

Умножая обе части (13.30) скалярно на \mathbf{U}_j и учитывая (13.29), получим

$$(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}^j) = \delta_i^j, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13.31)$$

В силу (13.31) заключаем, что построенная с помощью формул (13.30) система тензоров является искомой биортонормальной системой. Теорема доказана. \square

Нетрудно заметить, что обратные к (13.30) соотношения имеют вид

$$\mathbf{U}_i = G_{ij}\mathbf{U}^j, \quad i, j = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (13.32)$$

На основании доказанной теоремы 13.4 можно заключить, что если система тензоров $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ — некоторый базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, то тензоры $\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2, \dots, \mathbf{U}^N$, построенные с помощью формул (13.30), при условии, что индексы пробегает значения от 1 до N включительно, образуют для $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ биортонормальную систему. В этом случае, конечно, матрицы G_{ij} и G^{ij} , $i, j = \overline{1, N}$ можно использовать при жонглировании индексами у компонент тензоров (см. (13.30) и (13.32)).

Зная каноническое представление невырожденного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ в виде формулы (13.27), можно определить его любую целую степень. В самом деле, для любого целого числа α имеем формулу

$$\mathbf{A}^\alpha = \sum_{k=1}^N \lambda_k^\alpha \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k, \quad (13.33)$$

которую при $\alpha \neq -1$ и $\alpha \neq 0$ можно доказать методом математической индукции, а при $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ будем иметь

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k, \quad \mathbf{A}^0 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^0 \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \mathbf{E}. \quad (13.34)$$

Прежде чем доказать формулы (13.34), заметим, что имеет место следующая теорема.

Теорема 13.5. Если \mathbf{U} (\mathbf{V}) — правый (левый) собственный тензор невырожденного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, соответствующий собственному значению λ , то он в то же время будет правым (левым) собственным тензором обратного к \mathbf{A} тензора \mathbf{A}^{-1} , соответствующим собственному значению λ^{-1} .

Доказательство. Из условия теоремы имеем

$$\mathbf{A} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}, \quad \mathbf{V} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A} = \lambda \mathbf{V}. \quad (13.35)$$

Кроме того, в силу определения обратного тензора справедливы формулы:

$$\mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \quad (13.36)$$

Умножая первую формулу (13.36) справа скалярно на \mathbf{U} , а вторую — слева на \mathbf{V} , в силу (13.35) после простых преобразований получим

$$\mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U} = \lambda^{-1} \mathbf{U}, \quad \mathbf{V} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A}^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{V}. \quad (13.37)$$

Формулы (13.37) доказывают теорему 13.5. \square

Следует заметить, что если тензор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ имеет представление (13.27), т. е. \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$ — полная система правых собственных тензоров, а \mathbf{U}^l , $l = \overline{1, N}$ — полная система левых собственных тензоров, то в силу теоремы 13.5, в частности, на основании формул (13.37) имеем

$$\mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}_k = \lambda_k^{-1} \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{U}^l \overset{p}{\otimes} \mathbf{A}^{-1} = \lambda_l^{-1} \mathbf{U}^l, \quad \langle k, l = \overline{1, N} \rangle. \quad (13.38)$$

Докажем теперь формулы (13.34).

Доказательство. В силу (13.26) и первой формулы (13.38) находим

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{E} = \sum_{k=1}^N \mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k,$$

что доказывает первую формулу (13.34).

Докажем и вторую формулу (13.34). На основании (13.26), (13.27), первой формулы (13.34) и условий биортонormalности собственных тензоров имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{A} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A}^{-1} = \sum_{k,l=1}^N \lambda_k \lambda_l^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}^l \mathbf{U}^l = \sum_{k,l=1}^N \lambda_k \lambda_l^{-1} \mathbf{U}_k \delta_l^k \mathbf{U}^l = \sum_{k=1}^N \lambda_k \lambda_k^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \\ &= \sum_{k=1}^N (\lambda_k)^0 \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{A}^0 = \sum_{k=1}^N (\lambda_k)^0 \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}^k = \mathbf{E},$$

что и требовалось доказать. \square

Очевидно, тот же самый результат мы получили бы, если бы исходили из равенства $\mathbf{A}^0 = \mathbf{A}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbf{A}$.

Следует отметить, что имеет место теорема Гамильтона—Кэли, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 13.6. Всякий тензор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению.

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем. Она доказывается аналогично теореме 6.3.

Рассмотрим теперь симметричный тензор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Собственные значения (корни характеристического уравнения) симметричного тензора действительны, а также в этом случае, как было сказано выше, нет различия между правыми и левыми собственными тензорами. Кроме того, собственные тензоры, соответствующие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны. Следовательно, и нормированные собственные тензоры попарно ортогональны, а

собственные тензоры, соответствующие какому-нибудь кратному корню, образуют подпространство модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, размерность которого равна кратности корня характеристического уравнения тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Следовательно, любой базис этого подпространства состоит из собственных тензоров тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Он — нормальный тензор и поэтому в силу теоремы 8.7 всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензоров. Конечно, полная ортонормированная система собственных тензоров симметричного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ является некоторым ортонормированным базисом модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. При этом если $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — положительно определенный симметричный тензор, то в силу теоремы Сильвестра он приводится к диагональному (каноническому) виду с положительными диагональными коэффициентами. Другими словами, характеристическое уравнение (13.6) (см. и (13.7)) имеет $N = n^p$ положительных корней (собственных значений). Причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Обозначим корни уравнения (13.6) через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$, а соответствующую этим корням полную ортонормированную систему собственных тензоров положительно определенного симметричного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — через $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$. Тогда его можно представить в каноническом виде (см. (13.27))

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad (13.39)$$

где, конечно, выполняются условия ортонормированности (см. (13.22))

$$(\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l) = \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{U}_l = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, N}. \quad (13.40)$$

Следовательно, и в рассматриваемом случае имеют место аналогичные (13.33) и (13.34) формулы. В самом деле, для произвольного неотрицательного целого числа α имеем

$$\mathbf{A}^\alpha = \sum_{k=1}^N \lambda_k^\alpha \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k \quad \forall \alpha. \quad (13.41)$$

В частности, при $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ справедливы формулы

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{k=1}^N \lambda_k^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{A}^0 = \sum_{k=1}^N \lambda_k^0 \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \mathbf{E}. \quad (13.42)$$

Заметим, что на основании второй формулы (13.42) (см. также второе соотношение (13.34)) можно заключить, что единичный тензор $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ имеет одно N -кратное собственное значение, равное 1, и любая ортонормированная система тензоров из модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, состоящая из N тензоров, является для него полной ортонормированной системой. Следовательно, любая ортонормированная система, состоящая из N тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, является базисом модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Итак, всякий ортонормированный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, состоящий из N тензоров, является полной ортонормированной системой собственных тензоров единичного тензора $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Заметим также, что из второго равенства (13.34) следует, что любой базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ и биортонормальный для него базис являются полными системами собственных тензоров единичного тензора $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Кроме того, любой базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ состоит из собственных тензоров $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, а также любой отличный от нуля тензор модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ является нетривиальным собственным тензором единичного тензора, соответствующим единственному N -кратному собственному значению, равному 1. Итак, $\mathbb{R}_p(\Omega)$ — просто инвариантный собственный модуль относительно $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

Из (13.39) видно, что для задания симметричного (положительно определенного) тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, кроме N собственных значений λ_k , $k = \overline{1, N}$, необходимо задать N собственных тензоров \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$. Построим эти собственные тензоры в явном виде. Прежде всего отметим, что условия ортонормированности (13.40) представляют $N(N+1)/2$ соотношений, которые связывают между собой N^2 компонент собственных тензоров

$$\mathbf{U}_k = U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{r}^{i_1} \mathbf{r}^{i_2} \dots \mathbf{r}^{i_p} = U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{i_1 i_2 \dots i_p} = U_{k, i} \mathbf{R}^i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad k, i = \overline{1, N}.$$

Итак, независимыми остаются $N(N-1)/2$ компонент (параметров), с помощью которых следует построить полную ортонормированную систему собственных тензоров для симметричного (в том числе и положительно определенного) тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$.

В дальнейшем с целью удобства и сокращения письма будем считать, что мультибазисы образованы из составляющих ортонормированного базиса n -мерного пространства и тензоры представлены в таких мультибазисах. В этой связи все индексы у компонент тензоров и составляющих

мультибазисов будем писать внизу. При этом, как и выше в общем случае, для тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ используем одноиндексное и p -индексное представления, а для тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — двуиндексное и $(2p)$ -индексное представления. В частности, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ — ортонормированный базис n -мерного пространства, т. е. $\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \delta_{kl}$, $k, l = \overline{1, n}$, то для составляющих мультибазисов будем иметь выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_p, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \\ \mathbf{R}_i &= \mathbf{R}_{\mathbb{N}(i_1, i_2, \dots, i_p)}, \quad \mathbf{R}_i \otimes^p \mathbf{R}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13.43)$$

а тензоры $\mathbf{U} \in \mathbb{R}_p(\Omega)$ и $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{A} = A_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{j_1 j_2 \dots j_p} = A_{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j, \\ & i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (13.44)$$

Единичный тензор $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ помимо приведенных выше представлений (12.12), (13.26), (13.42), конечно, будет иметь еще выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_i, \\ & i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (13.45)$$

Нетрудно видеть, что собственные тензоры $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}_p(\Omega)$, $k = \overline{1, N}$ тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{U}_i \otimes^p \mathbf{A} \otimes^p \mathbf{U}_j = 0, \quad i \neq j = \overline{1, N}, \quad (13.46)$$

$$\mathbf{U}_i \otimes^p \mathbf{A} \otimes^p \mathbf{U}_i = \lambda_i, \quad \langle i = \overline{1, N} \rangle. \quad (13.47)$$

Следует отметить, что в виде (13.40) имеем $N(N+1)/2$ независимых соотношений, а в виде (13.46) — $N(N-1)/2$ независимых соотношений, т. е. вместе (13.40) и (13.46) образуют систему из N^2 уравнений для определения N^2 величин $U_{k,l}$, $k, l = \overline{1, N}$, компонент собственных тензоров

$$\mathbf{U}_k = U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_p} = U_{k, i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U_{k,i} \mathbf{R}_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad k, i = \overline{1, N}. \quad (13.48)$$

Заметим также, что так как полная система собственных тензоров \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$, как было сказано выше, является одним из ортонормированных базисов модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, а \mathbf{R}_l , $l = \overline{1, N}$ — другим ортонормированным базисом, то получается, что соотношения (13.48) связывают между собой два ортонормированных базиса модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ с помощью компонент $U_{k,l}$, $k, l = \overline{1, N}$ собственных тензоров \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$. Следовательно, поэтому матрица компонент $U_{k,l}$, $k, l = \overline{1, N}$ — ортогональная матрица, являющаяся в свою очередь матрицей компонент ортогонального тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Запишем соотношения (13.48) в виде

$$\mathbf{U}_k = U_{k,l} \mathbf{R}_l = \mathbf{R}_k \otimes^p \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \otimes^p \mathbf{R}_k, \quad k, l = \overline{1, N}, \quad (13.49)$$

где введено обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= U_{k,l} \mathbf{R}_k \mathbf{R}_l = U_{i_1 i_2 \dots i_p j_1 j_2 \dots j_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{j_1 j_2 \dots j_p} = \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{U}^T = \mathbf{U}_k \mathbf{R}_k, \\ & i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad k, l = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (13.50)$$

Нетрудно проверить, что тензор $\mathbf{U} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ является ортогональным тензором. В самом деле, в силу условий ортонормированности системы собственных тензоров (13.40) и мультибазиса \mathbf{R}_k , $k = \overline{1, N}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, а также на основании представлений единичного тензора $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. вторую формулу (13.42) и (13.45)) и (13.50) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \otimes^p \mathbf{U}^T &= \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k \otimes^p \mathbf{U}_l \mathbf{R}_l = \mathbf{R}_k \delta_{kl} \mathbf{R}_l = \mathbf{R}_k \mathbf{R}_k = \mathbf{E}, \\ \mathbf{U}^T \otimes^p \mathbf{U} &= \mathbf{U}_l \mathbf{R}_l \otimes^p \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_l \delta_{lk} \mathbf{U}_k = \mathbf{U}_l \mathbf{U}_l = \mathbf{E}, \quad k, l = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{U} \otimes^p \mathbf{U}^T = \mathbf{U}^T \otimes^p \mathbf{U} = \mathbf{E},$$

как и требуется.

Заметим, что соотношение

$$\mathbf{U} \otimes^p \mathbf{U}^T = \mathbf{E} \quad (13.51)$$

где матрицы L и R компонент тензоров \mathbb{L} и \mathbb{R} представляются соответственно в виде

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{N-11} & l_{N-12} & l_{N-13} & \cdots & l_{N-1N-1} & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & l_{NN-1} & l_{NN} \end{pmatrix}, \quad (13.56)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \cdots & r_{1N-1} & r_{1N} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & \cdots & r_{2N-1} & r_{2N} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & \cdots & r_{3N-1} & r_{3N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{4N-1} & r_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{N-1N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13.57)$$

В качестве независимых $N(N-1)/2$ параметров рассматриваются компоненты r_{kl} , $k = \overline{1, N}$, $l = \overline{k+1, N}$ правого унитарного тензора \mathbb{R} , а компоненты l_{st} , $s = \overline{1, N}$, $t = \overline{1, s}$ левого треугольного тензора \mathbb{L} определяются с их помощью.

Учитывая (13.55), условия ортонормированности (13.51) можно представить в виде

$$\mathbf{U} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U}^T = \mathbb{L} \overset{p}{\otimes} (\mathbb{R} \overset{p}{\otimes} \mathbb{R}^T) \overset{p}{\otimes} \mathbb{L}^T = \mathbb{L} \overset{p}{\otimes} \mathbb{S} \overset{p}{\otimes} \mathbb{L}^T = \mathbf{E}, \quad (13.58)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} \overset{p}{\otimes} \mathbb{R}^T. \quad (13.59)$$

Далее представим тензоры \mathbb{L} и \mathbb{R} следующим образом:

$$\mathbb{L} = \mathbf{R}_s \mathbf{l}_s = \mathbf{l}_t \mathbf{R}_t, \quad \mathbb{R} = \mathbf{R}_s \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_t \mathbf{R}_t, \quad s, t = \overline{1, N}, \quad (13.60)$$

где для составляющих тензоров введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_s &= \sum_{k=1}^s l_{sk} \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{l}_t = \sum_{k=t}^N l_{kt} \mathbf{R}_k, \quad s, t = \overline{1, N}, \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{R}_s + \sum_{k=s+1}^N r_{sk} \mathbf{R}_k, \quad s = \overline{1, N-1}, \quad \mathbf{r}_N = \mathbf{R}_N; \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1, \quad \mathbf{r}_t = \mathbf{R}_t + \sum_{k=1}^{t-1} r_{kt} \mathbf{R}_k, \quad t = \overline{2, N}. \end{aligned} \quad (13.61)$$

В силу (13.60) и (13.61) из (13.55) находим

$$\mathbf{U} = \mathbb{L} \overset{p}{\otimes} \mathbb{R} = \mathbf{l}_t \mathbf{r}_t = l_{st} \mathbf{R}_s \mathbf{r}_t, \quad t = \overline{1, s}.$$

Отсюда, учитывая (13.50), получим

$$\mathbf{U}_s = \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{r}_t, \quad s = \overline{1, N}. \quad (13.62)$$

Нетрудно доказать, что как система тензоров \mathbf{r}_t , $t = \overline{1, N}$, так и система тензоров \mathbf{U}_s , $s = \overline{1, N}$ линейно независима.

Из (13.62) видно, что ортонормированная система тензоров \mathbf{U}_s , $s = \overline{1, N}$ можно получить с помощью процедуры ортонормирования Грама—Шмидта [5, 7, 36, 80] линейно независимой системы тензоров \mathbf{r}_t , $t = \overline{1, N}$ (см. (13.61)). В самом деле, проводя процесс ортогонализации и нормирования системы тензоров \mathbf{r}_t , $t = \overline{1, N}$, для коэффициентов l_{st} , $s = \overline{1, N}$, $t = \overline{1, s}$ после простых, хотя и громоздких выкладок получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{d_0}{\pm \sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{mt} = \frac{S_{mt}^{(m)}}{\pm \sqrt{d_{m-1} d_m}}, \\ S_{mt}^{(m)} &= (-1)^{m+t} S \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 \cdots t-1 & t & t+1 & \cdots & m-1 \\ 1 & 2 \cdots t-1 & t+1 & \cdots & m \end{array} \right), \quad \langle m = \overline{2, N} \rangle, \quad t = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (13.63)$$

где введены следующие обозначения:

$$d_0 = 1, \quad d_m = \det S_m = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm} \end{vmatrix}, \quad s_{mt} = \mathbf{r}_m \cdot \overset{p}{\otimes} \mathbf{r}_t, \quad m, t = \overline{1, N},$$

$$S_{mt}^{(m)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t-1} & 0 & s_{1t+1} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2t-1} & 0 & s_{2t+1} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt-1} & 0 & s_{tt+1} & \cdots & s_{tm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-11} & s_{m-12} & \cdots & s_{m-1t-1} & 0 & s_{m-1t+1} & \cdots & s_{m-1m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \langle m = \overline{1, N} \rangle, \quad t = \overline{1, m},$$

$$S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t-1} & s_{1t+1} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2t-1} & s_{2t+1} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt-1} & s_{tt+1} & \cdots & s_{tm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-11} & s_{m-12} & \cdots & s_{m-1t-1} & s_{m-1t+1} & \cdots & s_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$S_{mt}^{(m)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{mt} субматрицы $S_m = \text{matr}(s_{kl})$, $k, l = \overline{1, m}$, а $S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m \end{pmatrix}$ — минор $(m-1)$ -го порядка для определителя $\det S_m$, получающийся вычеркиванием m -ой строки и t -го столбца.

Учитывая (13.63), из (13.62) после несложных преобразований для искомого собственного тензора тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ получим следующие выражения:

$$\mathbf{U}_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{d_0 d_1}} \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{U}_k = \frac{1}{\pm \sqrt{d_{k-1} d_k}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k-1} & \mathbf{r}_1. \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k-1} & \mathbf{r}_2. \\ s_{31} & s_{32} & \cdots & s_{3k-1} & \mathbf{r}_3. \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk-1} & \mathbf{r}_k. \end{vmatrix}, \quad k = \overline{2, N}. \quad (13.64)$$

Следует заметить, что с помощью формул (13.64) собственные тензоры $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}_p(\Omega)$, $k = \overline{1, N}$ определяются с помощью $N(N-1)/2$ независимых параметров — компонент правого унитарного тензора \mathbb{R} относительно произвольной системы координат (произвольного ортонормированного базиса n -мерного пространства). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров в некоторых случаях можно уменьшить на несколько единиц. Более подробно этот вопрос изучается ниже при рассмотрении частных случаев. В общем случае на этом останавливаться не будем.

Таким образом, для описания внутренней структуры симметричного тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ достаточно вместо компонент этого тензора в какой-то системе координат задать его инвариантные характеристики, т. е. собственные значения λ_k , $k = \overline{1, N}$ и собственные тензоры \mathbf{U}_k , $k = \overline{1, N}$, которые определяются с помощью $N(N-1)/2$ независимых параметров относительно произвольно выбранной системы координат. Заметим, что эти инвариантные характеристики должны служить для сравнения и классификации симметричных тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Для тензора модулей упругости (тензора четвертого ранга трехмерного пространства, обладающего классическими симметриями), как было сказано выше, аналогичное исследование было проведено Н. И. Остросаблинным [47–50].

14. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ТЕНЗОРНЫХ СТОЛБЦОВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ТЕНЗОРНО-БЛОЧНОЙ МАТРИЦЫ ЛЮБОГО ЧЕТНОГО РАНГА

Рассматривается задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы и построена полная система собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. также [39, 40, 43]).

Введем определение тензорно-блочной матрицы.

Определение 14.1. Блочная матрица, блоками которого являются тензоры, вообще говоря, различного ранга, называется *тензорно-блочной матрицей*.

Тензорно-блочную матрицу в общем случае можно представить в виде

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{q1} & \mathbf{A}_{q2} & \mathbf{A}_{q3} & \cdots & \mathbf{A}_{qm} \end{pmatrix}, \quad (14.1)$$

где m и q — некоторые натуральные числа, а \mathbf{A}_{kl} , $k = \overline{1, q}$, $l = \overline{1, m}$ — произвольные тензоры, называемые еще субтензорами матрицы (14.1).

В дальнейшем представляет интерес изучение внутренней структуры такой тензорно-блочной матрицы (14.1), для которой $q = m$, а субтензоры являются тензорами одинакового четного ранга, например, модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, так как именно такие матрицы находят применение в приложении. В общем виде такую матрицу можно записать в форме

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \quad (14.2)$$

где

$$\mathbf{A}_{kl} = A_{kl, j_1 j_2 \dots j_p}^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}^{j_1 j_2 \dots j_p} = A_{kl, \cdot j} \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j, \quad i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, j_2, \dots, j_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Заметим, что последовательность субтензоров $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \dots, \mathbf{A}_{mm}$ называется *главной диагональю* тензорно-блочной матрицы (14.2), а каждый тензор, стоящий на главной диагонали, называется *диагональным субтензором*. Заметим также, что матрица (14.2) состоит из квадратных тензоров, поэтому и сама является квадратной.

Определение 14.2. Тензорно-блочная матрица, в которой диагональные субтензоры отличны от нуля, а остальные являются нулевыми тензорами, называется *тензорно-блочно-диагональной матрицей*.

На основании определения 14.2 заключаем, что тензорно-блочно-диагональная матрица будет иметь вид

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{pmatrix}, \quad (14.3)$$

Определение 14.3. Тензорно-блочная матрица, в которой все субтензоры ниже (выше) главной диагонали равны нулю, называется *верхней*, или *правой* (*нижней*, или *левой*), *тензорно-блочно-треугольной матрицей*.

Следовательно, правая (левая) тензорно-блочно-треугольная матрица представляется в форме

$$\mathbb{M} = \left(\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \cdots & \mathbf{A}_{1m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \cdots & \mathbf{A}_{2m} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{A}_{3m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{array} \right), \quad \left(\mathbb{M} = \left(\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \mathbf{A}_{m3} & \cdots & \mathbf{A}_{mm} \end{array} \right) \right). \quad (14.4)$$

В матрицах (14.3) и (14.4) символ $\mathbf{0}$ обозначает нулевой тензор модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Этот символ применяется и в дальнейшем для обозначения нулевого тензора различного ранга с соответствующей оговоркой.

Нетрудно заметить, что компоненты матриц (14.2), (14.3) и (14.4) при замене системы координат будут меняться так же, как и компоненты тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. В этой связи (14.2) можно назвать тензорно-блочной матрицей ранга $2p$. Более того, нетрудно убедиться в том, что множество таких тензорно-блочных матриц образует модуль над кольцом скаляров. Обозначим этот модуль через $\mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$. Тогда можно написать $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$. Заметим также, что если изучим внутреннюю структуру тензорно-блочной матрицы, состоящей из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, то, очевидно, результаты ее исследования легко обобщить на случай матрицы (14.2). В этой связи в дальнейшем ограничимся рассмотрением тензорно-блочной матрицы вида

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (14.5)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. Из сказанного выше относительно (14.2) следует, что (14.5) — тензорно-блочная матрица ранга $2p$ модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. В дальнейшем о типе матрицы упоминать не будем, так как, если противное не будет оговорено, в основном будем иметь дело с тензорно-блочной матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Итак, в дальнейшем запись $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ означает, что \mathbb{M} — тензорно-блочная матрица, состоящая из четырех тензоров модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ или тензорно-блочная матрица модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

Легко усмотреть, что $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ обладает теми же свойствами, что и соответствующая блочная матрица, составленная из матриц компонент составляющих тензоров. Например, транспонированная с (14.5) тензорно-блочная матрица имеет вид

$$\mathbb{M}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{pmatrix}. \quad (14.6)$$

Введем некоторые аналогичные приведенным выше для тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ определения.

Определение 14.4. Тензорно-блочная матрица, которая совпадает со своей транспонированной, называется *симметрической*.

Нетрудно заметить, что имеет место утверждение.

Утверждение 14.1.

$$(\mathbb{M} = \mathbb{M}^T) \Leftrightarrow (\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{B} = \mathbf{C}^T, \mathbf{D} = \mathbf{D}^T).$$

Определение 14.5. Тензорно-блочная матрица называется *левой*, или *нижней* (*правой*, или *верхней*), *треугольной* [*унитреугольной*], если соответствующая ей блочная матрица матриц компонент составляющих тензоров — левая или нижняя (правая или верхняя) треугольная [унитреугольная] матрица.

В силу определения 14.5 матрица

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (14.7)$$

где \mathbf{A} , $\mathbf{0}$, \mathbf{C} и \mathbf{D} — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, — левая треугольная (унитреугольная) матрица модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, если матрицы компонент \mathbf{A} и \mathbf{D} — левые треугольные (унитреугольные), а матрица

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (14.8)$$

где \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\mathbf{0}$ и \mathbf{D} — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, — правая треугольная (унитреугольная) матрица модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, если матрицы компонент \mathbf{A} и \mathbf{D} — правые треугольные (унитреугольные) матрицы.

Определение 14.6. Матрица вида

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix}, \quad (14.9)$$

где \mathbf{A} , $\mathbf{0}$ и \mathbf{D} — тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, называется *тензорно-блочной-диагональной матрицей модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$* .

Определение 14.7. *Определителем* тензорно-блочной матрицы называется определитель блочной матрицы матриц смешанных компонент составляющих тензоров.

Определение 14.8. Тензорно-блочная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

На основании определения 13.7 заключаем, что если в (14.7) тензоры \mathbf{A} и \mathbf{D} — левые треугольные (унитреугольные), а \mathbf{C} — квадратный тензор, то (14.7) — левая треугольная (унитреугольная) тензорно-блочная матрица. А также, если в (14.8) тензоры \mathbf{A} и \mathbf{D} — правые треугольные (унитреугольные), а \mathbf{B} — квадратный тензор, то (14.8) — правая треугольная (унитреугольная) тензорно-блочная матрица.

Наряду с понятием тензорно-блочной матрицы целесообразно ввести в рассмотрение понятие тензорного столбца (тензорной строки).

Определение 14.9. Матрица-столбец (матрица-строка), состоящей (состоящая) из тензоров, называется *тензорным столбцом (тензорной строкой)*.

Очевидно, тензорная строка — транспонированный тензорный столбец, а тензорный столбец — транспонированная тензорная строка. В этой связи ниже в основном речь пойдет о тензорном столбце, имея в виду, что все сказанное о нем в равной мере относится и к тензорной строке.

В дальнейшем, аналогично тензорно-блочной матрице, представляет интерес рассмотрение такого тензорного столбца, который состоит из тензоров одинакового ранга из некоторого модуля. Например, если тензорно-блочная матрица имеет вид (14.5), то тензорный столбец (тензорную строку) можно представить в виде

$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} \quad (\mathbb{W}^T = (\mathbf{U}, \mathbf{V})), \quad (14.10)$$

где \mathbf{U} и \mathbf{V} — тензоры модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, т. е.

$$\mathbf{U} = U^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = U^i \mathbf{R}_i, \quad \mathbf{V} = V^{i_1 i_2 \dots i_p} \mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_p} = V^i \mathbf{R}_i, \quad i_1, i_2, \dots, i_p = \overline{1, n}, \quad i, j = \overline{1, N}.$$

Следовательно, аналогично тензорно-блочной матрице (14.5) можно сказать, что тензорный столбец (тензорная строка) (14.10) имеет ранг p . Кроме того, легко усмотреть, что множество тензорных столбцов (тензорных строк) типа (14.10) над кольцом скаляров образует модуль, который обозначим через $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$. Тогда неоднократно применяемая в дальнейшем запись $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ означает, что \mathbb{W} — тензорный столбец, составленный из двух тензоров модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ или просто \mathbb{W} — тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$. То же самое относится и к тензорным строкам.

Введем теперь некоторые определения, касающиеся тензорных столбцов модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ и тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, и поставим задачу на собственные значения для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

Определение 14.10. *Скалярным произведением* двух тензорных столбцов $\mathbb{W}_1 \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ и $\mathbb{W}_2 \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ называется выражение

$$(\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2) = \mathbb{W}_1^T \otimes^p \mathbb{W}_2 = (\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1) \otimes^p \begin{pmatrix} \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{V}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1 \otimes^p \mathbf{U}_2 + \mathbf{V}_1 \otimes^p \mathbf{V}_2. \quad (14.11)$$

Определение 14.11. Два тензорных столбца называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 14.12. *Нормой* тензорного столбца $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ называется величина

$$\|\mathbb{W}\| = \sqrt{(\mathbb{W}, \mathbb{W})} = \sqrt{\mathbf{U} \overset{p}{\otimes} \mathbf{U} + \mathbf{V} \overset{p}{\otimes} \mathbf{V}}. \quad (14.12)$$

Определение 14.13. Тензорный столбец называется *нормированным*, если его норма равна единице.

Определение 14.14. Система тензорных столбцов $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_m$ называется *ортонормированной*, если выполняются условия

$$(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_l) = \mathbb{W}_k^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}_l = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, m}.$$

Определение 14.15. Две системы тензорных столбцов $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \dots, \mathbb{W}_m$ и $\mathbb{W}^1, \mathbb{W}^2, \dots, \mathbb{W}^m$ ($1 \leq m \leq 2N$) модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ называются *биортонормальными*, если выполняются условия

$$(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}^l) = \mathbb{W}_k^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}^l = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, m}, \quad 1 \leq m \leq 2N.$$

Заметим, что биортонормальную систему для данной линейно независимой системы тензорных столбцов можно построить таким же образом, как и для некоторой линейно независимой системы тензоров. В частности, имеет место

Теорема 14.1. *Для всякой линейно независимой системы тензорных столбцов модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ существует биортонормальная система.*

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем. Она доказывается совершенно аналогично теореме 13.4.

Определение 14.16. Симметричная тензорно-блочная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ ($\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$) называется *положительно определенной*, если образуемая по ней квадратичная форма

$$(\mathbb{W}, \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}) = \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}$$

положительна для любого отличного от нуля тензорного столбца $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ ($\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^m(\Omega)$).

На основании определения 14.16 заключаем, что матрица компонент составляющих тензоров положительно определенной тензорно-блочной матрицы положительно определена, а отсюда в свою очередь следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 14.2. *Диагональные субтензоры положительно определенной тензорно-блочной матрицы положительно определены.*

Задача на собственные значения для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Для некоторого $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ найти все тензорные столбцы $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}, \quad (14.13)$$

где λ — скаляр.

Уравнение (14.13) всегда имеет тривиальное решение $\mathbb{W} = \mathbb{O}$, где $\mathbb{O} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ — нулевой тензорный столбец ($\mathbb{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})^T$). В дальнейшем, говоря о решении уравнения (14.13), будем иметь в виду только нетривиальное решение $\mathbb{W} \neq \mathbb{O}$. Кроме того, отметим, что решение уравнения (14.13) определяется с точностью до скалярного множителя, т. е. если \mathbb{W} — решение уравнения (14.13) для некоторого λ , то $\alpha \mathbb{W}$, где α — произвольный скаляр, также будет решением. Очевидно, всегда можно выбрать α так, чтобы удовлетворить условию $\|\alpha \mathbb{W}\| = 1$. В самом деле, для этого достаточно положить $\alpha = \|\mathbb{W}\|^{-1}$.

Таким образом, решение уравнения (14.13) всегда можно нормировать условием $\|\mathbb{W}\| = 1$. В этой связи в дальнейшем все время, если противное не будет оговорено, будем иметь в виду нормированные решения уравнения (14.13).

Если для некоторого λ уравнение (14.13) имеет решение \mathbb{W} , то λ называется *собственным значением* (числом) тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.5), а \mathbb{W} — *собственным тензорным столбцом* (14.10), соответствующим собственному значению λ .

Естественно, можно рассматривать и следующую задачу: для некоторого $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ найти все тензорные строки

$$\mathbb{W}' = (\mathbf{U}', \mathbf{V}') \quad (14.14)$$

модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \mu \mathbb{W}', \quad (14.15)$$

где μ — скаляр.

Если уравнение (14.15) для некоторого μ имеет нетривиальное решение \mathbb{W}' , то μ называется *собственным значением (числом)* тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.5), а \mathbb{W}' — *собственной тензорной строкой*, соответствующей собственному значению μ .

Заметим, что в общем случае $\lambda = \mu$, а $\mathbb{W}' \neq \mathbb{W}^T$. Однако, если $\mathbb{M}^T = \mathbb{M}$, то $\mathbb{W}' = \mathbb{W}^T$. Вообще говоря, имеют место утверждения:

Утверждение 14.2. *Транспонированный собственный тензорный столбец (тензорная строка) тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} является собственной тензорной строкой (тензорным столбцом) транспонированной тензорно-блочной матрицы \mathbb{M}^T .*

Утверждение 14.3. *Если тензорно-блочная матрица \mathbb{M} симметрическая ($\mathbb{M}^T = \mathbb{M}$), то транспонированный собственный тензорный столбец (тензорная строка) в то же время является собственной тензорной строкой (тензорным столбцом).*

Сформулируем еще некоторые утверждения и теоремы, касающиеся собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы.

Утверждение 14.4. *Если λ и λ' — два различных собственных значения тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} , то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца \mathbb{W} и \mathbb{W}' линейно независимы.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $\mathbb{W} = \alpha \mathbb{W}'$, где α — скаляр. Тогда имеем $\lambda \mathbb{W} = \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \alpha \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \alpha \lambda' \mathbb{W}' = \lambda' \mathbb{W}$. Так как $\mathbb{W} \neq \mathbb{O}$, то отсюда следует, что $\lambda = \lambda'$. Получили противоречие. Тем самым утверждение доказано. \square

Теорема 14.3. *Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

Теорему 14.3 можно доказать в силу утверждения 14.4 методом математической индукции.

Теорема 14.4. *Если λ и λ' — два различных собственных значения симметрической тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} , то соответствующие им любые два собственных тензорных столбца \mathbb{W} и \mathbb{W}' ортогональны.*

Доказательство. На основании определения собственного тензорного столбца и утверждения 14.3 имеем

$$\mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = \lambda' \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}' = \lambda'(\mathbb{W}, \mathbb{W}').$$

Отсюда находим $(\lambda - \lambda')(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$. Так как $\lambda \neq \lambda'$, то из последнего равенства получим $(\mathbb{W}, \mathbb{W}') = 0$, что и требовалось доказать. \square

Теорема 14.5. *Собственные тензорные столбцы симметрической тензорно-блочной матрицы, соответствующие попарно различным собственным значениям, попарно ортогональны.*

Теорему 14.5 можно доказать в силу теоремы 14.4 методом математической индукции.

Теорема 14.6. *Собственные значения положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы положительны.*

Доказательство. Пусть \mathbb{W} — нормированный собственный тензорный столбец положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} , соответствующий собственному значению λ . Тогда на основании определения 14.13 и утверждения 14.3 имеем

$$0 < \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda(\mathbb{W}, \mathbb{W}) = \lambda \|\mathbb{W}\|^2 = \lambda,$$

что и требовалось доказать. \square

Нетрудно заметить, что уравнение (14.13) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} \otimes^p \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \left((\mathbb{M} - \lambda \mathbf{E}) \otimes^p \mathbb{W} = \mathbf{0} \right), \quad (14.16)$$

где \mathbf{E} — единичный тензор $(2p)$ -го ранга (12.12), а \mathbf{E} — единичная тензорно-блочная матрица вида

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i^j \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & g_j^i \mathbf{R}_i \mathbf{R}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i^j & 0 \\ 0 & g_i^j \end{pmatrix} \mathbf{R}^i \mathbf{R}^j, \quad i, j = \overline{1, 2N}. \quad (14.17)$$

Здесь $\mathbf{0}$ — нулевой тензор $(2p)$ -го ранга.

Видно, что тензорное уравнение (14.16) представляет однородную систему $2N$ ($N = n^p$) уравнений относительно $2N$ неизвестных (компонент двух тензоров \mathbf{U} и \mathbf{V} модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$), которая должна иметь нетривиальное решение. Для существования нетривиального решения системы уравнений (14.16) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\det(\mathbb{M} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \right), \quad (14.18)$$

Легко усмотреть, что (14.18) — алгебраическое уравнение степени $2N$ относительно λ , называемое *характеристическим уравнением* тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Если \mathbb{M} — положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица, то в силу теоремы 14.6 ее характеристическое уравнение (14.18) имеет $2N$ положительных корней (собственных значений), причем каждый корень считается столько раз, сколько его кратность.

Далее приведем еще аналогичные приведенным выше для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ некоторые определения и теоремы, которые перефразируем применительно к тензорно-блочной матрице.

Определение 14.17. Действительная тензорно-блочная матрица называется *нормальной*, если она коммутирует со своей транспонированной.

На основании этого определения заключаем, что действительные симметрическая, кососимметрическая и ортогональная тензорно-блочные матрицы, а также единичная тензорно-блочная матрица суть нормальные тензорно-блочные матрицы.

Определение 14.18. Ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, состоящая из $2N$ тензорных столбцов, называется *полной ортонормированной системой* собственных тензорных столбцов для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

Определение 14.19. Будем говорить, что $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — тензорно-блочная матрица простой структуры, если она имеет $2N$ линейно независимых собственных тензорных столбцов.

Утверждение 14.5. Тензорно-блочная матрица имеет простую структуру, если все корни ее характеристического уравнения различны между собой.

Заметим, что обратное утверждение неверно, т. е. существуют тензорно-блочные матрицы простой структуры, характеристические уравнения которых имеют кратные корни, например, единичная тензорно-блочная матрица.

Теорема 14.7. Действительная симметрическая (нормальная) тензорно-блочная матрица всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов.

Заметим, что теорема 14.7 верна для любой действительной симметрической тензорно-блочной матрицы, а также для нормальной комплексной тензорно-блочной матрицы.

В силу теоремы 14.7 положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов, а ее собственные значения на основании теоремы 14.6 положительны.

Обозначим через $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов положительно определенной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, отвечающих собственным значениям λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ соответственно. Тогда $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ аналогично (13.39) (см. также (13.27)) можно представить в каноническом виде

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix}, \quad (14.19)$$

где, конечно, имеет место условия ортонормированности

$$(\mathbb{W}_k, \mathbb{W}_l) = \mathbb{W}_k^T \otimes \mathbb{W}_l = \mathbf{U}_k \otimes \mathbf{U}_l + \mathbf{V}_k \otimes \mathbf{V}_l = \delta_{kl}, \quad k, l = \overline{1, 2N}. \quad (14.20)$$

Сравнивая (14.5) с (14.19), будем иметь

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{C}^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k, \quad \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k. \quad (14.21)$$

Следует отметить, что размерности введенных выше модулей $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ равны $2N$ и $4N^2$ соответственно, тогда как размерности модулей $\mathbb{R}_p(\Omega)$, $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ — N и N^2 соответственно. Следовательно, в модуле $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ существует $2N$ линейно независимых тензорных столбцов, образующих базис этого модуля, а в модуле $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — $4N^2$ линейно независимых тензорно-блочных матриц, составляющих базис этого модуля. Из решения характеристического уравнения (14.18), например, для тензорно-блочной матрицы простой структуры $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ получаем $2N$ линейно независимых собственных тензорных столбцов, которые, конечно, можно принять в качестве базиса модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — симметрическая тензорно-блочная матрица, то ее полная система ортонормированных собственных тензорных столбцов будет, конечно, ортонормированным базисом модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$. Значит, любой тензорный столбец модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ можно разложить по упомянутым выше базисам. Зная базис модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ (меньшей размерности), можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ (большой размерности) таким же образом, как с помощью базиса модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$ можно построить базис модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$. В частности, если рассмотрим тензорное произведение тензорного столбца на тензорную строку модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$, получим тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Следовательно, если каждый тензорный столбец некоторого базиса модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ умножить тензорно на каждую из тензорных строк, получаемых транспонированием всех тензорных столбцов рассматриваемого базиса, то получим $4N^2$ тензорно-блочных матриц, составляющих базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Итак, если тензорные столбцы $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ образуют, например, ортонормированный базис модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$, где в качестве $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ можно, конечно, рассматривать и полную систему ортонормированных собственных тензорных столбцов некоторой симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, то тензорно-блочные матрицы $\mathbb{W}_k \mathbb{W}_l^T$, $k, l = \overline{1, 2N}$ составят базис модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, и нетрудно убедиться в том, что единичную тензорно-блочную матрицу $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ (см. также (14.17)) можно представить в виде

$$\mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix}. \quad (14.22)$$

Если же тензорные столбцы $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ образуют некоторый базис модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$, а тензорные столбцы $\mathbb{Z}^l = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)^T$, $l = \overline{1, 2N}$ составляют биортонормальный для него базис, то тензорно-блочные матрицы $\mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{lT}$, $k, l = \overline{1, 2N}$ будут служить базисом модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, и при этом единичная тензорно-блочная матрица $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ представится в виде

$$\mathbb{E} = \sum_{k=1}^{2N} \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}^{kT} = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{k=1}^{2N} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{X}_k \mathbf{Y}^k \\ \mathbf{Y}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}^k \end{pmatrix}. \quad (14.23)$$

Заметим, что в последнем соотношении можно жонглировать индексами.

Зная представления (см. (14.17), (14.22) и (14.23)) единичной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{E} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, не составляет труда дать каноническое представление тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ простой структуры, а также обратной к ней матрицы, хотя представление обратной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M}^{-1} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ можно получить также на основании доказываемой ниже теоремы. Прежде чем заниматься этими представлениями, отметим, что если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — невырожденная тензорно-блочная матрица, то существует единственная обратная к ней тензорно-блочная матрица \mathbb{M}^{-1} такая, что имеет место соотношение (матрица компонент обратной тензорно-блочной матрицы — обратная к матрице компонент исходной тензорно-блочной матрицы)

$$\mathbb{M} \otimes \mathbb{M}^{-1} = \mathbb{M}^{-1} \otimes \mathbb{M} = \mathbb{E} \quad (14.24)$$

и справедлива

Теорема 14.8. Если \mathbb{W} (\mathbb{W}') — собственный тензорный столбец (собственная тензорная строка) из модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$ невырожденной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, соответствующий собственному значению λ , то он (она) в то же время будет собственным тензорным столбцом (собственной тензорной строкой) обратной к \mathbb{M} тензорно-блочной матрицы \mathbb{M}^{-1} , соответствующим собственному значению λ^{-1} .

Доказательство. Пусть $\mathbb{W} \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$ ($\mathbb{W}' \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$) — собственный тензорный столбец (собственная тензорная строка) невырожденной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, соответствующий собственному значению λ (λ). Тогда имеем

$$\mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{W} \quad (\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} = \lambda \mathbb{W}'). \quad (14.25)$$

Умножая обе части первого равенства (14.25) слева на \mathbb{M}^{-1} , в силу (14.24) получим

$$(\mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{M} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}) \Leftrightarrow (\mathbb{E} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}) \Leftrightarrow (\mathbb{W} = \lambda \mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W}).$$

Отсюда в свою очередь находим

$$\mathbb{M}^{-1} \overset{p}{\otimes} \mathbb{W} = \lambda^{-1} \mathbb{W} \quad (\mathbb{W}' \overset{p}{\otimes} \mathbb{M}^{-1} = \lambda^{-1} \mathbb{W}'), \quad (14.26)$$

где второе соотношение (14.26) получается аналогично первому. Теорема доказана. \square

Заметим, что если в теореме 14.8 \mathbb{W}' заменить на \mathbb{W}^T , то получим аналогичную теорему для симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

На основании теоремы 14.8 можно доказать следующую теорему.

Теорема 14.9. Собственные (главные) значения обратной тензорно-блочной матрицы \mathbb{M}^{-1} равны обратным значениям собственных (главных) значений исходной невырожденной тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} , а собственные тензорные столбцы и строки \mathbb{M}^{-1} и \mathbb{M} совпадают.

В силу теоремы 14.9 легко усмотреть, что для обратной к (13.27) тензорно-блочной матрицы \mathbb{M}^{-1} будем иметь представление

$$\mathbb{M}^{-1} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \mathbb{W}_k \mathbb{W}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{V}_k \mathbf{V}_k \end{pmatrix}. \quad (14.27)$$

Сформулируем теперь и аналогичную теореме 13.3 теорему для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

Теорема 14.10. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — тензорно-блочная матрица простой структуры, то она имеет полные системы [нормированных или ненормированных] собственных тензорных столбцов и тензорных строк и если найдена полная система [нормированных или ненормированных] собственных тензорных столбцов (строк), а затем построена биортонормальная для нее система тензорных столбцов (строк), то, транспонируя каждый тензорный столбец (каждую тензорную строку) в построенной биортонормальной системе тензорных столбцов (строк), получим полную систему тензорных строк (столбцов).

Докажем теорему 14.10 в том случае, когда найдена полная система ненормированных собственных тензорных столбцов для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, так как остальные случаи доказываются аналогично. В частности, докажем теорему:

Теорема 14.11. Если $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — тензорно-блочная матрица простой структуры и $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$, $k = \overline{1, 2N}$ — ее полная система собственных тензорных столбцов, соответствующая системе собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ соответственно, а $\mathbb{Z}^l = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)^T$, $l = \overline{1, 2N}$ — биортонормальная для нее система тензорных столбцов, то система $\mathbb{Z}^{lT} = (\mathbf{X}^l, \mathbf{Y}^l)$, $l = \overline{1, 2N}$ будет полной системой собственных строк, и тензорно-блочная матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ имеет представление

$$\mathbb{M} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \mathbb{Z}_k \mathbb{Z}_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \\ \mathbf{Y}_k \end{pmatrix} \otimes (\mathbf{X}^k, \mathbf{Y}^k) = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{X}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{X}_k \mathbf{Y}^k \\ \mathbf{Y}_k \mathbf{X}^k & \mathbf{Y}_k \mathbf{Y}^k \end{pmatrix}. \quad (14.28)$$

Доказательство. Так как полная система собственных тензорных столбцов $Z_k \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$ тензорно-блочной матрицы $M \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ и биортонормальная для нее система тензорных столбцов Z_l , $l = \overline{1, 2N}$ являются биортонормальными базисами модуля $\mathbb{R}_p^2(\Omega)$, то единичная тензорно-блочная матрица $E \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ имеет представление (14.23), с учетом которого получаем

$$M = M \overset{p}{\otimes} E = \sum_{k=1}^{2N} M \overset{p}{\otimes} Z_k Z_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k Z_k Z_k^T.$$

Таким образом,

$$M = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k Z_k Z_k^T$$

и справедливость представления (14.28) доказана.

Умножая теперь обе части последнего соотношения слева на Z^{lT} и учитывая биортонормальность систем Z_k , $k = \overline{1, 2N}$ и Z^l , $l = \overline{1, 2N}$, будем иметь

$$Z^{lT} \overset{p}{\otimes} M = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k Z^{lT} \overset{p}{\otimes} Z_k Z_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \delta_k^l Z_k^T = \lambda_l Z^{lT}, \quad (l = \overline{1, 2N}),$$

а это означает, что система Z^{lT} , $l = \overline{1, 2N}$ — полная система собственных тензорных строк для $M \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. Теорема доказана полностью. \square

Имея для $M \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ представление (14.28), нетрудно доказать, что ее степень для любого целого числа α имеет вид

$$M^\alpha = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^\alpha Z_k Z_k^T. \quad (14.29)$$

В частности, при $\alpha = -1$ и $\alpha = 0$ будем иметь

$$M^{-1} = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^{-1} Z_k Z_k^T, \quad E = M^0 = \sum_{k=1}^{2N} Z_k Z_k^T. \quad (14.30)$$

Следует заметить, что при $\alpha = 1$ из (14.29) следует (14.28), первая формула (14.30) была доказана выше (см. теорему 14.9), вторую формулу (14.30) можно доказать непосредственно, а для остальных значений α справедливость (14.29) доказывается методом математической индукции.

Докажем вторую формулу (14.30). В силу (14.24), представлений M (см. (14.28)) и M^{-1} (см. первую формулу (14.30)), а также представления единичной тензорно-блочной матрицы (14.23) находим

$$\begin{aligned} M \overset{p}{\otimes} M^{-1} &= \sum_{k=1, l}^{2N} \lambda_k \lambda_l^{-1} Z_k Z_k^T \overset{p}{\otimes} Z_l Z_l^T = \sum_{k=1, l}^{2N} \lambda_k \lambda_l^{-1} Z_k \delta_k^l Z_l^T = \\ &= \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k \lambda_k^{-1} Z_k Z_k^T = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^0 Z_k Z_k^T = M^0 = \sum_{k=1}^{2N} \lambda_k^0 Z_k Z_k^T = \sum_{k=1}^{2N} Z_k Z_k^T = E, \end{aligned}$$

т. е.

$$M^0 = M \overset{p}{\otimes} M^{-1} = E = \sum_{k=1}^{2N} Z_k Z_k^T. \quad (14.31)$$

Аналогично (14.31) доказывается, что

$$M^0 = M^{-1} \overset{p}{\otimes} M = E = \sum_{k=1}^{2N} Z_k Z_k^T.$$

Итак, справедливость второй формулы (14.30) доказана.

Запишем теперь характеристическое уравнение (14.18) в развернутом виде

$$\lambda^{2N} - I_1(M) \lambda^{2N-1} + \dots + (-1)^s I_s(M) \lambda^{2N-s} + \dots + (-1)^{2N} I_{2N}(M) = 0, \quad (14.32)$$

где $I_{2N}(M) = \det M$.

Нетрудно доказать, что имеет место теорема Гамильтона—Кэли.

Теорема 14.12. *Всякая тензорно-блочная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению.*

Итак, в силу этой теоремы справедливо соотношение

$$\mathbb{M}^{2N} - I_1(\mathbb{M})\mathbb{M}^{2N-1} + \dots + (-1)^s I_s(\mathbb{M})\mathbb{M}^{2N-s} + \dots + (-1)^{2N} I_{2N}(\mathbb{M})\mathbb{E} = 0.$$

На доказательстве этой теоремы останавливаться не будем. Она доказывается аналогично теореме 6.3.

Следует отметить, что инварианты тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ в уравнении (14.32) аналогично инвариантам матрицы [7, 15, 74] или тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ (см. (13.16) и (13.18)) вычисляются по формулам

$$S_k = I_k(\mathbb{M}) = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & s_{k-5} & \dots & s_1 & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \dots & s_2 & s_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 2N}, \quad (14.33)$$

где

$$s_k = I_1(\mathbb{M})^k, \quad k = \overline{1, 2N}, \quad \mathbb{M}^k = \overbrace{\mathbb{M} \otimes \mathbb{M} \otimes \dots \otimes \mathbb{M}}^k,$$

а первый инвариант для $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$I_1(\mathbb{M}) = I_1 \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = I_1(\mathbf{A} + \mathbf{D}) = I_1(\mathbf{A}) + I_1(\mathbf{D}). \quad (14.34)$$

Обратные к (14.33) соотношения представляются в виде

$$s_k = I_1(\mathbb{M}^k) = \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2S_2 & S_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3S_3 & S_2 & S_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & S_{k-4} & \dots & S_1 & 1 \\ kS_k & S_{k-1} & S_{k-2} & S_{k-3} & \dots & S_2 & S_1 \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 2N}.$$

Из (14.28) (см. также (14.19)) видно, что для задания тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, кроме $2N$ собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, необходимо задать $2N$ собственных тензорных столбцов \mathbb{Z}_k , $k = \overline{1, 2N}$. Следует заметить, что полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$ и биортонормальная для нее система \mathbb{Z}^l , $l = \overline{1, 2N}$ в представлении $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ (см. (14.28)) удовлетворяют условиям биортонормальности (см. также (14.20))

$$(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}^l) = \mathbb{Z}_k^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Z}^l = \mathbf{X}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{X}^l + \mathbf{Y}_k \overset{p}{\otimes} \mathbf{Y}^l = \delta_k^l, \quad k, l = \overline{1, 2N}. \quad (14.35)$$

Заметим также, что если построена полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$ тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ простой структуры, то в силу теоремы 14.1 всегда можно для нее построить биортонормальную систему \mathbb{Z}^l , $l = \overline{1, 2N}$ (тензоры \mathbb{Z}^l , $l = \overline{1, 2N}$ определяются с помощью тензоров \mathbb{Z}_k , $k = \overline{1, 2N}$) и на основании теоремы 14.11 матрица $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ можно представить в виде (14.28). В этой связи можно сказать, что в соотношениях (14.35) неизвестными являются собственные тензорные столбцы $\mathbb{Z}_k \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, $k = \overline{1, 2N}$. При этом, так как $\mathbb{Z}_k = (\mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, то полная система собственных тензорных столбцов \mathbb{Z}_k , $k = \overline{1, 2N}$ задается с помощью $4N^2$ компонент тензоров \mathbf{X}_k и \mathbf{Y}_k , $k = \overline{1, 2N}$ модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$. Нетрудно видеть, что число соотношений в (14.35) равно $4N^2$, однако из них независимыми являются $N(2N+1)$ соотношений.

Рассмотрим теперь симметрическую тензорно-блочную матрицу $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, которая в силу теоремы 14.7 всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов и представляется в виде (14.19), где не все λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ положительны (в силу теоремы 14.6 они положительны для положительно определенной тензорно-блочной матрицы). Кроме того, выполняются условия ортонормированности (14.20). Наша цель заключается в построении полной

ортонормированной системы собственных тензорных столбцов для симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ в явном виде.

Из (14.19) видно, что для задания симметрической (необязательно положительно определенной) тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, кроме $2N$ собственных значений λ_k , $k = \overline{1, 2N}$, необходимо задать $2N$ собственных тензорных столбцов \mathbb{W}_k , $k = \overline{1, 2N}$, которые образуют полную ортонормированную систему и, следовательно, удовлетворяют условиям ортонормированности (14.20). Нетрудно заметить, что число соотношений в (14.20) равно $(2N + 1)N$, которые связывают между собой $4N^2$ компонент собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)$, $k = \overline{1, 2N}$, что и было сказано выше. Итак, независимыми (свободными) остаются $4N^2 - (2N + 1)N = (2N - 1)N$ компонент (параметров), с помощью которых следует построить полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. В этой связи рассмотрим следующие тензоры модуля $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{U}_s = U_{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, & \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{e}_s \mathbf{V}_s = V_{st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \mathbf{e}_s \mathbf{U}_{N+s} = U_{N+st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, & \mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{V}_{N+s} = V_{N+st} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_t, \quad s, t = \overline{1, 2N}, \end{aligned} \quad (14.36)$$

где $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$, а \mathbf{e}_s , $s = \overline{1, N}$ — ортонормированный базис модуля $\mathbb{R}_p(\Omega)$, т. е. $\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t = \delta_{st}$, $s, t = \overline{1, N}$.

Далее с помощью тензоров (14.36) построим следующую тензорно-блочную матрицу модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$:

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \left(\mathbb{Q}^T = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11}^T & \mathbf{Q}_{21}^T \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22}^T \end{pmatrix} \right), \quad (14.37)$$

Если тензорные столбцы $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, 2N}$ удовлетворяют условиям ортонормированности (14.20), то, учитывая (14.22), (14.36) и (14.37), нетрудно доказать, что тензорно-блочная матрица $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ (14.37) удовлетворяет условиям

$$\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^T = \mathbb{Q}^T \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q} = \mathbb{E}. \quad (14.38)$$

На основании (14.38) заключаем, что $\mathbb{Q} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ — ортогональная тензорно-блочная матрица.

Далее отметим, что условия ортонормированности (14.20) эквивалентны тензорному соотношению

$$\mathbb{Q} \overset{p}{\otimes} \mathbb{Q}^T = \mathbb{E}. \quad (14.39)$$

Таким образом, ортогональная тензорно-блочная матрица (14.37) модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ имеет $4N^2$ компонент, которые связаны между собой тензорным соотношением (14.39), равносильным $(2N + 1)N$ соотношениям (14.20), и, следовательно, среди $4N^2$ компонент независимыми остаются $(2N - 1)N$, с помощью которых следует построить полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$. В этой связи используем теорему 13.7 о представлении невырожденного квадратного тензора любого четного ранга, которую для невырожденной квадратной тензорно-блочной матрицы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 14.13. *Для того чтобы квадратная невырожденная тензорно-блочная матрица модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ представлялась в виде произведения левого треугольного (унитреугольного) и правого унитреугольного (треугольного) тензорно-блочных матриц, необходимо и достаточно, чтобы определители всех ведущих главных субтензоров этой тензорно-блочной матрицы (субматриц матриц компонент) были отличны от нуля.*

Заметим, что имеет место более общая теорема, которая получается из теоремы 14.13, если в ее формулировке $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ заменить на $\mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$, где m — произвольное натуральное число и которая, конечно, применима к тензорно-блочным матрицам типа (14.2).

Если применим теорему 14.13 к ортогональной тензорно-блочной матрице (14.37) модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, то можно написать

$$\mathbb{Q} = \mathbb{L} \overset{p}{\otimes} \mathbb{R}, \quad (14.40)$$

где левая треугольная тензорно-блочная матрица \mathbb{L} и правая унитреугольная тензорно-блочная матрица \mathbb{R} представляются в виде

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ 0 & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}. \quad (14.41)$$

Нетрудно видеть, что матрицы $L, L_{11}, L_{21}, L_{22}$ и $R, R_{11}, R_{12}, R_{22}$, соответствующие объектам $\mathbb{L}, \mathbf{L}_{11}, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}$ и $\mathbb{R}, \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{22}$ имеют вид

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (14.42)$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{N-11} & l_{N-12} & l_{N-13} & \cdots & l_{N-1N-1} & 0 \\ l_{N1} & l_{N2} & l_{N3} & \cdots & l_{NN-1} & l_{NN} \end{pmatrix}, \quad (14.43)$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} l_{N+11} & l_{N+12} & l_{N+13} & \cdots & l_{N+1N-1} & l_{N+1N} \\ l_{N+21} & l_{N+22} & l_{N+23} & \cdots & l_{N+2N-1} & l_{N+2N} \\ l_{N+31} & l_{N+32} & l_{N+33} & \cdots & l_{N+3N-1} & l_{N+3N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{2N-11} & l_{2N-12} & l_{2N-13} & \cdots & l_{2N-1N-1} & l_{2N-1N} \\ l_{2N1} & l_{2N2} & l_{2N3} & \cdots & l_{2NN-1} & l_{2NN} \end{pmatrix}, \quad (14.44)$$

$$L_{22} = \begin{pmatrix} l_{N+1N+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{N+2N+1} & l_{N+2N+2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ l_{N+3N+1} & l_{N+3N+2} & l_{N+3N+3} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{2N-1N+1} & l_{2N-1N+2} & l_{2N-1N+3} & \cdots & l_{2N-12N-1} & 0 \\ l_{2NN+1} & l_{2NN+2} & l_{2NN+3} & \cdots & l_{2N2N-1} & l_{2N2N} \end{pmatrix}, \quad (14.45)$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & \cdots & r_{1N-1} & r_{1N} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & \cdots & r_{2N-1} & r_{2N} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & \cdots & r_{3N-1} & r_{3N} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & r_{4N-1} & r_{4N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{N-1N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14.46)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} r_{1N+1} & r_{1N+2} & r_{1N+3} & r_{1N+4} & \cdots & r_{12N-1} & r_{12N} \\ r_{2N+1} & r_{2N+2} & r_{2N+3} & r_{2N+4} & \cdots & r_{22N-1} & r_{22N} \\ r_{3N+1} & r_{3N+2} & r_{3N+3} & r_{3N+4} & \cdots & r_{32N-1} & r_{32N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{N-1N+1} & r_{N-1N+2} & r_{N-1N+3} & r_{N-1N+4} & \cdots & r_{N-12N-1} & r_{N-12N} \\ r_{NN+1} & r_{NN+2} & r_{NN+3} & r_{NN+4} & \cdots & r_{N2N-1} & r_{N2N} \end{pmatrix}, \quad (14.47)$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & r_{N+1N+2} & r_{N+1N+3} & r_{N+1N+4} & \cdots & r_{N+12N-1} & r_{N+12N} \\ 0 & 1 & r_{N+2N+3} & r_{N+2N+4} & \cdots & r_{N+22N-1} & r_{N+22N} \\ 0 & 0 & 1 & r_{N+3N+4} & \cdots & r_{N+32N-1} & r_{N+32N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{2N-12N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14.48)$$

Далее тензоры $\mathbf{L}_{11}, \mathbf{L}_{21}, \mathbf{L}_{22}, \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{12}, \mathbf{R}_{22}$ представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{l}_{s\cdot}, & \mathbf{L}_{21} &= \mathbf{e}_s \mathbf{m}_{s\cdot}, & \mathbf{L}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{l}_{N+s\cdot}, \\ \mathbf{R}_{11} &= \mathbf{e}_s \mathbf{r}_{s\cdot}, & \mathbf{R}_{12} &= \mathbf{e}_s \mathbf{n}_{s\cdot}, & \mathbf{R}_{22} &= \mathbf{e}_s \mathbf{r}_{N+s\cdot}, \quad s = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (14.49)$$

где для составляющих тензоров введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_s &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{e}_t, & \mathbf{m}_s &= \sum_{t=1}^N l_{N+st} \mathbf{e}_t, & \mathbf{l}_{N+s} &= \sum_{t=1}^s l_{N+sN+t} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N}; \\ \mathbf{r}_s &= \mathbf{e}_s + \sum_{t=s+1}^N r_{st} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N-1}, & \mathbf{r}_N &= \mathbf{e}_N; & \mathbf{n}_s &= \sum_{t=1}^N r_{sN+t} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N}; \\ \mathbf{r}_{N+s} &= \mathbf{e}_s + \sum_{t=s+1}^N r_{N+sN+t} \mathbf{e}_t, & s &= \overline{1, N-1}, & \mathbf{r}_{2N} &= \mathbf{e}_N. \end{aligned} \quad (14.50)$$

Учитывая (14.37) и (14.41), из (14.40) получим

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{11} & \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \otimes \mathbf{R}_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда в свою очередь находим

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{11} &= \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{Q}_{12} &= \mathbf{L}_{11} \otimes \mathbf{R}_{12}, \\ \mathbf{Q}_{21} &= \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{11}, & \mathbf{Q}_{22} &= \mathbf{L}_{21} \otimes \mathbf{R}_{12} + \mathbf{L}_{22} \otimes \mathbf{R}_{22}. \end{aligned} \quad (14.51)$$

В силу (14.36), (14.49) и (14.50) из (14.51) будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_s &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{r}_t, & \mathbf{U}_{N+s} &= \sum_{t=1}^N l_{N+st} \mathbf{r}_t, & \mathbf{V}_s &= \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbf{n}_t, \\ \mathbf{V}_{N+s} &= \sum_{t=1}^N l_{N+st} \mathbf{n}_t + \sum_{t=1}^s l_{N+sN+t} \mathbf{r}_{N+t}, & s &= \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Следует отметить, что системы тензоров

$$\mathbf{r}_{1\cdot}, \mathbf{r}_{2\cdot}, \dots, \mathbf{r}_{N\cdot}; \quad \mathbf{r}_{N+1\cdot}, \mathbf{r}_{N+2\cdot}, \dots, \mathbf{r}_{2N\cdot}; \quad \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N.$$

в (14.52) линейно независимы.

Введем в рассмотрение тензорные столбцы

$$\mathbb{T}_s = (\mathbf{r}_{s\cdot}, \mathbf{n}_{s\cdot})^T, \quad s = \overline{1, N}, \quad \mathbb{T}_t = (\mathbf{0}, \mathbf{r}_{t\cdot})^T, \quad t = \overline{N+1, 2N}, \quad (14.53)$$

где $\mathbf{0}$ — нулевой тензор p -го ранга, а $\mathbf{r}_{s\cdot}$, $\mathbf{n}_{s\cdot}$ и $\mathbf{r}_{N+s\cdot}$ задаются формулами (14.50).

Нетрудно доказать, что система тензорных столбцов \mathbb{T}_s , $s = \overline{1, 2N}$ линейно независима. Следовательно, линейно независимы и подсистемы \mathbb{T}_s , $s = \overline{1, N}$ и \mathbb{T}_t , $t = \overline{N+1, 2N}$ так же, как и любая подсистема линейно независимой системы \mathbb{T}_s , $s = \overline{1, 2N}$.

Далее легко усмотреть, что имеют место соотношения

$$\mathbb{W}_s = (\mathbf{U}_s, \mathbf{V}_s)^T = \sum_{t=1}^s l_{st} \mathbb{T}_t, \quad s = \overline{1, 2N}. \quad (14.54)$$

Из (14.54) видно, что полную ортонормированную систему тензорных столбцов $\mathbb{W}_s = (\mathbf{U}_s, \mathbf{V}_s)^T$, $s = \overline{1, 2N}$ можно получить с помощью процедуры ортонормирования Грама—Шмидта [5, 7, 36, 80] линейно независимой системы тензорных столбцов \mathbb{T}_s , $s = \overline{1, 2N}$ (14.53). В самом деле, проводя процесс ортогонализации и нормирования системы тензорных столбцов \mathbb{T}_s , $s = \overline{1, 2N}$, для коэффициентов l_{st} , $s = \overline{1, 2N}$, $t = 1, s$ в (14.54) после простых, хотя громоздких выкладок получим следующие выражения:

$$l_{11} = \frac{d_0}{\pm \sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{mt} = \frac{S_{mt}^{(m)}}{\pm \sqrt{d_{m-1} d_m}}, \quad S_{mt}^{(m)} = (-1)^{m+t} S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & t-1 & t & t+1 & \dots & m-1 \\ 1 & 2 & \dots & t-1 & t+1 & \dots & m \end{pmatrix}, \quad (14.55)$$

$$m = \overline{2, N}, \quad t = \overline{1, m},$$

где введены следующие обозначения:

$$d_0 = 1, \quad d_m = \det S_m = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \end{vmatrix}, \quad s_{mt} = (\mathbb{T}_m, \mathbb{T}_t) = \mathbb{T}_m^T \otimes \mathbb{T}_t, \quad m, t = \overline{1, 2N},$$

$$S_{mt}^{(m)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t-1} & 0 & s_{1t+1} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2t-1} & 0 & s_{2t+1} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt-1} & 0 & s_{tt+1} & \cdots & s_{tm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-11} & s_{m-12} & \cdots & s_{m-1t-1} & 0 & s_{m-1t+1} & \cdots & s_{m-1m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \langle m = \overline{1, 2N} \rangle, \quad t = \overline{1, m},$$

$$S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1t-1} & s_{1t+1} & \cdots & s_{1m} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2t-1} & s_{2t+1} & \cdots & s_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{t1} & s_{t2} & \cdots & s_{tt-1} & s_{tt+1} & \cdots & s_{tm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m-11} & s_{m-12} & \cdots & s_{m-1t-1} & s_{m-1t+1} & \cdots & s_{m-1m} \end{vmatrix},$$

$S_{mt}^{(m)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{mt} субматрицы $S_m = \text{matr}(s_{kl})$, $k, l = \overline{1, m}$, а $S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m-1 \\ 1 & 2 & \cdots & t-1 & t & t+1 & \cdots & m \end{pmatrix}$ — минор $m-1$ -го порядка для определителя $\det S_m$, получающийся вычеркиванием m -ой строки и t -го столбца.

Учитывая (14.55), из (14.54) после несложных преобразований для искомого собственных тензорных столбцов симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ получим следующие выражения:

$$\mathbb{W}_1 = \frac{1}{\pm \sqrt{d_0 d_1}} \mathbb{T}_1, \quad \mathbb{W}_m = \frac{1}{\pm \sqrt{d_{m-1} d_m}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m-1} & \mathbb{T}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2m-1} & \mathbb{T}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \cdots & s_{3m-1} & \mathbb{T}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{mm-1} & \mathbb{T}_m \end{vmatrix}, \quad m = \overline{2, 2N}. \quad (14.56)$$

Следует заметить, что с помощью формул (14.56) полная система собственных тензорных столбцов $\mathbb{W}_m \in \mathbb{R}_p^2(\Omega)$, $m = \overline{1, 2N}$ симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ определяется посредством $(2N-1)N$ независимых параметров — компонент унитарной тензорно-блочной матрицы \mathbb{R} относительно произвольной системы координат (произвольного ортонормированного базиса n -мерного пространства). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров в некоторых случаях можно уменьшить на несколько единиц. Ниже этот вопрос подробнее рассмотрен в частном случае. Здесь в общем случае на этом останавливаться не будем.

Таким образом, для описания внутренней структуры симметрической тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ достаточно вместо компонент составляющих тензоров \mathbf{A} , $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ и \mathbf{D} в какой-то системе координат задать инвариантные характеристики, т. е. собственные значения λ_k , $k = \overline{1, 2N}$ и собственные тензорные столбцы \mathbb{W}_m , $m = \overline{1, 2N}$, которые определяются с помощью $(2N-1)N$ независимых параметров относительно произвольной системы координат, а относительно специально выбранной системы координат число независимых параметров в некоторых случаях можно уменьшить на несколько единиц. Заметим, что эти инвариантные характеристики должны служить для сравнения и классификации симметричных тензорно-блочных матриц модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$.

Следовательно, провести аналогичное исследование для симметричной тензорно-блочно-диагональной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ как частного случая симметричной тензорно-блочной матрицы модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ не представляет большого труда.

15. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ТЕНЗОРНО-БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

Выше было определено, что тензорно-блочно-диагональная матрица модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$ имеет вид (14.3), а матрица модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ представляется в форме (14.9). При этом отметим, что если изучим внутреннюю структуру тензорно-блочно-диагональной матрицы модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, то аналогично сказанному выше относительно матрицы (14.2) результаты ее исследования легко распространить на подобную ей матрицу модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$. Поэтому, а также с целью сокращения письма ограничимся рассмотрением матрицы (14.9).

Нетрудно видеть, что характеристическое уравнение тензорно-блочной матрицы (14.9) модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ представится в виде

$$\det(\mathbb{M} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} - \lambda \mathbf{E} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = 0. \quad (15.1)$$

На основании (15.1) заключаем, что λ является собственным значением тензорно-блочной матрицы (14.9), тогда и только тогда, когда оно является собственным значением либо тензора \mathbf{A} , либо тензора \mathbf{D} . Другими словами, множество собственных значений тензорно-блочной матрицы (14.9) с учетом алгебраических кратных равно объединению множеств собственных значений субтензоров \mathbf{A} и \mathbf{D} . В силу теоремы 14.2, если (14.9) — положительно определенная тензорно-блочная матрица, то ее субтензоры \mathbf{A} и \mathbf{D} также положительно определены, т. е. собственные значения как тензора \mathbf{A} , так и тензора \mathbf{D} положительны. Вообще говоря, имеет место следующая теорема.

Теорема 15.1. *Тензорно-блочная (тензорно-блочная-треугольная) матрица модуля $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^{m^2}(\Omega)$ положительно определена, тогда и только тогда, когда ее субтензоры (диагональные субтензоры) положительно определены.*

Здесь, конечно, m — произвольное натуральное число.

Очевидно, нахождение решений характеристического уравнения (15.1) равносильно нахождению решений уравнений

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad \det(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}) = 0, \quad (15.2)$$

и, конечно, объединение множеств корней уравнений (15.2) — множество собственных значений тензорно-блочной матрицы (14.9). Видно, что каждое из уравнений (15.2) является уравнением N -ой степени (см. (13.6) и (13.7)) относительно λ и в случае симметрической (положительно определенной) тензорно-блочной матрицы (14.9) имеет N вещественных (положительных) корней, причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность.

Обозначая через \mathbb{W}_p , $p = \overline{1, 2N}$ собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.9), соответствующие собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 2N}$, будем иметь

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{2N} \lambda_p \mathbb{W}_p \mathbb{W}_p^T. \quad (15.3)$$

Отметим, что приведенные в [72] теоремы для треугольной блочной матрицы применительно к треугольной тензорно-блочной, а также к тензорно-блочной матрице можно сформулировать следующим образом:

Теорема 15.2. *Если λ_k , $1 \leq k \leq N$ — собственное значение субтензора \mathbf{A} , но не является собственным значением \mathbf{D} , то собственный тензорный столбец \mathbb{W}_k тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.9), соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{0})^T$, где \mathbf{U}_k — собственный тензор субтензора \mathbf{A} , соответствующий собственному значению λ_k , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор p -го ранга.*

Теорема 15.3. *Если λ_m , $N + 1 \leq m \leq 2N$ — собственное значение субтензора \mathbf{D} , но не является собственным значением \mathbf{A} , то собственный тензорный столбец \mathbb{W}_m тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.9), соответствующий собственному значению λ_m , имеет вид $\mathbb{W}_m = (\mathbf{0}, \mathbf{V}_m)^T$, где \mathbf{V}_m — собственный тензор субтензора \mathbf{D} , соответствующий собственному значению λ_m , а $\mathbf{0}$ — нулевой тензор p -го ранга.*

Теорема 15.4. *Если λ_k — общее собственное значение субтензоров \mathbf{A} и \mathbf{D} , то собственный тензорный столбец \mathbb{W}_k тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (14.9), соответствующий собственному значению λ_k , имеет вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, где \mathbf{U}_k и \mathbf{V}_k — собственные тензоры субтензоров \mathbf{A} и \mathbf{D} соответственно, отвечающие собственному значению λ_k .*

Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ и $\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \dots, \mathbf{U}_N$ — собственные значения и соответствующие им собственные тензоры субтензора \mathbf{A} , а $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ и $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \dots, \mathbf{V}_N$ — собственные значения и соответствующие им собственные тензоры субтензора \mathbf{D} и $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\} \cap \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\} = \emptyset$, где \emptyset —

пустое множество, то в силу теорем 15.2 и 15.3 тензорно-блочно-диагональную матрицу \mathbb{M} (15.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{0}) + \sum_{l=1}^N \mu_l \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_l \end{pmatrix} (\mathbf{0}, \mathbf{V}_l) = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Из (15.4), очевидно, находим

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \quad \mathbf{D} = \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l, \quad (15.5)$$

как и требуется. Следует заметить, что если

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N \equiv \lambda, \quad \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_N \equiv \mu,$$

то тензоры (15.5) представляются в форме

$$\mathbf{A} = \lambda \sum_{k=1}^N \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \lambda \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \mu \sum_{l=1}^N \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l = \mu \mathbf{E}. \quad (15.6)$$

С учетом (15.6), в рассматриваемом случае тензорно-блочно-диагональная матрица получит вид

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} \lambda \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mu \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (15.7)$$

Если $\lambda = \mu$, то из (15.7) получим

$$\mathbb{M} = \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \lambda \mathbb{E}. \quad (15.8)$$

На основании (15.7) и (15.8) целесообразно ввести

Определение 15.1. Тензорно-блочно-диагональная матрица, которая имеет вид (15.7) (соответственно, (15.8)), называется *изотропной* (соответственно, *идеально изотропной*).

Не нарушая общности, допустим теперь, что среди собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ и $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$ тензоров \mathbf{A} и \mathbf{D} первые m совпадают, т. е. $\lambda_k = \mu_k$, $k = \overline{1, m}$, а собственные тензоры этих тензоров обозначим, как и выше, через \mathbf{U}_k и \mathbf{V}_k , $k = \overline{1, N}$ соответственно. Тогда в силу теоремы 15.4 первые m собственных тензорных столбцов тензорно-блочно-диагональной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_k = \mu_k$, $k = \overline{1, m}$ соответственно, будут иметь вид $\mathbb{W}_k = (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k)^T$, $k = \overline{1, m}$. Следовательно, \mathbf{A} и \mathbf{D} представятся в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k = \sum_{k=1}^m \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k + \sum_{k=m+1}^N \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{U}_k, \\ \mathbf{D} &= \sum_{l=1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l = \sum_{l=1}^m \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l + \sum_{l=m+1}^N \mu_l \mathbf{V}_l \mathbf{V}_l, \end{aligned}$$

а тензорно-блочно-диагональную матрицу $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{V}_k) + \\ &+ \sum_{k=m+1}^N \left[\lambda_k \begin{pmatrix} \mathbf{U}_k \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} (\mathbf{U}_k, \mathbf{0}) + \mu_k \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{V}_k \end{pmatrix} (\mathbf{0}, \mathbf{V}_k) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, из сказанного выше следует, что при изучении внутренней структуры тензорно-блочно-диагональной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ достаточно рассматривать задачу на собственные значения тензора модуля $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$, которая довольно подробно изучена выше.

ГЛАВА 5

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ

16. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В ЛИНЕЙНОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Удельную энергию деформации и определяющие соотношения (ОС) в линейной микрополярной теории упругости анизотропного тела [16, 58, 78] (см. также [39, 40, 43]), не обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, при изотермических процессах можно записать соответственно в форме

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{\gamma}, \underline{\varkappa}) &= \frac{1}{2}(A^{ijkl}\gamma_{ij}\gamma_{kl} + 2B^{ijkl}\gamma_{ij}\varkappa_{kl} + D^{ijkl}\varkappa_{ij}\varkappa_{kl}) = \\ &= \frac{1}{2}(\underline{\gamma} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} + 2\underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}}),\end{aligned}\quad (16.1)$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}},\quad (16.2)$$

где $\underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} = \nabla \mathbf{u} - \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} \cdot \boldsymbol{\varphi}$ — тензор деформаций, $\underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}} = \nabla \boldsymbol{\varphi}$ — тензор изгиба-кручения, \mathbf{u} — вектор перемещений, $\boldsymbol{\varphi}$ — вектор внутренних вращений, $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ — дискриминантный тензор третьего ранга, $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}^T = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$, $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}^T = \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}$, $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}^T = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}$ — материальные тензоры четвертого ранга, называемые тензорами модулей упругости, $\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}$ и $\underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}}$ — тензоры напряжений и моментных напряжений, \otimes — внутреннее 2-произведение.

Вводя в рассмотрение тензорные столбцы тензоров деформаций и изгиба-кручения и тензоров напряжений и моментных напряжений, а также тензорно-блочную матрицу тензоров модулей упругости

$$\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}^T = (\underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}}, \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}})), \quad \underline{\underline{\underline{\underline{Y}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{P}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\underline{\underline{Y}}}}^T = (\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}, \underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}})),\quad (16.3)$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \end{pmatrix} \quad (\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}^T = \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}),\quad (16.4)$$

удельную энергию деформации и ОС можно записать в виде

$$2\Phi(\underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}}, \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}}) = \underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}^T \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}, \quad \underline{\underline{\underline{\underline{Y}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\underline{X}}}} \quad \left(\begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{P}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{\mu}}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{\gamma}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{\varkappa}}}} \end{pmatrix} \right).\quad (16.5)$$

Если материал обладает центром симметрии в смысле упругих свойств, то $\underline{\underline{\underline{\underline{B}}}} = \underline{\underline{\underline{\underline{0}}}}$, где $\underline{\underline{\underline{\underline{0}}}}$ — нулевой тензор четвертого ранга, и тензорно-блочная матрица тензоров модулей упругости (16.4) получит вид тензорно-блочно-диагональной матрицы

$$\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{0}}}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{0}}}} & \underline{\underline{\underline{\underline{D}}}} \end{pmatrix}.\quad (16.6)$$

Следует отметить, что тензорные столбцы $\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}$ и $\underline{\underline{\underline{\underline{Y}}}}$ являются элементами модуля $\mathbb{R}_2(\Omega)$, а тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}}$ — элементом модуля $\mathbb{R}_4^4(\Omega)$ и, следовательно, все сказанное выше относительно $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} \in \mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ в равной мере относится к $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ соответственно (здесь в $\mathbb{R}_{2p}(\Omega)$ и $\mathbb{R}_{2p}^4(\Omega)$ через Ω обозначена некоторая область n -мерного пространства, а в $\mathbb{R}_4(\Omega)$ и $\mathbb{R}_4^4(\Omega)$ через Ω обозначена некоторая область трехмерного пространства). В этой связи на рассмотрении некоторых вопросов, относящихся к $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ и $\underline{\underline{\underline{\underline{M}}}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$, подробно останавливаться не будем. Необходимые соотношения будем выписывать, исходя из полученных выше аналогичных соотношений, а также будем ссылаться на сформулированные выше определения и теоремы, не перефразируя их, хотя с целью облегчения чтения материала иногда приводятся соответствующие формулировки для рассматриваемого случая. Отметим также, что при дальнейшем изложении, как и выше в общем случае, для несимметричных тензоров второго ранга используем двуиндексные и одноиндексные, а для тензоров четвертого ранга — четырехиндексные и двуиндексные представления. Например, если $\underline{\underline{\underline{\underline{P}}}}$ — тензор второго ранга, а $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}$ — тензор

четвертого ранга, то для них будем иметь представления

$$\begin{aligned}\underline{\mathbb{P}} &= P_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_{m=1}^9 P_m \underline{\mathbf{e}}_m = P_m \underline{\mathbf{e}}_m, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \\ \underline{\mathbb{A}} &= A_{ijkl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l = \sum_{m=1}^9 \sum_{n=1}^9 A_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n = A_{mn} \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_n, \quad i, j, k, l = \overline{1, 9}, \quad m, n = \overline{1, 9},\end{aligned}$$

где $\underline{\mathbf{e}}_m$, $m = \overline{1, 9}$ — тензоры ортонормированного базиса для тензора второго ранга относительно операции внутреннего 2-произведения, которые представляются в виде

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{e}}_1 &= \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1, \quad \underline{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2, \quad \underline{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3, \quad \underline{\mathbf{e}}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \\ \underline{\mathbf{e}}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_6 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), \quad \underline{\mathbf{e}}_7 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2), \\ \underline{\mathbf{e}}_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{e}}_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3), \quad \underline{\mathbf{e}}_m \otimes^2 \underline{\mathbf{e}}_n = \delta_{mn}, \quad m, n = \overline{1, 9}.\end{aligned}$$

Здесь и далее δ_{pq} , как и выше, обозначает дельта Кронекера.

Естественно, аналогично общему случаю можно рассматривать задачу о нахождении собственных значений и собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы (16.4), которую можно сформулировать следующим образом.

16.1. Задача на собственные значения тензорно-блочной матрицы. Найти все тензорные столбцы

$$\underline{\mathbb{W}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \quad \left(\underline{\mathbb{W}}^T = (\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}) \right), \quad (16.7)$$

где $\underline{\mathbf{u}}$ и $\underline{\mathbf{v}}$ — тензоры второго ранга, которые удовлетворяют уравнению

$$\underline{\mathbb{M}} \otimes^2 \underline{\mathbb{W}} = \lambda \underline{\mathbb{W}} \quad \left[\left(\begin{pmatrix} \underline{\mathbb{A}} & \underline{\mathbb{B}} \\ \underline{\mathbb{C}} & \underline{\mathbb{D}} \end{pmatrix} \right) \otimes^2 \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbb{A}} \otimes^2 \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbb{B}} \otimes^2 \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\mathbb{C}} \otimes^2 \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbb{D}} \otimes^2 \underline{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \right], \quad (16.8)$$

где λ — скаляр.

Заметить, что левая часть (16.8) содержит две операции: матричное умножение тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$ на тензорный столбец $\underline{\mathbb{W}}$ и внутреннее 2-произведение (в квадратных скобках в развернутом виде выписаны левая часть (16.8) и результат этих операций). Заметим также, что уравнение (16.8) всегда имеет тривиальное решение $\underline{\mathbb{W}} = \underline{\mathbb{O}}$, где $\underline{\mathbb{O}}$ — нулевой тензорный столбец второго ранга. В дальнейшем, говоря о решении уравнения (16.8), будем иметь в виду только нетривиальное нормированное решение, т. е. будем считать, что

$$\underline{\mathbb{W}} \neq \underline{\mathbb{O}}, \quad \|\underline{\mathbb{W}}\| = \sqrt{\underline{\mathbb{W}}^T \otimes^2 \underline{\mathbb{W}}} = \sqrt{\underline{\mathbf{u}} \otimes^2 \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \otimes^2 \underline{\mathbf{v}}} = 1,$$

где $\|\underline{\mathbb{W}}\|$ обозначает норму тензорного столбца $\underline{\mathbb{W}}$, а $(\underline{\mathbb{W}}, \underline{\mathbb{W}}) = \underline{\mathbb{W}}^T \otimes^2 \underline{\mathbb{W}}$ — скалярное произведение тензорного столбца $\underline{\mathbb{W}}$ на себя.

Если для некоторого скаляра λ уравнение (16.8) имеет нетривиальное решение $\underline{\mathbb{W}}$, то λ называется *собственным значением (числом)* тензорно-блочной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$, а $\underline{\mathbb{W}}$ — *собственным тензорным столбцом*, соответствующим собственному значению λ . Следует заметить, что так как $\underline{\mathbb{M}}^T = \underline{\mathbb{M}}$, то легко доказать, что $\underline{\mathbb{W}}^T \otimes^2 \underline{\mathbb{M}} = \lambda \underline{\mathbb{W}}^T$.

Введем определение положительно определенной симметрической тензорно-блочной матрицы (см. определение 14.16).

Определение 16.1. Симметрическая тензорно-блочная матрица $\underline{\mathbb{M}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ называется *положительно определенной*, если образуемая по ней квадратичная форма $\underline{\mathbb{W}}^T \otimes^2 \underline{\mathbb{M}} \otimes^2 \underline{\mathbb{W}}$ положительна для любого отличного от нуля вещественного тензорного столбца $\underline{\mathbb{W}} \in \mathbb{R}_2^2(\Omega)$.

Нетрудно заметить, что в силу положительной определенности удельной энергии деформации [16, 78] и определения 16.1 имеет место теорема (см. теорему 14.2):

Теорема 16.1. Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ тензоров модулей упругости положительно определена, и, как следствие тензоры модулей упругости, (субтензоры) $\underline{\underline{\mathbb{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$ положительно определены.

В дальнейшем приведенные выше соотношения для удельной энергии деформации и ОС будем считать записанными в безразмерных величинах, так как это всегда можно сделать.

Нетрудно видеть, что уравнение (16.8) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}} & \underline{\underline{\mathbb{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{v}} \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{0}} \quad \left((\underline{\underline{\mathbb{M}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}) \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}} = \underline{\mathbf{0}} \right), \quad (16.9)$$

где $\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{(2)} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ — единичный тензор четвертого ранга относительно операции внутреннего 2-произведения, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$, $ij = 1, 2, 3$, а $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ — единичная тензорно-блочная матрица вида

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \end{pmatrix}.$$

Видно, что (16.9) представляет однородную систему 18 уравнений относительно 18 неизвестных (два несимметричных тензора $\underline{\mathbf{u}}$ и $\underline{\mathbf{v}}$), которая должна иметь нетривиальное решение. Для существования нетривиального решения системы уравнений (16.9) необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\det \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{B}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}} & \underline{\underline{\mathbb{D}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - \lambda E & B \\ C & D - \lambda E \end{pmatrix} = 0 \quad \left(\det(\underline{\underline{\mathbb{M}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}) = 0 \right), \quad (16.10)$$

где A, B, C, D и E — матрицы компонент тензоров $\underline{\underline{\mathbb{A}}}, \underline{\underline{\mathbb{B}}}, \underline{\underline{\mathbb{C}}}, \underline{\underline{\mathbb{D}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{E}}}$ соответственно относительно мультибазиса $\mathbf{e}_m \mathbf{e}_n$, $m, n = \overline{1, 9}$.

Очевидно, (16.10) — алгебраическое уравнение 18 степени относительно λ , называемое характеристическим уравнением тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$. Так как в силу теоремы 16.1 тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ положительно определена, то она с помощью правого унитарного преобразования переменных приводится к диагональной (канонической) матрице, диагональные элементы которой в силу теоремы Сильвестра положительны. Другими словами, алгебраическое уравнение (16.10) имеет 18 положительных корней (собственных значений), причем каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Обозначив корни уравнения (16.10) через $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{18}$ и перенумеровав их в порядке убывания, будем иметь

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (16.11)$$

В силу теоремы 14.7 положительно определенная симметрическая тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$ всегда имеет полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов. В рассматриваемом случае, очевидно, полная ортонормированная система собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы (16.4) состоит из 18 тензорных столбцов. Обозначим через $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p = (\underline{\mathbf{u}}_p, \underline{\mathbf{v}}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$ полную ортонормированную систему собственных тензорных столбцов положительно определенной симметричной тензорно-блочной матрицы (16.4), отвечающих собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 18}$ соответственно. Тогда матрицу (16.4) можно представить в следующем виде:

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} \otimes (\underline{\mathbf{u}}_p \quad \underline{\mathbf{v}}_p) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{v}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}, \quad (16.12)$$

где, конечно, имеют место условия ортонормированности

$$(\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q) = \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}}_q = \underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{u}}_q + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\mathbf{v}}_q = \delta_{pq}, \quad p, q = \overline{1, 18}. \quad (16.13)$$

Учитывая выражения для тензорно-блочной матрицы (16.3), из (16.12) получим

$$\underline{\underline{\mathbb{A}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p, \quad \underline{\underline{\mathbb{B}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p, \quad \underline{\underline{\mathbb{D}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p. \quad (16.14)$$

Нетрудно доказать, что обратная к (16.12) тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{M}}}^{-1}$ имеет вид

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^{-1} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}. \quad (16.15)$$

Вообще говоря, для любого целого числа α будем иметь

$$\underline{\underline{\mathbb{M}}}^\alpha = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^\alpha \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^\alpha \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}. \quad (16.16)$$

В частности, из (16.16) при $\alpha = 0$ имеем

$$\underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\mathbb{M}}}^0 = \sum_{p=1}^{18} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{u}}_p \otimes \underline{\mathbf{v}}_p \\ \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\mathbf{u}}_p & \underline{\mathbf{v}}_p \otimes \underline{\mathbf{v}}_p \end{pmatrix}. \quad (16.17)$$

Заметим, что в соотношениях (16.12) и (16.17) применяется знак прямого тензорного умножения \otimes , который, как было сказано выше, в других соотношениях опускается.

16.2. Представления удельной энергии деформации и определяющих соотношений с помощью собственных значений и собственных тензорных столбцов. Учитывая (16.8), из (16.5) получим

$$2\Phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{X}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{X}}}, \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{X}}}. \quad (16.18)$$

Умножая обе части второго соотношения (16.18) скалярно на $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha$ и учитывая (16.13), определяющие соотношения можно записать в виде

$$(\underline{\underline{\mathbb{Y}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) = \lambda_\alpha (\underline{\underline{\mathbb{X}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) \quad (\underline{\underline{\mathbb{Y}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha = \lambda_\alpha \underline{\underline{\mathbb{X}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha), \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (16.19)$$

Заметим, что формулами (16.19) даны эквивалентные записи определяющих соотношений.

Вводя обозначения

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbb{X}}}_\alpha &= (\underline{\underline{\mathbb{X}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) = \underline{\underline{\mathbb{X}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha = \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{X}}} = \underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \\ \underline{\underline{\mathbb{Y}}}_\alpha &= (\underline{\underline{\mathbb{Y}}}, \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha) = \underline{\underline{\mathbb{Y}}}^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha = \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\rho}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\mu}}, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle, \end{aligned} \quad (16.20)$$

удельная энергия деформации (первое равенство (16.18)) и ОС (16.19) представляются соответственно в форме

$$2\Phi(\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}, \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{X}}}_p^2, \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}}_\alpha = \lambda_\alpha \underline{\underline{\mathbb{X}}}_\alpha, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (16.21)$$

Умножая обе части первого равенства (16.20) слева тензорно на $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha$, а затем полученное соотношение суммируя от 1 до 18, в силу (16.17) получим

$$\underline{\underline{\mathbb{X}}} = \sum_{\alpha=1}^{18} \underline{\underline{\mathbb{X}}}_\alpha \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{18} (\underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha, \quad \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \sum_{\alpha=1}^{18} \underline{\underline{\mathbb{Y}}}_\alpha \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{18} (\underline{\mathbf{u}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\rho}} + \underline{\mathbf{v}}_\alpha \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\mu}}) \underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha, \quad (16.22)$$

где вторая формула (16.22) написано по аналогии с первой. Следует заметить, что формулы (16.22) представляют собой разложения тензорных столбцов $\underline{\underline{\mathbb{X}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{Y}}}$ по ортонормированному базису $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha$, $\alpha = \overline{1, 18}$, а $\underline{\underline{\mathbb{X}}}_\alpha$ и $\underline{\underline{\mathbb{Y}}}_\alpha$ являются проекциями $\underline{\underline{\mathbb{X}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{Y}}}$ соответственно на $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_\alpha$.

Нетрудно заметить, что, учитывая первое равенство (16.20), из второго соотношения (16.18) получим следующие представления тензоров напряжений и моментных напряжений:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\rho}}} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{X}}}_p \underline{\mathbf{u}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{u}}_p, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\mu}}} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbb{X}}}_p \underline{\mathbf{v}}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p (\underline{\mathbf{u}}_p \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\mathbf{v}}_p \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \underline{\mathbf{v}}_p. \end{aligned} \quad (16.23)$$

Нетрудно выписать обратные определяющие соотношения. В самом деле, например, из второго равенства (16.5) в силу (16.15) и второго равенства (16.20) находим

$$\underline{\underline{\mathbb{X}}} = \underline{\underline{\mathbb{M}}}^{-1} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p^T \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{Y}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \underline{\underline{\mathbb{Y}}}_p \underline{\underline{\mathbb{W}}}_p, \quad \underline{\underline{\mathbb{X}}}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} \underline{\underline{\mathbb{Y}}}_\alpha, \quad \langle \alpha = \overline{1, 18} \rangle. \quad (16.24)$$

Учитывая второе равенство (16.20), из первого соотношения (16.24) аналогично (16.23) будем иметь

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \boldsymbol{u}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} (\boldsymbol{u}_p \otimes \mathbf{P} + \boldsymbol{v}_p \otimes \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{u}_p, \\ \boldsymbol{\varkappa} &= \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} \mathbb{Y}_p \boldsymbol{v}_p = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p^{-1} (\boldsymbol{u}_p \otimes \mathbf{P} + \boldsymbol{v}_p \otimes \boldsymbol{\mu}) \boldsymbol{v}_p.\end{aligned}$$

16.3. Собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы. Из формул (16.12) и (16.19) видно, что по существу нет необходимости решать уравнение 18 степени (16.10), а следует просто $\underline{\mathbb{M}}$ из (16.4) представить по формуле (16.12) и использовать определяющие соотношения, записанные в виде (16.19). Из (16.12) видно, что для задания тензорно-блочной матрицы (16.4), кроме 18 собственных значений λ_p , $p = \overline{1, 18}$, называемых еще *собственными модулями упругости*, необходимо задать 18 собственных тензорных столбцов $\underline{\mathbb{W}}_p$, $p = \overline{1, 18}$, называемых еще *собственными тензорными столбцами упругих состояний*. Построим эти собственные тензорные столбцы упругих состояний в явном виде. Прежде всего отметим, что условия ортонормированности (16.13) представляют 171 соотношение, которые связывают между собой 324 компоненты тензорных столбцов $\underline{\mathbb{W}}_p = (\boldsymbol{u}_p, \boldsymbol{v}_p)^T$, $p = \overline{1, 18}$. Итак, свободными (независимыми) остаются 153 компоненты (параметра), с помощью которых следует построить собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы (16.4). В этой связи рассмотрим следующие тензоры четвертого ранга:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbb{W}}}_{11} &= \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{u}_m = u_{mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n, & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{12} &= \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{v}_m = v_{mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n, \\ \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{21} &= \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{u}_{9+m} = u_{9+mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n, & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{22} &= \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{v}_{9+m} = v_{9+mn} \boldsymbol{e}_m \boldsymbol{e}_n,\end{aligned}\quad (16.25)$$

посредством которых построим следующую тензорно-блочную матрицу:

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{22} \end{pmatrix} \left(\underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{11}^T & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{21}^T \\ \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{12}^T & \underline{\underline{\mathbb{W}}}_{22}^T \end{pmatrix} \right). \quad (16.26)$$

Легко доказать, что тензорно-блочная матрица (16.26) удовлетворяет условиям

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}} = \mathbb{E}. \quad (16.27)$$

На основании (16.27) заключаем, что $\underline{\underline{\mathbb{W}}}$ — ортогональная тензорно-блочная матрица модуля \mathbb{R}_4^4 . Кроме того, легко проверить, что соотношения (16.13) эквивалентны соотношению

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{W}}}^T = \mathbb{E}. \quad (16.28)$$

Таким образом, тензорно-блочная матрица (16.26) имеет 324 компоненты, которые связаны между собой тензорным соотношением (16.28), равносильным 171 соотношению (16.13), и, следовательно, среди 324 компонент независимыми остаются 153 компоненты (параметра), с помощью которых следует построить собственные тензорные столбцы тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{\mathbb{M}}}$. В этой связи, применяя теорему 14.13 к ортогональной тензорно-блочной матрице (16.26), мы можем написать

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}} = \underline{\underline{\mathbb{L}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{R}}}, \quad (16.29)$$

где левая треугольная тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{L}}}$ и правая унитарная тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ имеют вид

$$\underline{\underline{\mathbb{L}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{L}}}_{11} & \mathbf{0} \\ \underline{\underline{\mathbb{L}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbb{L}}}_{22} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{\mathbb{R}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{12} \\ \mathbf{0} & \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{22} \end{pmatrix}. \quad (16.30)$$

Следует заметить, что матрицы L , L_{11} , L_{21} , L_{22} и R , R_{11} , R_{12} , R_{22} , соответствующие объектам $\underline{\underline{\mathbb{L}}}$, $\underline{\underline{\mathbb{L}}}_{11}$, $\underline{\underline{\mathbb{L}}}_{21}$, $\underline{\underline{\mathbb{L}}}_{22}$ и $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$, $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{11}$, $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{12}$, $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{22}$ представляются следующим образом:

$$L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix}, \quad (16.31)$$

$$L_{11} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{61} & l_{62} & l_{63} & l_{64} & l_{65} & l_{66} & 0 & 0 & 0 \\ l_{71} & l_{72} & l_{73} & l_{74} & l_{75} & l_{76} & l_{77} & 0 & 0 \\ l_{81} & l_{82} & l_{83} & l_{84} & l_{85} & l_{86} & l_{87} & l_{88} & 0 \\ l_{91} & l_{92} & l_{93} & l_{94} & l_{95} & l_{96} & l_{97} & l_{98} & l_{99} \end{pmatrix}, \quad (16.32)$$

$$L_{21} = \begin{pmatrix} l_{101} & l_{102} & l_{103} & l_{104} & l_{105} & l_{106} & l_{107} & l_{108} & l_{109} \\ l_{111} & l_{112} & l_{113} & l_{114} & l_{115} & l_{116} & l_{117} & l_{118} & l_{119} \\ l_{121} & l_{122} & l_{123} & l_{124} & l_{125} & l_{126} & l_{127} & l_{128} & l_{129} \\ l_{131} & l_{132} & l_{133} & l_{134} & l_{135} & l_{136} & l_{137} & l_{138} & l_{139} \\ l_{141} & l_{142} & l_{143} & l_{144} & l_{145} & l_{146} & l_{147} & l_{148} & l_{149} \\ l_{151} & l_{152} & l_{153} & l_{154} & l_{155} & l_{156} & l_{157} & l_{158} & l_{159} \\ l_{161} & l_{162} & l_{163} & l_{164} & l_{165} & l_{166} & l_{167} & l_{168} & l_{169} \\ l_{171} & l_{172} & l_{173} & l_{174} & l_{175} & l_{176} & l_{177} & l_{178} & l_{179} \\ l_{181} & l_{182} & l_{183} & l_{184} & l_{185} & l_{186} & l_{187} & l_{188} & l_{189} \end{pmatrix}, \quad (16.33)$$

$$L_{22} = \begin{pmatrix} l_{10110} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{11110} & l_{11111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{12110} & l_{12111} & l_{12112} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{13110} & l_{13111} & l_{13112} & l_{13113} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{14110} & l_{14111} & l_{14112} & l_{14113} & l_{14114} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{15110} & l_{15111} & l_{15112} & l_{15113} & l_{15114} & l_{15115} & 0 & 0 & 0 \\ l_{16110} & l_{16111} & l_{16112} & l_{16113} & l_{16114} & l_{16115} & l_{16116} & 0 & 0 \\ l_{17110} & l_{17111} & l_{17112} & l_{17113} & l_{17114} & l_{17115} & l_{17116} & l_{17117} & 0 \\ l_{18110} & l_{18111} & l_{18112} & l_{18113} & l_{18114} & l_{18115} & l_{18116} & l_{18117} & l_{18118} \end{pmatrix}, \quad (16.34)$$

$$R_{11} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} & r_{17} & r_{18} & r_{19} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} & r_{27} & r_{28} & r_{29} \\ 0 & 0 & 1 & r_{34} & r_{35} & r_{36} & r_{37} & r_{38} & r_{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{45} & r_{46} & r_{47} & r_{48} & r_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{56} & r_{57} & r_{58} & r_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{67} & r_{68} & r_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{78} & r_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16.35)$$

$$R_{12} = \begin{pmatrix} r_{110} & r_{111} & r_{112} & r_{113} & r_{114} & r_{115} & r_{116} & r_{117} & r_{118} \\ r_{210} & r_{211} & r_{212} & r_{213} & r_{214} & r_{215} & r_{216} & r_{217} & r_{218} \\ r_{310} & r_{311} & r_{312} & r_{313} & r_{314} & r_{315} & r_{316} & r_{317} & r_{318} \\ r_{410} & r_{411} & r_{412} & r_{413} & r_{414} & r_{415} & r_{416} & r_{417} & r_{418} \\ r_{510} & r_{511} & r_{512} & r_{513} & r_{514} & r_{515} & r_{516} & r_{517} & r_{518} \\ r_{610} & r_{611} & r_{612} & r_{613} & r_{614} & r_{615} & r_{616} & r_{617} & r_{618} \\ r_{710} & r_{711} & r_{712} & r_{713} & r_{714} & r_{715} & r_{716} & r_{717} & r_{718} \\ r_{810} & r_{811} & r_{812} & r_{813} & r_{814} & r_{815} & r_{816} & r_{817} & r_{818} \\ r_{910} & r_{911} & r_{912} & r_{913} & r_{914} & r_{915} & r_{916} & r_{917} & r_{918} \end{pmatrix}, \quad (16.36)$$

$$R_{22} = \begin{pmatrix} 1 & r_{1011} & r_{1012} & r_{1013} & r_{1014} & r_{1015} & r_{1016} & r_{1017} & r_{1018} \\ 0 & 1 & r_{1112} & r_{1113} & r_{1114} & r_{1115} & r_{1116} & r_{1117} & r_{1118} \\ 0 & 0 & 1 & r_{1213} & r_{1214} & r_{1215} & r_{1216} & r_{1217} & r_{1218} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1314} & r_{1315} & r_{1316} & r_{1317} & r_{1318} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1415} & r_{1416} & r_{1417} & r_{1418} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1516} & r_{1517} & r_{1518} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1617} & r_{1618} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_{1718} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.37)$$

Нетрудно заметить, что левый треугольный тензор $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11}$, квадратный тензор $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21}$ и левый треугольный тензор $\underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22}$, а также правый унитреугольный тензор $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11}$, квадратный тензор $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12}$ и правый унитреугольный тензор $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22}$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{l}}}_{p\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{p\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{l}}}_{9+p\cdot}; \\ \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{p\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{p\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22} &= \mathbf{e}_p \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{9+p\cdot}, \quad p = \overline{1,9}, \end{aligned} \quad (16.38)$$

где для составляющих тензоров введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{l}}}_{p\cdot} &= \sum_{q=1}^p l_{pq} \mathbf{e}_q, & \underline{\underline{\mathbf{m}}}_{p\cdot} &= \sum_{q=1}^9 r_{9+pq} \mathbf{e}_p, & \underline{\underline{\mathbf{l}}}_{p\cdot} &= \sum_{q=1}^p l_{9+p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1,9}; \\ \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{p\cdot} &= \mathbf{e}_p + \sum_{q=p+1}^9 r_{pq} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1,8}, & \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{9\cdot} &= \mathbf{e}_9; & \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{p\cdot} &= \sum_{q=1}^9 r_{p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1,9}; \\ \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{9+p\cdot} &= \mathbf{e}_p + \sum_{q=p+1}^9 r_{9+p9+q} \mathbf{e}_q, \quad p = \overline{1,8}, & \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{18\cdot} &= \mathbf{e}_9. \end{aligned} \quad (16.39)$$

Учитывая (16.26) и (16.30), из (16.29) получим

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} \\ \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11} & \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, очевидно, находим

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{11} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11}, & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{12} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{11} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12}, \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{21} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{11}, & \underline{\underline{\mathbf{W}}}_{22} &= \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{21} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{12} + \underline{\underline{\mathbf{L}}}_{22} \otimes \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{22}. \end{aligned} \quad (16.40)$$

Учитывая (16.25), (16.38) и (16.39), из (16.40) будем иметь

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{m\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{v}}}_p &= \sum_{m=1}^p l_{pm} \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{m\cdot}, & \underline{\underline{\mathbf{u}}}_{9+p} &= l_{9+pq} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{q\cdot}, \\ \underline{\underline{\mathbf{v}}}_{9+p} &= l_{9+pq} \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{q\cdot} + \sum_{m=1}^p l_{9+p9+m} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{9+m\cdot}, \quad p = \overline{1,9}, \quad (q = \overline{1,9}). \end{aligned} \quad (16.41)$$

Нетрудно доказать, что системы тензоров $\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{p\cdot}, p = \overline{1,18}$ и $\underline{\underline{\mathbf{u}}}_q, q = \overline{1,9}$ (см. (16.39) и (16.41)) линейно независимы.

Введем в рассмотрение тензорные столбцы

$$\underline{\underline{\mathbb{T}}}_m = (\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{m\cdot}, \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{m\cdot})^T, \quad m = \overline{1,9}, \quad \underline{\underline{\mathbb{T}}}_n = (\underline{\underline{\mathbf{0}}}, \underline{\underline{\mathbf{r}}}_{n\cdot})^T, \quad n = \overline{10,18}, \quad (16.42)$$

где $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$ — нулевой тензор второго ранга, а $\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{m\cdot}, \underline{\underline{\mathbf{n}}}_{m\cdot}$ и $\underline{\underline{\mathbf{r}}}_{9+m\cdot}, m = \overline{1,9}$ задаются соответствующими формулами (16.39).

Не составляет труда доказать, что система тензорных столбцов $\underline{\underline{\mathbb{T}}}_p, p = \overline{1,18}$ линейно независима. Следовательно, линейно независимы и подсистемы $\underline{\underline{\mathbb{T}}}_m, m = \overline{1,9}$ и $\underline{\underline{\mathbb{T}}}_n, n = \overline{10,18}$ так же, как и любая подсистема системы $\underline{\underline{\mathbb{T}}}_p, p = \overline{1,18}$. Нетрудно видеть, что имеет место соотношение

$$\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p = (\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_p)^T = \sum_{q=1}^p l_{pq} \underline{\underline{\mathbb{T}}}_q, \quad p = \overline{1,18}. \quad (16.43)$$

Из (16.43) видно, что ортонормированную систему тензорных столбцов $\underline{\underline{\mathbb{W}}}_p = (\underline{\underline{\mathbf{u}}}_p, \underline{\underline{\mathbf{v}}}_p)^T, p = \overline{1,18}$ можно получить с помощью процедуры ортонормирования Грама—Шмидта [5, 7, 36, 80] линейно

независимой системы тензорных столбцов \mathbb{T}_p , $p = \overline{1, 18}$ (см. (16.42)). В самом деле, проводя процедуру ортонормирования системы тензорных столбцов \mathbb{R}_p , $p = \overline{1, 18}$, для коэффициентов l_{pq} , $p = \overline{1, 18}$, $q = \overline{1, p}$ после простых, хотя и громоздких вычислений получим следующие выражения:

$$l_{11} = \frac{d_0}{\pm\sqrt{d_0 d_1}}, \quad l_{pk} = \frac{S_{pk}^{(p)}}{\pm\sqrt{d_{p-1} d_p}}, \quad S_{pk}^{(p)} = (-1)^{p+k} S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & p-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & p \end{pmatrix}, \quad (16.44)$$

$$p = \overline{2, 9}, \quad k = \overline{1, p},$$

где введены обозначения

$$d_0 = 1, \quad d_p = \det S_p = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{vmatrix}, \quad s_{pq} = \mathbb{T}_p^T \otimes \mathbb{T}_q, \quad p, q = \overline{1, 18},$$

$$S_{pk}^{(p)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k-1} & 0 & s_{1k+1} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k-1} & 0 & s_{2k+1} & \cdots & s_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk-1} & 0 & s_{kk+1} & \cdots & s_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p-11} & s_{p-12} & \cdots & s_{p-1k-1} & 0 & s_{p-1k+1} & \cdots & s_{p-1p} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \quad \langle p = \overline{1, 18} \rangle, \quad k = \overline{1, p},$$

$$S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & p-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1k-1} & s_{1k+1} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2k-1} & s_{2k+1} & \cdots & s_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k1} & s_{k2} & \cdots & s_{kk-1} & s_{kk+1} & \cdots & s_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p-11} & s_{p-12} & \cdots & s_{p-1k-1} & s_{p-1k+1} & \cdots & s_{p-1p} \end{vmatrix},$$

$S_{pk}^{(p)}$ — алгебраическое дополнение элемента s_{pk} субматрицы $S_p = \text{matr}(s_{mn})$, $m, n = \overline{1, p}$, а $S \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & p-1 \\ 1 & 2 & \cdots & k-1 & k+1 & \cdots & p \end{pmatrix}$ — минор $(p-1)$ -го порядка для определителя $\det S_p$, получающийся вычеркиванием p -ой строки и k -го столбца.

Учитывая (16.44), из (16.43) после несложных преобразований для собственных тензорных столбцов тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} получим следующие выражения:

$$\mathbb{W}_1 = \frac{1}{\pm\sqrt{d_0 d_1}} \mathbb{T}_1, \quad \mathbb{W}_p = \frac{1}{\pm\sqrt{d_{p-1} d_p}} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p-1} & \mathbb{T}_1 \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p-1} & \mathbb{T}_2 \\ s_{31} & s_{32} & \cdots & s_{3p-1} & \mathbb{T}_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp-1} & \mathbb{T}_p \end{vmatrix}, \quad p = \overline{2, 18}. \quad (16.45)$$

Следует заметить, что с помощью формул (16.45) собственные тензорные столбцы $\mathbb{W}_p \in \mathbb{R}_2^2(\Omega)$, $p = \overline{1, 18}$ тензорно-блочной матрицы $\mathbb{M} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ определяются с помощью 153 независимых параметров (компонент унитарной тензорно-блочной матрицы $\mathbb{R} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$) относительно произвольной системы координат (произвольного базиса \mathbf{e}_p , $p = 1, 2, 3$). Очевидно, за счет выбора системы координат число независимых параметров можно уменьшить. Это зависит от типа корней характеристического уравнения, например, тензора \mathbf{r}_1 . Если все три корня характеристического уравнения тензора \mathbf{r}_1 — простые действительные числа, или среди корней имеются два комплексно-сопряженных корня, или еще характеристическое уравнение имеет трехкратный корень, то во всех этих случаях число независимых параметров уменьшается на 6 и равно 147. Заметим также, что при написании (16.45) опечатки, допущенные в аналогичных формулах в [43], устранены.

Таким образом, для описания механических свойств микрополярного материала, не обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, достаточно вместо компонент тензоров модулей упругости \mathbb{A} , $\mathbb{B} = \mathbb{C}^T$ и \mathbb{D} в какой-то системе координат задать инвариантные характеристики тензорно-блочной матрицы \mathbb{M} (16.4), т. е. собственные значения (собственные модули упругости)

$\lambda_k > 0$, $k = \overline{1, 18}$ и собственные тензорные столбцы $\underline{\mathbb{W}}_p$, $p = \overline{1, 18}$, которые определяются с помощью 153 независимых параметров относительно произвольной системы координат, а относительно специально выбранной системы координат — посредством 147 независимых параметров. Заметим, что эти инвариантные характеристики должны служить для сравнения и классификации микрополярных линейно упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств. Следовательно, провести аналогичное исследование для микрополярного материала, обладающего центром симметрии в смысле упругих свойств, как частного случая микрополярного материала, не обладающего центром симметрии, не представляет большого труда. Для классического линейно упругого материала, как было сказано выше, аналогичное исследование было проведено Н. И. Остроаблиным [47–50].

16.4. Микрополярный материал с центром симметрии. В этом случае $\underline{\mathbb{B}} = \underline{\mathbb{C}}^T = \underline{\mathbb{0}}$, поэтому ОС (16.2) и удельная энергия деформации (16.1) представляются в виде

$$\underline{\mathbb{P}} = \underline{\mathbb{A}} \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \underline{\mathbb{D}} \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varkappa}}, \quad (16.46)$$

$$2\Phi(\underline{\boldsymbol{\gamma}}, \underline{\boldsymbol{\varkappa}}) = \underline{\mathbb{X}}^T \otimes^2 \underline{\mathbb{M}} \otimes^2 \underline{\mathbb{X}} = \underline{\boldsymbol{\gamma}} \otimes^2 \underline{\mathbb{A}} \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\gamma}} + \underline{\boldsymbol{\varkappa}} \otimes^2 \underline{\mathbb{D}} \otimes^2 \underline{\boldsymbol{\varkappa}}, \quad (16.47)$$

а матрица (16.3) получит вид тензорно-блочной диагональной матрицы (16.6). Тогда характеристическое уравнение для (16.6) аналогично уравнениям (15.2) эквивалентно следующим уравнениям:

$$\det(\underline{\mathbb{A}} - \lambda \underline{\mathbb{E}}) = 0, \quad \det(\underline{\mathbb{D}} - \lambda \underline{\mathbb{E}}) = 0. \quad (16.48)$$

Видно, что каждое из уравнений (16.48) является уравнением девятой степени относительно λ и имеет девять положительных корней, считая каждый корень столько раз, какова его кратность. Множество корней каждого уравнения (16.48), конечно, можно упорядочить в порядке убывания. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ — корни первого уравнения (16.48), а $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}$ — корни второго уравнения. Тогда, очевидно, будем иметь

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_9 > 0, \quad \lambda_{10} \geq \lambda_{11} \geq \dots \geq \lambda_{18} > 0. \quad (16.49)$$

В дальнейшем рассмотрим такие материалы, для которых выполняется условие

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9\} \cap \{\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}\} = \emptyset, \quad (16.50)$$

где \emptyset обозначает пустое множество. Другими словами, ни один из корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_9$ не равен какому-либо из корней $\lambda_{10}, \lambda_{11}, \dots, \lambda_{18}$, т. е. уравнения (16.48) не имеют общих корней (хотя, вообще говоря, уравнения (16.48) могут иметь общие корни).

Обозначая через $\underline{\mathbb{W}}_p$, $p = \overline{1, 18}$ собственные тензорные столбцы тензорно-блочной диагональной матрицы $\underline{\mathbb{M}}$ (16.6), соответствующие собственным значениям λ_p , $p = \overline{1, 18}$, будем иметь

$$\underline{\mathbb{M}} = \begin{pmatrix} \underline{\mathbb{A}} & \underline{\mathbb{0}} \\ \underline{\mathbb{0}} & \underline{\mathbb{D}} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\mathbb{W}}_p \underline{\mathbb{W}}_p^T. \quad (16.51)$$

Далее все, что было сказано в разделе 15, остается в силе и в рассматриваемом случае. В частности, из всех формул раздела 15 получим соответствующие формулы в данном случае, если N заменить на 9. В этой связи их выписывать не будем. Отметим только, что при рассматриваемой анизотропии материала, обладающего центром симметрии, тензоры $\underline{\mathbb{A}}$ и $\underline{\mathbb{D}}$ обычно имеют соответствующую этой анизотропии одинаковую структуру. Например, в случае изотропного материала все эти тензоры изотропны, в случае трансверсально-изотропного материала все тензоры трансверсально-изотропны и т. д. Если это так, очевидно, для классификации микрополярных упругих анизотропных материалов, обладающих центром симметрии в смысле упругих свойств, достаточно рассматривать, например, тензор $\underline{\mathbb{A}}$, ибо при данной анизотропии материала тензор $\underline{\mathbb{D}}$ имеет такую же структуру, что и тензор $\underline{\mathbb{A}}$, хотя, по мнению автора, тензоры $\underline{\mathbb{A}}$ и $\underline{\mathbb{D}}$ могут иметь различные структуры.

Таким образом, из сказанного выше следует, что при изучении внутренней структуры тензорно-блочной диагональной матрицы $\underline{\mathbb{M}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ достаточно рассматривать задачу на собственные значения, например, тензора $\underline{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$.

16.5. Задача на собственные значения и построение полной системы собственных тензоров для симметричного тензора четвертого ранга. Все, что было сказано во втором пункте для тензора $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{2p}(\Omega)$, остается в силе и в рассматриваемом случае для тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$. В частности, из второго пункта данный пункт получится, если область Ω считать трехмерной, а также \mathbf{A} , n , p и N заменить на $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, 3, 2 и 9 соответственно. Поэтому с целью сокращения письма на изложении материала относительно тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}_4(\Omega)$ останавливаться не будем.

17. КЛАССИФИКАЦИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЛИНЕЙНО УПРУГИХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Определение 17.1. Символ $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$, где k — число различных собственных значений тензорно-блочной матрицы тензоров модулей упругости, а α_i — кратность собственного значения λ_i ($i = 1, 2, \dots, k$), называется *символом анизотропии (структуры)* микрополярных линейно упругих материалов.

Нетрудно видеть, что если материал не обладает центром симметрии, то

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 18, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 18 - (k - 1) = 19 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 18. \quad (17.1)$$

17.1. Классификация микрополярных линейно упругих анизотропных материалов с центром симметрии. В этом случае аналогичное (17.1) соотношение имеет вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 9, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 9 - (k - 1) = 10 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 9. \quad (17.2)$$

Имеются 9 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Ниже рассмотрены все 9 классов, а также в каждом классе выписаны символы анизотропии всех входящих в этот класс материалов. В некоторых случаях приведены соответствующие данному символу анизотропии выражения для тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$. При этом собственные значения выписаны только для тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, а выражение для тензора $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ дается по аналогии. Число материалов в каждом классе выражается соответствующим биномиальным коэффициентом, что легко доказывается.

17.1.1. Символ анизотропии состоит из одного элемента.

$$\{\alpha\}, \quad \alpha = 9, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_9, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

Число таких материалов равно $C_8^0 = 1$. Здесь $\underline{\underline{\mathbf{E}}}$ — единичный тензор четвертого ранга.

17.1.2. Символ анизотропии состоит из двух элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 8, \quad m = 1, 2; \\ & \{1, 8\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 4\}, \{6, 3\}, \{7, 2\}, \{8, 1\}. \\ & \{1, 8\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_9) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\underline{\underline{\mathbf{A}}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}} = (\mu_1 - \mu_2)\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1 + \mu_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)}). \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^1 = 8$.

17.1.3. Символ анизотропии состоит из трех элементов (среди них — изотропные микроконтинуальные материалы).

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = 1, 2, 3, \\ & \{1, 1, 7\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 4\}, \{1, 5, 3\}, \{1, 6, 2\}, \{1, 7, 1\}; \{2, 1, 6\}, \\ & \{2, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 3\}, \{2, 5, 2\}, \{2, 6, 1\}; \{3, 1, 5\}, \{3, 2, 4\}, \{3, 3, 3\}, \\ & \{3, 4, 2\}, \{3, 5, 1\}; \{4, 1, 4\}, \{4, 2, 3\}, \{3, 3, 2\}, \{4, 4, 4\}; \{5, 1, 3\}, \{5, 2, 2\}, \\ & \{5, 3, 1\}; \{6, 1, 2\}, \{6, 2, 1\}; \{7, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^2 = 28$.

17.1.4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 6, \quad m = 1, 2, 3, 4;$$

$$\{1, 1, 1, 6\}, \{1, 1, 2, 5\}, \{1, 1, 3, 4\}, \{1, 1, 4, 3\}, \{1, 1, 5, 2\}, \{1, 1, 6, 1\}; \{1, 2, 1, 5\},$$

$$\{1, 2, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 3\}, \{1, 2, 4, 2\}, \{1, 2, 5, 1\}; \{1, 3, 1, 4\}, \{1, 3, 2, 3\}, \{1, 3, 3, 2\},$$

$$\{1, 3, 4, 1\}; \{1, 4, 1, 3\}, \{1, 4, 2, 2\}, \{1, 4, 3, 1\}; \{1, 5, 1, 2\}, \{1, 5, 2, 1\}; \{1, 6, 1, 1\};$$

$$\{2, 1, 1, 5\}, \{2, 1, 2, 4\}, \{2, 1, 3, 3\}, \{2, 1, 4, 2\}, \{2, 1, 5, 1\}; \{2, 2, 1, 4\}, \{2, 2, 2, 3\},$$

$$\{2, 2, 3, 2\}, \{2, 2, 4, 1\}; \{2, 3, 1, 3\}, \{2, 3, 2, 2\}, \{2, 3, 3, 1\}; \{2, 4, 1, 2\}, \{2, 4, 2, 1\};$$

$$\{2, 5, 1, 1\}; \{3, 1, 1, 4\}, \{3, 1, 2, 3\}, \{3, 1, 3, 2\}, \{3, 1, 4, 1\}; \{3, 2, 1, 3\}, \{3, 2, 2, 2\},$$

$$\{3, 2, 3, 1\}; \{3, 3, 1, 2\}, \{3, 3, 2, 1\}; \{3, 4, 1, 1\}; \{4, 1, 1, 3\}, \{4, 1, 2, 2\}, \{4, 1, 3, 1\};$$

$$\{4, 2, 1, 2\}, \{4, 2, 2, 1\}; \{4, 3, 1, 1\}; \{5, 1, 1, 2\}, \{5, 1, 2, 1\}; \{5, 2, 1, 1\}; \{6, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^3 = 56$.

17.1.5. Символ анизотропии состоит из 5 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 5, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6 = \dots = \lambda_9) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 5\}, \dots$$

$$\{1, 1, 1, 1, 5\}, \{1, 1, 1, 2, 4\}, \{1, 1, 1, 3, 3\}, \{1, 1, 1, 4, 2\}, \{1, 1, 1, 5, 1\}; \{1, 1, 2, 1, 4\},$$

$$\{1, 1, 2, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 3, 2\}, \{1, 1, 2, 4, 1\}; \{1, 1, 3, 1, 3\}, \{1, 1, 3, 2, 2\}, \{1, 1, 3, 3, 1\};$$

$$\{1, 1, 4, 1, 2\}, \{1, 1, 4, 2, 1\}; \{1, 1, 5, 1, 1\}; \{1, 2, 1, 1, 4\}, \{1, 2, 1, 2, 3\}, \{1, 2, 1, 3, 2\},$$

$$\{1, 2, 1, 4, 1\}; \{1, 2, 2, 1, 3\}, \{1, 2, 2, 2, 2\}, \{1, 2, 2, 3, 1\}; \{1, 2, 3, 1, 2\}, \{1, 2, 3, 2, 1\};$$

$$\{1, 2, 4, 1, 1\}; \{1, 3, 1, 1, 3\}, \{1, 3, 1, 2, 2\}, \{1, 3, 1, 3, 1\}; \{1, 3, 2, 1, 2\}, \{1, 3, 2, 2, 1\};$$

$$\{1, 3, 3, 1, 1\}; \{1, 4, 1, 1, 2\}, \{1, 4, 1, 2, 1\}; \{1, 4, 2, 1, 1\}; \{1, 5, 1, 1, 1\}; \{2, 1, 1, 1, 4\},$$

$$\{2, 1, 1, 2, 3\}, \{2, 1, 1, 3, 2\}, \{2, 1, 1, 4, 1\}; \{2, 1, 2, 1, 3\}, \{2, 1, 2, 2, 2\}, \{2, 1, 2, 3, 1\};$$

$$\{2, 1, 3, 1, 2\}, \{2, 1, 3, 2, 1\}; \{2, 1, 4, 1, 1\}; \{2, 2, 1, 1, 3\}, \{2, 2, 1, 2, 2\}, \{2, 2, 1, 3, 1\};$$

$$\{2, 2, 2, 1, 2\}, \{2, 2, 2, 2, 1\}; \{2, 2, 3, 1, 1\}; \{2, 3, 1, 1, 2\}, \{2, 3, 1, 2, 1\}; \{2, 3, 2, 1, 1\};$$

$$\{2, 4, 1, 1, 1\}; \{3, 1, 1, 1, 3\}, \{3, 1, 1, 2, 2\}, \{3, 1, 1, 3, 1\}; \{3, 1, 2, 1, 2\}, \{3, 1, 2, 2, 1\};$$

$$\{3, 1, 3, 1, 1\}; \{3, 2, 1, 1, 2\}, \{3, 2, 1, 2, 1\}; \{3, 2, 2, 1, 1\}; \{3, 3, 1, 1, 1\}; \{4, 1, 1, 1, 2\},$$

$$\{4, 1, 1, 2, 1\}; \{4, 1, 2, 1, 1\}; \{4, 2, 1, 1, 1\}; \{5, 1, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^4 = 70$.

17.1.6. Символ анизотропии состоит из 6 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 4, \quad m = \overline{1, 6};$$

$$(\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 = \lambda_7 \dots = \lambda_9) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 4\}, \dots$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 4\}, \{1, 1, 1, 1, 2, 3\}, \{1, 1, 1, 1, 3, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 4, 1\}; \{1, 1, 1, 2, 1, 3\},$$

$$\{1, 1, 1, 2, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 2, 3, 1\}; \{1, 1, 1, 3, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 3, 2, 1\}; \{1, 1, 1, 4, 1, 1\};$$

$$\{1, 1, 2, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 2, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 2, 1, 3, 1\}; \{1, 1, 2, 2, 1, 2\}, \{1, 1, 2, 2, 2, 1\};$$

$$\{1, 1, 2, 3, 1, 1\}; \{1, 1, 3, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 3, 1, 2, 1\}; \{1, 1, 3, 2, 1, 1\}; \{1, 1, 4, 1, 1, 1\};$$

$$\{1, 2, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 2, 1, 1, 2, 2\}, \{1, 2, 1, 1, 3, 1\}; \{1, 2, 1, 2, 1, 2\}, \{1, 2, 1, 2, 2, 1\};$$

$$\{1, 2, 1, 3, 1, 1\}; \{1, 2, 2, 1, 1, 2\}, \{1, 2, 2, 1, 2, 1\}; \{1, 2, 2, 2, 1, 1\}; \{1, 2, 3, 1, 1, 1\};$$

$$\{1, 3, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 3, 1, 1, 2, 1\}; \{1, 3, 1, 2, 1, 1\}; \{1, 3, 2, 1, 1, 1\}; \{1, 4, 1, 1, 1, 1\};$$

$$\{2, 1, 1, 1, 1, 3\}, \{2, 1, 1, 1, 2, 2\}, \{2, 1, 1, 1, 3, 1\}; \{2, 1, 1, 2, 1, 2\}, \{2, 1, 1, 2, 2, 1\};$$

$$\{2, 1, 1, 3, 1, 1\}; \{2, 1, 2, 1, 1, 2\}, \{2, 1, 2, 1, 2, 1\}; \{2, 1, 2, 2, 1, 1\}; \{2, 1, 3, 1, 1, 1\};$$

$$\{2, 2, 1, 1, 1, 2\}, \{2, 2, 1, 1, 2, 1\}; \{2, 2, 1, 2, 1, 1\}; \{2, 2, 2, 1, 1, 1\}; \{2, 3, 1, 1, 1, 1\};$$

$$\{3, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{3, 1, 1, 1, 2, 1\}; \{3, 1, 1, 2, 1, 1\}; \{3, 1, 2, 1, 1, 1\}; \{3, 2, 1, 1, 1, 1\};$$

$$\{4, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Число таких материалов равно $C_8^5 = 56$.

17.1.7. Символ анизотропии состоит из 7 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 = 9, \\ & 1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = \overline{1, 7}; \\ & (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 = \lambda_8 = \lambda_9) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \dots \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 3, 1\}; \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 2\}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 2, 2, 1\}; \{1, 1, 1, 1, 3, 1, 1\}; \{1, 1, 1, 2, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 2, 1, 2, 1\}, \\ & \{1, 1, 1, 2, 2, 1, 1\}; \{1, 1, 1, 3, 1, 1, 1\}; \{1, 1, 2, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 2, 1, 1, 2, 1\}, \\ & \{1, 1, 2, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 1, 2, 2, 1, 1, 1\}; \{1, 1, 3, 1, 1, 1, 1\}; \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 2\}, \\ & \{1, 2, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{1, 2, 1, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 2, 1, 2, 1, 1, 1\}, \{1, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}; \\ & \{1, 3, 1, 1, 1, 1, 1\}; \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{2, 1, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 2, 1, 1\}, \\ & \{2, 1, 1, 2, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 2, 1, 1, 1, 1\}, \{2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}; \{3, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^6 = 28$.

17.1.8. Символ анизотропии состоит из 8 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 = 9, \\ & 1 \leq \alpha_m \leq 2, \quad m = \overline{1, 8}; \\ & (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8 = \lambda_9) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \dots \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1\}, \\ & \{1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^7 = 8$.

17.1.9. Символ анизотропии состоит из 9 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 = 9, \\ & 1 \leq \alpha_m \leq 1, \quad m = \overline{1, 9}; \\ & (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8 > \lambda_9) \Leftrightarrow \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Число таких материалов равно $C_8^8 = 1$.

В итоге получили $\sum_{k=0}^8 C_8^k = 2^8 = 256$ материалов при условии, что тензоры модулей упругости

$\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ при рассматриваемой анизотропии имеют одинаковую структуру (один и тот же символ анизотропии). При рассматриваемой анизотропии тензоры модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ могут иметь символы анизотропии различной структуры, но состоящие из одинакового числа элементов (тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ принадлежат одному и тому же классу, но имеют разные структуры). В таком случае число анизотропных материалов будет $1^2 + 8^2 + 28^2 + 56^2 + 70^2 + 56^2 + 28^2 + 8^2 + 1^2 = 12870$. Если тензоры $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ имеют различную структуру, то число анизотропных материалов будет $256 \times 256 = 65536$.

17.2. Классификация классических линейно упругих анизотропных материалов. В этом случае аналогичное (17.1) и (17.2) соотношение имеет вид

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 6, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 6 - (k - 1) = 7 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 6.$$

Имеются 6 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Всего имеются 32 подгруппы. Они приведены ниже.

17.2.1. Символ анизотропии состоит из одного элемента.

$$\begin{aligned} & \{\alpha\}, \quad \alpha = 6, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_6, \\ & \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \sum_{p=1}^6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad \left(\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) \right). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^0 = 1$.

Здесь $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)}$ и $\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}$ — изотропные тензоры четвертого ранга.

17.2.2. Символ анизотропии состоит из двух элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 5, \quad m = 1, 2; \\ & \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{4, 2\}, \{5, 1\}, \\ & \{1, 5\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_6) \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + \lambda_2\underline{\mathbf{E}}). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^1 = 5$.

17.2.3. Символ анизотропии состоит из трех элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 4, \quad m = 1, 2, 3; \\ & \{1, 1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{1, 4, 1\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 2, 2\}, \{2, 3, 1\}, \\ & \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}, \{4, 1, 1\}, \\ & \{1, 1, 4\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_3)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + \lambda_3\underline{\mathbf{E}}). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^2 = 10$.

17.2.4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 3, \quad m = 1, 2, 3, 4; \\ & \{1, 1, 1, 3\}, \{1, 1, 2, 2\}, \{1, 1, 3, 1\}, \{1, 2, 1, 2\}, \{1, 2, 2, 1\}, \{1, 3, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 2\}, \\ & \{2, 1, 2, 1\}, \{2, 2, 1, 1\}, \{3, 1, 1, 1\}, \\ & \{1, 1, 1, 3\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + (\lambda_3 - \lambda_4)\underline{\mathbf{W}}_3\underline{\mathbf{W}}_3 + \lambda_4\underline{\mathbf{E}}). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^3 = 10$.

17.2.5. Символ анизотропии состоит из 5 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 6, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 2, \quad m = 1, 2, 3, 4, 5; \\ & \{1, 1, 1, 1, 2\}, \{1, 1, 1, 2, 1\}, \{1, 1, 2, 1, 1\}, \{1, 2, 1, 1, 1\}, \{2, 1, 1, 1, 1\}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 2\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 = \lambda_6) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_5)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + (\lambda_2 - \lambda_5)\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + \\ & \quad + (\lambda_3 - \lambda_5)\underline{\mathbf{W}}_3\underline{\mathbf{W}}_3 + (\lambda_4 - \lambda_5)\underline{\mathbf{W}}_4\underline{\mathbf{W}}_4 + \lambda_5\underline{\mathbf{E}}). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^4 = 5$.

17.2.6. Символ анизотропии состоит из 6 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = 1, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 1, \quad m = \overline{1, 6}; \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1\} \Leftrightarrow (\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\underline{\mathbf{A}} = \lambda_1\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + \lambda_2\underline{\mathbf{W}}_2\underline{\mathbf{W}}_2 + \lambda_3\underline{\mathbf{W}}_3\underline{\mathbf{W}}_3 + \lambda_4\underline{\mathbf{W}}_4\underline{\mathbf{W}}_4 + \lambda_5\underline{\mathbf{W}}_5\underline{\mathbf{W}}_5 + \lambda_6\underline{\mathbf{W}}_6\underline{\mathbf{W}}_6). \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_5^5 = 1$.

В итоге число всех материалов равно $\sum_{k=0}^5 C_5^k = 2^5 = 32$.

18. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ТЕНЗОРЫ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ СИНГОНИЙ

Следует отметить, что более подробная классификация анизотропных материалов должна производиться по виду собственных тензоров (или по виду матрицы, определяющей эти тензоры) тензора модулей упругости.

Для материалов, например, с символами анизотропии $\{6\}$, $\{1, 5\}$ и $\{5, 1\}$ тензор модулей упругости представляется соответственно в виде

$$\underline{\mathbf{A}} = \lambda\underline{\mathbf{E}}, \quad (18.1)$$

$$\underline{\mathbf{A}} = (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{\mathbf{W}}_1\underline{\mathbf{W}}_1 + \lambda_2\underline{\mathbf{E}}, \quad (18.2)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}} - (\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6. \quad (18.3)$$

Здесь $\underline{\underline{\mathbf{E}}} = (1/2)(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)})$ — единичный тензор четвертого ранга.

Будем считать, что $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6$. Так как выбор системы координат произволен, то будем считать, что она является главной для тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$. Обозначим главные значения тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ через α, β, γ . Тогда, обозначая через $\underline{\underline{\mathbf{e}}}_i^*$, $i = 1, 2, 3$ главный базис тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$, очевидно, будем иметь

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \alpha \underline{\underline{\mathbf{e}}}_1^* + \beta \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2^* + \gamma \underline{\underline{\mathbf{e}}}_3^*, \quad (18.4)$$

где

$$(\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = 1) \Rightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1). \quad (18.5)$$

Видно, что в силу (18.5) материалы (18.2) и (18.3) характеризуются четырьмя параметрами: двумя собственными значениями тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и двумя главными значениями тензора $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$. Отличие (18.2) от (18.3) в том, что в (18.3) перед $(\lambda_1 - \lambda_6)$ стоит знак минус.

Если взять тензоры $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ и $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_6$ шаровыми, т. е. положить

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \quad (\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \underline{\underline{\mathbf{E}}}), \quad (18.6)$$

то (18.2) и (18.3) примут вид

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (18.7)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}}. \quad (18.8)$$

Материалы (18.7) и (18.8) изотропны в том смысле, что компоненты A_{ijkl} , $i, j = 1, 2, 3$ (A_{mn} , $m, n = \overline{1, 6}$) тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ не зависят от выбора ортогональной системы координат, но определяются двумя собственными значениями (модулями) и тензоры напряжений и деформаций не пропорциональны:

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) I_1(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6) I_1(\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (18.9)$$

поэтому с механической точки зрения эти материалы нельзя считать изотропными. Изотропным является материал с символом анизотропии (структуры) $\{6\}$. В этом случае, очевидно, имеем

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \otimes^2 \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \lambda \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (18.10)$$

Если в (18.7) обозначить $(\lambda_1 - \lambda_2)/3 = \lambda$, $\lambda_2 = 2\mu$, то придем к традиционной записи тензора модулей упругости «изотропного» материала.

Материалы (18.7) и (18.8) часто принимают за один, что проявляется в вопросе о пределах значений коэффициента Пуассона ν . Но это качественно различные материалы, принадлежащие подклассам с разными структурными символами: $\{1, 5\}$ и $\{5, 1\}$. Найдем для материалов (18.7) и (18.8) коэффициенты Пуассона. В этой связи выпишем обратные к (18.7) и (18.8) тензоры. Учитывая

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} = \lambda_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\underline{\mathbf{E}}},$$

обратные законы Гука для этих материалов можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) I_1(\underline{\underline{\mathbf{P}}}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \lambda_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{P}}}, \\ \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} &= \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbf{P}}} = \lambda_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{P}}} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) I_1(\underline{\underline{\mathbf{P}}}) \underline{\underline{\mathbf{E}}}. \end{aligned} \quad (18.11)$$

Пусть $P_{ij} = P_{11} \delta_{1i} \delta_{1j}$ $I_1(\underline{\underline{\mathbf{P}}}) = P_{11}$. Тогда из (18.11) получим

$$\varepsilon_{ij} = \left[\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \delta_{ij} + \lambda_2^{-1} \delta_{1i} \delta_{1j} \right] P_{11}, \quad (18.12)$$

$$\varepsilon_{ij} = \left[\lambda_1^{-1} \delta_{ij} - \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \delta_{1i} \delta_{1j} \right] P_{11}. \quad (18.13)$$

На основании (18.12) и (18.13) с помощью простых вычислений получим соответственно следующие выражения для коэффициентов Пуассона:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_1 + \lambda_2} > 0, \quad (18.14)$$

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_6}{\lambda_1 + 2\lambda_6} < 0. \quad (18.15)$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 > \lambda_6 > 0$, то из (18.14) и (18.15) видно, что для материалов (18.7) и (18.8) коэффициенты Пуассона соответственно лежат в пределах

$$0 < \nu < 1/2, \quad -1 < \nu < 0.$$

Таким образом, материал (18.7) — традиционный «изотропный», и для него коэффициент Пуассона находится в пределах $0 < \nu < 1/2$. Материал (18.8) качественно другой: при растяжении стержня в продольном направлении он увеличивается в поперечных размерах. Для него коэффициент Пуассона находится в пределах $-1 < \nu < 0$.

18.1. «Изотропный» классический материал. В этом случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} A_{11} &= \lambda + 2\mu, & A_{12} &= \lambda, \\ A_{44} &= A_{11} - A_{12} = 2\mu. \end{aligned} \quad (18.16)$$

В силу (18.16) характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ представится в виде

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} - \mu \end{vmatrix} (A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu) = 0. \quad (18.17)$$

Решая (18.17), получим

$$\mu_1 = A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{11} - A_{12}. \quad (18.18)$$

Легко проверить, что собственные тензоры произвольного изотропного тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ с матрицей (18.16), соответствующие собственным значениям (18.18), имеют вид

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad (18.19)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{W}}}_k = W_{k,1}\mathbf{e}_1 + W_{k,2}\mathbf{e}_2 - (W_{k,1} + W_{k,2})\mathbf{e}_3 + W_{k,4}\mathbf{e}_4 + W_{k,5}\mathbf{e}_5 + W_{k,6}\mathbf{e}_6, \quad k = \overline{2, 6}.$$

Из (18.19) видно, что $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_1$ — шаровой тензор, а $\underline{\underline{\mathbf{W}}}_k$, $k = \overline{2, 6}$ — девиаторы. Если $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ — тензор модулей упругости, то в силу закона Гука девиаторы принимают соответствующий вид (см. ниже).

Собственные значения и собственные тензоры тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ легко находятся, если закон Гука записать в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{11}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{12}\varepsilon_3, & P_2 &= A_{12}\varepsilon_1 + A_{11}\varepsilon_2 + A_{12}\varepsilon_3, \\ P_3 &= A_{12}\varepsilon_1 + A_{12}\varepsilon_2 + A_{11}\varepsilon_3, & P_4 &= A_{44}\varepsilon_4, & P_5 &= A_{44}\varepsilon_5, & P_6 &= A_{44}\varepsilon_6 \end{aligned} \quad (18.20)$$

и сравнить с законом Гука, представленным в форме

$$\underline{\underline{\mathbf{P}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{W}}}_\alpha = \mu_\alpha \underline{\underline{\mathbf{E}}} \otimes \underline{\underline{\mathbf{W}}}_\alpha \left(\sum_{m=1}^6 P_m W_{\alpha,m} = \mu_\alpha \sum_{m=1}^6 \varepsilon_m W_{\alpha,m} \right), \quad \alpha = \overline{1, 6}. \quad (18.21)$$

На основании сравнения последних трех соотношений (18.20) с последними тремя соотношениями (18.21) легко получим

$$\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 = \mathbf{e}_4, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 = \mathbf{e}_5, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \mathbf{e}_6. \quad (18.22)$$

Далее нетрудно заметить, что из первых трех соотношений (18.20) имеем

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= (A_{11} + 2A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ P_1 - P_2 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ P_1 + P_2 - 2P_3 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (18.23)$$

Сравнивая (18.23) с первыми тремя соотношениями (18.21), получим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{11} - A_{12}, \\ \underline{\mathbf{W}}_1 &= \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \quad \underline{\mathbf{W}}_3 = \frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3). \end{aligned}$$

Очевидно, тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет представление

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + \mu_2 \sum_{m=2}^6 \underline{\mathbf{W}}_m \underline{\mathbf{W}}_m = (\mu_1 - \mu_2) \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + \mu_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \sum_{m=1}^6 \underline{\mathbf{W}}_m \underline{\mathbf{W}}_m.$$

Классические «изотропные» материалы могут быть вида {1,5} и {5,1}.

18.2. Кубическая сингония (3 независимых компоненты). В этом случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{pmatrix}. \quad (18.24)$$

В силу (18.24) характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ представится в виде

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{12} \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} - \mu \end{vmatrix} (A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu)(A_{44} - \mu) = 0. \quad (18.25)$$

Решая (18.25), получим

$$\mu_1 = A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{11} - A_{12}, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}.$$

Очевидно, соответствующие собственным значениям $\mu_1 = A_{11} + 2A_{12}$ и $\mu_2 = \mu_3 = A_{11} - A_{12}$ собственные тензоры аналогично изотропному случаю (18.19) имеют вид

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{W}}_1 &= \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{W}}_k &= W_{k,1}\mathbf{e}_1 + W_{k,2}\mathbf{e}_2 - (W_{k,1} + W_{k,2})\mathbf{e}_3 + W_{k,4}\mathbf{e}_4 + W_{k,5}\mathbf{e}_5 + W_{k,6}\mathbf{e}_6, \quad k = 2, 3. \end{aligned} \quad (18.26)$$

Из (18.26) видно, что $\underline{\mathbf{W}}_1$ — шаровой тензор, а $\underline{\mathbf{W}}_k$, $k = 2, 6$ — девиаторы.

Составляя системы уравнений для нахождения собственных тензоров $\underline{\mathbf{W}}_k$, $k = 4, 5, 6$, соответствующих собственным значениям μ_k , $k = 4, 5, 6$ и разрешая их (так как $\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}$, то все три системы будут одинаковыми), получим

$$\underline{\mathbf{W}}_k = W_{k,4}\mathbf{e}_4 + W_{k,5}\mathbf{e}_5 + W_{k,6}\mathbf{e}_6, \quad k = 4, 5, 6. \quad (18.27)$$

Следует отметить, что входящие в (18.26) и (18.27) компоненты $W_{k,l}$, $k = 2, 6$, $l = 1, 6$ и $W_{k,l}$, $k, l = 4, 5, 6$ соответственно надо определить так, что система собственных тензоров была ортонормальной. С целью нахождения этих компонент лучше закон Гука записать в аналогичном (18.22) виде (см. ниже).

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае закон Гука имеет вид (18.20), из которого в силу (18.21) аналогично (18.22) находим

$$\mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}, \quad \underline{\mathbf{W}}_4 = \mathbf{e}_4, \quad \underline{\mathbf{W}}_5 = \mathbf{e}_5, \quad \underline{\mathbf{W}}_6 = \mathbf{e}_6, \quad (18.28)$$

а также аналогично (18.23) получим

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= (A_{11} + 2A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \\ P_1 - P_2 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \\ P_1 + P_2 - 2P_3 &= (A_{11} - A_{12})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3). \end{aligned} \quad (18.29)$$

Сравнивая (18.29) с первыми тремя соотношениями (18.21), получим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{11} - A_{12}, \\ \underline{\mathbf{W}}_1 &= \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\mathbf{W}}_3 = \frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 - 2\underline{\mathbf{e}}_3). \end{aligned}$$

Очевидно, тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет представление

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \mu_1 \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + \mu_2 (\underline{\mathbf{W}}_2 \underline{\mathbf{W}}_2 + \underline{\mathbf{W}}_3 \underline{\mathbf{W}}_3) + \mu_4 (\underline{\mathbf{W}}_4 \underline{\mathbf{W}}_4 + \underline{\mathbf{W}}_5 \underline{\mathbf{W}}_5 + \underline{\mathbf{W}}_6 \underline{\mathbf{W}}_6) = \\ &= (\mu_1 - \mu_4) \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + (\mu_2 - \mu_4) (\underline{\mathbf{W}}_2 \underline{\mathbf{W}}_2 + \underline{\mathbf{W}}_3 \underline{\mathbf{W}}_3) + \mu_4 \underline{\underline{\mathbf{E}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \sum_{m=1}^6 \underline{\mathbf{W}}_m \underline{\mathbf{W}}_m. \end{aligned}$$

Материалы кубической сингонии могут быть следующих видов: {1,2,3}, {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1}, {3,1,2}, {3,2,1}.

18.3. Трансверсальная изотропия (гексагональная сингония, 5 независимых компонент).

В рассматриваемом случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} \end{pmatrix}, \quad A_{44} = A_{11} - A_{12},$$

а тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет выражение

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= A_{11} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + (A_{11} - A_{12}) \underline{\underline{\mathbf{E}}} + A_{13} (\underline{\mathbf{I}} \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{I}}) + A_{33} \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_3 + A_{55} (\underline{\mathbf{e}}_5 \underline{\mathbf{e}}_5 + \underline{\mathbf{e}}_6 \underline{\mathbf{e}}_6), \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} &= \underline{\underline{\mathbf{II}}}, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}) = \underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_4 \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\mathbf{I}} = \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2. \end{aligned}$$

Собственные значения определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} (A_{11} + A_{12} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} (A_{11} + A_{12} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_3 &= \mu_4 = A_{11} - A_{12}, \quad \mu_5 = \mu_6 = A_{55}. \end{aligned}$$

Собственные тензоры представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{W}}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \underline{\mathbf{I}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\mathbf{W}}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \underline{\mathbf{I}} + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\mathbf{W}}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\mathbf{W}}_4 = \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\mathbf{W}}_5 = \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\mathbf{W}}_6 = \underline{\mathbf{e}}_6, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11} + A_{12} - A_{33}}, \end{aligned} \quad (18.30)$$

а тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ с их помощью запишется в виде

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\mathbf{W}}_1 \underline{\mathbf{W}}_1 + \mu_2 \underline{\mathbf{W}}_2 \underline{\mathbf{W}}_2 + \mu_3 (\underline{\mathbf{W}}_3 \underline{\mathbf{W}}_3 + \underline{\mathbf{W}}_4 \underline{\mathbf{W}}_4) + \mu_5 (\underline{\mathbf{W}}_5 \underline{\mathbf{W}}_5 + \underline{\mathbf{W}}_6 \underline{\mathbf{W}}_6).$$

Трансверсально-изотропные материалы (материалы гексагональной сингонии) могут быть следующих видов: {1,1,2,2}, {1,2,1,2}, {1,2,2,1}, {2,1,1,2}, {2,1,2,1}, {2,2,1,1}.

18.4. Тригональная (ромбоэдрическая) сингония (6 независимых компонент). В данном случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & -A_{15} & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & \sqrt{2}A_{15} \\ A_{15} & -A_{15} & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{15} & 0 & A_{55} \end{pmatrix}, \quad A_{44} = A_{11} - A_{12}.$$

Нетрудно заметить, что характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ представится в виде

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \mu \underline{\underline{\mathbf{E}}}) &= \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{13} & 0 & -A_{15} & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} - \mu & 0 & \sqrt{2}A_{15} \\ A_{15} & -A_{15} & 0 & 0 & A_{55} - \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{15} & 0 & A_{55} - \mu \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & A_{15} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{13} & -A_{15} & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} - \mu & 0 & 0 & 0 \\ A_{15} & -A_{15} & 0 & A_{55} - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} - \mu & \sqrt{2}A_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}A_{15} & A_{44} - \mu \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & A_{15} \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{13} & -A_{15} \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} - \mu & 0 \\ A_{15} & -A_{15} & 0 & A_{55} - \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{55} - \mu & \sqrt{2}A_{15} \\ \sqrt{2}A_{15} & A_{44} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad A_{44} = A_{11} - A_{12}. \end{aligned}$$

Собственные значения определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_3 &= \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12} + A_{55} - \sqrt{(A_{11} - A_{12} - A_{55})^2 + 8A_{15}^2}), \\ \mu_4 &= \frac{1}{2}(A_{11} - A_{12} + A_{55} + \sqrt{(A_{11} - A_{12} - A_{55})^2 + 8A_{15}^2}), \\ \mu_5 &= \mu_3, \quad \mu_6 = \mu_4. \end{aligned}$$

Собственные тензоры представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \underline{\mathbf{I}} + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \underline{\mathbf{I}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \beta (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \beta \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \beta (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \beta \underline{\mathbf{e}}_5, \\ \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 &= -\sin \beta \underline{\mathbf{e}}_4 + \cos \beta \underline{\mathbf{e}}_6, \quad \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 = \cos \beta \underline{\mathbf{e}}_4 + \sin \beta \underline{\mathbf{e}}_6, \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11} + A_{12} - A_{33}}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\sqrt{2}A_{15}}{A_{11} - A_{12} - A_{55}}. \end{aligned}$$

а тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ будет иметь следующее выражение:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \mu_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 + \mu_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_2 + \mu_3 (\underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_3 + \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_5) + \mu_4 (\underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_4 + \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_6).$$

Материалы тригональной сингонии могут быть следующих видов: $\{1,1,2,2\}$, $\{1,2,1,2\}$, $\{1,2,2,1\}$, $\{2,1,1,2\}$, $\{2,1,2,1\}$, $\{2,2,1,1\}$.

18.5. Тетрагональная сингония (6 независимых компонент). В этом случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{A}}$ имеет форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Собственные значения определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} - \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}(A_{11} + A_{12} + A_{33} + \sqrt{(A_{11} + A_{12} - A_{33})^2 + 8A_{13}^2}), \\ \mu_3 &= A_{11} - A_{12}, \quad \mu_4 = \mu_5 = A_{44}, \quad \mu_6 = A_{66}. \end{aligned}$$

Собственные тензоры аналогично (18.30) представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{W}}_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \underline{\mathbf{I}} + \cos \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\underline{W}}_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha (\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2) + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \underline{\mathbf{I}} + \sin \alpha \underline{\mathbf{e}}_3, \\ \underline{\underline{W}}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\underline{W}}_4 = \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\underline{W}}_5 = \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\underline{W}}_6 = \underline{\mathbf{e}}_6, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\sqrt{2}A_{13}}{A_{11} + A_{12} - A_{33}}, \end{aligned}$$

а для тензора $\underline{\underline{A}}$ получим выражение

$$\underline{\underline{A}} = \mu_1 \underline{\underline{W}}_1 \underline{\underline{W}}_1 + \mu_2 \underline{\underline{W}}_2 \underline{\underline{W}}_2 + \mu_3 \underline{\underline{W}}_3 \underline{\underline{W}}_3 + \mu_4 (\underline{\underline{W}}_4 \underline{\underline{W}}_4 + \underline{\underline{W}}_5 \underline{\underline{W}}_5) + \mu_6 \underline{\underline{W}}_6 \underline{\underline{W}}_6.$$

Материалы тетрагональной сингонии могут быть следующих видов: $\{1,1,1,1,2\}$, $\{1,1,1,2,1\}$, $\{1,1,2,1,1\}$, $\{1,2,1,1,1\}$, $\{2,1,1,1,1\}$.

18.6. Ромбическая сингония (ортотропия, 9 независимых компонент). В данном случае матрица компонент тензора модулей упругости $\underline{\underline{A}}$ имеет форму

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O & C \end{pmatrix}, \quad (18.31)$$

где введены следующие обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Тензор $\underline{\underline{A}}$ можно записать в виде

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{\alpha=1}^6 A_{\alpha\alpha} \underline{\mathbf{e}}_\alpha \underline{\mathbf{e}}_\alpha + A_{12} (\underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_1) + A_{23} (\underline{\mathbf{e}}_2 \underline{\mathbf{e}}_3 + \underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_2) + A_{31} (\underline{\mathbf{e}}_3 \underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_1 \underline{\mathbf{e}}_3).$$

Характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{A}}$ в силу (18.31) имеет форму

$$\det(\underline{\underline{A}} - \mu \underline{\underline{E}}) = \det(B - \mu E) \det(C - \mu E) = 0,$$

где E — трехмерная единичная матрица.

Следует отметить, что из положительной определенности тензора $\underline{\underline{A}}$ следует положительная определенность матриц B и C , т. е. положительность их характеристических корней. Обозначая через μ_k , $k = 1, 2, 3$ характеристические корни матрицы B , которые можно найти с помощью

формул Кардано, а через $\mu_\alpha = A_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 4, 5, 6$ — характеристические корни матрицы C , тензор $\underline{\underline{A}}$ можно представить следующим образом:

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{\alpha=1}^3 \mu_\alpha \underline{\mathbf{W}}_\alpha \underline{\mathbf{W}}_\alpha + \sum_{\beta=4}^6 A_{\beta\beta} \underline{\mathbf{e}}_\beta \underline{\mathbf{e}}_\beta. \quad (18.32)$$

Заметим, что (18.32) выписаны при условии, что характеристические корни матрицы B простые. Если все собственные значения тензора $\underline{\underline{A}}$ различны, то имеем материал ромбической сингонии вида $\{1,1,1,1,1,1\}$. Случаи кратных корней заслуживают особого внимания. На этом здесь останавливаться не будем.

18.7. Моноклиная сингония. В этом случае материал имеет двукратную ось симметрии. Приведенная ниже матрица соответствует тому случаю, когда в качестве оси симметрии рассматривается ось ox_3 ($x'_1 = -x_1$, $x'_2 = -x_2$, $x'_3 = x_3$). В матрице имеется 13 независимых элементов, как у В. Новацкого [46] и К. Ф. Черных [77], а у Н. И. Остроаблина [49] — 12 элементов ($A_{56} = 0$).

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{13} & A_{24} & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & A_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & O \\ O^T & C \end{pmatrix},$$

где введены следующие обозначения:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} A_{55} & A_{56} \\ A_{56} & A_{66} \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{A}}$ представится в виде

$$\det(\underline{\underline{A}} - \mu \underline{\underline{E}}) = \det(B - \mu E_4) \det(C - \mu E_2) = \begin{vmatrix} A_{11} - \mu & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{12} & A_{11} - \mu & A_{13} & A_{24} \\ A_{13} & A_{13} & A_{33} - \mu & A_{34} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} - \mu \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{55} - \mu & A_{56} \\ A_{56} & A_{66} - \mu \end{vmatrix} = 0, \quad (18.33)$$

где E_4 — единичная матрица четвертого порядка, а E_2 — единичная матрица второго порядка. Очевидно, из (18.33) получим следующие алгебраические уравнения четвертой и второй степени соответственно:

$$\det(B - \mu E_4) = 0, \quad \det(C - \mu E_2) = 0. \quad (18.34)$$

В силу положительной определенности тензора $\underline{\underline{A}}$ корни уравнения (18.34) положительны. Считая, что уравнения (18.34) имеют простые корни, и обозначая корни первого уравнения (18.34) через μ_k , $k = 1, 2, 3, 4$, корни второго уравнения — через μ_k , $k = 5, 6$, а соответствующие этим корням собственные тензоры — через $\underline{\mathbf{W}}_k$, $k = \overline{1, 6}$, тензор $\underline{\underline{A}}$ можно представить в форме

$$\underline{\underline{A}} = \sum_{\alpha=1}^6 \mu_\alpha \underline{\mathbf{W}}_\alpha \underline{\mathbf{W}}_\alpha.$$

Если все μ_k , $k = \overline{1, 6}$ различны, то материал моноклиной сингонии имеет вид $\{1,1,1,1,1,1\}$.

18.8. Триклиная сингония. В этом случае матрица A тензора $\underline{\underline{A}}$ имеет общий вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{14} & A_{24} & A_{34} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{15} & A_{25} & A_{35} & A_{45} & A_{55} & A_{56} \\ A_{16} & A_{26} & A_{36} & A_{46} & A_{56} & A_{66} \end{pmatrix}.$$

По свойствам симметрии материалы триклинной сингонии не отличаются друг от друга, хотя в зависимости от собственных модулей (значений) и состояний (тензоров) они могут быть качественно различными.

19. НЕКОТОРЫЕ МИКРОКОНТИНУАЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

19.1. Микроконтинуальные материалы, символы анизотропии которых состоят из трех элементов. Как было сказано выше, такие материалы могут быть следующих видов:

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 7, \quad m = 1, 2, 3; \\ & \{1, 1, 7\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 4, 4\}, \{1, 5, 3\}, \{1, 6, 2\}, \{1, 7, 1\}, \\ & \{2, 1, 6\}, \{2, 2, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 3\}, \{2, 5, 2\}, \{2, 6, 1\}, \\ & \{3, 1, 5\}, \{3, 2, 4\}, \{3, 3, 3\}, \{3, 4, 2\}, \{3, 5, 1\}, \\ & \{4, 1, 4\}, \{4, 2, 3\}, \{4, 3, 2\}, \{4, 4, 1\}, \\ & \{5, 1, 3\}, \{5, 2, 2\}, \{5, 3, 1\}, \\ & \{6, 1, 2\}, \{6, 2, 1\}, \{7, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно 28.

Рассмотрим традиционный изотропный микрополярный материал. В этом случае, как известно, каждый тензор модулей упругости (тензор IV ранга) характеризуется тремя независимыми компонентами, и, например, тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет представление

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= a_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + a_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + a_3 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)} = \lambda \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + 2\mu \sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + 2\alpha \sum_{\beta=7}^9 \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\beta = \\ &= a_1 \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta + (a_2 + a_3) \sum_{\alpha=1}^6 \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\alpha + (a_2 - a_3) \sum_{\beta=7}^9 \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\beta, \end{aligned} \quad (19.1)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_1 + a_2 + a_3 = \lambda + 2\mu, \quad A_{12} = a_1 = \lambda, \\ A_{44} &= A_{11} - A_{12} = a_2 + a_3 = 2\mu, \quad A_{77} = a_2 - a_3 = 2\alpha. \end{aligned}$$

В силу (19.1) матрица A компонент тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ представляется в форме

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{12} & A_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{77} \end{pmatrix}, \quad (19.2)$$

а характеристическое уравнение в силу (19.2) имеет вид

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}) = (A_{11} + 2A_{12} - \lambda)(A_{44} - \lambda)^5(A_{77} - \lambda)^3 = 0. \quad (19.3)$$

Из (19.3) видно, что характеристическое уравнение имеет один простой корень, один пятикратный корень и один трехкратный корень. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= A_{11} + 2A_{12} = 3\lambda + 2\mu, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = A_{44} = A_{11} - A_{12} = 2\mu, \\ \lambda_7 &= \lambda_8 = \lambda_9 = A_{77} = 2\alpha. \end{aligned}$$

Собственные значения и собственные тензоры тензора модулей упругости $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ легко находятся, если закон Гука записать в виде

$$\begin{aligned} P_1 &= A_{11}\gamma_1 + A_{12}\gamma_2 + A_{12}\gamma_3, \quad P_2 = A_{12}\gamma_1 + A_{11}\gamma_2 + A_{12}\gamma_3, \\ P_3 &= A_{12}\gamma_1 + A_{12}\gamma_2 + A_{11}\gamma_3, \quad P_4 = A_{44}\gamma_4, \quad P_5 = A_{44}\gamma_5, \quad P_6 = A_{44}\gamma_6, \\ P_7 &= A_{77}\gamma_7, \quad P_8 = A_{77}\gamma_8, \quad P_9 = A_{77}\gamma_9 \end{aligned} \quad (19.4)$$

и сравнить с законом Гука, представленным в форме

$$\underline{\mathbf{P}} \otimes \underline{\mathbf{u}}_\alpha = \mu_\alpha \underline{\boldsymbol{\gamma}} \otimes \underline{\mathbf{u}}_\alpha \left(\sum_{m=1}^9 P_m u_{\alpha,m} = \mu_\alpha \sum_{m=1}^9 \gamma_m u_{\alpha,m} \right), \quad \alpha = \overline{1,9}. \quad (19.5)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае для тензоров моментных напряжений и изгиба кручения имеем аналогичные (19.4) и (19.5) соотношения. С целью сокращения письма их не выписываем.

На основании сравнения последних шести соотношений (19.4) с последними шестью соотношениями (19.5) легко получим

$$\begin{aligned} \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = A_{44}, \quad \underline{\mathbf{u}}_4 = \underline{\mathbf{e}}_4, \quad \underline{\mathbf{u}}_5 = \underline{\mathbf{e}}_5, \quad \underline{\mathbf{u}}_6 = \underline{\mathbf{e}}_6, \\ \mu_7 = \mu_8 = \mu_9 = A_{77}, \quad \underline{\mathbf{u}}_7 = \underline{\mathbf{e}}_7, \quad \underline{\mathbf{u}}_8 = \underline{\mathbf{e}}_8, \quad \underline{\mathbf{u}}_9 = \underline{\mathbf{e}}_9. \end{aligned}$$

Далее нетрудно заметить, что из первых трех соотношений (19.4) имеем

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= (A_{11} + 2A_{12})(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \\ P_1 - P_2 &= (A_{11} - A_{12})(\gamma_1 - \gamma_2), \\ P_1 + P_2 - 2P_3 &= (A_{11} - A_{12})(\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3). \end{aligned} \quad (19.6)$$

Сравнивая (19.6) с первыми тремя соотношениями (19.5), получим

$$\begin{aligned} \mu_1 &= A_{11} + 2A_{12}, \quad \mu_2 = \mu_3 = A_{44} = A_{11} - A_{12}, \\ \underline{\mathbf{u}}_1 &= \frac{\pm\sqrt{3}}{3}(\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 + \underline{\mathbf{e}}_3) = \frac{\pm\sqrt{3}}{3}\underline{\mathbf{E}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_2 &= \frac{\pm\sqrt{2}}{2}(\underline{\mathbf{e}}_1 - \underline{\mathbf{e}}_2), \quad \underline{\mathbf{u}}_3 = \frac{\pm\sqrt{6}}{6}(\underline{\mathbf{e}}_1 + \underline{\mathbf{e}}_2 - 2\underline{\mathbf{e}}_3). \end{aligned}$$

Очевидно, тензор $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет представление

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \lambda_1 \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \sum_{m=2}^6 \underline{\mathbf{u}}_m \underline{\mathbf{u}}_m + \lambda_7 \sum_{m=7}^9 \underline{\mathbf{u}}_m \underline{\mathbf{u}}_m = \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}} + (\lambda_7 - \lambda_2) \sum_{m=7}^9 \underline{\mathbf{u}}_m \underline{\mathbf{u}}_m = \\ &= \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + (\lambda_7 - \lambda_2) \sum_{m=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_m, \quad \underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} = \sum_{m=1}^9 \underline{\mathbf{u}}_m \underline{\mathbf{u}}_m. \end{aligned} \quad (19.7)$$

Нетрудно заметить, что традиционный изотропный материал (19.7) совпадает с материалом структуры {1,5,3}, если $\underline{\mathbf{u}}_1 = \pm\sqrt{3}/3\underline{\mathbf{E}}$ и $\underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{e}}_m$, $m = 7, 8, 9$. В самом деле, учитывая это, а также равенство

$$\sum_{m=7}^9 \underline{\mathbf{e}}_m \underline{\mathbf{e}}_m = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}), \quad (19.8)$$

из (19.7) получим

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}.$$

Далее для материалов {1,5,3} и {5,1,3} подсчитаем коэффициенты Пуассона. В этой связи запишем обратные определяющие соотношения для материалов, обладающих центром симметрии. Имеем

$$\underline{\boldsymbol{\gamma}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \underline{\mathbf{P}}, \quad \underline{\boldsymbol{\varkappa}} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}^{-1} \otimes \underline{\boldsymbol{\mu}}. \quad (19.9)$$

Выпишем представления тензоров $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ и $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}$ для материалов {1,5,3} и {5,1,3}. Имеем

$$\begin{aligned} \{1,5,3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + (\lambda_7 - \lambda_2)(\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9), \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= (\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\mathbf{u}}_1 \underline{\mathbf{u}}_1 + \lambda_2^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + (\lambda_7^{-1} - \lambda_2^{-1})(\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9); \\ \{5,1,3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\mathbf{u}}_6 \underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1 - \lambda_7)(\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9), \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= \lambda_1^{-1} \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} - (\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\mathbf{u}}_6 \underline{\mathbf{u}}_6 - (\lambda_1^{-1} - \lambda_7^{-1})(\underline{\mathbf{u}}_7 \underline{\mathbf{u}}_7 + \underline{\mathbf{u}}_8 \underline{\mathbf{u}}_8 + \underline{\mathbf{u}}_9 \underline{\mathbf{u}}_9). \end{aligned} \quad (19.10)$$

Следовательно, тензоры $\underline{\mathbf{D}}$ и $\underline{\mathbf{D}}^{-1}$ для материалов $\{1,5,3\}$ и $\{5,1,3\}$ имеют аналогичный (19.10) вид. Их выписывать не будем. Предположим, что

$$\underline{\mathbf{u}}_1 = \underline{\mathbf{u}}_6 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{u}}_m = \underline{\mathbf{e}}_m, \quad m = 7, 8, 9. \quad (19.11)$$

Тогда, учитывая (19.8) и (19.11), из (19.10) получим

$$\begin{aligned} \{1, 5, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= \frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= \frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_2^{-1} + \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_2^{-1} - \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}; \\ \{5, 1, 3\} : \underline{\underline{\mathbf{A}}} &= -\frac{1}{3}(\lambda_1 - \lambda_6) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_7) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}, \\ \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} &= -\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(1)} + \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} + \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(2)} + \frac{1}{2}(\lambda_1^{-1} - \lambda_7^{-1}) \underline{\underline{\mathbf{C}}}_{(3)}. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Если положим $\underline{\mathbf{P}} = P_1 \underline{\mathbf{e}}_1$, то в силу (19.12) и первого соотношения (19.9)

$$\begin{aligned} \{1, 5, 3\} : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} &= P_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = P_1 \left[\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}) \underline{\mathbf{E}} + \lambda_2^{-1} \underline{\mathbf{e}}_1 \right], \\ \gamma_1 &= \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = \frac{(\lambda_2 + 2\lambda_1)P_1}{3\lambda_1\lambda_2}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 = -\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)P_1}{3\lambda_1\lambda_2} < 0, \\ \nu &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2 + 2\lambda_1} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} > 0, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}; \\ \{5, 1, 3\} : \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} &= P_1 \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1} \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = P_1 \left[-\frac{1}{3}(\lambda_1^{-1} - \lambda_6^{-1}) \underline{\mathbf{E}} + \lambda_1^{-1} \underline{\mathbf{e}}_1 \right], \\ \gamma_1 &= \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_1 = \frac{(\lambda_1 + 2\lambda_6)P_1}{3\lambda_1\lambda_6}, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = \underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}} \otimes \underline{\mathbf{e}}_2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_6)P_1}{3\lambda_1\lambda_6} < 0, \\ \nu &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = -\frac{\lambda_1 - \lambda_6}{\lambda_1 + 2\lambda_6} < 0, \quad -1 < \nu < 0. \end{aligned}$$

Аналогичная картина получается из второго соотношения (19.9). Однако случай, когда материал не обладает центром симметрии, заслуживает особого рассмотрения.

19.2. Ортотропный микроконтинуальный материал. В этом случае матрица компонент A тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} & A_{67} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{67} & A_{77} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{88} & A_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{89} & A_{99} \end{pmatrix}. \quad (19.13)$$

Число независимых компонент равно 15.

Характеристическое уравнение тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ в силу (19.13) представляется в виде

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}} - \underline{\underline{\mathbf{E}}}) &= \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{44} - \lambda & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} - \lambda \end{vmatrix} \times \\ &\times \begin{vmatrix} A_{66} - \lambda & A_{67} \\ A_{67} & A_{77} - \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{88} - \lambda & A_{89} \\ A_{89} & A_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (19.14)$$

Из (19.14) следует, что имеет место хотя бы одно из следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_{44} - \lambda & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} A_{66} - \lambda & A_{67} \\ A_{67} & A_{77} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} A_{88} - \lambda & A_{89} \\ A_{89} & A_{99} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (19.15)$$

Первое из (19.15) — кубическое уравнение, которое имеет три положительных корня. Обозначим эти корни через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а соответствующие этим корням собственные тензоры — через $\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2$ и $\underline{\mathbf{u}}_3$.

Собственные значения и соответствующие им собственные тензоры тензора $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \quad \underline{\mathbf{u}}_i = u_{i,1}\mathbf{e}_1 + u_{i,2}\mathbf{e}_2 + u_{i,3}\mathbf{e}_3, \quad i = 1, 2, 3, \\ \lambda_{4,5} = \frac{1}{2}(A_{44} + A_{55}) \pm \frac{1}{2}(A_{44} - A_{55})\frac{1}{\cos 2\alpha}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2A_{45}}{A_{44} - A_{55}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_4 = -\sin \alpha \mathbf{e}_4 + \cos \alpha \mathbf{e}_5, \quad \underline{\mathbf{u}}_5 = \cos \alpha \mathbf{e}_4 + \sin \alpha \mathbf{e}_5; \\ \lambda_{6,7} = \frac{1}{2}(A_{66} + A_{77}) \pm \frac{1}{2}(A_{66} - A_{77})\frac{1}{\cos 2\beta}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2A_{67}}{A_{66} - A_{77}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_6 = -\sin \beta \mathbf{e}_6 + \cos \beta \mathbf{e}_7, \quad \underline{\mathbf{u}}_7 = \cos \beta \mathbf{e}_6 + \sin \beta \mathbf{e}_7; \\ \lambda_{8,9} = \frac{1}{2}(A_{88} + A_{99}) \pm \frac{1}{2}(A_{88} - A_{99})\frac{1}{\cos 2\gamma}, \quad \operatorname{tg} 2\gamma = \frac{2A_{89}}{A_{88} - A_{99}}, \\ \underline{\mathbf{u}}_8 = -\sin \gamma \mathbf{e}_8 + \cos \gamma \mathbf{e}_9, \quad \underline{\mathbf{u}}_9 = \cos \gamma \mathbf{e}_8 + \sin \gamma \mathbf{e}_9. \end{aligned}$$

19.3. Классификация микрополярных линейно упругих анизотропных материалов, не обладающих центром симметрии. В этом случае, как было указано выше, имеет место соотношение (17.1).

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 18, \quad 1 \leq \alpha_i \leq 18 - (k - 1) = 19 - k, \quad i = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq 18.$$

Имеются 18 классов (групп). Каждый класс содержит несколько подклассов (подгрупп). Ниже перечислены все классы при данной классификации. Для каждого класса приводится символ анизотропии. Для некоторых материалов дано представление тензорно-блочной матрицы. Число материалов в каждом классе выражается соответствующим биномиальным коэффициентом.

19.3.1. Символ анизотропии состоит из одного элемента.

$$\{\alpha\}, \quad \alpha = 18, \quad \lambda \equiv \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{18}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^0 = 1$. Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ имеет представление

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \sum_{p=1}^{18} \lambda_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p^T = \lambda \sum_{p=1}^{18} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p^T = \lambda \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

19.3.2. Символ анизотропии состоит из двух элементов.

$$\begin{aligned} \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 17, \quad m = 1, 2, \\ \{1, 17\}, \{2, 16\}, \{3, 15\}, \{4, 14\}, \{5, 13\}, \{6, 12\}, \{7, 11\}, \{8, 10\}, \\ \{9, 9\}, \{10, 8\}, \{11, 7\}, \{12, 6\}, \{13, 5\}, \{14, 4\}, \{15, 3\}, \{16, 2\}, \{17, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^1 = 17$. Тензорно-блочная матрица $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$, соответствующая, например, материалу $\{1, 17\}$ имеет вид

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \lambda_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1^T + \lambda_2 \sum_{p=2}^{18} \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p \underline{\underline{\mathbf{W}}}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_2) \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1 \underline{\underline{\mathbf{W}}}_1^T + \lambda_2 \underline{\underline{\mathbf{E}}}.$$

19.3.3. Символ анизотропии состоит из трех элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 16, \quad m = 1, 2, 3, \\ & \{1, 1, 16\}, \{1, 2, 15\}, \{1, 3, 14\}, \{1, 4, 13\}, \{1, 5, 12\}, \{1, 6, 11\}, \{1, 7, 10\}, \\ & \{1, 8, 9\}, \{1, 9, 8\}, \{1, 10, 7\}, \{1, 11, 6\}, \{1, 12, 5\}, \{1, 13, 4\}, \{1, 14, 3\}, \\ & \{1, 15, 2\}, \{1, 16, 1\}; \{2, 1, 15\}, \{2, 2, 14\}, \{2, 3, 13\}, \{2, 4, 12\}, \{2, 5, 11\}, \\ & \{2, 6, 10\}, \{2, 7, 9\}, \{2, 8, 8\}, \{2, 9, 7\}, \{2, 10, 6\}, \{2, 11, 5\}, \{2, 12, 4\}, \{2, 13, 3\}, \\ & \{2, 14, 2\}, \{2, 15, 1\}; \{3, 1, 14\}, \dots, \{3, 14, 1\}; \dots, \{15, 1, 2\}, \{15, 2, 1\}; \{16, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^2 = 136$. Очевидно, например, для материала $\{1, 1, 16\}$ тензорно-блочная матрица $\underline{\mathbb{M}}$ представляется в форме

$$\underline{\mathbb{M}} = \lambda_1 \underline{\mathbb{W}}_1 \underline{\mathbb{W}}_1^T + \lambda_2 \underline{\mathbb{W}}_2 \underline{\mathbb{W}}_2^T + \lambda_3 \sum_{p=3}^{18} \underline{\mathbb{W}}_p \underline{\mathbb{W}}_p^T = (\lambda_1 - \lambda_3) \underline{\mathbb{W}}_1 \underline{\mathbb{W}}_1^T + (\lambda_2 - \lambda_3) \underline{\mathbb{W}}_2 \underline{\mathbb{W}}_2^T + \lambda_3 \underline{\mathbb{E}}.$$

Далее в связи с тем, что остальные классы анизотропии содержат большое число материалов, не имеет смысла выписывать их. Поэтому ниже для остальных классов укажем символ анизотропии и соответствующее число материалов.

19.3.4. Символ анизотропии состоит из четырех элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 15, \quad m = 1, 2, 3, 4, \\ & \{1, 1, 1, 15\}, \dots, \{15, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^3 = 680$.

19.3.5. Символ анизотропии состоит из 5 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_5\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_5 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 14, \quad m = \overline{1, 5}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 14\}, \dots, \{14, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^4 = 2380$.

19.3.6. Символ анизотропии состоит из 6 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_6 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 13, \quad m = \overline{1, 6}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 13\}, \dots, \{13, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^5 = 6188$.

19.3.7. Символ анизотропии состоит из 7 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_7\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_7 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 12, \quad m = \overline{1, 7}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 12\}, \dots, \{12, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^6 = 12376$.

19.3.8. Символ анизотропии состоит из 8 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_8\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_8 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 11, \quad m = \overline{1, 8}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 11\}, \dots, \{11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^7 = 19448$.

19.3.9. Символ анизотропии состоит из 9 элементов.

$$\begin{aligned} & \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_9\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_9 = 18, \quad 1 \leq \alpha_m \leq 10, \quad m = \overline{1, 9}, \\ & \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10\}, \dots, \{10, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}. \end{aligned}$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^8 = 24310$.

19.3.10. Символ анизотропии состоит из 10 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{10}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 9, m = \overline{1, 10}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 9\}, \dots, \{9, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^9 = 24310$.

19.3.11. Символ анизотропии состоит из 11 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{11}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{11} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 8, m = \overline{1, 11}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 8\}, \dots, \{8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{10} = 19448$.

19.3.12. Символ анизотропии состоит из 12 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{12} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 7, m = \overline{1, 12}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 7\}, \dots, \{7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{11} = 12376$.

19.3.13. Символ анизотропии состоит из 13 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{13}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{13} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 6, m = \overline{1, 13}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6\}, \dots, \{6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{12} = 6188$.

19.3.14. Символ анизотропии состоит из 14 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{14}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{14} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 5, m = \overline{1, 14}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5\}, \dots, \{5, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{13} = 2380$.

19.3.15. Символ анизотропии состоит из 15 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{15}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{15} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 4, m = \overline{1, 15}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4\}, \dots, \{4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{14} = 680$.

19.3.16. Символ анизотропии состоит из 16 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{16}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{16} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 3, m = \overline{1, 16}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3\}, \dots, \{3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{15} = 136$.

19.3.17. Символ анизотропии состоит из 17 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{17}\}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{17} = 18, 1 \leq \alpha_m \leq 2, m = \overline{1, 17}, \\ \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \dots, \{2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{16} = 17$.

19.3.18. Символ анизотропии состоит из 18 элементов.

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{18}\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{18} = 18, \quad \alpha_m = 1, \quad m = \overline{1, 18},$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}.$$

Всего число таких материалов равно $C_{17}^{17} = 1$.

Нетрудно заметить, что общее число всех анизотропных микрополярных линейно упругих не обладающих центром симметрии материалов равно $\sum_{k=0}^{17} C_{17}^k = 2^{17} = 131072$.

Следует заметить, что более подробная классификация анизотропных материалов должна производиться в зависимости от вида собственных тензоров тензорно-блочной матрицы $\underline{\underline{M}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$ или от вида $\underline{\underline{R}} \in \mathbb{R}_4^4(\Omega)$.

ГЛАВА 6

НОВАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ ТОНКОГО ТЕЛА ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

В данной главе рассмотрена эффективная параметризация области тонкого тела с одним малым размером трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , заключающаяся в использовании, в отличие от классических подходов, двух базовых поверхностей, называемых условно внутренней и внешней базовыми поверхностями [32–34, 40–42]. Введены в рассмотрение свойственные предложенным семействам параметризаций геометрические характеристики.

В частности, рассмотрены различные семейства базисов (реперов) и порожденные ими соответствующие семейства параметризаций. Введены в рассмотрение компоненты переноса единичного тензора второго ранга (ЕТВР), а также основные компоненты ЕТВР, посредством которых выражены различные геометрические объекты, сопровождающие рассмотренные в работе семейства параметризаций. С помощью компонент переноса ЕТВР осуществлена связь между различными семействами параметризаций.

Даны представления ЕТВР, единичного тензора четвертого ранга (ЕТЧР), а также изотропных тензоров четвертого ранга при рассматриваемых семействах параметризаций области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Сформулирована фундаментальная теорема для области тонкого тела при ее новой параметризации.

20. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ ТОНКОГО ТЕЛА ТРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА НА ОСНОВЕ ДВУХ БАЗОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим область трехмерного евклидова пространства, ограниченную двумя лицевыми поверхностями $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ и боковой поверхностью Σ (рис. 1).

В дальнейшем условно лицевую поверхность $S^{(-)}$ будем называть внутренней базовой поверхностью, а лицевую поверхность $S^{(+)}$ — внешней базовой поверхностью (рис. 1). Кроме того, поверхность $S^{(-)}$ часто будем называть основной базовой поверхностью, так как при параметризации рассматриваемой области трехмерного евклидова пространства на ней вводятся гауссовы координаты, т. е. сперва осуществляется параметризация поверхности $S^{(-)}$, а потом, принимая $S^{(-)}$ в качестве основной базовой поверхности (базы), производится параметризация области любой эквидистантной от $S^{(-)}$ поверхности, обозначаемой через S (рис. 1).

Введем определения:

Определение 20.1. Область трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , один или два размера которой значительно меньше остальных, называется *тонкой областью*.

Определение 20.2. Тонкая область, имеющая боковую поверхность Σ , называется *незамкнутой* тонкой областью, в противном случае — *замкнутой*.

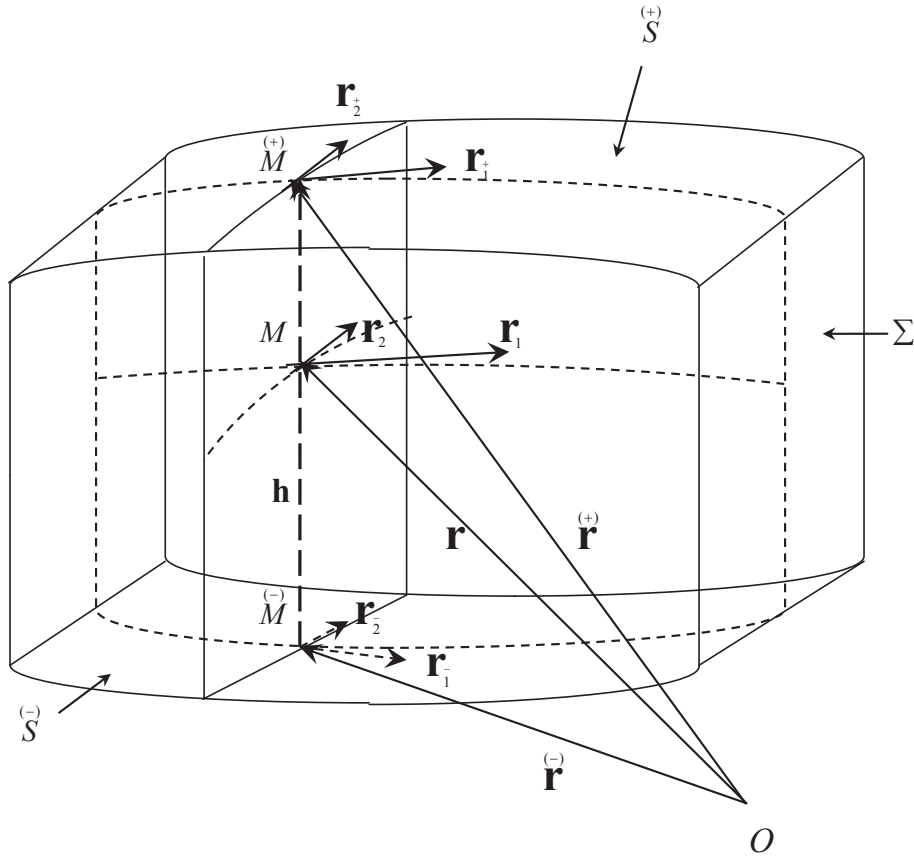


Рис. 1. Новая параметризация области тонкого тела

Определение 20.3. Трехмерное тело, занимающее тонкую область, называется *тонким телом*.

В силу определения 20.3 в дальнейшем, говоря о тонкой области, будем подразумевать тонкое тело и, наоборот, говоря о тонком теле, будем подразумевать тонкую область (область тонкого тела).

Определение 20.4. Область тонкого тела называется *ограниченной*, если существует шар конечного радиуса, который содержит рассматриваемую область тонкого тела.

Определение 20.5. Любая регулярная поверхность называется *базовой поверхностью*, или просто *базой*.

Следует заметить, что при дальнейшем изложении рассматривается тонкое тело, один размер которого меньше остальных. В качестве $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$ используются регулярные поверхности [51], и, кроме того, в случае ограниченной незамкнутой области тонкого тела боковая поверхность Σ считается линейчатой поверхностью.

20.1. Векторное параметрическое уравнение области тонкого тела. Радиус-вектор произвольной точки области тонкого тела представляется в виде (рис.1)

$$\mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{h}(x^1, x^2) = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x^1, x^2) \quad \forall x^3 \in [0, 1],$$

или коротко

$$\mathbf{r}(x', x^3) = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \mathbf{h}(x') = (1 - x^3) \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x') + x^3 \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2) \quad \forall x^3 \in [0, 1], \quad (20.1)$$

где векторные соотношения

$$\overset{(-)}{\mathbf{r}} = \overset{(-)}{\mathbf{r}}(x'), \quad \overset{(+)}{\mathbf{r}} = \overset{(+)}{\mathbf{r}}(x'), \quad x' = (x^1, x^2) \quad (20.2)$$

являются векторными параметрическими уравнениями базовых поверхностей $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ соответственно, $x' = (x^1, x^2)$ — произвольная точка на $\overset{(-)}{S}$, т. е. x^1 и x^2 — криволинейные (гауссовы) координаты¹ на внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$.

Вектор

$$\mathbf{h}(x') = \overset{(+)}{\mathbf{r}}'(x') - \overset{(-)}{\mathbf{r}}'(x'), \quad x' = (x^1, x^2), \quad (20.3)$$

топологически отображающий внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}$ на внешнюю $\overset{(+)}{S}$, вообще говоря, не является перпендикулярным к базовым поверхностям.

Нетрудно увидеть, что (20.1) при $\forall x'$ и $x^3 = 0$ определяет внутреннюю базовую поверхность $\overset{(-)}{S}$ при $\forall x'$ и $x^3 = 1$ — внешнюю базовую поверхность $\overset{(+)}{S}$, а при $\forall x'$ и $x^3 = \text{const}$, где $x^3 \in (0, 1)$ — эквидистантную от базовых $\overset{(-)}{S}$ и $\overset{(+)}{S}$ поверхность S .

Следовательно, соотношение (20.1) не что иное, как векторное параметрическое уравнение области тонкого тела.

Пусть $\overset{(-)}{M} = (x^1, x^2, 0) = x'$ — произвольная точка на внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, т. е. $\overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}$, а $\overset{(+)}{M} = (x^1, x^2, 1)$ — соответствующие ей точки на эквидистантной поверхности S и внешней базовой поверхности $\overset{(+)}{S}$ соответственно², т. е. $\overset{(+)}{M} \in \overset{(+)}{S}$ и $\overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}$.

Обозначая через Q множество точек области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , нетрудно заметить, что

$$Q = \left\{ (\overset{(-)}{M}, z) \in \mathbb{R}^3 : \forall \overset{(-)}{M} \in \overset{(-)}{S}, \forall z \in [0, h], h = |\mathbf{h}|, z = x^3 h, x^3 \in [0, 1] \right\}.$$

20.2. Двухмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации поверхности. Для производных по x^P от соотношений (20.1) и (20.2) в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ введем соответственно обозначения

$$\mathbf{r}_P \equiv \partial_P \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^P}, \quad \mathbf{r}_P^* = \frac{\partial \overset{(*)}{\mathbf{r}}}{\partial x^P}, \quad * \in \{-, +\}. \quad (20.4)$$

Пары векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в точках $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, следовательно, образуют двумерные ковариантные поверхностные базисы, а $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ — двумерные ковариантные поверхностные реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации рассматриваемых поверхностей. По этим реперам (базисам), как известно [5, 21, 54], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $\overset{(*)}{M} \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ (базисы $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$). Естественно, ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные им геометрические характеристики.

¹Под x' раз и навсегда подразумеваем произвольную точку базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, имеющую, если противное не будет оговорено, две координаты x^1 и x^2 , т. е. зависимость величин от x' означает их зависимость от x^1 и x^2 . Поэтому с целью сокращения письма в дальнейшем, выписывая соотношения, в которых величины зависят от x' , не будем указывать на то, что $x' = (x^1, x^2)$.

²В дальнейшем, как и выше, применяются обычные правила тензорного исчисления [5, 9–11, 21, 36, 37, 54, 80, 81]. Прописные и строчные латинские индексы пробегают значения 1, 2 и 1, 2, 3 соответственно. Кроме того, в дальнейшем часто применяются краткие записи, подобные, например, $\overset{(*)}{M} \in \overset{(*)}{S}$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ или $\mathbf{r}_{\tilde{p}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, где \emptyset обозначает пустое множество. Первая запись означает: если $*$ $= -$, то $\overset{(*)}{M} \in \overset{(-)}{S}$; если $*$ $= \emptyset$, то $\overset{(*)}{M} \in S$; если $*$ $= +$, то $\overset{(*)}{M} \in \overset{(+)}{S}$. Вторая запись означает, что если, например, $\sim = \emptyset$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_p = g_p^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}}$, если $\sim = +$, $\smile = -$, то $\mathbf{r}_p^+ = g_p^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{q}}$ и т. д. Перебирая все значения, получим все соотношения.

Определяя в произвольных точках поверхностей $S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, реперы (базисы), получим соответствующие семейства реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Таким образом, всякое семейство гауссовых параметров на поверхности $S^{(-)}$ порождает соответствующие семейства реперов (базисов) и, следовательно, параметризаций на поверхностях $S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Введем определения:

Определение 20.6. Множество двумерных ковариантных (контравариантных) реперов $M\mathbf{r}_1^*\mathbf{r}_2^*$ ($M\mathbf{r}^1\mathbf{r}^2$), называется $S^{(*)}$ -семейством ковариантных (контравариантных) реперов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.7. Объединение $S^{(*)}$ -семейств ковариантных и контравариантных реперов называется $S^{(*)}$ -семейством реперов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.8. Множество двумерных ковариантных (контравариантных) базисов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*$ ($\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$) называется $S^{(*)}$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.9. Объединение $S^{(*)}$ -семейств ковариантных и контравариантных базисов называется $S^{(*)}$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.10. Порожденное $S^{(*)}$ -семейством реперов множество параметризаций называется $S^{(*)}$ -семейством параметризаций, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.11. Порожденное $S^{(*)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $S^{(*)}$ -семейством геометрических характеристик, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.12. Компоненты, имеющие векторы, представленные в $S^{(*)}$ -семействе базисов, называются $S^{(*)}$ -семейством компонент, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

20.3. Трехмерные семейства реперов (базисов) и порожденные ими семейства параметризации области. Учитывая в первом соотношении (20.4) выражение радиус-вектора \mathbf{r} (20.1) и вводя обозначение

$$\mathbf{h}_P \equiv \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x^P} \equiv \partial_P \mathbf{h},$$

получим

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_- + x^3 \mathbf{h}_P = (1 - x^3) \mathbf{r}_- + x^3 \mathbf{r}_+^*. \quad (20.5)$$

Дифференцируя (20.1) по x^3 , получим

$$\mathbf{r}_3 \equiv \partial_3 \mathbf{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^3} = \mathbf{h}(x') \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (20.6)$$

На основании (20.6) можно принять, что

$$\mathbf{r}_- = \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_+^* \equiv \partial_3 \mathbf{r} = \mathbf{h}(x') \quad \forall x^3 \in [0, 1]. \quad (20.7)$$

Соотношение (20.7) дает возможность в точках $M \in S^{(*)}$, $* \in \{-, +\}$, определить пространственные ковариантные базисы \mathbf{r}_p^* , $* \in \{-, +\}$. Таким образом, третий базисный вектор пространственных ковариантных базисов в точках $M \in S^{(*)}$, $* \in \{-, \emptyset, +\}$ — один и тот же вектор $\mathbf{h}(x')$.

Ввиду (20.7) соотношения (20.5) и (20.6) можно соединить и представить в виде

$$\mathbf{r}_p(x', x^3) = \mathbf{r}_-^*(x') + x^3 \mathbf{h}_p(x') = (1 - x^3) \mathbf{r}_-^*(x') + x^3 \mathbf{r}_+^*(x'). \quad (20.8)$$

Следовательно, тройки векторов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, определенные в рассматриваемых точках $M \in S$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, образуют трехмерные (пространственные) ковариантные базисы, а $M \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ — трехмерные (пространственные) реперы, порождающие в свою очередь соответствующие им параметризации. По этим реперам (базисам), как известно [5, 21, 54], можно построить соответствующие им контравариантные реперы $M \mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$ (базисы $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$). В самом деле, на основании их определения [5, 21, 54] имеем

$$\mathbf{r}^{\bar{k}} = \frac{1}{2} C^{\bar{k}\bar{p}\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{p}} \times \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (20.9)$$

где $C^{\bar{k}\bar{p}\bar{q}} = (\mathbf{r}^{\bar{k}} \times \mathbf{r}^{\bar{p}}) \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$ — контравариантные компоненты дискриминантных тензоров [5] в рассматриваемых точках $M \in S$, $*$ $\in \{-, \emptyset, +\}$, соответственно.

Введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$g_{\bar{p}\bar{q}} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad g_{\bar{p}}^{\bar{q}} = \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}}, \quad g^{\bar{p}\bar{q}} = \mathbf{r}^{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}}, \quad g_{\bar{q}}^{\bar{p}} = \mathbf{r}^{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.10)$$

В силу (20.8) и (20.10), очевидно, получаем

$$\begin{aligned} g_{p\bar{q}} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_{\bar{q}} = (1 - x^3)g_{p\bar{q}}^- + x^3g_{p\bar{q}}^+, \\ g_{\bar{p}}^{\bar{q}} &= \mathbf{r}_{\bar{p}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{q}} = (1 - x^3)g_{\bar{p}}^{\bar{q}}^- + x^3g_{\bar{p}}^{\bar{q}}^+, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (20.11)$$

Нетрудно заметить, что в силу (20.10) имеем следующую связь между базисными векторами:

$$\mathbf{r}_{\bar{p}} = g_{\bar{p}}^{\bar{q}} \mathbf{r}_{\bar{q}} = g^{\bar{p}\bar{q}} \mathbf{r}^{\bar{q}}, \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.12)$$

сохраняющую силу при жонглировании индексами.

На основании (20.12) нетрудно доказать, что имеют место соотношения

$$g_{\bar{p}}^{\bar{q}} = g_{\bar{p}}^* g_n^{\bar{q}}, \quad \sim, \sim, * \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (20.13)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Не представляет большого труда получить выражение для g_{pq} . В самом деле, по (20.10) и (20.11) имеем

$$\begin{aligned} g_{pq} &= \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}_q = g_{pn}^* g_q^n = (1 - x^3)^2 g_{p\bar{q}}^- + x^3(1 - x^3)(g_{p\bar{q}}^+ + g_{\bar{p}q}^-) + (x^3)^2 g_{\bar{p}q}^+, \\ g_{\bar{p}q}^+ &= g_{\bar{p}m}^- g_q^m, \quad * \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (20.14)$$

Найдем выражения для $\sqrt{g} = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{r}_3$. В силу (20.12) при $\sim = \emptyset$, $\sim \in \{-, +\}$ получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} (\mathbf{r}_I \times \mathbf{r}_J) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} (\mathbf{r}_{\bar{K}} \times \mathbf{r}_{\bar{L}}) \cdot \mathbf{r}_3 = \frac{1}{2} \sqrt{g^{(\sim)}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} = \\ &= \sqrt{g^{(\sim)}} \det(g_{\bar{p}}^{\bar{q}}) = \sqrt{g^{(\sim)}} \det(g_{\bar{p}}^{\bar{Q}}), \end{aligned}$$

т. е.

$$\sqrt{g} = \sqrt{g^{(\sim)}} \det(g_{\bar{p}}^{\bar{Q}}), \quad \det(g_{\bar{p}}^{\bar{q}}) = \det(g_{\bar{p}}^{\bar{Q}}) = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (20.15)$$

где ϵ^{IJ} , ϵ_{KL} — символы Леви-Чивиты, а

$$\sqrt{g^{(\sim)}} = (\mathbf{r}_{\bar{1}} \times \mathbf{r}_{\bar{2}}) \cdot \mathbf{r}_{\bar{3}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad \sqrt{g^{(-)}} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=0}, \quad \sqrt{g^{(+)}} = \sqrt{g} \Big|_{x^3=1}.$$

Из (20.15) в свою очередь имеем

$$\sqrt{g^{(\sim)}} \equiv \sqrt{g^{(\sim)} g^{-1}} = \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} = \det(g_{\bar{p}}^{\bar{Q}}), \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (20.16)$$

Нетрудно заметить, что имеет место более общее соотношение, чем (20.15), а именно

$$\sqrt{g^{(\sim)}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{(\sim)}} \epsilon^{IJ} \epsilon_{KL} g_I^{\bar{K}} g_J^{\bar{L}} = \sqrt{g^{(\sim)}} \det(g_{\bar{p}}^{\bar{Q}}), \quad \sim, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.17)$$

Из (20.17) получаем

$$\det(g_{\tilde{p}}^{\check{Q}}) = \det(g_{\tilde{p}}^{\check{q}}) = \sqrt{g^{(\check{\sim})}g^{(\check{\sim})-1}} = \frac{1}{2}\epsilon^{IJ}\epsilon_{KL}g_{\tilde{I}}^{\check{K}}g_{\tilde{J}}^{\check{L}}, \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.18)$$

В силу (20.18) нетрудно доказать, что, $\check{\sim}, \sim \in \{-, \emptyset, +\}$

$$\check{\vartheta} \equiv \sqrt{g^{(\check{\sim})}g^{(\check{\sim})-1}} = \check{\vartheta}^{-1}, \quad \check{\vartheta} = 1, \quad \check{\sim}, \sim \in \{-, +\}. \quad (20.19)$$

Учитывая (20.18) и (20.19), соотношения (20.16) можно представить в более развернутом виде:

$$\begin{aligned} \check{\vartheta}^{(-)} &= \sqrt{g^{(-)}g^{(-)-1}} = (1-x^3)^2\check{\vartheta}^{(=)} + x^3(1-x^3)\text{tr}(g_{\tilde{I}}^{\tilde{J}}) + (x^3)^2\check{\vartheta}^{(\mp)}, \\ \check{\vartheta}^{(+)} &= \sqrt{g^{(+)}g^{(+)-1}} = (1-x^3)^2\check{\vartheta}^{(\pm)} + x^3(1-x^3)\text{tr}(g_{\tilde{I}}^{\tilde{J}}) + (x^3)^2\check{\vartheta}^{(\pm)}. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Не представляет большого труда найти выражения для \mathbf{r}^k посредством векторов $\mathbf{r}_{\tilde{m}}$ или $\mathbf{r}^{\tilde{m}}$, $\sim \in \{-, +\}$. В самом деле, учитывая в соотношении (20.9) при $\sim = \emptyset$, например, первое равенство (20.12), получаем

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2}C^{kpq}\mathbf{r}_p \times \mathbf{r}_q = \frac{1}{2}C^{kpq}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{m}} \times \mathbf{r}_{\tilde{n}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(-)}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{r}^k = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(-)}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (20.21)$$

где ϵ^{kpq} , ϵ_{lmn} — символы Леви-Чивиты.

Учитывая (20.18) и (20.19), нетрудно доказать, что имеет место более общее соотношение, чем (20.21), а именно

$$\mathbf{r}^{\check{k}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(\check{\sim})}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}\mathbf{r}^{\tilde{l}}, \quad \check{\sim} \in \{-, \emptyset, +\}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (20.22)$$

В силу (20.22) имеем

$$\begin{aligned} g_{\tilde{l}}^{\check{k}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(\check{\sim})}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}, \\ g^{\tilde{k}\check{l}} &= \mathbf{r}^{\check{k}} \cdot \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(\check{\sim})}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}g^{\tilde{s}\check{l}}, \quad \check{\sim} \in \{-, +\}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (20.23)$$

Из (20.23) при $\check{\sim} = \emptyset$ (или на основании (20.20)) получаем

$$\begin{aligned} g_{\tilde{l}}^k &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}_{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(-)}\epsilon^{kpq}\epsilon_{lmn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}, \\ g^{k\tilde{l}} &= \mathbf{r}^k \cdot \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \frac{1}{2}\check{\vartheta}^{(-)}\epsilon^{kpq}\epsilon_{smn}g_p^{\tilde{m}}g_q^{\tilde{n}}g^{\tilde{s}\tilde{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (20.24)$$

Учитывая (20.18), нетрудно доказать, что из первых соотношений (20.23) и (20.24) находим

$$g_{\tilde{K}}^{\check{K}} = \check{\vartheta}^{(\check{\sim})}g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}} = \check{\vartheta}^{(\check{\sim})}g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad g_{\tilde{K}}^{\check{K}} = \check{\vartheta}^{(\check{\sim})}g_{\tilde{I}}^{\tilde{I}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (20.25)$$

Естественно, построенные выше пространственные ковариантные и контравариантные базисы порождают свойственные порожденным порождающими реперами параметризациям геометрические характеристики.

Определяя в каждой точке поверхностей S^* , $* \in \{-, \emptyset, +\}$, пространственные реперы (базисы), получим соответствующие семейства пространственных реперов (базисов), порождающие в свою очередь соответствующие им семейства параметризаций.

Целесообразно ввести следующие определения:

Определение 20.13. Множества пространственных ковариантных (контравариантных) реперов $M\mathbf{r}_1^* \mathbf{r}_2^* \mathbf{r}_3^*$ ($M\mathbf{r}_1^1 \mathbf{r}_2^2 \mathbf{r}_3^3$) называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семействами ковариантных (контравариантных) реперов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.14. Объединение $S_{(g)}^{(*)}$ -семейств ковариантных и контравариантных реперов называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семействами реперов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.15. Множество пространственных ковариантных (контравариантных) базисов $\mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \mathbf{r}_3^*$ ($\mathbf{r}_1^1, \mathbf{r}_2^2, \mathbf{r}_3^3$) называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством ковариантных (контравариантных) базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.16. Объединение $S_{(g)}^{(*)}$ -семейств ковариантных и контравариантных базисов называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.17. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством реперов множество параметризаций называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством параметризаций, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.18. Порожденное $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством базисов множество геометрических характеристик называется $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством геометрических характеристик, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.19. Компоненты векторов, представленные в $S_{(g)}^{(*)}$ -семействе базисов, называются $S_{(g)}^{(*)}$ -семейством компонент, $* \in \{-, \emptyset, +\}$.

Отметим еще раз, что природа каждого построенного $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейства реперов (базисов), $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, такова, что третий базисный вектор $\mathbf{r}_3 = \mathbf{h}(x^1, x^2)$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, в общем случае не является перпендикуляром к соответствующей поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$. Однако в частном случае он может быть перпендикуляром, а также единичным вектором нормали к поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, обозначаемым через \mathbf{n} , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Введем определения:

Определение 20.20. $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейство реперов (базисов) называется *нормальным* $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством реперов (базисов), если третий базисный вектор $\mathbf{r}_3 = \mathbf{h}(x^1, x^2)$ перпендикулярен к соответствующей базовой поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.21. $S_{(g)}^{(\sim)}$ -семейство реперов (базисов) называется *естественным* семейством реперов (базисов), обозначаемым через $S_{(g)}^{(\sim)}$, если третий базисный вектор, обозначаемый через \mathbf{n} , является единичным вектором нормали к соответствующей базовой поверхности S , $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.22. Порожденная (естественным) нормальным $(\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)})$ $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством реперов параметризация называется (*естественным*) *нормальным* $(\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)})$ $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством параметризации, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Следует заметить, что естественные семейства параметризаций довольно подробно рассмотрены в монографии И. Н. Векуа [5].

20.4. Мультипликативные базисы. Для представления при предлагаемой параметризации области тонкого тела тензоров, ранг которых не меньше двух, полезно ввести в рассмотрение мультипликативные базисы¹ [5]. Так как мы в основном будем иметь дело с тензорами, ранг которых не больше четырех, целесообразно ввести мультипликативные базисы, образованные с помощью тензорного умножения двух, трех и четырех базисных векторов из рассмотренного выше различного семейства базисов.

Таким образом, определив $\tilde{S}_{(g)}^{(*)}$ -семейство базисов, $* \in \{-, \emptyset, +\}$, не представляет никакого труда определить указанные выше мультипликативные базисы. В самом деле, введем следующее

Определение 20.23. Тензорные произведения базисных векторов из $\tilde{S}_{(g)}^{(*)}$ -семейств, где $* \in \{-, \emptyset, +\}$, обозначаемые

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot\cdot} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}}, & \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}}^{\cdot\cdot\cdot} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \\ \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{q}}, & \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (20.26)$$

и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются *мультипликативными базисами*.

Следует заметить, что по терминологии, принятой, например, в [54], (20.26) можно называть многоточечными базисами трехмерного евклидова пространства. Первый базис (20.26) — двухточечный базис, а второй и третий базисы (20.26) — трехточечный и четырехточечный базисы соответственно. Следовательно, можно было называть их двухвекторным, трехвекторным и четырехвекторным базисами соответственно.

Из сказанного выше следует, что для представления тензоров n -го ранга аналогично можно рассмотреть n -векторный мультипликативный базис, где $n \geq 2$ — натуральное число, однако на этом мы останавливаться не будем, а в случае необходимости будем им пользоваться. Подробное изложение, касающееся многоточечных (мультипликативных) базисов, заинтересованный читатель найдет в книгах [5, 54].

В качестве примера приведем представление тензоров второго, третьего и четвертого рангов при рассматриваемых параметризациях области тонкого тела трехмерного евклидова пространства. Имеем представления

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}}^{\cdot\cdot\cdot} = P^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \mathbf{C} &= C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}}^{\cdot\cdot\cdot} = C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \\ \mathbf{C} &= C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = C^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{n}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{p}} \otimes \mathbf{r}_{\tilde{q}}, & \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (20.27)$$

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

20.5. Различные семейства символов Кристоффеля. Для нахождения ковариантных производных от тензоров и их компонент нам понадобятся символы Кристоффеля. Естественно, введенное выше каждое семейство базисов порождает свойственное ему семейство символов Кристоффеля, для которого следует вводить соответствующее обозначение. В связи с этим введем следующие определения:

¹В монографии [5] они называются мультипликативными базисными тензорами.

Определение 20.24. Порожденное $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемых через $\Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}}$ и $\Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}}$ соответственно, называются $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семействами символов Кристоффеля первого и второго рода, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.25. Объединение $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейств символов Кристоффеля первого и второго рода называется $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

В рассматриваемом случае математические определения символов Кристоффеля первого и второго рода представляются в виде

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \\ \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} &\equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \partial_q \partial_p \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{p}q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\end{aligned}\quad (20.28)$$

Определение 20.26. Порожденное $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семейством базисов множество символов Кристоффеля первого и второго рода, обозначаемых через $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q,\tilde{l}}$ и $\bar{\Gamma}_{\tilde{p}q}^{\tilde{l}}$ соответственно, называются $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семейством символов Кристоффеля первого и второго рода, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.27. Объединение $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семейств символов Кристоффеля первого и второго рода называется $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Математически $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семейства символов Кристоффеля определяются аналогично соотношениям (20.28) с учетом того, что $\mathbf{r}_{\tilde{z}} = \tilde{\mathbf{n}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Определение 20.28. Множество символов Кристоффеля первого (второго) рода $\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q,\tilde{L}}$ ($\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}}$) называется \tilde{S} -семейством символов Кристоффеля первого (второго) рода, а их объединение — \tilde{S} -семейством символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Математические определения этих семейств символов Кристоффеля представляются в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q,\tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}}, \quad \mathbf{r}_{\tilde{z}} = \mathbf{r}^{\tilde{z}} = \tilde{\mathbf{n}}, \\ \bar{\Gamma}_{\tilde{P}Q}^{\tilde{L}} &\equiv \partial_Q \mathbf{r}_{\tilde{P}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \partial_Q \partial_P \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}} \equiv \mathbf{r}_{\tilde{P}Q} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\end{aligned}\quad (20.29)$$

Следует заметить, что вид применяемых индексов зависит от вида рассматриваемого семейства параметризации. В связи с этим следует различать индексы, применяемые при разных семействах параметризаций.

Введем следующее

Определение 20.29. Индекс, применяемый при $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семействе параметризации, называется (g) -индексом, а индекс, применяемый при $\tilde{S}_{(a)}^{(\sim)}$ -семействе параметризации — (a) -индексом, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

20.6. Деривационные формулы для мультипликативных базисов. Нетрудно вывести деривационные формулы для мультипликативных базисов, зная аналогичные формулы для базисных векторов. В связи с этим сначала выпишем деривационные формулы для $\tilde{S}_{(g)}^{(\sim)}$ -семейства базисных векторов, которые в силу (20.28) примут вид

$$\mathbf{r}_{\tilde{p}q} \equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \Gamma_{\tilde{p}q,\tilde{n}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}} = \Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \mathbf{r}_{,\tilde{q}}^{\tilde{n}} \equiv \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{n}} = -\Gamma_{\tilde{p}q}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{p}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}.\quad (20.30)$$

Теперь выведем деривационные формулы, например, для двухвекторных базисов. С этой целью в первом соотношении (20.26) поднимем, например, индекс \check{n} и продифференцируем его по x^p . Имеем

$$\partial_p \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{n}} = \partial_p \mathbf{r}_{\check{m}} \otimes \mathbf{r}^{\check{n}} + \mathbf{r}_{\check{m}} \otimes \partial_p \mathbf{r}^{\check{n}} = \mathbf{r}_{\check{m}p} \otimes \mathbf{r}^{\check{n}} + \mathbf{r}_{\check{m}} \otimes \mathbf{r}_{,\check{p}}^{\check{n}}, \quad (20.31)$$

$$\sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}.$$

При выводе (20.31) было использовано правило дифференцирования обычного произведения функций, которое имеет место и в рассматриваемом случае. Его можно строго доказать, но на этом мы останавливаться не будем.

Учитывая (20.30) в (20.31), получаем искомое соотношение

$$\partial_p \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{n}} = \mathbf{R}_{\check{q}}^{\check{n}} \Gamma_{\check{m}p}^{\check{q}} - \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{q}} \Gamma_{\check{q}p}^{\check{n}}, \quad \sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.32)$$

Переносим члены из правой части в левую, получим

$$\partial_p \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{n}} - \mathbf{R}_{\check{q}}^{\check{n}} \Gamma_{\check{m}p}^{\check{q}} + \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{q}} \Gamma_{\check{q}p}^{\check{n}} = 0, \quad \sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.33)$$

Левая часть соотношения (20.33) представляет ковариантную производную от мультипликативного (двухвекторного) базиса. Вводя для ковариантной производной, как принято, обозначение ∇_p , соотношение (20.33) представим в виде

$$\nabla_p \mathbf{R}_{\check{m}}^{\check{n}} = 0, \quad \sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (20.34)$$

сохраняющем силу при жонглировании индексами.

Можно заметить, что, переносим члены из левых частей (20.30) в правые и вводя обозначение ∇_p для оператора ковариантной производной, аналогично (20.34) имеем соотношение

$$\nabla_p \mathbf{r}_{\check{m}} = 0, \quad \nabla_p \mathbf{r}^{\check{n}} = 0, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.35)$$

Аналогично (20.34) и (20.35) доказывается справедливость утверждений для n -векторных базисов, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому на этом останавливаться не будем. Эти утверждения можно сформулировать следующим образом:

Утверждение 20.1. *Ковариантная производная от любого мультипликативного базиса равна нулю.*

20.7. Представление единичного тензора второго ранга. Исходя из обычного представления этого тензора [5, 54], на основании (20.12) и (20.13) получаем

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{pq} \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q = g_{p\check{q}} g_{\check{m}}^p g_{\check{n}}^q \mathbf{r}^{\check{m}} \mathbf{r}^{\check{n}} = g_{\check{m}\check{q}} g_{\check{n}}^q \mathbf{r}^{\check{m}} \mathbf{r}^{\check{n}} = g_{\check{m}}^{\check{n}} \mathbf{r}^{\check{m}} \mathbf{r}_{\check{n}},$$

т. е. имеем представление

$$\underline{\mathbf{E}} = g_{\check{m}}^{\check{n}} \mathbf{r}^{\check{m}} \mathbf{r}_{\check{n}}, \quad \sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (20.36)$$

сохраняющее силу при жонглировании¹ немymi индексами.

По (20.36) видно, что элементы введенных выше матриц (20.10) представляют компоненты единичного тензора второго ранга (ЕТВР).

Введем следующие определения:

Определение 20.30. Рассмотренная выше параметризация, характеризующаяся заданием радиус-вектора произвольной точки в виде (20.1), называется *новой параметризацией* области тонкого тела трехмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 . При этом новая параметризация называется *регулярной*, если внутренняя $\overset{(-)}{S}$ и внешняя $\overset{(+)}{S}$ поверхности — регулярные поверхности.

Определение 20.31. Компоненты $g_{\check{p}}^{\check{q}}$, $\sim, \vee \in \{-, \emptyset, +\}$, $\sim \neq \vee$ и получаемые из них жонглированием индексами их образы, называются *компонентами переноса* ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела.

¹Под жонглированием немymi индексами понимается то, что, если один из индексов опускается, то соответствующий ему индекс поднимается, и наоборот.

Определение 20.32. Компоненты $g_{\tilde{p}\tilde{q}}, g_{\tilde{p}}, g_{\tilde{p}\tilde{q}} \sim = - (\sim = +)$, и компоненты переноса $g_{\tilde{p}\tilde{q}}, g_{\tilde{p}}, \sim = +, \smile = - (\sim = -, \smile = +)$, называются *основными компонентами* ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой применяется внутренняя (внешняя) базовая поверхность.

20.8. Представления изотропных тензоров четвертого ранга. Эти тензоры¹ занимают особое место в механике деформируемого твердого тела (МДТТ). Ими пользуются, например, при записи определяющих соотношений в линейной теории упругости для изотропного материала. Поэтому целесообразно иметь их представление и в предлагаемом варианте теории. Нетрудно выписать это представление. В самом деле, при полном сокращении индексов у мультипликативных базисов, составленных из четного числа базисных векторов, при условии, что каждая пара зацепленных индексов принадлежит только одному из (\sim) -семейств индексов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, так что различные пары зацепленных индексов могут принадлежать разным семействам индексов, из мультипликативных базисов получаются изотропные тензоры. Более того, компоненты этих тензоров остаются неизменными не только при ортогональных преобразованиях, но и при замене одних $S_{(\sim)}$ -семейств реперов, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, другими.

Обнаружив такую структуру, очевидно, при полном сокращении индексов у мультипликативного базиса из четырех базисных векторов надо ожидать получения всех изотропных тензоров четвертого ранга. Так как четырехвекторный мультипликативный базис определяется как тензорное произведение четырех базисных векторов, то число его изомеров равно $4! = 24$. Нетрудно показать, что при полном сокращении индексов у всех изомеров указанным выше способом, несводимыми друг к другу окажутся только следующие три:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_I &= \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}} = \mathbf{E}\mathbf{E} = g_{\tilde{m}\tilde{n}}g_{\tilde{p}\tilde{q}}\mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{C}}_{II} &= \mathbf{R}_{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}} = g_{\tilde{m}\tilde{p}}g_{\tilde{n}\tilde{q}}\mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}}, \\ \underline{\underline{C}}_{III} &= \mathbf{R}_{\tilde{n}\tilde{m}\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{m}\tilde{n}\tilde{p}\tilde{q}} = \mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}} = g_{\tilde{m}\tilde{q}}g_{\tilde{n}\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{m}}\mathbf{r}_{\tilde{n}}\mathbf{r}_{\tilde{p}}\mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (20.37)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Нетрудно усмотреть, что если $\underline{\underline{H}}$ — тензор второго ранга, то его внутренние 2-произведения с тензорами (20.37) приводят к тензорам

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}}_I \otimes^2 \underline{\underline{H}} &= \underline{\underline{H}} \otimes^2 \underline{\underline{C}}_I = I_1(\underline{\underline{H}})\mathbf{E}, \quad \underline{\underline{C}}_{II} \otimes^2 \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}} \otimes^2 \underline{\underline{C}}_{II} = \underline{\underline{H}}, \\ \underline{\underline{C}}_{III} \otimes^2 \underline{\underline{H}} &= \underline{\underline{H}} \otimes^2 \underline{\underline{C}}_{III} = \underline{\underline{H}}^T, \end{aligned} \quad (20.38)$$

где $\underline{\underline{H}}^T$ обозначает транспонированный тензор, а $I_1(\underline{\underline{H}})$ — первый инвариант тензора $\underline{\underline{H}}$.

Пусть $\underline{\underline{S}} = (\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T)/2$ — симметричная, а $\underline{\underline{\Omega}} = (\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{H}}^T)/2$ — кососимметричная часть тензора $\underline{\underline{H}}$. Тогда, как легко заметить, в силу (20.38) имеем

$$\frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}_{II} + \underline{\underline{C}}_{III}) \otimes^2 \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{S}}, \quad \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}_{II} - \underline{\underline{C}}_{III}) \otimes^2 \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{\Omega}}. \quad (20.39)$$

Таким образом, тензор четвертого ранга $\underline{\underline{\Delta}} = (\underline{\underline{C}}_{II} + \underline{\underline{C}}_{III})/2$ при двукратном свертывании с тензором $\underline{\underline{H}}$ выделяет симметричную, а тензор $\underline{\underline{\varkappa}} = (\underline{\underline{C}}_{II} - \underline{\underline{C}}_{III})/2$ — кососимметричную часть и, следовательно, любой тензор $\underline{\underline{N}}$ второго ранга можно представить в виде

$$\begin{aligned} \underline{\underline{N}} &= \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{\Omega}} = (\underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}}) \otimes^2 \underline{\underline{N}} = \underline{\underline{E}} \otimes^2 \underline{\underline{N}}; \\ \underline{\underline{S}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{N}} + \underline{\underline{N}}^T), \quad \underline{\underline{\Omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{N}} - \underline{\underline{N}}^T). \end{aligned} \quad (20.40)$$

Отсюда и из второго соотношения (20.38) видно, что тензор

$$\underline{\underline{E}} \equiv \underline{\underline{C}}_{II} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}_{II} + \underline{\underline{C}}_{III}) + \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}}_{II} - \underline{\underline{C}}_{III}) \quad (20.41)$$

является единичным тензором в множестве тензоров вторых рангов относительно операции двукратного свертывания. Очевидно, в этом смысле он будет единичным тензором (единицей) в любом множестве тензоров, ранг которых не меньше двух. Что касается тензора $\underline{\underline{\Delta}} = (\underline{\underline{C}}_{II} + \underline{\underline{C}}_{III})/2$, он

¹Различные применения этих тензоров можно найти в монографии [21].

будет единичным тензором в том же смысле в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых и последних двух индексов. При этом $\underline{\underline{\Delta}}$ будет левой (правой) единицей в множестве тензоров, ранг которых не меньше двух, а компоненты симметричны относительно первых (последних) двух индексов.

Следует отметить, что общее выражение изотропного тензора четвертого ранга будет иметь вид

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} \equiv \lambda \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I + \mu (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) + \alpha (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) = \lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha \underline{\underline{\varkappa}}. \quad (20.42)$$

Нетрудно увидеть, что для тензоров $\underline{\underline{\Delta}}$ и $\underline{\underline{\varkappa}}$ и их компонент в силу соответствующих соотношений (20.37) имеют место представления

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Delta}} &= \Delta_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} \mathbf{r}^{\dot{m}} \mathbf{r}^{\dot{n}} \mathbf{r}^{\dot{p}} \mathbf{r}^{\dot{q}}, & \Delta_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} &= \frac{1}{2} (g_{\dot{m}\dot{p}} g_{\dot{n}\dot{q}} + g_{\dot{m}\dot{q}} g_{\dot{n}\dot{p}}), \\ \underline{\underline{\varkappa}} &= \varkappa_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} \mathbf{r}^{\dot{m}} \mathbf{r}^{\dot{n}} \mathbf{r}^{\dot{p}} \mathbf{r}^{\dot{q}}, & \varkappa_{\dot{m}\dot{n}\dot{p}\dot{q}} &= \frac{1}{2} (g_{\dot{m}\dot{p}} g_{\dot{n}\dot{q}} - g_{\dot{m}\dot{q}} g_{\dot{n}\dot{p}}), \quad \sim, \smile, \wedge, \vee \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (20.43)$$

сохраняющие силу при жонглировании индексами.

В силу первого соотношения (20.37) и (20.43) нетрудно выписать представления и для тензора (20.42) и его компонент, поэтому на этом останавливаться не будем.

Пусть два тензора второго ранга $\underline{\underline{\mathbb{P}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{H}}}$ связаны между собой соотношениями

$$\underline{\underline{\mathbb{P}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{H}}}, \quad \underline{\underline{\mathbb{H}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{P}}}, \quad (20.44)$$

где $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$ — тензоры четвертого ранга. Учитывая второе из соотношений (20.44) в первом, а потом, наоборот, первое во втором, получаем соответственно

$$\underline{\underline{\mathbb{P}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{P}}} = (\underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{J}}}) \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{P}}}, \quad \underline{\underline{\mathbb{H}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{H}}} = (\underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{C}}}) \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{H}}}. \quad (20.45)$$

Теперь, представляя тензоры $\underline{\underline{\mathbb{P}}}$ и $\underline{\underline{\mathbb{H}}}$ аналогично первому соотношению (20.40) и сравнивая с соотношениями (20.45) соответственно, нетрудно заметить, что

$$\underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{J}}} = \underline{\underline{\mathbb{J}}} \otimes^2 \underline{\underline{\mathbb{H}}} = \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}} \equiv \underline{\underline{\mathbb{E}}}. \quad (20.46)$$

Итак, в общем случае взаимно обратные тензоры четвертых рангов удовлетворяют соотношению (20.46).

Нетрудно доказать, что результаты всевозможных внутренних 2-произведений тензоров $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_I, \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II}, \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}, \underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\varkappa}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}}, \underline{\underline{\mathbb{E}}}$ можно представить в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} \otimes^2 & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & 3\underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & 3\underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} & \underline{\underline{\Delta}} & -\underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\varkappa}} & -\underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\Delta}} - \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\Delta}} & \underline{\underline{\varkappa}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} \\ \underline{\underline{\mathbb{E}}} & 3\underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & \underline{\underline{\mathbb{O}}} & \underline{\underline{\mathbb{E}}} & 3 \end{pmatrix}, \quad (20.47)$$

часть которой, получающаяся пересечением первых четырех строк и столбцов, приведена в приложении монографии [21]. Здесь $\underline{\underline{\mathbb{O}}}$ — нулевой тензор четвертого ранга.

Теперь допустим, что $\underline{\underline{\mathbb{J}}}$ — изотропный тензор четвертого ранга. Тогда аналогично (20.42) для него имеем представление

$$\underline{\underline{\mathbb{J}}} \equiv \lambda' \underline{\underline{\mathbb{C}}}_I + \mu' (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} + \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) + \alpha' (\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{II} - \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{III}) = \lambda' \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\varkappa}}. \quad (20.48)$$

Найдем зависимости между постоянными λ, μ, α и λ', μ', α' . С этой целью, учитывая (20.42) и (20.48) в (20.46), получаем

$$(\lambda \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha \underline{\underline{\varkappa}}) \otimes^2 (\lambda' \underline{\underline{\mathbb{E}}}\underline{\underline{\mathbb{E}}} + 2\mu' \underline{\underline{\Delta}} + 2\alpha' \underline{\underline{\varkappa}}) = \underline{\underline{\mathbb{E}}} = \underline{\underline{\Delta}} + \underline{\underline{\varkappa}}.$$

Отсюда в силу таблицы (20.47) имеем

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda')\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}} + 4\mu\mu'\underline{\Delta} + 4\alpha\alpha'\underline{\mathbf{x}} = \underline{\Delta} + \underline{\mathbf{x}},$$

или

$$(3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda')\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}} + (4\mu\mu' - 1)\underline{\Delta} + (4\alpha\alpha' - 1)\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}},$$

а отсюда в свою очередь заключаем, что

$$\begin{cases} 3\lambda\lambda' + 2\lambda\mu' + 2\mu\lambda' = 0, \\ 4\mu\mu' = 1, \\ 4\alpha\alpha' = 1. \end{cases} \quad (20.49)$$

Разрешая (20.49) сперва относительно λ' , μ' и α' , а потом относительно λ , μ и α , получим

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\frac{\lambda}{[2\mu(3\lambda + 2\mu)]}, & \mu' &= \frac{1}{4\mu}, & \alpha' &= \frac{1}{4\alpha}, \\ \lambda &= -\frac{\lambda'}{[2\mu'(3\lambda' + 2\mu')]}, & \mu &= \frac{1}{4\mu'}, & \alpha &= \frac{1}{4\alpha'}. \end{aligned} \quad (20.50)$$

Таким образом, если $\underline{\mathbf{C}}$ и $\underline{\mathbf{J}}$ — взаимно обратные изотропные тензоры четвертого ранга, то связи постоянных λ , μ , α и λ' , μ' , α' определяются формулами (20.50).

В теории упругости λ и μ называются постоянными Ламе, которые с другой парой постоянных, например, модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν , связаны формулами

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{[2(1 + \nu)]}, & \lambda &= \frac{E\nu}{[(1 + \nu)(1 - 2\nu)]}; \\ \nu &= \frac{\lambda}{[2(\lambda + \mu)]}, & E &= \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \end{aligned} \quad (20.51)$$

Тогда в силу (20.51) и (20.50) получаем

$$\lambda' = -\frac{\nu}{E}, \quad \mu' = \frac{1 + \nu}{2E}, \quad \alpha' = \frac{1}{4\alpha}. \quad (20.52)$$

Следует заметить, что соотношения между основными парами упругих постоянных приведены в приложении V монографии [57].

Если $\underline{\mathbf{C}}$ и $\underline{\mathbf{J}}$ — взаимно обратные изотропные тензоры четвертого ранга, то соотношения (20.44) в силу (20.42), (20.48), (20.50) и (20.52) представляются в виде

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}} &= \underline{\mathbf{C}} \otimes \underline{\mathbf{H}} = (\lambda\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}} + 2\mu\underline{\Delta} + 2\alpha\underline{\mathbf{x}}) \otimes \underline{\mathbf{H}}, \\ \underline{\mathbf{H}} &= \underline{\mathbf{J}} \otimes \underline{\mathbf{P}} = \{E^{-1}[-\nu\underline{\mathbf{E}}\underline{\mathbf{E}} + (1 + \nu)\underline{\Delta}] + \frac{1}{2\alpha}\underline{\mathbf{x}}\} \otimes \underline{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (20.53)$$

20.9. О ковариантной производной от компонент тензоров. Так как выписанные ниже формулы для ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга легко обобщаются на компоненты тензоров более высокого ранга, ограничимся рассмотрением ковариантных производных от компонент тензоров первого и второго ранга.

Зная деривационные формулы для мультипликативных базисов, легко определить ковариантную производную от компонент тензоров. В самом деле, пусть \mathbf{A} — тензор первого ранга (вектор), тогда его можно представить в виде

$$\mathbf{A} = A^{\bar{p}}\mathbf{r}_{\bar{p}} = A_{\bar{p}}\mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.54)$$

Дифференцируя первое равенство (20.54) по x^n и учитывая первую из деривационных формул (20.30), имеем

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{A} &= \partial_n(A^{\bar{p}}\mathbf{r}_{\bar{p}}) = (\partial_n A^{\bar{p}})\mathbf{r}_{\bar{p}} + A^{\bar{p}}\partial_n \mathbf{r}_{\bar{p}} = (\partial_n A^{\bar{p}})\mathbf{r}_{\bar{p}} + A^{\bar{p}}\underline{\Gamma}_{\bar{p}n}^{\bar{m}}\mathbf{r}_{\bar{m}} = \\ &= (\partial_n A^{\bar{m}} + A^{\bar{p}}\underline{\Gamma}_{\bar{p}n}^{\bar{m}})\mathbf{r}_{\bar{m}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Аналогично, дифференцируя $\mathbf{A} = A_{\bar{p}}\mathbf{r}^{\bar{p}}$ по x^n и учитывая вторую из деривационных формул (20.30), получаем

$$\partial_n \mathbf{A} = \partial_n(A_{\bar{p}}\mathbf{r}^{\bar{p}}) = (\partial_n A_{\bar{m}} - A_{\bar{p}}\underline{\Gamma}_{\bar{m}n}^{\bar{p}})\mathbf{r}^{\bar{m}}, \quad \simeq \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{A} = \nabla_n A^{\tilde{m}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \nabla_n A_{\tilde{m}} \mathbf{r}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантных производных введены обозначения

$$\nabla_n A^{\tilde{m}} = \partial_n A^{\tilde{m}} + A^{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{m}}, \quad \nabla_n A_{\tilde{m}} = \partial_n A_{\tilde{m}} - A_{\tilde{p}} \Gamma_{\tilde{m}n}^{\tilde{p}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.55)$$

Теперь рассмотрим тензор второго ранга \mathbf{H} и представим его в следующем виде:

$$\mathbf{H} = H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = H_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot \tilde{p}} \mathbf{R}^{\cdot \tilde{q}}_{\tilde{p}} = H_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{q}}^{\cdot \tilde{p}} = H^{\tilde{p}\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\cdot \cdot}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.56)$$

Дифференцируя, например, первое равенство (20.56) и учитывая деривационную формулу (20.32), получим

$$\begin{aligned} \partial_n \mathbf{H} &= \partial_n (H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}) = (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} \partial_n \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \\ &= (\partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}} \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \\ &\sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\partial_n \mathbf{H} = (\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}}) \mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\cdot \tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\},$$

где для ковариантной производной введено обозначение

$$\nabla_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} = \partial_n H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{q}} + H^{\tilde{r}}_{\cdot \tilde{q}} \Gamma_{\tilde{r}n}^{\tilde{p}} - H^{\tilde{p}}_{\cdot \tilde{s}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{s}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.57)$$

Как видно из формул (20.55) и (20.57), нахождение выражений ковариантных производных от компонент тензоров, представленных в разных семействах базисов, производится по обычному правилу [5, 21, 54] с тем отличием, что семейства символов Кристоффеля определяются семействами немых индексов. Так, например, во втором слагаемом в правой части (20.57) немой индекс принадлежит одному из (\sim) -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, и поэтому семейство символов Кристоффеля соответственно принадлежит одному из $S_{(\sim)}^{\sim}$ -семейств, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Теперь докажем следующее

Утверждение 20.2. *Ковариантная производная от компонент единичного тензора второго ранга равна нулю.*

Для доказательства этого утверждения продифференцируем, например, первое равенство (20.10) по x^n . Получим

$$\partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \partial_n (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}}) = \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \mathbf{r}_{\tilde{q}} + \mathbf{r}_{\tilde{p}} \cdot \partial_n \mathbf{r}_{\tilde{q}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Отсюда в силу первого соотношения деривационных формул (20.30) получаем

$$\partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = g_{\tilde{r}\tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{r}} + g_{\tilde{p}\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{r}}, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.58)$$

Переносим члены, находящиеся в правой части (20.58), в левую и вводя обозначение для ковариантной производной, получим

$$\nabla_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = \partial_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} - g_{\tilde{r}\tilde{q}} \Gamma_{\tilde{p}n}^{\tilde{r}} - g_{\tilde{p}\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{q}n}^{\tilde{r}} = 0, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.59)$$

Если бы мы исходили из других соотношений (20.10), то аналогично (20.59) доказали бы справедливость утверждения при любом другом расположении индексов \tilde{p} и \tilde{q} . Таким образом,

$$\nabla_n g_{\tilde{p}\tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = 0, \quad \nabla_n g_{\tilde{q}}^{\tilde{p}} = 0, \quad \nabla_n g^{\tilde{p}\tilde{q}} = 0, \quad \sim, \circ \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.60)$$

Равенства (20.60) полностью доказывают утверждение.

Из утверждения (20.60) непосредственно вытекает

Следствие 20.0.1. *Ковариантная производная от компонент изотропных и демитропных тензоров равна нулю.*

Заметим, что компоненты демитропных тензоров, которые являются тензорами нечетного ранга, меняют знак при несобственном ортогональном преобразовании, тогда как компоненты изотропных тензоров остаются неизменными при любом ортогональном преобразовании. Кроме того, единственным демитропным тензором третьего ранга является дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивиты) [21]. Поэтому, вводя в рассмотрение в предлагаемом варианте теории, например, дискриминантный тензор третьего ранга

$$\underline{\mathbf{C}} = C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{p}} \mathbf{r}^{\tilde{q}} \mathbf{r}^{\tilde{n}}, \quad C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}} = (\mathbf{r}_{\tilde{p}} \times \mathbf{r}_{\tilde{q}}) \cdot \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (20.61)$$

в силу следствия 20.0.1 будем иметь

$$\nabla_m C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}} = \partial_m C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}} - C_{\tilde{r}\tilde{q}\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{p}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\tilde{r}\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{q}m}^{\tilde{r}} - C_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{r}} \Gamma_{\tilde{n}m}^{\tilde{r}} = 0, \quad \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (20.62)$$

Следует заметить, что с целью сокращения письма в (20.61) и (20.62) выписаны только ковариантные компоненты, хотя, конечно, при любом другом расположении индексов $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{n}, \sim, \smile, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}$, имеет место аналогичное (20.62) утверждение. Следовательно, равенство (20.62) можно получить еще и иным путем — дифференцированием второго соотношения (20.61) по x^m .

21. СВЯЗИ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ СЕМЕЙСТВАМИ ПАРАМЕТРИЗАЦИЙ ОБЛАСТИ ТОНКОГО ТЕЛА

Введем следующее

Определение 21.1. Будем говорить, что связь между двумя семействами параметризаций области тонкого тела *осуществлена*, если найдены связи между порождающими эти семейства параметризаций семействами базисов и, вообще, между порожденными порождающими семействами базисов любыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими связываемые параметризации.

Очевидно, зная связь между двумя порождающими рассматриваемые семейства параметризаций семействами базисов, легко найти связь, например, между порожденными ими семействами символов Кристоффеля и, вообще, между порожденными ими любыми семействами соответствующих геометрических характеристик. Мы ограничимся нахождением связей между некоторыми семействами соответствующих геометрических характеристик, сопровождающими эти параметризации.

21.1. Связь между различными семействами мультипликативных базисов. В силу соотношения (20.12), дающего связь между различными семействами базисов, нетрудно найти связи между различными семействами мультипликативных базисов. В самом деле, легко усмотреть, что связи, например, между двухвекторными мультипликативными базисами будут иметь вид

$$\mathbf{R}_{\tilde{p}}^{\tilde{q}} = g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} g_{\tilde{n}}^{\tilde{q}} \mathbf{R}_{\tilde{m}}^{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (21.1)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами.

Следует заметить, что обобщение (21.1) на мультипликативные базисы, состоящие из более чем двух базисных векторов, не представляет большого труда, и поэтому на этом с целью сокращения письма не будем останавливаться, а в случае надобности по аналогии с (21.1) выпишем нужные соотношения.

21.2. Связь между различными семействами символов Кристоффеля. Найдем связи между $\overset{(\sim)}{S}_{(\smile)}$ - и $\overset{(\smile)}{S}_{(\vee)}$ -семействами символов Кристоффеля¹, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$. В этой связи, дифференцируя (20.12) по x^q и пользуясь определениями символов Кристоффеля (20.28), получаем

$$\partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = \partial_q (g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}}) = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} \partial_q \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}},$$

$$\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Таким образом,

$$\partial_q \mathbf{r}_{\tilde{p}} = (\partial_q g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}} = (\partial_q g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}} \Gamma_{\tilde{m}\tilde{q},\tilde{n}}) \mathbf{r}_{\tilde{n}}, \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (21.2)$$

где второе равенство (21.2) получается аналогично первому.

¹Классификация символов Кристоффеля подробнее рассмотрена в [29, 30].

Умножая (21.2) почленно сначала на $\mathbf{r}_{\tilde{l}} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{k}} \mathbf{r}_{\tilde{k}}$, а потом на $\mathbf{r}^{\tilde{l}} = g_{\tilde{k}}^{\tilde{l}} \mathbf{r}^{\tilde{k}}$ и учитывая определения символов Кристоффеля (20.28), получим искомые связи. А именно,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q},\tilde{l}} &= g_{\tilde{l}\tilde{n}}(\partial_{\tilde{q}}g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}\Gamma_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\tilde{n}}) = g_{\tilde{l}}^{\tilde{n}}(\partial_{\tilde{q}}g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}\Gamma_{\tilde{m}\tilde{q},\tilde{n}}), \\ \Gamma_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{l}} &= g_{\tilde{n}}^{\tilde{l}}(\partial_{\tilde{q}}g_{\tilde{p}}^{\tilde{n}} + g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}\Gamma_{\tilde{m}\tilde{q}}^{\tilde{n}}) = g_{\tilde{p}}^{\tilde{l}\tilde{n}}(\partial_{\tilde{q}}g_{\tilde{p}\tilde{n}} - g_{\tilde{p}}^{\tilde{m}}\Gamma_{\tilde{m}\tilde{q},\tilde{n}}), \quad \sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned} \quad (21.3)$$

Следует заметить, что соотношения (21.3) совпадают с аналогичными соотношениями из работ [29, 30].

21.3. Связи между компонентами и ковариантными производными от компонент многооточечного тензора. Предполагается, что рассматриваемый тензор представлен в различных семействах мультипликативных базисов. Ограничимся рассмотрением тензора второго ранга $\underline{\mathbf{H}}$, представления которого имеют вид

$$\underline{\mathbf{H}} = H_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}^{\cdot\tilde{q}} \mathbf{R}_{\cdot\tilde{q}}^{\tilde{p}} = H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}} \mathbf{R}_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (21.4)$$

конечно, сохраняющие силу при жонглировании индексами.

Отсюда, учитывая линейную независимость мультипликативных базисов $\mathbf{R}_{\cdot\tilde{q}}^{\tilde{p}}$, $\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}$, искомые связи между компонентами представляются в виде

$$H_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}^{\cdot\tilde{q}} = g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}}H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (21.5)$$

сохраняющем силу при жонглировании индексами.

Нетрудно найти связи и между ковариантными производными от компонент тензора $\underline{\mathbf{H}}$. В самом деле, в силу утверждения 20.2 и правила нахождения ковариантной производной от суммы и произведения компонент тензоров из (21.5) имеем

$$\begin{aligned} \nabla_s H_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}^{\cdot\tilde{q}} &= \nabla_s (g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}}H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}}) = \nabla_s (g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}})H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}} + g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}}\nabla_s H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}} = g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}}\nabla_s H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}}, \\ \sim, \smile, \vee, \wedge &\in \{-, \emptyset, +\}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомые связи имеют вид

$$\nabla_s H_{\tilde{p}\cdot\tilde{q}}^{\cdot\tilde{q}} = g_{\tilde{p}\hat{m}}g_{\tilde{q}\tilde{n}}\nabla_s H_{\cdot\tilde{n}}^{\hat{m}\cdot\tilde{n}}, \quad \sim, \smile, \vee, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (21.6)$$

сохраняющий силу при жонглировании индексами, за исключением индекса s .

Заметим, что обобщение (21.5) и (21.6) на компоненты тензоров более высокого ранга не представляет труда, поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованный читатель легко справится с этой задачей самостоятельно.

22. О КОМПОНЕНТАХ ЕТВР

В этом разделе подробнее рассматриваются различные семейства компонент ЕТВР. В частности, приводятся их удобные для пользования с точки зрения практики развернутые представления как для общих, так и для частных случаев семейств параметризаций.

Следует заметить, что на протяжении всего раздела за основную базовую принимается внутренняя базовая поверхность $S^{(-)}$. Тогда в силу определения 20.32 основными компонентами ЕТВР являются компоненты $g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}$, $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$, $g^{\tilde{p}\tilde{q}}$ и компоненты переноса $g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}$, $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$, играющие важную роль в предлагаемой теории в том смысле, что остальные компоненты и большинство геометрических характеристик выражаются через них.

22.1. Об основных компонентах ЕТВР и числе независимых основных компонент ЕТВР.

В силу определения 20.32 в рассматриваемом случае, когда в качестве основной базовой принята внутренняя базовая поверхность $S^{(-)}$, можно ввести следующие определения:

Определение 22.1. Компоненты $g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}$, $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$, $g^{\tilde{p}\tilde{q}}$ и компоненты переноса $g_{\tilde{p}\tilde{q}}^{\tilde{q}}$, $g_{\tilde{p}}^{\tilde{q}}$ называются *основными компонентами* ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность $S^{(-)}$.

Определение 22.2. Компоненты g_{pq}^{\pm} , $g_{\bar{p}}^{\bar{q}}$ называются *основными компонентами переноса* ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела, если в качестве основной базовой принимается внутренняя базовая поверхность $S^{(-)}$.

В рассматриваемом случае, на первый взгляд, число независимых основных компонент ЕТВР должно быть 15. Это 6 компонент $g_{pq}^{\pm} = g_{qp}^{\pm}$ и 9 основных компонент переноса $g_{\bar{p}q}^{\pm}$ ЕТВР (в силу (20.13) при $\sim, \vee \in \{-, +\}$, $* = -$ остальные основные компоненты выражаются через эти компоненты). Однако число независимых основных компонент значительно меньше 15. Следует заметить, что симметричный тензор второго ранга в рассматриваемой точке, конечно, имеет 6 независимых компонент. Однако, говоря о независимых компонентах ЕТВР, подразумевают его компоненты при различных значениях координаты x^3 . В частности, компоненты $g_{\bar{p}q}^{\pm}$ определены в двух точках: при $x^3 = 0$ и $x^3 = 1$.

С целью установления числа независимых основных компонент ЕТВР найдем зависимости между ними. В этой связи продифференцируем $g_{q3}^{\pm} = \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h}$ по x^p и учтем (20.3), второе соотношение (20.4) и (20.7). Имеем

$$\begin{aligned} \partial_p g_{q3}^{\pm} &= \partial_p (\mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h}) = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_q \cdot \partial_p \mathbf{h} = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}_q \cdot (\mathbf{r}_p^{\pm} - \mathbf{r}_p^{-}) = \\ &= \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp} = \Gamma_{qp,3}^{\pm} + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_p g_{q3}^{\pm} = \partial_p \mathbf{r}_q \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp} = \Gamma_{qp,3}^{\pm} + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp},$$

Меняя в этом соотношении местами индексы p и q , получим

$$\partial_q g_{p3}^{\pm} = \partial_q \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{h} + g_{qp}^{\pm} - g_{qp}^{\mp} = \Gamma_{pq,3}^{\pm} + g_{qp}^{\pm} - g_{qp}^{\mp}.$$

Вычитая последнее соотношение почленно из предпоследнего, получим

$$\omega_{pq} \equiv \partial_p g_{q3}^{\pm} - \partial_q g_{p3}^{\pm} = (\partial_p \mathbf{r}_q - \partial_q \mathbf{r}_p) \cdot \mathbf{h} + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp} = (\Gamma_{qp,3}^{\pm} - \Gamma_{pq,3}^{\pm}) + g_{pq}^{\pm} - g_{pq}^{\mp}. \quad (22.1)$$

Нетрудно заметить, что $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$, т. е. ω_{pq} — кососимметричная матрица, поэтому из 9 элементов (22.1) отличными от нуля будут следующие три: $\omega_{I3} = -\omega_{3I}$, $\omega_{IJ} = -\omega_{JI}$.

Таким образом, получим следующие три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$\begin{aligned} \omega_{I3} &= \partial_I g_{33}^{\pm} = 2h \partial_I h = 2\mathbf{r}_3 \cdot \partial_I \mathbf{h} = 2\Gamma_{3I,3}^{\pm} = 2(g_{I3}^{\pm} - g_{I3}^{\mp}), \\ \omega_{IJ} &= \partial_I g_{J3}^{\pm} - \partial_J g_{I3}^{\pm} = g_{IJ}^{\pm} - g_{JI}^{\pm}. \end{aligned} \quad (22.2)$$

Из первого соотношения (22.2) имеем

$$g_{I3}^{\pm} = g_{I3}^{\mp} + h \partial_I h = g_{I3}^{\mp} + \Gamma_{3I,3}^{\pm}, \quad (22.3)$$

а отсюда получаем

$$g_{I3}^{\pm} = g_{I3}^{\mp} + h \partial_I h = g_{I3}^{\mp} + \Gamma_{3I,3}^{\pm}, \quad (22.4)$$

где

$$\Gamma_{3I,3}^{\pm} = h \partial_I h, \quad \Gamma_{3I,3}^{\pm} = g_{3I,3}^{\pm} \Gamma_{3I,3}^{\pm}. \quad (22.5)$$

Легко усмотреть, что в силу (20.7) имеем еще три соотношения между основными компонентами ЕТВР:

$$g_{3m}^{\pm} = g_{3m}^{\mp}. \quad (22.6)$$

Таким образом, в общем случае параметризации области тонкого тела, т. е. когда \mathbf{h} не является перпендикуляром к базовым поверхностям $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$, основные компоненты ЕТВР связаны между собой шестью соотношениями (22.2) и (22.6), и в рассматриваемом случае число независимых основных компонент ЕТВР равно $15 - 6 = 9$.

В качестве независимых основных компонент ЕТВР можно рассмотреть, например, следующие:

$$g_{pq}^- = g_{qp}^-; \quad g_{11}^+, g_{12}^+, g_{22}^+. \quad (22.7)$$

Компоненты g_{I3}^+ и g_{3m}^+ определяются из соотношений (22.3) и (22.6) соответственно, а g_{21}^+ можно определить из второго соотношения (22.2).

Теперь рассмотрим частный случай, когда \mathbf{h} перпендикулярен внутренней базовой поверхности $S^{(-)}$ ($\mathbf{h} \perp S^{(-)}$). В этом случае нетрудно увидеть, что

$$g_{I3}^- = 0, \quad g_{I3}^{\bar{3}} = 0, \quad g^{I\bar{3}} = 0, \quad g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1} \quad (22.8)$$

и, следовательно, в силу первого соотношения (22.8) число независимых основных компонент (22.7) сокращается на две единицы и становится равным 7.

Учитывая третье и четвертое соотношения (22.8) и первое соотношение (22.5), из второго соотношения (22.5) получаем

$$\Gamma_{\bar{3}I}^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}} \Gamma_{\bar{3}I,3}^- = \frac{1}{h} \partial_I h. \quad (22.9)$$

Теперь, подставляя первое соотношение (22.8) в (22.3), а второе соотношение (22.8) и (22.9) в (22.4), имеем соответственно

$$g_{I3}^+ = h \partial_I h, \quad g_{I3}^{\bar{3}} = \frac{1}{h} \partial_I h \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \perp S^{(-)}. \quad (22.10)$$

Нетрудно заметить, что в рассматриваемом случае из (22.2) получаем

$$g_{IJ}^+ = g_{JI}^+ \quad \text{при} \quad \mathbf{h} \perp S^{(-)}. \quad (22.11)$$

На основании соотношения (22.11) заключаем, что $g_{21}^+ = g_{12}^+$, а число независимых основных компонент ЕТВР в рассматриваемом случае больше не уменьшается.

Таким образом, в том случае, когда $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$ и на базовой поверхности $S^{(-)}$ координатные линии не являются ортогональными линиями, в качестве независимых основных компонент ЕТВР можно рассматривать следующие:

$$g_{IJ}^- = g_{JI}^-, \quad g_{33}^- = h^2; \quad g_{11}^+, g_{12}^+, g_{22}^+. \quad (22.12)$$

Следовательно, если координатные линии на базовой поверхности $S^{(-)}$ являются ортогональными линиями и $\mathbf{h} \perp S^{(-)}$, то $g_{12}^- = g_{21}^- = 0$, и число независимых основных компонент ЕТВР (22.12) уменьшается еще на одно и становится равным 6, т. е. в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты:

$$g_{11}^-, g_{22}^-, g_{33}^-; \quad g_{11}^+, g_{12}^+, g_{22}^+. \quad (22.13)$$

Ниже увидим, что в более частных случаях параметризации на базовой поверхности $S^{(-)}$ число независимых основных компонент ЕТВР еще уменьшится.

Далее с целью более наглядного представления выражений компонент переноса ЕТВР g_{kl}^- , $g_k^{\bar{l}}$, $g_{\bar{l}}^k$ и некоторых других геометрических характеристик через основные компоненты ЕТВР выпишем их в развернутом виде для различных частных случаев параметризаций области тонкого тела, а также рассмотрим некоторые вопросы теории.

22.2. Представления компонент ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора для различных семейств параметризации области тонкого тела. Рассматриваются различные семейства параметризаций области тонкого тела и даются развернутые представления компонент ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора для рассматриваемых семейств параметризаций.

22.2.1. Вектор \mathbf{h} не перпендикулярен к базовым поверхностям. Получим представления компонент переноса ЕТВР через основные компоненты переноса того же тензора. Нетрудно заметить, что

$$g_{kl}^- \sim (g_{KL}^-, g_{K\bar{3}}^-, g_{3L}^-, g_{3\bar{3}}^-), \quad g_k^{\bar{l}} \sim (g_K^{\bar{L}}, g_K^{\bar{3}}, g_3^{\bar{l}}),$$

где \sim — символ эквивалентности.

Требуется выписать выражения каждой из этих компонент. В силу (20.11) получаем

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}}^- &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}}^- + x^3g_{K\bar{L}}^+, & g_K^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_K^{\bar{L}} + x^3g_K^{\bar{L}}, \\ g_{K\bar{3}}^- &= (1 - x^3)g_{K\bar{3}}^- + x^3g_{K\bar{3}}^+, & g_K^{\bar{3}} &= x^3g_K^{\bar{3}}, \\ g_{3L}^- &= g_{3L}^-, & g_3^{\bar{l}} &= g_3^{\bar{l}}, \\ g_{3\bar{3}}^- &= g_{3\bar{3}}^- = h^2, \end{aligned} \quad (22.14)$$

Аналогично (22.14) имеем

$$g^{k\bar{l}} \sim (g^{K\bar{L}}, g^{K\bar{3}}, g^{3\bar{L}}, g^{3\bar{3}}), \quad g_{\bar{l}}^k \sim (g_{\bar{L}}^K, g_{\bar{3}}^K, g_{\bar{L}}^3, g_{\bar{3}}^3). \quad (22.15)$$

Для нахождения выражений компонент (22.15) можно воспользоваться соотношением (20.24). Сначала из (20.21) найдем выражения для \mathbf{r}^K и \mathbf{r}^3 , а затем с их помощью — выражения для компонент (22.15).

Из (20.21) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KPq} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{K3q} \epsilon_{lmn} g_3^{\tilde{m}} g_q^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} = \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{lmn} g_P^{\tilde{m}} g_3^{\tilde{n}} \mathbf{r}^{\tilde{l}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{K3Q} \epsilon_{L3N} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \\ &= \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KP3} \epsilon_{LM3} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} + \frac{1}{2} \vartheta^{-1} \epsilon^{KQ3} \epsilon_{LN3} g_Q^{\tilde{N}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} = \vartheta^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}. \end{aligned}$$

Не будет лишним, если мы укажем и другой путь, более короткий и удобный для нахождения выражений для \mathbf{r}^K . В самом деле, в силу (20.12) при $\sim \in \emptyset$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= C^{KL} \mathbf{r}_L \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}_{\tilde{M}} \times \mathbf{r}_3 = C^{KL} g_L^{\tilde{M}} C_{\tilde{M}\bar{3}\bar{N}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \\ &= \sqrt{g} g^{-1} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}} = \vartheta^{-1} \epsilon^{KL} \epsilon_{NM} g_L^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{N}}. \end{aligned}$$

Аналогично, исходя из (20.24), можно найти выражение и для \mathbf{r}^3 . Однако найдем его более коротким путем. Из (20.12) получаем

$$\mathbf{r}^{\bar{3}} = g_k^{\bar{3}} \mathbf{r}^k = g_3^{\bar{3}} \mathbf{r}^3 + g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^3 + g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K,$$

а отсюда, учитывая предыдущее соотношение,

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} - g_K^{\bar{3}} \mathbf{r}^K = \mathbf{r}^{\bar{3}} + \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}.$$

С другой стороны, из (20.12) имеем

$$\mathbf{r}^3 = g_n^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\tilde{n}} = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_N^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\tilde{N}}.$$

Сравнивая два последних соотношения, заключаем, что

$$g_L^{\bar{3}} = \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, \quad \sim \in \{-, +\}.$$

Таким образом, мы получили более общие соотношения, чем требовалось, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \vartheta^{-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\tilde{M}} \mathbf{r}^{\tilde{L}}, & \mathbf{r}^3 &= \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_L^{\bar{3}} \mathbf{r}^{\tilde{L}} \\ g_L^{\bar{3}} &= \vartheta^{-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\tilde{M}}, & \sim &\in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (22.16)$$

Из (22.16) при $\sim = -$ получаем искомые соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^K &= \vartheta^{(-)-1} \epsilon^{KP} \epsilon_{LM} g_P^{\bar{M}} \bar{\mathbf{r}}^{\bar{L}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_{\bar{L}}^3 \bar{\mathbf{r}}^{\bar{L}}, \\ g_{\bar{L}}^3 &= \vartheta^{(-)-1} g_K^{\bar{3}} \epsilon^{KP} \epsilon_{ML} g_P^{\bar{M}}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Приведем (22.17) к более компактному виду. Вводя обозначения

$$A_{\bar{M}}^K \equiv \epsilon^{KL} \epsilon_{MN} g_L^{\bar{N}} = g_{\bar{M}}^{\bar{K}} + x^3 a_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \quad a_{\bar{M}}^{\bar{K}} \equiv (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} - 1) g_{\bar{M}}^{\bar{K}} - g_{\bar{M}}^{\bar{K}}, \quad (22.18)$$

соотношения (22.17) представим в виде

$$\mathbf{r}^K = \vartheta^{(-)-1} A_{\bar{M}}^K \bar{\mathbf{r}}^{\bar{M}}, \quad \mathbf{r}^3 = \mathbf{r}^{\bar{3}} + g_{\bar{M}}^3 \bar{\mathbf{r}}^{\bar{M}}, \quad g_{\bar{M}}^3 = -\vartheta^{(-)-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K. \quad (22.19)$$

Теперь в силу (22.19) нетрудно выписать искомые выражения для компонент (22.15). В самом деле, на основании их определения получаем

$$\begin{aligned} g^{K\bar{L}} &= \vartheta^{(-)-1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{M}}^K &= \vartheta^{(-)-1} A_{\bar{M}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= \vartheta^{(-)-1} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\ g^{3\bar{L}} &= g^{\bar{3}\bar{L}} - \vartheta^{(-)-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{M}}^3 &= -\vartheta^{(-)-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K, \\ g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} - \vartheta^{(-)-1} g_K^{\bar{3}} A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{3}}, & g_{\bar{3}}^3 &= 1. \end{aligned} \quad (22.20)$$

Теперь более внимательно рассмотрим, например, первое из соотношений (20.20). Запишем его в виде квадратного трехчлена относительно x^3 . Имеем

$$\vartheta^{(-)} = (1 - x^3)^2 + x^3(1 - x^3)g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + (x^3)^2 \vartheta^{(\mp)} = (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)})(x^3)^2 - (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}})x^3 + 1. \quad (22.21)$$

Учитывая (20.18) при $\sim = +$, $\sim = -$, соотношению (22.21) можно придать следующий вид:

$$\vartheta^{(-)} = \left[(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}})(1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) + g_{\bar{1}}^{\bar{2}} g_{\bar{2}}^{\bar{1}} \right] (x^3)^2 - \left[(1 - g_{\bar{1}}^{\bar{1}}) + (1 - g_{\bar{2}}^{\bar{2}}) \right] x^3 + 1. \quad (22.22)$$

Рассмотрим дискриминант квадратного трехчлена. Исходя, например, из (22.21), имеем

$$D = (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4(1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \vartheta^{(\mp)}) = (g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4\vartheta^{(\mp)} = (g_{\bar{I}}^{\bar{I}})^2 - 4 \det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}}).$$

Далее, раскрывая детерминант, получим

$$D = (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - g_{\bar{2}}^{\bar{2}})^2 + 4g_{\bar{1}}^{\bar{2}} g_{\bar{2}}^{\bar{1}}. \quad (22.23)$$

Утверждение 22.1. Дискриминант (22.23) квадратного трехчлена (22.22) неотрицателен, т. е. $D \geq 0$.

Доказательство. В самом деле, $g_{\bar{I}}^{\bar{I}}$ и $\det(g_{\bar{I}}^{\bar{J}})$ — инварианты, поэтому и дискриминант D инвариантен. Так как D инвариантен, то утверждение достаточно доказать относительно специально выбранной системы координат. Выбирая в рассматриваемой точке ортогональную систему координат (необязательно декартову) и учитывая (22.11), имеем

$$g_{\bar{2}}^{\bar{1}} g_{\bar{1}}^{\bar{2}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g_{\bar{2}\bar{I}}^{\bar{I}} g_{\bar{1}\bar{J}}^{\bar{J}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} g_{\bar{2}\bar{1}} g_{\bar{1}\bar{2}} = g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\bar{1}\bar{2}}^{\bar{2}})^2 \geq 0.$$

Итак, в ортогональной пространственной системе координат в рассматриваемой точке (22.23) представляется в виде

$$D = (g_{\bar{1}}^{\bar{1}} - g_{\bar{2}}^{\bar{2}})^2 + 4g^{\bar{1}\bar{1}} g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\bar{1}\bar{2}}^{\bar{2}})^2 \geq 0, \quad (22.24)$$

что и требовалось доказать. \square

В силу (22.24) квадратный трехчлен (22.22) обращается в нуль при следующих двух значениях x^3 :

$$(x^3)_{1,2} = \frac{2 - g_{\pm}^{\bar{I}} \pm \sqrt{(g_{\pm}^{\bar{1}} - g_{\pm}^{\bar{2}})^2 + 4g_{\pm}^{\bar{1}}g_{\pm}^{\bar{2}}}}{2\left[(1 - g_{\pm}^{\bar{1}})(1 - g_{\pm}^{\bar{2}}) - g_{\pm}^{\bar{1}}g_{\pm}^{\bar{2}}\right]}. \quad (22.25)$$

Далее рассмотрим два частных случая параметризации области тонкого тела: первый — вектор \mathbf{h} перпендикулярен к поверхности $S^{(-)}$, второй — вектор \mathbf{h} перпендикулярен к поверхности $S^{(-)}$ и при этом координатные линии на основной базовой поверхности $S^{(-)}$ являются линиями кривизны.

Можно также рассматривать случаи, когда на основной базовой поверхности параметризация осуществляется посредством асимптотических, изометрических и сопряженно-изометрических линий, однако после изложения двух указанных выше случаев рассмотрение этих случаев не представляет большого труда. Поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованный читатель может посмотреть изложение этих случаев параметризации поверхности в [5, 6].

22.2.2. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности. В этом случае, как известно, имеют место соотношения (22.8) и (22.10) и, учитывая их, (22.14) и (22.20) соответственно представляются в видах

$$\begin{aligned} g_{K\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{K\bar{L}} + x^3g_{K\bar{L}}, & g_{\bar{K}}^{\bar{L}} &= (1 - x^3)g_{\bar{K}}^{\bar{L}} + x^3g_{\bar{K}}^{\bar{L}}, \\ g_{K\bar{3}} &= x^3g_{K\bar{3}} = x^3h\partial_I h, & g_{\bar{K}}^{\bar{3}} &= x^3g_{\bar{K}}^{\bar{3}} = x^3\frac{1}{h}\partial_I h, \\ g_{3\bar{L}} &= 0, & g_{\bar{3}}^{\bar{L}} &= g_{\bar{3}}^{\bar{L}}; \\ g_{3\bar{3}} &= g_{\bar{3}\bar{3}} = h^2, & & \\ g^{K\bar{L}} &= \vartheta^{-1}A_{\bar{M}}^K g^{\bar{M}\bar{L}}, & g_{\bar{L}}^K &= \vartheta^{-1}A_{\bar{L}}^K, \\ g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\bar{3}}^K &= 0, \\ g^{3\bar{L}} &= -\vartheta^{-1}g_{\bar{M}}^{\bar{3}} A_{\bar{L}}^{\bar{M}}, & g_{\bar{L}}^{\bar{3}} &= \vartheta^{-1}g_{\bar{K}}^{\bar{3}} A_{\bar{L}}^{\bar{K}}, \\ g^{\bar{3}\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2} = g_{\bar{3}\bar{3}}^{-1}, & g_{\bar{3}}^{\bar{3}} &= 1. \end{aligned} \quad (22.26)$$

22.2.3. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности, и координатные линии на ней являются линиями кривизны. Прежде чем выписать в рассматриваемом случае выражения для компонент переноса ЕТВР, вспомним кое-что из дифференциальной геометрии, касающееся линии кривизны на поверхности. Во-первых, они ортогональные линии и, во-вторых, вектор Родрига (производная от единичного вектора нормали к поверхности по естественному параметру (дуге) этой линии) и единичный вектор касательной к той же линии коллинеарны. Кроме того, линия кривизны в каждой точке имеет направление, совпадающее с одним из главных направлений поверхности в этой же точке, и геодезическое кручение линии кривизны равно нулю [5, 11, 51].

Обозначим единичный вектор нормали к поверхности $S^{(-)}$ через $\mathbf{n}^{(-)}$, единичный вектор касательной к линии кривизны на этой поверхности — через $\mathbf{s}^{(-)}$, а естественный параметр по этой линии — через $s^{(-)}$. Тогда имеем

$$\frac{d\mathbf{n}^{(-)}}{ds^{(-)}} = \frac{d\mathbf{n}^{(-)}}{dx^I} \frac{dx^I}{ds^{(-)}} = \partial_i \mathbf{n}^{(-)} \bar{s}^{\bar{I}} = -k_s^{(-)} \mathbf{s}^{(-)}, \quad (22.28)$$

где $k_s^{(-)}$ — нормальная кривизна поверхности в рассматриваемой точке, а $\bar{s}^{\bar{I}} = \mathbf{r}^{\bar{I}} \cdot \mathbf{s}^{(-)} = dx^I/ds^{(-)}$.

Нетрудно заметить, что для выражения линий кривизн x^I (22.28) можно представить в виде

$$\frac{(-)}{s} \bar{I} \partial_I \bar{\mathbf{n}} = -k_I \bar{\mathbf{s}}_{(I)}, \quad \frac{(-)}{s} \bar{I} = \frac{dx^I}{d s_{(I)}} = \bar{\mathbf{s}}_{(I)} \cdot \bar{\mathbf{r}}^I, \quad \langle I = 1, 2 \rangle.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dx^I}{d s_{(I)}} \partial_I \bar{\mathbf{n}} = -k_I \frac{d\mathbf{r}}{d s_{(I)}} = -k_I \bar{\mathbf{r}}^I \frac{dx^I}{d s_{(I)}}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle,$$

т. е.

$$\partial_I \bar{\mathbf{n}} = -k_I \bar{\mathbf{r}}^I, \quad \langle I = 1, 2 \rangle. \quad (22.29)$$

Здесь k_I — главная кривизна поверхности \bar{S} в направлении $\bar{\mathbf{r}}^I$.

Далее представим компоненты переноса ЕТВР g_{IJ}^+ , $g_I^{\bar{J}}$ в удобном виде. В силу определения g_{IJ}^+ и (20.3) имеем

$$\begin{aligned} g_{IJ}^+ &= \bar{\mathbf{r}}^I \cdot \bar{\mathbf{r}}^J = [\partial_I (\mathbf{h} + \bar{\mathbf{r}})] \cdot \bar{\mathbf{r}}^J = \partial_I \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{r}}^J + g_{IJ}^- = \partial_I (h \bar{\mathbf{n}}) \cdot \bar{\mathbf{r}}^J + g_{IJ}^- = \\ &= \partial_I h (\bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}^J) + h (\partial_I \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}^J) + g_{IJ}^- = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}^J) + g_{IJ}^-, \end{aligned}$$

где учтено, что $\bar{\mathbf{n}} \perp \bar{\mathbf{r}}^J$.

Таким образом,

$$g_{IJ}^+ = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}^J) + g_{IJ}^-, \quad g_I^{\bar{J}} = g^{\bar{J}\bar{K}} g_{I\bar{K}}^+ = h (\partial_I \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{r}}^{\bar{J}}) + g_I^{\bar{J}}. \quad (22.30)$$

Учитывая (22.29) в (22.30), получим их искомые представления

$$g_{IJ}^+ = (1 - h k_I) g_{IJ}^-, \quad g_I^{\bar{J}} = (1 - h k_I) g_I^{\bar{J}}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle. \quad (22.31)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае в силу первого соотношения (22.31) $g_{12}^+ = 0$, и число независимых основных компонент ЕТВР (22.13) уменьшится на одно, становясь равным 5. Таким образом, в этом случае имеем следующие независимые основные компоненты ЕТВР: g_{11}^- , g_{22}^- , g_{33}^- , g_{11}^+ , g_{22}^+ . Кроме того, если на основной базовой поверхности гауссовы координаты являются изометрическими, то $g_{11}^- = g_{22}^-$, и, очевидно, число независимых основных компонент ЕТВР уменьшится еще на одно, становясь равным 4. В этом случае в качестве независимых основных компонент ЕТВР можно рассматривать, например, g_{11}^- , g_{33}^- , g_{11}^+ , g_{22}^+ .

Теперь нетрудно найти выражения для компонент переноса ЕТВР g_{mn}^- , $g_m^{\bar{n}}$. В самом деле, учитывая (22.10) и (22.31), из (22.14) получаем

$$\begin{aligned} g_{II}^- &= g_{II}^- \left[1 + x^3 (g_I^{\bar{I}} - 1) \right], \quad \langle I = 1, 2 \rangle, & g_I^{\bar{I}} &= 1 + x^3 (g_I^{\bar{I}} - 1), \quad \langle I = 1, 2 \rangle, \\ g_{IJ}^- &= 0, \quad I \neq J, & g_I^{\bar{J}} &= 0, \quad I \neq J, \\ g_{I3}^- &= x^3 g_{I3}^+ = x^3 h \partial_I h, & g_I^{\bar{3}} &= x^3 g_I^{\bar{3}} = x^3 \frac{1}{h} \partial_I h, \\ g_{3J}^- &= g_{3J}^- = 0, & g_3^{\bar{I}} &= g_3^{\bar{I}}, \\ g_{33}^- &= g_{33}^- = h^2, & & \end{aligned} \quad (22.32)$$

Заметим, что из (22.25) легко получить

$$(x^3)_I = (1 - g_I^{\bar{I}})^{-1}, \quad \langle I = 1, 2 \rangle \quad (22.33)$$

и, учитывая (22.33), квадратный трехчлен (22.22) представится в виде

$$\overset{(-)}{\vartheta} = \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{1}} - 1)\right] \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{2}} - 1)\right]. \quad (22.34)$$

Теперь нетрудно получить выражения и для компонент переноса ЕТВР $g_{\pm}^{k\bar{l}}$, g_{\pm}^k . В самом деле, в силу (22.31) и (22.34) из (22.18) имеем

$$\begin{aligned} a_{\pm}^{\bar{1}} &= g_{\pm}^{\bar{2}} - 1, & a_{\pm}^{\bar{2}} &= g_{\pm}^{\bar{1}} - 1; & a_{\pm}^{\bar{J}} &= 0, & I &\neq J, \\ A_{\pm}^{\bar{1}} &= 1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{2}} - 1), & A_{\pm}^{\bar{2}} &= 1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{1}} - 1); & A_{\pm}^{\bar{K}} &= 0, & I &\neq K \end{aligned} \quad (22.35)$$

и, учитывая соотношения второй строки (22.35) в (22.20), получим искомые соотношения

$$\begin{aligned} g^{K\bar{K}} &= \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\pm}^K &= \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1}, \\ g^{K\bar{L}} &= 0, & K &\neq L, & g_{\pm}^K &= 0, & K &\neq L, \\ g^{K\bar{3}} &= 0, & g_{\pm}^K &= 0, \\ g^{3\bar{K}} &= -x^3 \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g_{\pm}^{\bar{3}} g^{\bar{K}\bar{K}}, & g_{\pm}^3 &= -x^3 \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-1} g_{\pm}^{\bar{3}}, \\ g^{3\bar{3}} &= g^{\bar{3}\bar{3}} = h^{-2}, & g_{\pm}^3 &= g_{\pm}^{\bar{3}} = 1, \\ & & & & & & & \langle K = 1, 2 \rangle. \end{aligned} \quad (22.36)$$

Здесь, конечно, $g_{\pm}^{\bar{3}} = h^{-1} \partial_K h$.

Следует заметить, что, имея выражения для компонент переноса ЕТВР, не представляет большого труда найти выражения и для компонент g_{pq} и g^{pq} ЕТВР, которые в силу (20.13) представляются в виде

$$g_{pq} = g_p^{\bar{n}} g_{nq}, \quad g^{pq} = g^{p\bar{m}} g_m^q. \quad (22.37)$$

Не останавливаясь на подробных представлениях (22.37) во всех рассмотренных выше случаях, приведем их выражения, только, когда вектор \mathbf{h} перпендикулярен к основной базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ и при этом координатные линии на ней являются линиями кривизны. На основании (22.32) и (22.36) из (22.37) получаем соответственно

$$\begin{aligned} g_{II} &= g_{\bar{I}\bar{I}} \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{I}} - 1)\right]^2 + (x^3 \partial_I h)^2, & \langle I = 1, 2 \rangle \\ g_{IJ} &= (x^3)^2 \partial_I h \partial_J h, & I &\neq J, & g_{I3} &= x^3 h \partial_I h, & g_{33} &= h^2; \\ g^{KK} &= g^{\bar{K}\bar{K}} \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-2}, & g^{K3} &= -x^3 g^{\bar{K}\bar{K}} g_{\pm}^{\bar{3}} \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{K}} - 1)\right]^{-2}, & \langle K = 1, 2 \rangle \\ g^{12} &= 0, & g^{33} &= h^{-2} + (x^3)^2 \left\{ g^{\bar{1}\bar{1}} (g_{\pm}^{\bar{3}})^2 \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{1}} - 1)\right]^{-2} + g^{\bar{2}\bar{2}} (g_{\pm}^{\bar{3}})^2 \left[1 + x^3(g_{\pm}^{\bar{2}} - 1)\right]^{-2} \right\}. \end{aligned} \quad (22.38)$$

23. ВЫРАЖЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ СЕМЕЙСТВ СИМВОЛОВ КРИСТОФФЕЛЯ ЧЕРЕЗ ОСНОВНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ЕТВР

Ограничимся рассмотрением $\overset{(\sim)}{S}_{(\sim)g}$ -семейств символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, а за основную базовую примем внутреннюю базовую поверхность S . Тогда по определению 20.32 (см. также

определение 22.1) основными компонентами ЕТВР являются компоненты $g_{\bar{p}\bar{q}}, g_{\bar{p}}, g^{\bar{p}\bar{q}}$ и компоненты переноса $g_{\bar{p}\bar{q}}, g_{\bar{p}}^{\bar{q}}$, и задача заключается в выражении символов Кристоффеля (20.28) через них. С целью разрешения этой задачи разобьем ее на две:

1. Выразим $S_{g^{(\sim)}}$ -семейства символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, +\}$, через основные компоненты ЕТВР.
2. Выразим S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР.

23.1. Выражение семейств символов Кристоффеля относительно базисов, связанных с лицевыми поверхностями, через основные компоненты ЕТВР. Аналогично (20.28) для $S_{g^{(\sim)}}$ -семейств символов Кристоффеля, $\sim \in \{-, +\}$, будем иметь

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}}, \quad \Gamma_{\check{p}\check{q}}^{\check{k}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{q}} \cdot \mathbf{r}^{\check{k}} = g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (23.1)$$

Заметим, что

$$\partial_Q \mathbf{r}_{\check{p}} = \partial_P \mathbf{r}_{\check{Q}}, \quad \partial_3 \mathbf{r}_{\check{p}} = 0, \quad \partial_Q \mathbf{r}_{\check{z}} \neq 0, \quad \partial_3 \mathbf{r}_{\check{p}} \neq \partial_P \mathbf{r}_{\check{z}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (23.2)$$

а в силу (20.3), (20.7) и (20.12) аналог формулы Вейнгартена представится в виде

$$\partial_p \mathbf{h} = \mathbf{r}_{\bar{p}}^+ - \mathbf{r}_{\bar{p}}^- = (g_{\bar{p}}^{\bar{q}} - g_{\bar{p}}^{\bar{q}}) \mathbf{r}_{\bar{q}} = (g_{\bar{p}\bar{q}}^+ - g_{\bar{p}\bar{q}}^-) \mathbf{r}_{\bar{q}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (23.3)$$

Нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} \sim (\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{z}}, \Gamma_{\check{z}\check{Q},\check{l}}, \Gamma_{\check{p}\check{z},\check{l}}), \quad \sim \in \{-, +\}.$$

На основании второго соотношения (23.2), (23.3) и определения (23.1) легко показать, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{z},\check{l}} = \mathbf{r}_{\check{p}\check{z}} \cdot \mathbf{r}_{\check{l}} = 0, \quad \Gamma_{\check{z}\check{Q},\check{l}} = g_{\check{Q}\check{l}}^+ - g_{\check{Q}\check{l}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}. \quad (23.4)$$

Кроме того,

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \frac{1}{2} (-\partial_L g_{\check{P}\check{Q}} + \partial_P g_{\check{Q}\check{L}} + \partial_Q g_{\check{L}\check{P}}) = \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \sim \in \{-, +\}, \quad (23.5)$$

где по соотношению первой строки (20.29) $\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}$ — $S_{g^{(\sim)}}$ -семейства символов Кристоффеля первого рода.

Далее на основании определения (23.1) и (23.3) имеем

$$\Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{z}} = \partial_Q \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h} = \partial_Q (\mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{r}_{\check{P}} \cdot \mathbf{h}_Q = \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}$$

и отсюда, учитывая второе соотношение (23.2), легко получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{z}} &= \Gamma_{\check{Q}\check{P},\check{z}} = \frac{1}{2} (\partial_P g_{\check{Q}\check{z}} + \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^- + g_{\check{Q}\check{P}}^-) = \\ &= \partial_Q g_{\check{P}\check{z}} - g_{\check{Q}\check{P}}^+ + g_{\check{Q}\check{P}}^- = \partial_P g_{\check{Q}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (23.6)$$

Не представляет большого труда найти выражения и для символов Кристоффеля второго рода. В самом деле, нетрудно заметить, что

$$\Gamma_{\check{p}\check{q}}^{\check{k}} \sim (\bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{z}\check{Q}}^{\check{k}}, \Gamma_{\check{p}\check{z}}^{\check{k}}),$$

и на основании определения (23.1) и (23.4)–(23.6) будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{\check{P}\check{Q}}^{\check{k}} &= g^{\check{k}\check{l}} \Gamma_{\check{P}\check{Q},\check{l}} = g^{\check{k}\check{z}} (\partial_P g_{\check{Q}\check{z}} - g_{\check{P}\check{Q}}^+ + g_{\check{P}\check{Q}}^-) + g^{\check{k}\check{L}} \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \\ \Gamma_{\check{z}\check{Q}}^{\check{k}} &= g_{\check{Q}}^{\check{k}} - g_{\check{Q}}^{\check{k}}, \quad \Gamma_{\check{p}\check{z}}^{\check{k}} = 0, \quad \sim \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (23.7)$$

Из полученных выше соотношений этого раздела при $\sim = -$ получаются соответствующие соотношения работы [30].

23.2. Выражение S_g -семейства символов Кристоффеля через основные компоненты ЕТВР.

Рассмотрим два способа нахождения выражений для S_g -семейства символов Кристоффеля. Первый заключается в нахождении связей между S_g - и $S_{(\sim)}$ -семействами символов Кристоффеля таким образом, что S_g -семейство символов оказалось бы определенным посредством $S_{(\sim)}$ -семейств символов, а второй — в определении S_g -семейства символов непосредственно через компоненты переноса ЕТВР.

В первом случае по более общим соотношениям (21.3) остается только лишь выписать искомые связи. В самом деле, при $\sim = \emptyset$, $\beta = \alpha$ из (21.3) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= g_{l\check{\alpha}} \left(\partial_q g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} + g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{\alpha}} \right) = g_{l\check{\alpha}} \left(\partial_q g_{p\check{\alpha}} - g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{q},\check{m}} \right), \\ \Gamma_{pq}^s &= g^{sl} \Gamma_{pq,l} = g_{\check{n}}^s \left(\partial_q g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} + g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{m}\check{q}}^{\check{\alpha}} \right) = g^{s\check{n}} \left(\partial_q g_{p\check{\alpha}} - g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{q},\check{m}} \right), \\ \sim, \check{\alpha} &\in \{-, +\} \forall \alpha.\end{aligned}\quad (23.8)$$

Далее, учитывая (20.11) и (23.4) — (23.6) подходящим образом в (23.8), окончательно получим искомые выражения для S_g -семейств символов Кристоффеля, на выписывании которых останавливаться не будем.

Во втором способе нахождения выражения для S_g -семейств символов Кристоффеля поступаем следующим образом: сначала выписываем представления S_g -семейств символов Кристоффеля через S_g -семейства компонент ЕТВР, а затем учитываем по (20.14) то, что $g_{rs} = g_{r\check{n}} g_s^{\check{n}}$, $\check{\alpha} \in \{-, +\}$. В результате, например, для S_g -семейств символов Кристоффеля первого рода будем иметь

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2} \left(-\partial_l g_{pq} + \partial_p g_{ql} + \partial_q g_{lp} \right) = \frac{1}{2} \left[-\partial_l (g_{p\check{n}} g_q^{\check{n}}) + \partial_p (g_{q\check{n}} g_l^{\check{n}}) + \partial_q (g_{l\check{n}} g_p^{\check{n}}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[-(\partial_l g_{p\check{n}}) g_q^{\check{n}} - g_{p\check{n}} \partial_l g_q^{\check{n}} + (\partial_p g_{q\check{n}}) g_l^{\check{n}} + g_{q\check{n}} \partial_p g_l^{\check{n}} + (\partial_q g_{l\check{n}}) g_p^{\check{n}} + g_{l\check{n}} \partial_q g_p^{\check{n}} \right], \\ \check{\alpha} &\in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (23.9)$$

Теперь, подставляя (20.11) в (23.9), получим искомое выражение. Однако с целью сокращения письма подставим выражения (20.11) не для всех компонент переноса, а только для тех, которые стоят под операцией дифференцирования. В результате получим

$$\begin{aligned}\Gamma_{pq,l} &= \frac{1}{2} \left\{ -\left\{ \partial_l g_{p\check{n}} + \partial_l [x^3 (g_{p\check{n}}^+ - g_{p\check{n}}^-)] \right\} g_q^{\check{n}} - g_{p\check{n}} \partial_l [x^3 (g_q^{\check{n}}^+ - g_q^{\check{n}}^-)] + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_p g_{q\check{n}} + \partial_p [x^3 (g_{q\check{n}}^+ - g_{q\check{n}}^-)] \right\} g_l^{\check{n}} + g_{q\check{n}} \partial_p [x^3 (g_l^{\check{n}}^+ - g_l^{\check{n}}^-)] \right\} + \\ &\quad \left. + \left\{ \partial_q g_{l\check{n}} + \partial_q [x^3 (g_{l\check{n}}^+ - g_{l\check{n}}^-)] \right\} g_p^{\check{n}} + g_{l\check{n}} \partial_q [x^3 (g_p^{\check{n}}^+ - g_p^{\check{n}}^-)] \right\}, \quad \check{\alpha} \in \{-, +\}.\end{aligned}\quad (23.10)$$

Видно, что в связи с громоздкостью записи соотношения (23.10) предпочтительно пользоваться соотношениями (23.8).

Следует заметить, что, например, в силу первого соотношения (23.8) получаем

$$\begin{aligned}\Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} &= \Gamma'_{\check{q}\check{p},\check{l}} = g_{\check{q}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} = g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}} = \\ &= \frac{1}{2} (g_{\check{p}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{q},\check{l}} + g_{\check{q}}^{\check{\alpha}} \Gamma_{\check{\alpha}\check{p},\check{l}} + \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}} + \Gamma_{\check{q}\check{p},\check{l}}), \quad \check{\alpha} \in \{-, +\}, \\ \Gamma_{pq,l} \Big|_{x^3=0}^{\check{\alpha}=-} &= \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \Gamma_{pq,l} \Big|_{x^3=1}^{\check{\alpha}=+} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}},\end{aligned}$$

где

$$\Gamma_{pq,l} \Big|_{x^3=0} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} \Big|_{\check{\alpha}=-} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \Gamma_{pq,l} \Big|_{x^3=1} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} \Big|_{\check{\alpha}=+} = \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}}$$

Отсюда в свою очередь легко заключаем, что

$$\Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} \neq \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \Gamma'_{\check{p}\check{q},\check{l}} = \Gamma_{\check{p}\check{q},\check{l}}, \quad \check{\alpha} \in \{-, +\}.$$

24. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОМПОНЕНТ ВТОРЫХ ТЕНЗОРОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОСРЕДСТВОМ ОСНОВНЫХ КОМПОНЕНТ ЕТВР

Зная выражения различных семейств символов Кристоффеля, не представляет большого труда найти представления компонент вторых тензоров поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, по определению [5, 54] компоненты вторых тензоров поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, представляются в виде

$$\overset{(\sim)}{b}_{\tilde{P}\tilde{Q}} = \frac{1}{\sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}}} \Gamma_{\tilde{P}\tilde{Q}}^{\tilde{3}} = \sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}} \Gamma_{\tilde{P}\tilde{Q},\tilde{3}} + (g^{\tilde{3}\tilde{L}}/\sqrt{g^{\tilde{3}\tilde{3}}}) \bar{\Gamma}_{\tilde{P}\tilde{Q},\tilde{L}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}. \quad (24.1)$$

24.1. Представление компонент второго тензора поверхности S посредством основных компонент ЕТВР. Подставляя подходящие выражения для символов Кристоффеля, получаемые на основании (23.8) и (23.10), поочередно в (24.1), будем иметь соответствующие представления для компонент второго тензора поверхности S. Однако с целью сокращения письма всех их выписывать не будем. Выпишем компоненты второго тензора поверхности S посредством основных компонент ЕТВР в том случае, когда за основную базовую поверхность принимается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$. В этой связи, представляя (24.1) в виде

$$b_{IJ} = (1/\sqrt{g^{33}}) \Gamma_{IJ}^3 = \frac{1}{2\sqrt{g^{33}}} g^{3k} (-\partial_k g_{IJ} + \partial_I g_{Jk} + \partial_J g_{kI})$$

и учитывая (20.14), после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} b_{IJ} = & \frac{1}{2} \sqrt{g^{33}} [(1-x^3)(\partial_I g_{J\bar{3}} + \partial_I g_{J\bar{3}} + 2g_{I\bar{J}}) - (1-2x^3)(g_{I\bar{J}}^+ + g_{I\bar{J}}^-) + \\ & + x^3(\partial_J g_{I\bar{3}}^+ + \partial_I g_{J\bar{3}}^- - 2g_{I\bar{J}}^+)] + \\ & + \frac{1}{2} (g^{K3}/\sqrt{g^{33}}) [(1-x^3)^2(\partial_I g_{J\bar{K}} + \partial_J g_{I\bar{K}} - \partial_K g_{I\bar{J}}) + \\ & + x^3(1-x^3)(\partial_I g_{J\bar{K}}^+ + \partial_J g_{I\bar{K}}^- + \partial_I g_{J\bar{K}}^+ + \partial_J g_{I\bar{K}}^- - \partial_K g_{I\bar{J}}^+ - \partial_K g_{I\bar{J}}^-) + \\ & + (x^3)^2(\partial_I g_{J\bar{K}}^+ + \partial_J g_{I\bar{K}}^- - \partial_K g_{I\bar{J}}^+)]. \end{aligned} \quad (24.2)$$

Учитывая $g_{pq}^+ = g_{\bar{p}\bar{q}}^-$ и, кроме того, выражения g^{33} и g^{K3} через основные компоненты ЕТВР, окончательно получим искомое представление для b_{IJ} .

24.2. Представление компонент вторых тензоров лицевых поверхностей посредством основных компонент ЕТВР. Учитывая (23.6) и (23.7), из (24.1) при $\sim = \smile \in \{-, +\}$ получаем искомые представления для компонент вторых тензоров поверхностей $\overset{(\smile)}{S}$, $\smile \in \{-, +\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \overset{(\smile)}{b}_{\check{P}\check{Q}} = & \frac{1}{2} \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (\partial_P g_{\check{Q}\check{3}} + \partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{P\check{Q}}^+ - g_{Q\check{P}}^+ + g_{P\check{Q}}^- + g_{Q\check{P}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}) \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \\ = & \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (\partial_Q g_{\check{P}\check{3}} - g_{Q\check{P}}^+ + g_{Q\check{P}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}) \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}} = \\ = & \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (\partial_P g_{\check{Q}\check{3}} - g_{P\check{Q}}^+ + g_{P\check{Q}}^-) + (g^{\check{3}\check{L}}/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}) \bar{\Gamma}_{\check{P}\check{Q},\check{L}}, \quad \smile \in \{-, +\}. \end{aligned} \quad (24.3)$$

Следует заметить, что (24.3) при $\smile = -(\smile = +)$ можно еще получить из (24.2) при $x^3 = 0$ ($x^3 = 1$).

Теперь рассмотрим частные случаи:

а. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$. В этом случае выполняются условия (22.8) и поэтому, как легко усмотреть, из (24.3) при $\smile = -$ получаем

$$\overset{(-)}{b}_{\bar{P}\bar{Q}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (2g_{\bar{P}\bar{Q}}^- - g_{\bar{P}\bar{Q}}^+ - g_{\bar{Q}\bar{P}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^- - g_{\bar{Q}\bar{P}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{\bar{P}\bar{Q}}^- - g_{\bar{P}\bar{Q}}^+). \quad (24.4)$$

Нетрудно заметить, что из (24.4) следует (22.11).

С целью сокращения письма в рассматриваемом случае на выписывании (24.2) останавливаться не будем.

б. Вектор \mathbf{h} перпендикулярен к внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, и область тонкого тела имеет постоянную толщину ($h = |\mathbf{h}| = \text{const}$). Нетрудно увидеть, что в рассматриваемом случае имеет место (22.10), и так как $h = \text{const}$, из них получаем

$$g_{I\bar{3}}^+ = h\partial_I h = 0, \quad g_{I\bar{3}}^- = h^{-1}\partial_I h = 0 \quad \text{при } \mathbf{h} \perp \overset{(-)}{S}, \quad h = |\mathbf{h}| = \text{const}. \quad (24.5)$$

Учитывая эти последние соотношения, из соответствующих соотношений (22.26) и (22.27) имеем

$$g_P^{\bar{3}} = x^3 g_P^{\bar{3}} = 0, \quad g_K^{\bar{3}} = 0, \quad g^{33} = g^{3\bar{n}} g_n^{\bar{3}} = g^{\bar{3}\bar{3}}. \quad (24.6)$$

В силу (24.1) при $\sim = -$ и (24.6) из второго соотношения (23.8) при $\smile = -$ получаем

$$\Gamma_{PQ}^{\bar{3}} = g_P^{\bar{M}} \Gamma_{MQ}^{\bar{3}}. \quad (24.7)$$

Подставляя (24.7) в (24.1) при $\sim = \emptyset$ и учитывая последнее соотношение (24.6), получаем

$$b_{PQ} = g_P^{\bar{M}} b_{MQ}^{\bar{3}} = g_{PM}^{\bar{M}} b_{\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_P^{\bar{N}} b_{\bar{N}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{P\bar{N}}^{\bar{N}} b_{\bar{Q}}^{\bar{3}},$$

где последние два равенства получаются аналогично.

Из последнего соотношения имеем

$$b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{P\bar{M}} b_{MQ}^{\bar{3}} = g_{\bar{M}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{3}} = g^{P\bar{N}} b_{\bar{N}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{N}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{3}}.$$

Легко усмотреть, что последние два соотношения можно представить в следующих кратких формах:

$$b_{PQ} = g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{P\bar{M}}^{\bar{M}} b_{\bar{Q}}^{\bar{3}}, \quad b_Q^P = g^{PK} b_{KQ} = g^{P\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{M}}^P b_{\bar{Q}}^{\bar{3}}, \quad \smile \in \{-, +\}. \quad (24.8)$$

Получим обратные к (24.8) соотношения. Умножая, например, первое равенство первого соотношения (24.8) на g_L^P с последующим суммированием по P и учитывая соотношение (20.13), получаем

$$(g_L^P g_P^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}) \Rightarrow (g_L^{\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}) \Rightarrow (b_{L\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_L^P b_{PQ}).$$

Таким образом,

$$(b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}}^L b_{LQ} = g_{\bar{P}L} b_Q^L) \Rightarrow (b_{\bar{Q}}^{\bar{P}} = g^{\bar{P}\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g^{\bar{P}L} b_{LQ} = g_{\bar{L}}^{\bar{P}} b_Q^L), \quad \smile \in \{-, +\}, \quad (24.9)$$

и верны соотношения

$$(b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}}^{\bar{L}} b_{\bar{L}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{P}\bar{L}}^{\bar{L}} b_{\bar{Q}}^{\bar{3}}) \Rightarrow (b_{\bar{Q}}^{\bar{P}} = g^{\bar{P}\bar{M}} b_{\bar{M}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g^{\bar{P}\bar{L}} b_{\bar{L}\bar{Q}}^{\bar{3}} = g_{\bar{L}}^{\bar{P}} b_{\bar{Q}}^{\bar{3}}), \quad (24.10)$$

$\sim, \smile \in \{-, \emptyset, +\}.$

Очевидно, соотношения (24.10) содержат (24.8) и (24.9).

Теперь, учитывая, что в силу первого соотношения (24.5) \mathbf{h} перпендикулярен и поверхности $\overset{(+)}{S}$ ($\mathbf{h} \perp \overset{(+)}{S}$), аналогично (24.4) из (24.3) получаем

$$b_{P\bar{Q}}^{\bar{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{P\bar{Q}}^- + g_{Q\bar{P}}^- - 2g_{P\bar{Q}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{P\bar{Q}}^- - g_{P\bar{Q}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{Q\bar{P}}^- - g_{Q\bar{P}}^+). \quad (24.11)$$

Соотношения (24.4) и (24.11) можно объединить и записать одним соотношением:

$$b_{\bar{P}\bar{Q}}^{\bar{3}} = \frac{1}{2} \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{P\bar{Q}}^- + g_{Q\bar{P}}^- - g_{P\bar{Q}}^+ - g_{Q\bar{P}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{P\bar{Q}}^- - g_{P\bar{Q}}^+) = \sqrt{g^{\bar{3}\bar{3}}} (g_{Q\bar{P}}^- - g_{Q\bar{P}}^+), \quad \smile \in \{-, +\}, \quad (24.12)$$

непосредственно следующим еще из (24.3).

24.2.1. *Представление средних и гауссовых кривизн поверхностей посредством основных компонент ЕТВР.* Имея выражения для вторых тензоров поверхностей через основные компоненты ЕТВР, не представляет большого труда найти аналогичные представления для средних и гауссовых кривизн тех же поверхностей. В самом деле, обозначая средние и гауссовы кривизны поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$ через $\overset{(\sim)}{H}$ и $\overset{(\sim)}{K}$ соответственно, где $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, по их определениям [5, 11, 51, 54] будем иметь

$$\begin{aligned} 2\overset{(\sim)}{H} &= \overset{(\sim)}{k}_1 + \overset{(\sim)}{k}_2 = \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}} = \overset{(\sim)}{g}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}\check{J}} = (1/\sqrt{g^{\check{3}\check{3}}}) g^{\check{I}\check{J}} \Gamma_{\check{I}\check{J}}^{\check{3}}, \\ \overset{(\sim)}{K} &= \overset{(\sim)}{k}_1 \overset{(\sim)}{k}_2 = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{J}} = \frac{1}{2} \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\check{L}\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{I}\check{L}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{J}\check{M}} = \\ &= (1/(2g^{\check{3}\check{3}})) \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} \overset{(\sim)}{C}^{\check{L}\check{M}} \Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{3}}, \quad \sim \in \{-, \emptyset, +\}, \end{aligned} \quad (24.13)$$

где $\overset{(\sim)}{k}_1$ и $\overset{(\sim)}{k}_2$ — главные кривизны поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, а $\overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}} = \overset{(\sim)}{C}^{\check{I}\check{J}\check{3}} = (\mathbf{r}^{\check{I}} \times \mathbf{r}^{\check{J}}) \cdot \mathbf{r}^{\check{3}}$, $\overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}} = \overset{(\sim)}{C}_{\check{L}\check{M}\check{3}} = (\mathbf{r}_{\check{L}} \times \mathbf{r}_{\check{M}}) \cdot \mathbf{r}_{\check{3}}$ — компоненты дискриминантного тензора в рассматриваемой точке $M \in \overset{(\sim)}{S}$, где $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$.

Для представления средних и гауссовых кривизн поверхностей $\overset{(\sim)}{S}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$, с помощью основных компонент переноса ЕТВР остается лишь соответствующим образом подставить (24.2) и (24.3) (или выражения символов Кристоффеля $\Gamma_{\check{I}\check{J}}^{\check{3}}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$) из первого соотношения (23.7), а $\Gamma_{\check{I}\check{J}}^{\check{3}}$ из второго соотношения (23.8)) в (24.13), однако с целью сокращения письма в общем случае этими подстановками заниматься не будем. Более подробно рассмотрим случай, когда $\mathbf{h} \perp \overset{(\sim)}{S}$ и область тонкого тела имеет постоянную толщину ($h = |\mathbf{h}| = \text{const}$). В этом случае из первого соотношения (24.8) с учетом (24.12) имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= g_P^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} g_P^{\check{M}} (g_{\check{Q}\check{M}}^- - g_{\check{Q}\check{M}}^+) = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) = \\ &= [(1-x^3)g_P^{\check{M}} + x^3 g_P^{\check{M}}] \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = [(1-x^3) \overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^- + x^3 \overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^+] = \\ &= (1-x^3) \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) + x^3 \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{P\check{Q}}^+ - g_{P\check{Q}}^+). \end{aligned}$$

Аналогично из второго соотношения (24.8) с учетом (24.12) получаем

$$b_Q^P = g^{P\check{N}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{Q}\check{N}} = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} g^{P\check{N}} (g_{\check{Q}\check{N}}^- - g_{\check{Q}\check{N}}^+) = \sqrt{g^{\check{3}\check{3}}} (g_{\check{Q}}^P - g_{\check{Q}}^P).$$

Таким образом, учитывая, что $g^{\check{3}\check{3}} = h^{-1}$, имеем

$$\begin{aligned} b_{PQ} &= h^{-1} (g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) = h^{-1} [(1-x^3)(g_{P\check{Q}}^- - g_{P\check{Q}}^+) + x^3 (g_{P\check{Q}}^+ - g_{P\check{Q}}^+)] = \\ &= g_P^{\check{M}} \overset{(\sim)}{b}_{\check{M}\check{Q}} = (1-x^3) \overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^- + x^3 \overset{(\sim)}{b}_{P\check{Q}}^+, \\ b_Q^P &= h^{-1} g_{\check{N}}^P (g_{\check{Q}}^{\check{N}} - g_{\check{Q}}^{\check{N}}) = h^{-1} (g_{\check{Q}}^P - g_{\check{Q}}^P). \end{aligned} \quad (24.14)$$

Следует заметить, что первое соотношение (24.14) легко получается еще из (24.2), если учесть, что в рассматриваемом случае имеют место (22.8), (24.5), (24.6) и кроме того, $\mathbf{h} \perp S$, т. е. $g_{I\check{3}} = 0$, $g^{\check{I}\check{3}} = 0$.

Теперь нетрудно найти выражения для средней и гауссовой кривизн поверхности S через основные компоненты ЕТВР. В самом деле, на основании первого соотношения (24.13) при $\sim = \emptyset$ и второго соотношения (24.14) для средней кривизны имеем

$$2H = b_1^1 + b_2^2 = h^{-1} (g_{\check{I}}^{\check{I}} - g_{\check{I}}^{\check{I}}) = h^{-1} g_{\check{N}}^{\check{I}} (g_{\check{I}}^{\check{N}} - g_{\check{I}}^{\check{N}}),$$

а в силу второго соотношения (24.13) при $\smile = \emptyset$ и второго соотношения (24.14) для гауссовой кривизны получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= h^{-2} \frac{1}{2} C^{IJ} C_{LM} (g_{\bar{I}}^L - g_{\bar{I}}^L) (g_{\bar{J}}^M - g_{\bar{J}}^M) = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^L - g_{\bar{I}}^L) = h^{-2} \det[g_{\bar{N}}^L (g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{I}}^{\bar{N}})] = \\ &= h^{-2} \det(g_{\bar{N}}^L) \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{\bar{I}}^{\bar{M}}) = \det(g_{\bar{N}}^L) [h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{\bar{I}}^{\bar{M}})]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$2\mathbf{H} = h^{-1} (g_{\bar{I}}^I - g_{\bar{I}}^I) = h^{-1} g_{\bar{N}}^I (g_{\bar{I}}^{\bar{N}} - g_{\bar{I}}^{\bar{N}}), \quad \mathbf{K} = \det(g_{\bar{N}}^L) [h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{\bar{I}}^{\bar{M}})]. \quad (24.15)$$

Соотношения (24.15) можно представить и в других формах. Нетрудно заметить, что из (24.15) для средней и гауссовой кривизн внутренней базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$ имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{H} &= 2\mathbf{H}|_{x=0} = h^{-1} (g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + g_{\bar{I}}^{\bar{I}}) = h^{-1} (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}}), \\ \mathbf{K} &= \mathbf{K}|_{x=0} = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{\bar{I}}^{\bar{M}}) = h^{-2} \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon_{LM} (g_{\bar{I}}^{\bar{L}} - g_{\bar{I}}^{\bar{L}}) (g_{\bar{J}}^{\bar{M}} + g_{\bar{J}}^{\bar{M}}) = h^{-2} (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{J}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}). \end{aligned}$$

Итак,

$$2\mathbf{H} = h^{-1} (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}}), \quad \mathbf{K} = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\bar{M}} - g_{\bar{I}}^{\bar{M}}) = h^{-2} (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{J}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}). \quad (24.16)$$

Аналогично из (24.15) при $x^3 = 1$ для средней и гауссовой кривизн внешней базовой поверхности $\overset{(+)}{S}$ имеем

$$2\mathbf{H} = h^{-1} (g_{\bar{I}}^{\dagger} - 2), \quad \mathbf{K} = h^{-2} (1 - g_{\bar{I}}^{\dagger} + \overset{(\pm)}{\vartheta}) = h^{-2} \det(g_{\bar{I}}^{\dagger}) \overset{(-)}{\mathbf{K}} = \overset{(\pm)}{\vartheta} \overset{(-)}{\mathbf{K}}. \quad (24.17)$$

Заметим, что соотношения (24.16) и (24.17) можно было бы еще получить из (24.13) с учетом (24.12).

Как видно, в соотношениях (24.17) участвуют компоненты $g_{\bar{I}}^{\dagger}$, и так как в качестве основной базовой рассматривается внутренняя базовая поверхность $\overset{(-)}{S}$, то кинематические характеристики целесообразно определить с помощью основных компонент ЕТВР.

В силу первых соотношений (20.19) и (20.25) имеем соответственно

$$\overset{(\pm)}{\vartheta} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1}, \quad g_{\bar{I}}^{\dagger} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} g_{\bar{K}}^{\bar{K}}, \quad (K = 1, 2). \quad (24.18)$$

Учитывая (24.18) в (24.17), получим их выражения через основные компоненты ЕТВР:

$$2\mathbf{H} = h^{-1} (\overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} g_{\bar{K}}^{\bar{K}} - 2) = 2 \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} [h^{-1} (1 - \overset{(\mp)}{\vartheta}) - \overset{(-)}{\mathbf{H}}], \quad \mathbf{K} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} \overset{(-)}{\mathbf{K}}. \quad (24.19)$$

При получении последнего равенства первого соотношения (24.19) были использованы еще соотношения (24.16).

Легко усмотреть, что в силу (20.16) и (20.18) имеем

$$\overset{(+)}{\vartheta} = \sqrt{g \overset{(+)}{g}^{-1}} = \sqrt{g \overset{(-)}{g}^{-1}} \sqrt{\overset{(-)}{g} \overset{(+)}{g}^{-1}} = \sqrt{\overset{(-)}{g} \overset{(+)}{g}^{-1}} \overset{(-)}{\vartheta} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} \overset{(-)}{\vartheta},$$

а первое соотношение (20.20) с учетом (24.16) можно также представить в виде

$$\overset{(-)}{\vartheta} = 1 - x^3 (2 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}}) + (x^3)^2 (1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \overset{(\mp)}{\vartheta}) = 1 - 2(hx^3) \overset{(-)}{\mathbf{H}} + (hx^3)^2 \overset{(-)}{\mathbf{K}}.$$

Таким образом,

$$\overset{(-)}{\vartheta} = 1 - 2(hx^3) \overset{(-)}{\mathbf{H}} + (hx^3)^2 \overset{(-)}{\mathbf{K}}, \quad \overset{(+)}{\vartheta} = \overset{(\mp)}{\vartheta}^{-1} \overset{(-)}{\vartheta}. \quad (24.20)$$

Рассматривая (24.16) как систему и разрешая относительно $g_{\pm}^{\bar{I}}$ и $\vartheta^{(\mp)}$, получаем

$$g_{\pm}^{\bar{I}} = 2(1 - h\bar{H}), \quad \vartheta^{(\mp)} = 1 - 2h\bar{H} + h^2\bar{K}. \quad (24.21)$$

Заметим, что второе соотношение (24.21) можно также получить из первого соотношения (24.20) при $x^3 = 0$.

Нетрудно определить и компоненты $g_{\pm}^{\bar{q}}$ с помощью компонент $g_{\pm}^{\bar{n}}$. В самом деле, эти компоненты в силу (20.13) образуют взаимно обратные матрицы и поэтому удовлетворяют соотношению

$$g_{\pm}^{\bar{m}} g_{\pm}^{\bar{n}} = g_{\pm}^{\bar{m}}. \quad (24.22)$$

Рассматривая (24.22) как систему уравнений относительно неизвестных $g_{\pm}^{\bar{p}}$ и разрешая ее, приходим к соотношению

$$g_{\pm}^{\bar{p}} = \frac{1}{2} [\det(g_{\pm}^{\bar{n}})]^{-1} \epsilon_{lmn} \epsilon^{pqs} g_{\pm}^{\bar{m}} g_{\pm}^{\bar{n}} = \frac{1}{2} \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{lmn} \epsilon^{pqs} g_{\pm}^{\bar{m}} g_{\pm}^{\bar{n}}. \quad (24.23)$$

Из (24.23) в свою очередь легко получаем

$$g_{\pm}^{\bar{P}} = \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{LM} \epsilon^{QS} g_{\pm}^{\bar{M}}, \quad g_{\pm}^{\bar{L}} = \vartheta^{(\mp)-1} \epsilon_{LM} \epsilon^{QS} g_{\pm}^{\bar{M}} g_{\pm}^{\bar{S}}, \quad g_{\pm}^{\bar{3}} = g_{\pm}^{\bar{P}}. \quad (24.24)$$

Следует заметить, что (24.24) можно было бы вывести и из соответствующих соотношений второго столбца (22.20) при $x^3 = 1$.

Теперь вернемся к соотношениям (24.15) и придадим им другой вид. Из первого соотношения (24.15) с учетом второго соотношения первой строки (22.20) и (24.16) и из второго соотношения (24.15) с учетом (20.16) и второго соотношения (24.16) получаем соответственно

$$\begin{aligned} 2\bar{H} &= h^{-1} \vartheta^{(-)-1} \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} [g_{\pm}^{\bar{L}} + x^3(g_{\pm}^{\bar{L}} - g_{\pm}^{\bar{P}})] (g_{\pm}^{\bar{N}} - g_{\pm}^{\bar{I}}) = \\ &= h^{-1} \vartheta^{(-)-1} \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} [g_{\pm}^{\bar{L}} g_{\pm}^{\bar{N}} - g_{\pm}^{\bar{L}} g_{\pm}^{\bar{I}} - x^3(g_{\pm}^{\bar{N}} - g_{\pm}^{\bar{I}})(g_{\pm}^{\bar{L}} - g_{\pm}^{\bar{P}})] = \\ &= h^{-1} \vartheta^{(-)-1} [\epsilon^{IL} \epsilon_{IL} - \epsilon^{IL} \epsilon_{NL} g_{\pm}^{\bar{N}} - x^3 \epsilon^{IP} \epsilon_{NL} (g_{\pm}^{\bar{N}} - g_{\pm}^{\bar{I}})(g_{\pm}^{\bar{L}} - g_{\pm}^{\bar{P}})] = \\ &= h^{-1} \vartheta^{(-)-1} [2 - g_{\pm}^{\bar{I}} - 2(x^3 h^2 \bar{K})] = 2 \vartheta^{(-)-1} (\bar{H} - x^3 h \bar{K}), \quad \bar{K} = \vartheta^{(-)-1} \bar{K}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{H} = \vartheta^{(-)-1} (\bar{H} - x^3 h \bar{K}), \quad \bar{K} = \vartheta^{(-)-1} \bar{K}. \quad (24.25)$$

Нетрудно заметить, что соотношения (24.17) можно также получить из (24.25) при $x^3 = 1$ соответственно.

24.2.2. Представления компонент переноса и компонент ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3 . Заметим, что в дальнейшем для нахождения моментов различных величин нам понадобятся представления компонент переноса $g_{\pm}^{\bar{P}}$, $g_{\pm}^{\bar{3}}$ и компонент $g_{\pm}^{\bar{P}M}$, $g_{\pm}^{\bar{P}3}$, $g_{\pm}^{\bar{3}3}$ ЕТВР в виде степенных рядов относительно x^3 . Очевидно, эти представления можно найти различными способами. Мы остановимся на двух из них. Первым способом представим $g_{\pm}^{\bar{P}}$ в виде суммы простых дробей, а потом в искомом виде. Прежде всего с целью сокращения письма запишем (22.22) в удобной форме

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3)^2 - 2bx^3 + 1, \quad (24.26)$$

где введены обозначения

$$a = (1 - g_{\pm}^{\bar{1}})(1 - g_{\pm}^{\bar{2}}) + g_{\pm}^{\bar{2}} g_{\pm}^{\bar{1}} = 1 - \text{tr}(g_{\pm}^{\bar{J}}) + \det(g_{\pm}^{\bar{J}}), \quad 2b = 2 - g_{\pm}^{\bar{I}} = 2 - \text{tr}(g_{\pm}^{\bar{J}}). \quad (24.27)$$

Нетрудно заметить, что с помощью a и b значения x^3 , при которых квадратный трехчлен обращается в нуль (22.25), вычисляются по формулам

$$x_1^3 = \frac{b + \sqrt{b^2 - a}}{a}, \quad x_2^3 = \frac{b - \sqrt{b^2 - a}}{a}. \quad (24.28)$$

По теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 = \frac{2b}{a}, \\ x_1^3 \cdot x_2^3 = \frac{1}{a}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{x_1^3 \cdot x_2^3}, \\ b = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \right). \end{cases} \quad (24.29)$$

Квадратный трехчлен (24.26), очевидно, можно представить в виде следующего разложения:

$$\vartheta^{(-)} = a(x^3 - x_1^3)(x^3 - x_2^3) = a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3). \quad (24.30)$$

В силу первого соотношения (22.18), соответствующего соотношения (22.20) и (24.30) получаем

$$g_{\bar{M}}^P = \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^P = \frac{a_{\bar{M}}^P x^3 + g_{\bar{M}}^P}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)} = \frac{A}{a(x_1^3 - x^3)} + \frac{B}{a(x_2^3 - x^3)} = \frac{Ax_2^3 + Bx_1^3 - (A+B)x^3}{a(x_1^3 - x^3)(x_2^3 - x^3)}.$$

Отсюда для A и B следуют выражения

$$\begin{cases} A + B = -a_{\bar{M}}^P, \\ Ax_2^3 + Bx_1^3 = g_{\bar{M}}^P, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left(g_{\bar{M}}^P + x_1^3 a_{\bar{M}}^P \right), \\ B = \frac{1}{x_1^3 - x_2^3} \left(g_{\bar{M}}^P + x_2^3 a_{\bar{M}}^P \right). \end{cases}$$

Подставляя выражения для A и B в предыдущее соотношение, будем иметь

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P &= \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^P = \frac{g_{\bar{M}}^P + x_1^3 a_{\bar{M}}^P}{a(x_2^3 - x_1^3)} (x_1^3 - x^3)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^P + x_2^3 a_{\bar{M}}^P}{a(x_2^3 - x_1^3)} (x_2^3 - x^3)^{-1} = \\ &= \frac{g_{\bar{M}}^P + x_1^3 a_{\bar{M}}^P}{ax_1^3(x_2^3 - x_1^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^P + x_2^3 a_{\bar{M}}^P}{ax_2^3(x_2^3 - x_1^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

т. е.

$$g_{\bar{M}}^P = \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^P = \frac{g_{\bar{M}}^P + x_1^3 a_{\bar{M}}^P}{ax_1^3(x_2^3 - x_1^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - \frac{g_{\bar{M}}^P + x_2^3 a_{\bar{M}}^P}{ax_2^3(x_2^3 - x_1^3)} \left(1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1}, \quad (24.31)$$

Учитывая в (24.31) значение a из (24.29), получим

$$\begin{aligned} g_{\bar{M}}^P &= \vartheta^{(-) -1} A_{\bar{M}}^P = \\ &= \frac{1}{x_2^3 - x_1^3} \left[x_2^3 \left(g_{\bar{M}}^P + x_1^3 a_{\bar{M}}^P \right) \left(1 - \frac{x^3}{x_1^3} \right)^{-1} - x_1^3 \left(g_{\bar{M}}^P + x_2^3 a_{\bar{M}}^P \right) \left(1 - \frac{x^3}{x_2^3} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (24.32)$$

Заметим, что по (24.27) a и b — инварианты, тогда в силу (24.28) инварианты $-$ и x_1^3 , и x_2^3 , т. е. свойства x_1^3 и x_2^3 не зависят от выбора системы координат. Выбирая в качестве координатных линий на базовой поверхности S линии кривизны при $\mathbf{h} \perp S$, на основании первого соотношения (24.20) имеем

$$b = h\bar{H} = \frac{h}{2} (\bar{k}_1 + \bar{k}_2) = \frac{h}{2} (\bar{R}_1^{-1} + \bar{R}_2^{-1}), \quad a = h^2 \bar{K} = h^2 \bar{k}_1 \bar{k}_2 = h^2 \bar{R}_1^{-1} \bar{R}_2^{-1}, \quad (24.33)$$

где $\overset{(-)}{k}_1$ и $\overset{(-)}{k}_2$ — главные кривизны, а $\overset{(-)}{R}_1^{-1} = \overset{(-)}{k}_1$ и $\overset{(-)}{R}_2^{-1} = \overset{(-)}{k}_2$ — главные радиусы кривизны базовой поверхности $\overset{(-)}{S}$, h — толщина оболочки. Учитывая (24.33), из (24.28) находим

$$x_1^3 = (h \overset{(-)}{k}_1)^{-1} = \frac{\overset{(-)}{R}_1}{h}, \quad x_2^3 = (h \overset{(-)}{k}_2)^{-1} = \frac{\overset{(-)}{R}_2}{h}, \quad (24.34)$$

где $h(\delta_{I1} + \delta_{I2}) < \overset{(-)}{R}_I$. Тогда из (24.34) следует, что $|x_I^3| = |\overset{(-)}{R}_I/h| > 1$. Это условие в силу инвариантности x_I^3 выполняется относительно любой системы координат. Так как $0 \leq x^3 \leq 1$, то

$$0 \leq \left| \frac{x^3}{x_I^3} \right| < 1. \quad (24.35)$$

В силу (24.35), функции

$$f_I \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right) = \left(1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1}, \quad I = 1, 2$$

являются суммами бесконечных убывающих геометрических прогрессий с знаменателями x^3/x_I^3 , $I = 1, 2$, т. е.

$$\left(1 - \frac{x^3}{x_I^3} \right)^{-1} = \frac{1}{1 - x^3/x_I^3} = 1 + \frac{x^3}{x_I^3} + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^2 + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^3 + \left(\frac{x^3}{x_I^3} \right)^4 + \dots \quad (24.36)$$

Подставляя (24.36) в (24.32), получим представление g_M^P в виде степенного ряда относительно x^3 . В самом деле, осуществляя простые выкладки, получаем

$$g_M^P = \sum_{k=0}^{\infty} A_{(k)_M}^{\bar{P}} (x^3)^k, \quad (24.37)$$

где

$$A_{(k)_M}^{\bar{P}} = g_M^{\bar{P}} a_k + a_{(k)_M}^{\bar{P}} a_{k-1}, \quad a_k = \frac{(x_2^3)^{k+1} - (x_1^3)^{k+1}}{(x_1^3 x_2^3)^k (x_2^3 - x_1^3)}, \quad a_{-1} = 0, \quad a_0 = 1, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (24.38)$$

Выразим несколько первых коэффициентов a_k через a и b . В силу (24.29) из второго соотношения (24.38) имеем

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & a_1 &= 2b, & a_2 &= 4b^2 - a, & a_3 &= 4b(2b^2 - a), \\ a_4 &= 16b^4 - 12ab^2 + a^2, & a_5 &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2). \end{aligned} \quad (24.39)$$

Учитывая малость величин $|x^3/x_I^3|$, $I = 1, 2$, по сравнению с единицей ($|x^3/x_I^3| < 1$, $I = 1, 2$) и сохраняя в правой части (24.37), например, первые шесть членов, будем иметь следующее приближенное представление для g_M^P :

$$g_M^P \approx \sum_{k=0}^5 A_{(k)_M}^{\bar{P}} (x^3)^k, \quad (24.40)$$

где в силу (24.39)

$$\begin{aligned} A_{(0)_M}^{\bar{P}} &= g_M^{\bar{P}}, & A_{(1)_M}^{\bar{P}} &= 2bg_M^{\bar{P}} + a_{(1)_M}^{\bar{P}}, & A_{(2)_M}^{\bar{P}} &= (4b^2 - a)g_M^{\bar{P}} + 2ba_{(1)_M}^{\bar{P}}, \\ A_{(3)_M}^{\bar{P}} &= 4b(2b^2 - a)g_M^{\bar{P}} + (4b^2 - a)a_{(1)_M}^{\bar{P}}, \\ A_{(4)_M}^{\bar{P}} &= (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_M^{\bar{P}} + 4b(2b^2 - a)a_{(1)_M}^{\bar{P}}, \\ A_{(5)_M}^{\bar{P}} &= 2b(16b^4 - 16ab^2 + 3a^2)g_M^{\bar{P}} + (16b^4 - 12ab^2 + a^2)a_{(1)_M}^{\bar{P}}. \end{aligned} \quad (24.41)$$

На основании второго соотношения (24.27) второе соотношение (22.18) представится в виде

$$\bar{a}_{+M}^{\bar{P}} = (1 - 2b)g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}},$$

с учетом которого для коэффициентов (24.41) будем иметь представления

$$\begin{aligned} A_{(0)M}^{\bar{P}} &= g_{-M}^{\bar{P}}, & A_{(1)M}^{\bar{P}} &= g_{-M}^{\bar{P}} - g_{+M}^{\bar{P}}, & A_{(2)M}^{\bar{P}} &= (2b - a)g_{-M}^{\bar{P}} - 2bg_{+M}^{\bar{P}}, \\ A_{(3)M}^{\bar{P}} &= (4b^2 - 2ab - a)g_{-M}^{\bar{P}} - (4b^2 - a)g_{+M}^{\bar{P}}, \\ A_{(4)M}^{\bar{P}} &= (8b^3 - 4ab^2 - 4ab + a^2)g_{-M}^{\bar{P}} - 4b(2b^2 - a)g_{+M}^{\bar{P}}, \\ A_{(5)M}^{\bar{P}} &= (16b^4 - 8ab^3 - 12ab^2 + 4a^2b + a^2)g_{-M}^{\bar{P}} - (16b^4 - 12ab^2 + a^2)g_{+M}^{\bar{P}}. \end{aligned} \quad (24.42)$$

Теперь рассмотрим второй, более удобный, способ представления $g_{-M}^{\bar{P}}$ в виде степенного ряда относительно x^3 . Для этого с помощью соотношений (20.11) и (20.12) представим \mathbf{r}_p в форме

$$\mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}_{-q} = [(1 - x^3)g_p^{\bar{q}} + x^3 g_p^{\bar{q}}] \mathbf{r}_{-q} = \mathbf{r}_{-p} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{r}_{-p} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}), \quad (24.43)$$

где $\underline{\mathbf{E}}$ — единичный тензор второго ранга и введены обозначения

$$\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p = \underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}} = [g_p^{\bar{q}} - x^3 (g_p^{\bar{q}} - g_p^{\bar{q}})] \mathbf{r}^q \mathbf{r}_{-q}, \quad \underline{\mathbf{B}} = (g_p^{\bar{q}} - g_p^{\bar{q}}) \mathbf{r}^q \mathbf{r}_{-q}. \quad (24.44)$$

Очевидно, $\underline{\mathbf{B}}^T = \underline{\mathbf{B}}$ при $\mathbf{h} \perp S$, а отсюда следует, что и $\underline{\mathbf{A}}^T = \underline{\mathbf{A}}$. Заметим, что в силу первого соотношения (24.44) для матрицы тензора $\underline{\mathbf{A}}$ будем иметь выражения

$$\text{matr } \underline{\mathbf{A}} = \text{matr}(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_1^{\bar{1}}) & x^3 g_1^{\bar{2}} & x^3 g_1^{\bar{3}} \\ x^3 g_2^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_2^{\bar{2}}) & x^3 g_2^{\bar{3}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (24.45)$$

Учитывая (22.22) и (24.45), имеем

$$\det \underline{\mathbf{A}} = \det(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}}) = \begin{vmatrix} 1 - x^3(1 - g_1^{\bar{1}}) & x^3 g_1^{\bar{2}} \\ x^3 g_2^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_2^{\bar{2}}) \end{vmatrix} = \vartheta \neq 0. \quad (24.46)$$

На основании (24.46) можно утверждать, что существует единственный обратный тензор $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ и соответственно единственная обратная матрица $\text{matr}(\underline{\mathbf{A}})^{-1}$. Поэтому (24.43) можно разрешить относительно \mathbf{r}_{-p} . Получим

$$\mathbf{r}_{-p} = \mathbf{r}_p \cdot \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \mathbf{r}_p \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}})^{-1}. \quad (24.47)$$

Аналогично (24.43) для \mathbf{r}^p имеем

$$\mathbf{r}^p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}^q = \underline{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \underline{\mathbf{D}} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_{-p} = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}^q \mathbf{r}_{-p}. \quad (24.48)$$

Нетрудно усмотреть, что

$$\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{E}}, \quad \underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1}. \quad (24.49)$$

В самом деле, в силу первого соотношения (24.44) и второго соотношения (24.48) находим

$$\underline{\mathbf{D}} \cdot \underline{\mathbf{A}} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^{\bar{m}} \mathbf{r}_m = \mathbf{r}^p g_p^{\bar{m}} \mathbf{r}_m = \mathbf{r}^m \mathbf{r}_m,$$

что и требовалось доказать. Таким образом, учитывая второе соотношение (24.49), первое соотношение (24.48) можно представить в виде

$$\mathbf{r}^p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}^{\bar{q}} = \underline{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{p}}, \quad \underline{\mathbf{A}}^{-1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{B}})^{-1} = \mathbf{r}^p \mathbf{r}_p = g_p^{\bar{q}} \mathbf{r}^{\bar{q}} \mathbf{r}_p. \quad (24.50)$$

Не представляет большого труда найти выражения для $\underline{\mathbf{A}}^{-1}$ или для $\text{matr} \underline{\mathbf{A}}^{-1}$ через основные компоненты переноса ЕТВР. На основании второго соотношения (24.50) приходим к выражению

$$\text{matr} \underline{\mathbf{A}}^{-1} = \vartheta^{-1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) & -x^3 g_+^{\bar{2}} & (x^3)^2 g_+^{\bar{2}} g_+^{\bar{3}} - x^3 g_+^{\bar{3}} [1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}})] \\ x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) & (x^3)^2 g_+^{\bar{1}} g_+^{\bar{3}} - x^3 g_+^{\bar{3}} [1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}})] \\ 0 & 0 & \vartheta \end{pmatrix}. \quad (24.51)$$

Теперь рассмотрим

$$\mathbf{r}^P = g_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \vartheta^{-1} A_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} = \underline{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}^{\bar{P}}, \quad (24.52)$$

где, очевидно,

$$\underline{\mathbf{d}} = \mathbf{r}^P \mathbf{r}_P = g_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_P = \vartheta^{-1} A_M^P \mathbf{r}^{\bar{M}} \mathbf{r}_P. \quad (24.53)$$

С помощью (22.18) нетрудно проверить, что матрицей тензору $\underline{\mathbf{d}}$ служит матрица, получающаяся при пересечении первых двух строк и двух столбцов в (24.51), т. е.

$$\text{matr} \underline{\mathbf{d}} = \text{matr} \left(\vartheta^{-1} A_M^P \right) = \vartheta^{-1} \text{matr} \left(A_M^P \right) = \vartheta^{-1} \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) & -x^3 g_+^{\bar{2}} \\ -x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) \end{pmatrix}. \quad (24.54)$$

Следовательно,

$$\det \left(A_M^P \right) = \vartheta, \quad \det \underline{\mathbf{d}} = \det \left(\vartheta^{-1} A_M^P \right) = \vartheta^{-1}.$$

Теперь рассмотрим тензор

$$\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{b}} = (g_M^{\bar{P}} - g_+^{\bar{P}}) \mathbf{r}_P \mathbf{r}^{\bar{M}} = (g_{PM}^- - g_{PM}^+) \mathbf{r}_P \mathbf{r}^{\bar{M}}. \quad (24.55)$$

В первую очередь заметим, что $\underline{\mathbf{b}}^T = \underline{\mathbf{b}}$ при $\mathbf{h} \perp S$, так как в этом случае (22.11) $g_{IJ}^+ = g_{JI}^+$

и, следовательно, $\underline{\mathbf{a}}^T = \underline{\mathbf{a}}$.

Далее, очевидно, что

$$\text{matr} \underline{\mathbf{a}} = \text{matr} (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}) = \begin{pmatrix} 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{1}}) & x^3 g_+^{\bar{2}} \\ x^3 g_+^{\bar{1}} & 1 - x^3(1 - g_+^{\bar{2}}) \end{pmatrix}. \quad (24.56)$$

Сравнивая (24.56) с (24.45), заключаем, что (24.56) получается из (24.45) вычеркиванием последней строки и последнего столбца. В силу (24.46) нетрудно усмотреть, что

$$\det \underline{\mathbf{a}} = \det (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}) = \det \underline{\mathbf{A}} = \vartheta \neq 0.$$

Поэтому на основании последнего соотношения утверждаем, что существует единственный обратный к $\underline{\mathbf{a}}$ тензор, который, как нетрудно доказать, совпадает с тензором (24.53), а его матрица — с матрицей (24.54).

Таким образом, для $\underline{\mathbf{d}}^{(-)}$ имеем представления

$$\underline{\mathbf{d}}^{(-)} = \underline{\mathbf{a}}^{-1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = \mathbf{r}^P \mathbf{r}_P^- = g_M^P \mathbf{r}_M^{\bar{M}} \mathbf{r}_P^- = \vartheta^{-1} A_M^P \mathbf{r}_M^{\bar{M}} \mathbf{r}_P^-. \quad (24.57)$$

Теперь, учитывая (24.57), соотношение (24.52) можно представить в удобном для дальнейшего пользования виде

$$\mathbf{r}^P = g_M^P \mathbf{r}_M^{\bar{M}} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}^{\bar{P}}. \quad (24.58)$$

Следует заметить, что в случае тонких тел $|x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)}| < 1$ ($|x^3 b_{\bar{Q}}^{(-)}| < 1$). Поэтому имеем соотношения

$$(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (x^3)^s \underline{\mathbf{b}}^{(-)s} = \underline{\mathbf{E}} + x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)} + (x^3)^2 \underline{\mathbf{b}}^{(-)2} + (x^3)^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)3} + \dots, \quad (24.59)$$

$$(\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-2} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \underline{\mathbf{b}}^{(-)s} (x^3)^s, \quad (24.60)$$

где, очевидно,

$$\underline{\mathbf{b}}^{(-)n} = (g_{K_1}^{\bar{P}} - g_{K_1}^{\bar{P}}) (g_{K_2}^{\bar{K}_1} - g_{K_2}^{\bar{K}_1}) \cdot \dots \cdot (g_{K_{n-1}}^{\bar{K}_{n-2}} - g_{K_{n-1}}^{\bar{K}_{n-2}}) (g_M^{\bar{K}_{n-1}} - g_M^{\bar{K}_{n-1}}) \mathbf{r}_P^- \mathbf{r}_M^{\bar{M}}. \quad (24.61)$$

С помощью (24.59) и (24.61) соотношение (24.58) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^P = g_M^P \mathbf{r}_M^{\bar{M}} = & [g_M^{\bar{P}} + x^3 (g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}) + (x^3)^2 (g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}) (g_M^{\bar{K}} - g_M^{\bar{K}}) + \\ & + (x^3)^3 (g_{K_1}^{\bar{P}} - g_{K_1}^{\bar{P}}) (g_{K_2}^{\bar{K}_1} - g_{K_2}^{\bar{K}_1}) (g_M^{\bar{K}_2} - g_M^{\bar{K}_2}) + \dots] \mathbf{r}_M^{\bar{M}}. \end{aligned}$$

Отсюда в свою очередь получаем второе (после (24.37)) искомое выражение для g_M^P . А именно,

$$\begin{aligned} g_M^P = \mathbf{r}_M^P \cdot \mathbf{r}_M^- = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\underline{\mathbf{E}} - x^3 \underline{\mathbf{b}}^{(-)})^{-1} \cdot \mathbf{r}_M^- = \sum_{s=0}^{\infty} \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(-)s} \cdot \mathbf{r}_M^- (x^3)^s = g_M^{\bar{P}} + x^3 (g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}) + \\ + (x^3)^2 (g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}) (g_M^{\bar{K}} - g_M^{\bar{K}}) + (x^3)^3 (g_{K_1}^{\bar{P}} - g_{K_1}^{\bar{P}}) (g_{K_2}^{\bar{K}_1} - g_{K_2}^{\bar{K}_1}) (g_M^{\bar{K}_2} - g_M^{\bar{K}_2}) + \dots \end{aligned} \quad (24.62)$$

Сравнивая (24.62) с (24.37), можно утверждать, что

$$\begin{aligned} A_{(0)M}^{\bar{P}} = \mathbf{r}_M^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(-)0} \cdot \mathbf{r}_M^- = g_M^{\bar{P}}, \quad A_{(1)M}^{\bar{P}} = \mathbf{r}_M^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(-)1} \cdot \mathbf{r}_M^- = g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}, \\ A_{(2)M}^{\bar{P}} = \mathbf{r}_M^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(-)2} \cdot \mathbf{r}_M^- = (g_M^{\bar{P}} - g_M^{\bar{P}}) (g_M^{\bar{N}} - g_M^{\bar{N}}), \dots, \\ A_{(n)M}^{\bar{P}} = \mathbf{r}_M^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^{(-)n} \cdot \mathbf{r}_M^- = (g_{N_1}^{\bar{P}} - g_{N_1}^{\bar{P}}) (g_{N_2}^{\bar{N}_1} - g_{N_2}^{\bar{N}_1}) \dots (g_{N_{n-1}}^{\bar{N}_{n-2}} - g_{N_{n-1}}^{\bar{N}_{n-2}}) (g_M^{\bar{N}_{n-1}} - g_M^{\bar{N}_{n-1}}). \end{aligned} \quad (24.63)$$

Следует заметить, что идентичность представлений (24.38) и (24.63) можно доказать и непосредственной проверкой. Так как остальные рассматриваемые компоненты ЕТВР выражаются через g_M^P , то представление (24.37) или, что то же самое, (24.63) имеет важное значение. Кроме того, в зависимости от рассматриваемой конкретной задачи и требуемой точности приближения в правой части (24.40) следует менять (уменьшать или увеличивать) число слагаемых.

Не представляет труда найти искомое представление для g_M^3 . В самом деле, из второго соотношения третьей строки (22.20) с учетом (24.37) получаем

$$g_M^3 = -g_P^3 g_M^P = -g_P^3 x^3 g_M^P = -g_P^3 \sum_{s=0}^{\infty} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1} \quad (24.64)$$

и аналогично (24.40) можно рассматривать приближенное представление

$$g_{-M}^3 \approx -g_{+P}^3 \sum_{s=1}^5 A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^{s+1}.$$

Теперь найдем представление для g^{PQ} . В силу (24.58) с учетом (24.60) и (24.63) получаем

$$\begin{aligned} g^{PQ} &= \mathbf{r}^P \cdot \mathbf{r}^Q = g_{-M}^P g_{-N}^Q g_{-MN} = \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot (\mathbf{E} - x^3 \underline{\mathbf{b}})^{-2} \cdot \mathbf{r}^{\bar{Q}} \quad (24.60) \\ &\stackrel{(24.60)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^s \cdot \mathbf{r}^{\bar{Q}} (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) \mathbf{r}^{\bar{P}} \cdot \underline{\mathbf{b}}^s \cdot \mathbf{r}_{-M}^{\bar{Q}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^s \quad (24.63) \\ &\stackrel{(24.63)}{=} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g^{\bar{Q}\bar{M}} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^s. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое представление для g^{PQ} имеет вид

$$g^{PQ} = g_{-M}^P g_{-N}^Q g_{-MN} = \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) g^{\bar{Q}\bar{M}} A_{(s)M}^{\bar{P}} (x^3)^s. \quad (24.65)$$

Нетрудно найти представление и для g^{P3} . В самом деле, из второго соотношения (22.37) с учетом (24.64) и (24.65) получаем

$$g^{P3} = g_{-M}^P g_{-N}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{+Q}^3 x^3 g_{-M}^P g_{-N}^Q g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{+Q}^3 (x^3) g^{PQ} = -g_{+Q}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+1}.$$

Итак, искомое соотношение представляется в форме

$$g^{P3} = g_{-M}^P g_{-N}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = -g_{+Q}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+1}. \quad (24.66)$$

Наконец, найдем искомое выражение для g^{33} . Из второго соотношения (22.37) в силу (24.64) и (24.65) находим

$$\begin{aligned} g^{33} &= g_{-m}^3 g_{-n}^3 g^{\bar{m}\bar{n}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{-M}^3 g_{-N}^3 g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{+P}^3 g_{+Q}^3 (x^3)^2 g_{-M}^P g_{-N}^Q g^{\bar{M}\bar{N}} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{+P}^3 g_{+Q}^3 (x^3)^2 g^{PQ} = \\ &= g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{+P}^3 g_{+Q}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к представлению

$$g^{33} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{+P}^3 g_{+Q}^3 (x^3)^2 g^{PQ} = g^{\bar{3}\bar{3}} + g_{+P}^3 g_{+Q}^3 \sum_{s=0}^{\infty} (s+1) A_{(s)M}^{\bar{P}} g^{\bar{M}\bar{Q}} (x^3)^{s+2}. \quad (24.67)$$

Найдем еще выражение произведения $g_{-M}^P g_{-N}^Q$ в виде ряда относительно x^3 . С этой целью воспользуемся представлением (24.37) и правилом умножения рядов в форме Коши. В результате получим

$$g_{-M}^P g_{-N}^Q = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^s A_{(s-r)M}^{\bar{P}} A_{(r)N}^{\bar{Q}} \right) (x^3)^s = \sum_{s=0}^{\infty} B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} (x^3)^s, \quad B_{(s)MN}^{\bar{P}\bar{Q}} = \sum_{r=0}^s A_{(s-r)M}^{\bar{P}} A_{(r)N}^{\bar{Q}}. \quad (24.68)$$

Следует заметить, что число слагаемых в правых частях (24.65)–(24.68) аналогично (24.37) и (24.64) определяется характером рассматриваемой задачи и точностью приближения. Нетрудно найти представления компонент ЕТВР в частных случаях рассматриваемой параметризации области тонкого тела. Кроме того, соотношения (24.37), (24.64) и (24.65)–(24.68) играют важную роль при построении различных вариантов общих теорий высшего порядка для тонких тел с применением разложения по ортогональным полиномам.

24.2.3. О представлении расширенного второго тензора поверхности. Обозначим через $\underline{\mathbf{b}}^{(\sim)}$ второй тензор поверхности $S^{(\sim)}$, $\sim \in \{-, \emptyset, +\}$. Тогда, очевидно, в силу (20.12) и (20.13) для вторых тензоров поверхностей будем иметь следующие представления:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{b}}^{(-)} &= b_{PQ}^{(-)} \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^{(-)} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = b_{\bar{P}}^{(-)} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = b_{\hat{P}}^{(-)} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}^{\hat{Q}}, \\ \underline{\mathbf{b}} &= b_{PQ} \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^Q \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^Q \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^Q = b_{\hat{P}}^{\check{Q}} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}^{\check{Q}}, \\ \underline{\mathbf{b}}^{(+)} &= b_{PQ}^{(+)} \mathbf{r}^P \mathbf{r}^Q = b_{\bar{P}}^{(+)} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = b_{\bar{P}}^{(+)} \mathbf{r}^{\bar{P}} \mathbf{r}^{\bar{Q}} = b_{\hat{P}}^{(+)} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}^{\hat{Q}}, \quad \wedge, \sim \in \{-, \emptyset, +\}\end{aligned}\quad (24.69)$$

где

$$b_{\hat{P}}^{(\sim)} = g_{\hat{P}}^{\check{M}} g_{\check{N}}^{\hat{M}} b_{\check{M}}^{(\sim)} b_{\check{N}}^{\hat{M}}, \quad \sim, \check{\cdot}, \wedge, \hat{\cdot}, * \in \{-, \emptyset, +\}.$$

Всевозможные представления тензоров (24.69), конечно, получаются жонглированием индексами. Каждый из этих тензоров в силу (24.10) в качестве своих компонент имеет компоненты вторых тензоров поверхностей $S^{(-)}$, $S^{(+)}$, S , а также отличные от этих компонент компоненты. В этом смысле они называются расширенными вторыми тензорами.

Можно было вводить в рассмотрение расширенные до трехмерного пространства тензоры. В самом деле, определяя компоненты этих тензоров следующим образом:

$$b_{\hat{P}}^{(\sim)} = g_{\hat{P}}^{\check{M}} g_{\check{N}}^{\hat{M}} b_{\check{M}}^{(\sim)} b_{\check{N}}^{\hat{M}}, \quad \sim, \check{\cdot}, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (24.70)$$

их можно представить в виде

$$\underline{\mathbf{b}}^{(\sim)} = b_{\hat{P}}^{(\sim)} \mathbf{r}^{\hat{P}} \mathbf{r}^{\hat{Q}}, \quad \sim, \check{\cdot}, \wedge \in \{-, \emptyset, +\}, \quad (24.71)$$

Из (24.70) следует, что компоненты тензоров (24.71) равны нулю, если хотя бы один индекс равен трем. Очевидно, тензоры (24.71) содержат (24.69).

24.3. О тензорах Римана—Кристоффеля в \mathbb{R}^3 . К определению тензора Римана—Кристоффеля можно прийти различными путями, среди которых чаще всего рассматриваются условия перестановочности (коммутативности) повторного ковариантного дифференцирования компонент тензора, ранг которого не меньше 1, а компоненты принадлежат классу C^k , $k \geq 2$, [5, 14, 27, 54, 68, 69], евклидовости пространства [67, 68], совместности деформаций [12, 69] и др.

Следует заметить, что тензор Римана—Кристоффеля, к определению которого можно еще прийти, рассматривая условия перестановочности повторного обычного дифференцирования тензора, принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, ранг которого не меньше 1, играет существенную роль в дифференциальной геометрии, динамике твердого и деформируемого твердого тела, электродинамике и теории относительности. Заметим также, что принадлежность компонент тензора классу C^2 является достаточным условием для равенства смешанных частных производных от них. Этим обстоятельством мы часто будем пользоваться.

Ниже определим тензор Римана—Кристоффеля путем, указанным во втором абзаце данного пункта, приведем его представления при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 , исходя из тензора Римана—Кристоффеля трехмерного евклидова пространства, определим аналогичные им тензоры для двумерных поверхностей, а также дадим представления последних и найдем связь между ними. Кроме того, введем в рассмотрение расширенные тензоры Римана—Кристоффеля для двумерных пространств при рассматриваемой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Определение 24.1. Будем говорить, что произвольный локальный базис принадлежит классу C^k , $k \in \mathbb{N}$, если каждый базисный вектор этого базиса принадлежит тому же классу.

Определение 24.2. Будем говорить, что произвольный вектор $\mathbf{a} \in C^k$, $k \in \mathbb{N}$, если его компоненты и базис, в котором он представлен, принадлежат тому же классу.

Пусть \mathbf{a} — произвольный вектор, принадлежащий классу C^k , $k \geq 2$. Тогда в некотором локальном базисе, очевидно, его можно представить в виде

$$\mathbf{a} = a^m \mathbf{r}_m = a_m \mathbf{r}^m. \quad (24.72)$$

Заметим, что \mathbf{r}_m и \mathbf{r}^n в (24.72) — ковариантные и контравариантные базисные векторы при любой параметризации некоторой области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. За криволинейные координаты примем x^1, x^2, x^3 .

Дифференцируя, например, первое равенство (24.72) по x^p , а полученное соотношение по x^q , получим

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = [\partial_q (\partial_p a^m + a^n \Gamma_{np}^m) + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m] \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \partial_p a^m + \partial_q a^n \Gamma_{np}^m + a^n \partial_q \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = [\partial_q \partial_p a^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (24.73)$$

После перестановки индексов q и p в (24.73), будем иметь

$$\partial_p \partial_q \mathbf{a} = [\partial_p \partial_q a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + \nabla_q a^n \Gamma_{np}^m + (\partial_p \Gamma_{lq}^m - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m) a^l] \mathbf{r}_m. \quad (24.74)$$

Теперь, вычитая из (24.73) почленно (24.74), в силу определения 24.2 и теоремы Шварца получаем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m) a^l \mathbf{r}_m. \quad (24.75)$$

Вводя обозначение

$$\mathbb{R}_{pql}^{\dots m} = \partial_q \Gamma_{lp}^m - \partial_p \Gamma_{lq}^m + \Gamma_{lp}^n \Gamma_{nq}^m - \Gamma_{lq}^n \Gamma_{np}^m, \quad (24.76)$$

соотношение (24.75) можно представить в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = \mathbb{R}_{pql}^{\dots m} a^l \mathbf{r}_m. \quad (24.77)$$

Нетрудно установить закон преобразования левой части (24.77) при переходе от одной системы координат к другой. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 закон перехода от одной системы координат x^1, x^2, x^3 к другой $x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}$ в виде

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, x^2, x^3) \quad (24.78)$$

и обратно

$$x^i = x^i(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'}). \quad (24.79)$$

Следовательно, определители якобиевых матриц

$$D_i^{i'} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad D_i^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (24.80)$$

отличны от нуля и связаны между собой соотношениями

$$D_j^{i'} D_{j'}^j = \delta_{j'}^{i'}, \quad D_{j'}^i D_j^{j'} = \delta_j^i. \quad (24.81)$$

Заметим, что выполнение условий (24.81) влечет за собой неравенство нулю определителей якобиевых матриц (24.80). Кроме того, при выполнении (24.79) и (24.81) преобразование координат (24.78) называется общим [54]. Итак, наша задача заключается в установлении поведения левой части (24.77) относительно общей группы преобразования (24.78) в \mathbb{R}^3 . В этой связи найдем $\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a}$. В силу (24.78) и (24.80) имеем

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} = \partial_{q'} (\partial_p \mathbf{a} \frac{\partial x^p}{\partial x^{p'}}) = \frac{\partial^2 x^p}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_p \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_q \partial_p \mathbf{a},$$

т. е.

$$\begin{aligned} \partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{p'} \partial x^{q'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{q'}^q D_{p'}^p \partial_q \partial_p \mathbf{a}, \\ \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a} &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{q'} \partial x^{p'}} \partial_k \mathbf{a} + D_{p'}^p D_{q'}^q \partial_p \partial_q \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (24.82)$$

где второе соотношение (24.82) получено из первого при замене местами индексы q' и p' .

Теперь, вычитая из первого соотношения (24.82) почленно второе и учитывая, что $\mathbf{a} \in C^k$, $k \geq 2$, будем иметь

$$\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a} = D_{q'}^q D_{p'}^p (\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a}). \quad (24.83)$$

Очевидно, в силу (24.81) обратное к (24.83) соотношение представится в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = D_q^{q'} D_p^{p'} (\partial_{q'} \partial_{p'} \mathbf{a} - \partial_{p'} \partial_{q'} \mathbf{a}). \quad (24.84)$$

На основании (24.83) и (24.84) заключаем, что левая часть (24.77) преобразуется как ковариантные компоненты тензора второго ранга, т. е. по ковариантному закону. В силу того, что a^l как контравариантные компоненты вектора \mathbf{a} преобразуются по контравариантному закону, а \mathbf{r}_m — по ковариантному, по обратному тензорному признаку $\mathbb{R}^{pq} \cdot \cdot \cdot m$ являются компонентами тензора четвертого ранга, который называется *тензором Римана—Кристоффеля*, или *тензором кривизны*. Ковариантные компоненты тензора Римана—Кристоффеля получим, если опустим индекс m . Очевидно, имеем

$$\mathbb{R}_{pqlm} \cdot \cdot \cdot = g_{mn} \mathbb{R}_{pq} \cdot \cdot \cdot n. \quad (24.85)$$

Нетрудно получить выражение для ковариантных компонент тензора кривизны посредством символов Кристоффеля. В самом деле, учитывая (24.76) в (24.85) и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{pqlm} \cdot \cdot \cdot = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} + \Gamma_{lq}^n \Gamma_{mp,n} - \Gamma_{lp}^n \Gamma_{mq,n}. \quad (24.86)$$

Следует заметить, что смешанные производные $\partial_q \partial_p \mathbf{a}$ можно представить и в другом виде. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_q \partial_p \mathbf{a} &= \partial_q \partial_p (a^m \mathbf{r}_m) = \partial_q (\nabla_p a^m \mathbf{r}_m) = (\partial_q \nabla_p a^m) \mathbf{r}_m + \nabla_p a^m \partial_q \mathbf{r}_m = (\partial_q \nabla_p a^m + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m) \mathbf{r}_m = \\ &= (\partial_q \nabla_p a^m - \nabla_p a^m \Gamma_{pq}^n + \nabla_p a^n \Gamma_{nq}^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m, \end{aligned}$$

т. е. искомое представление следующее:

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m + \nabla_n a^m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m + \nabla_n a_m \Gamma_{pq}^n) \mathbf{r}^m. \quad (24.87)$$

Меняя местами индексы p и q в (24.87), вычитая почленно получаемое равенство из (24.87) и учитывая симметричность символов Кристоффеля относительно нижних индексов, найдем

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = (\nabla_q \nabla_p a_m - \nabla_p \nabla_q a_m) \mathbf{r}^m. \quad (24.88)$$

В силу (24.77) и (24.88) имеем, например, соотношение

$$\partial_q \partial_p \mathbf{a} - \partial_p \partial_q \mathbf{a} = (\nabla_q \nabla_p a^m - \nabla_p \nabla_q a^m) \mathbf{r}_m = \mathbb{R}_{pq} \cdot \cdot \cdot m a_l \mathbf{r}^m. \quad (24.89)$$

На основании (24.89) можно утверждать, что $\mathbb{R}_{pq} \cdot \cdot \cdot m$ являются компонентами тензора четвертого ранга.

Заметим, что обобщение, например, (24.89) на случай тензора с рангом больше единицы и пространства с размерностью больше трех не представляет большого труда. Поэтому на этом мы останавливаться не будем, а заинтересованного читателя отошлем, например, к монографии [5].

По (24.89) легко заключаем о справедливости следующей теоремы:

Теорема 24.1. *Операции обычного дифференцирования тензора с рангом не меньше единицы, принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, и ковариантного дифференцирования компонент того же тензора перестановочны (коммутативны) тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\mathbb{R}_{pqlm} \cdot \cdot \cdot = g_{mn} \mathbb{R}_{pq} \cdot \cdot \cdot n = 0 \quad (\mathbb{R} = \mathbb{R}_{pq} \cdot \cdot \cdot m \mathbf{r}^p \mathbf{r}^q \mathbf{r}^l \mathbf{r}_m = 0), \quad (24.90)$$

т. е. тензор Римана—Кристоффеля равен нулю.

Как видно из (24.76) и (24.86), компоненты тензора кривизны зависят только от символов Кристоффеля, а последние — только от производных компонент метрического тензора g_{mn} по координатам. Однако, как известно, в евклидовом пространстве постулируется существование таких систем координат, в которых компоненты метрического тензора постоянны во всем пространстве. Это, например, косоугольная система или ее частный случай — декартова прямоугольная система. Следовательно, в этих системах тензор Римана—Кристоффеля тождественно равен нулю. Но, если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой системе.

Таким образом, в евклидовом пространстве во всех системах координат тензор Римана—Кристоффеля тождественно равен нулю, а операция дифференцирования тензора класса C^k , $k \geq 2$, с рангом больше единицы во всех системах координат перестановочна. Заметим, что для римановых (неевклидовых) пространств тензор Римана—Кристоффеля может быть отличен от нуля.

Нетрудно доказать, что компоненты тензора Римана—Кристоффеля $\mathbb{R}_{pqlm}^{\dots}$ обладают следующими основными свойствами:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{qplm}^{\dots}, \\ 2. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = -\mathbb{R}_{pqml}^{\dots}, \\ 3. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} = \mathbb{R}_{lmpq}^{\dots}, \\ 4. \quad & \mathbb{R}_{pqlm}^{\dots} + \mathbb{R}_{qlpm}^{\dots} + \mathbb{R}_{lpqm}^{\dots} = 0. \end{aligned} \quad (24.91)$$

В самом деле, первое свойство очевидно, так как каждая из двух разностей, входящих в правую часть (24.86), кососимметрична относительно индексов p и q . Вторая разность в правой части (24.86) кососимметрична как относительно индексов p и q , так и относительно индексов l и m . Кроме того, она симметрична относительно пар индексов pq и lm .

Для доказательства второго и третьего свойств (24.91) необходимы дополнительные преобразования и вспомогательные соотношения, посредством которых легко доказать упомянутые выше свойства. В частности, преобразуем первую разность в правой части (24.86). Имеем

$$\begin{aligned} \partial_q \Gamma_{lp,m} &= \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q [\partial_p (\mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) - \mathbf{r}_l \cdot \partial_p \mathbf{r}_m] = \partial_q (\partial_p g_{lm} - \Gamma_{mp,l}) = \\ &= \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q \partial_p g_{lm} - \partial_q \Gamma_{mp,l}, \quad \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_p \partial_q g_{lm} - \partial_p \Gamma_{mq,l}$$

где второе соотношение получено из первого при перестановке индексов p и q .

Вычитая из первого соотношения второе, получим первое искомое соотношение

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = -(\partial_q \Gamma_{mp,l} - \partial_p \Gamma_{mq,l}). \quad (24.92)$$

Из (24.92) видно, что первая разность в правой части (24.86) кососимметрична относительно индексов l и m и так как и вторая разность кососимметрична относительно тех же индексов, то второе свойство доказано.

Теперь первую разность в правой части (24.86) представим в другом виде. Имеем

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} = \partial_q (\partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m) = \partial_q \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \mathbf{r}_m + \partial_p \mathbf{r}_l \cdot \partial_q \mathbf{r}_m.$$

Переставляя в этом соотношении индексы p и q и вычитая полученное соотношение из существующего, приходим к второму искомому соотношению

$$\partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m} = \partial_q \mathbf{r}_m \cdot \partial_p \mathbf{r}_l - \partial_p \mathbf{r}_m \cdot \partial_q \mathbf{r}_l. \quad (24.93)$$

Меняя в нем местами пары индексов pq и lm и считая, что $\partial_s \mathbf{r}_t = \partial_t \mathbf{r}_s$, имеем

$$\partial_m \Gamma_{pl,q} - \partial_l \Gamma_{pm,q} = \partial_m \mathbf{r}_q \cdot \partial_l \mathbf{r}_p - \partial_l \mathbf{r}_q \cdot \partial_m \mathbf{r}_p = \partial_q \Gamma_{lp,m} - \partial_p \Gamma_{lq,m}. \quad (24.94)$$

В силу (24.94) утверждаем, что первая разность в правой части (24.86) симметрична относительно пар индексов pq и lm . Так как и вторая разность также симметрична относительно тех же пар индексов, то и третье свойство доказано.

Нетрудно заметить, что на основании (24.93) можно доказать кососимметричность первой разности в правой части (24.86) как относительно индексов p и q , так и относительно индексов l и m .

На доказательстве четвертого свойства (24.91), которое можно проверить непосредственно, мы останавливаться не будем. Заметим, что в указанной выше литературе можно найти иные пути доказательств этих свойств.

24.4. Тождества Ламе. Равенство нулю компонент тензора Римана—Кристоффеля (24.90) в трехмерном евклидовом пространстве дают 81 тождество. Однако, можно доказать, что вследствие существования у компонент тензора кривизны свойств симметрии (24.91) независимых тождеств получится только шесть. Эти тождества были получены Ламе за пятьдесят лет до возникновения тензорного анализа и носят его имя.

Получим тождества Ламе [14, 27]. С этой целью образуем компоненты тензора второго ранга

$$S^{kl} = \frac{1}{4} C^{\dots kpq} C^{l \dots st} \mathbb{R}_{pqst}^{\dots} \quad (24.95)$$

где $C^{\cdot\cdot\cdot\cdot kpq}$ — компоненты дискриминантного тензора. Умножая обе части (24.95) на $C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{ijk}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{mnl}$ с последующим суммированием по k и l и осуществляя простые выкладки, получим

$$\mathbb{R}_{ijmn}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{ijk}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot}_{mnl}S^{kl}, \quad (24.96)$$

В силу (24.95) и (24.96) легко убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Утверждение 24.1. *Для равенства нулю всех компонент тензора Римана—Кристоффеля необходимо и достаточно равенство нулю компонент тензора второго ранга S^{kl} .*

Покажем, что $S^{kl} = S^{lk}$, т. е. S^{kl} — симметричная матрица. Из третьего свойства (24.91) имеем

$$S^{kl} = \frac{1}{4}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot kpq}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot l st}\mathbb{R}_{pqst}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{4}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot kpq}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot l st}\mathbb{R}_{stpq}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{4}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot l st}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot kpq}\mathbb{R}_{stpq}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = S^{lk}.$$

Таким образом, среди компонент тензора Римана—Кристоффеля независимых компонент только шесть (24.95), а остальные компоненты выражаются через эти шесть компонент посредством (24.96). Поэтому тождественное равенство нулю тензора Римана—Кристоффеля дает всего шесть независимых тождеств, которые называются *тождествами Ламе*. Итак, искомые тождества получим, если элементы матрицы S^{kl} приравняем нулю, т. е.

$$S^{kl} = \frac{1}{4}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot kpq}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot l st}\mathbb{R}_{pqst}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = 0,$$

или в матричном виде

$$\text{matr}(S^{kl}) = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{2323}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{2331}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{2312}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \\ \mathbb{R}_{3123}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{3131}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{3112}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \\ \mathbb{R}_{1223}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{1231}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} & \mathbb{R}_{1212}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} \end{pmatrix} = 0. \quad (24.97)$$

Учитывая симметричность S^{kl} , тождества Ламе можно представить в виде следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{2323}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0, & \mathbb{R}_{3131}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0, & \mathbb{R}_{1212}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0, \\ \mathbb{R}_{2331}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0, & \mathbb{R}_{2312}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0, & \mathbb{R}_{3112}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= 0. \end{aligned}$$

Следует заметить, что вышеприведенную теорему можно сформулировать и по другому.

Теорема 24.2. *Для коммутативности операций обычного дифференцирования принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, тензора ранга не меньше единицы и ковариантного дифференцирования компонент того же тензора необходимо и достаточно выполнение тождеств Ламе.*

Сформулируем еще одну теорему.

Теорема 24.3. *Для коммутативности операции обычного дифференцирования принадлежащего классу C^k , $k \geq 2$, тензора необходима и достаточна коммутативность операции ковариантного дифференцирования компонент того же тензора.*

Теперь представим тождества Ламе в удобном для дальнейшего пользования виде. В этой связи заметим, что

$$S^{kl} \sim (S^{KL}, S^{K3}, S^{33}). \quad (24.98)$$

Тогда тождества Ламе приобретут вид

$$S^{KL} = 0, \quad S^{K3} = 0, \quad S^{33} = 0. \quad (24.99)$$

В силу (24.95) левые части (24.99) представятся в виде

$$S^{KL} = C^{\cdot\cdot\cdot\cdot KP}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot LS}\mathbb{R}_{P3S3}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \quad S^{K3} = \frac{1}{2}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot KP}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot ST}\mathbb{R}_{P3ST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}, \quad S^{33} = \frac{1}{4}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot PQ}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot ST}\mathbb{R}_{PQST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}. \quad (24.100)$$

Аналогично из (24.96) получим обратные к (24.100) соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{P3S3}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= C^{\cdot\cdot\cdot\cdot PK}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot SL}S^{KL}, & \mathbb{R}_{P3ST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= \mathbb{R}_{STP3}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} = C^{\cdot\cdot\cdot\cdot ST}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot KP}S^{K3}, \\ \mathbb{R}_{PQST}^{\cdot\cdot\cdot\cdot} &= C^{\cdot\cdot\cdot\cdot PQ}C^{\cdot\cdot\cdot\cdot ST}S^{33} = \epsilon^{\cdot\cdot\cdot\cdot PQ}\epsilon^{\cdot\cdot\cdot\cdot ST}\mathbb{R}_{1212}^{\cdot\cdot\cdot\cdot}. \end{aligned} \quad (24.101)$$

Следует заметить, что соотношения (24.101) можно было получить и непосредственно из соответствующих соотношений (24.100), разрешая их относительно искомых величин.

Очевидно, тождества Ламе получаются приравниванием к нулю как соотношений (24.100), так и соотношений (24.101). Таким образом, в силу (24.98)–(24.101) заключаем, что

$$\mathbb{R}_{pqst}^{\dots} \sim (\mathbb{R}_{P3S3}, \mathbb{R}_{P3ST}, \mathbb{R}_{PQST}),$$

и тождества Ламе можно представить и в виде

$$\mathbb{R}_{P3S3}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{P3ST}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = 0. \quad (24.102)$$

Этим мы будем пользоваться в дальнейшем для вывода аналогичных соотношений при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

25. О ТЕНЗОРАХ РИМАНА—КРИСТОФФЕЛЯ ПРИ НОВОЙ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ОБЛАСТИ ТОНКОГО ТЕЛА В \mathbb{R}^3

Как известно, при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 представление произвольного вектора \mathbf{A} дается соотношением (20.54). Поэтому в рассматриваемом случае, например, соотношение (24.89) представится в виде

$$\partial_q \partial_p \mathbf{A} - \partial_p \partial_q \mathbf{A} = (\nabla_q \nabla_p \mathbf{A}^{\tilde{m}} - \nabla_p \nabla_q \mathbf{A}^{\tilde{m}}) \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\dots \tilde{m}} A^{\tilde{l}} \mathbf{r}_{\tilde{m}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\dots \tilde{t}} A^{\tilde{s}} \mathbf{r}_{\tilde{t}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \infty, +\}.$$

Отсюда в силу (20.12) и подобных формул для компонент вектора аналогично (21.5) получаем

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\dots \tilde{m}} = g^{\tilde{m}\tilde{n}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{n}}^{\dots} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} g_{\tilde{t}}^{\tilde{m}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\dots \tilde{t}} = g_{\tilde{l}}^{\tilde{s}} g^{\tilde{m}\tilde{t}} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}}^{\dots}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \infty, +\}, \quad (25.1)$$

где аналогично (24.76) и (24.86) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}}^{\dots \tilde{m}} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{q}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{p}}^{\tilde{m}}, \\ \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}}^{\dots} &= \partial_q \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}, \tilde{m}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{l}\tilde{q}, \tilde{m}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{p}, \tilde{m}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{l}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{q}, \tilde{m}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \simeq \in \{-, \infty, +\}. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Очевидно, представление тензора Римана—Кристоффеля при новой параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 будет иметь вид

$$\underline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{l}\tilde{m}}^{\dots} \mathbf{r}_{\tilde{p}}^{\tilde{p}} \mathbf{r}_{\tilde{q}}^{\tilde{q}} \mathbf{r}_{\tilde{l}}^{\tilde{l}} \mathbf{r}_{\tilde{m}}^{\tilde{m}}, \quad \sim, \simeq, \wedge, \vee \in \{-, \infty, +\}. \quad (25.3)$$

Закон перехода от одной системы координат к другой задается в виде специальной группы преобразования

$$x^{I'} = x^{I'}(x^1, x^2), \quad x^{3'} = x^3, \quad (25.4)$$

т. е. в дальнейшем, говоря о тензорах или о компонентах тензора, всегда будем полагать, что они являются тензорами или компонентами тензора относительно группы преобразования (25.4).

Ниже рассмотрим подробнее компоненты тензора Римана—Кристоффеля и тождества Ламе для различных семейств параметризаций области тонкого тела в \mathbb{R}^3 . Иными словами, рассмотрим их в различных семействах базисов.

Компоненты тензора Римана—Кристоффеля и тождества Ламе для $S_{(-)}^{(-)}$ -семейства параметризации. В этом случае ковариантные компоненты тензора Римана—Кристоффеля можно получить из второго соотношения (25.2) при $\sim = -$, т. е. имеем

$$\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}^{\dots} = \partial_q \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p}, \tilde{t}}^{\tilde{m}} - \partial_p \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p}, \tilde{t}}^{\tilde{m}} + \Gamma_{\tilde{s}\tilde{q}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{p}, \tilde{t}}^{\tilde{m}} - \Gamma_{\tilde{s}\tilde{p}}^{\tilde{n}} \Gamma_{\tilde{n}\tilde{q}, \tilde{t}}^{\tilde{m}}. \quad (25.5)$$

В рассматриваемом случае матричное соотношение (24.97), очевидно, представится в виде

$$\text{matr}(S^{\tilde{k}\tilde{l}}) = \binom{(-)}{g}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{2}\tilde{3}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \\ \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{3}\tilde{1}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \\ \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{2}\tilde{3}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}\tilde{1}}^{\dots} & \mathbb{R}_{\tilde{1}\tilde{2}\tilde{1}\tilde{2}}^{\dots} \end{pmatrix} = 0. \quad (25.6)$$

Заметим сразу, что в рассматриваемом случае $\partial_{\mathbf{z}} \mathbf{r}_s \neq \partial_s \mathbf{r}_3$, поэтому третье свойство (24.91) компонент Римана—Кристоффеля $\mathbb{R}_{\tilde{p}\tilde{q}\tilde{s}\tilde{t}}^{\dots}$ не выполняется, если, например, один из индексов равен трем. В этой связи следует более подробно рассматривать матричное соотношение (25.6) и изучать

в отдельности каждое его соотношение, выделяя из них существенные тождества Ламе, из которых в свою очередь получаются уравнения Гаусса и Петерсона—Кодацци.

Учитывая первое соотношение (23.4) и последнее соотношение (23.7), нетрудно заметить, что, если хотя бы один из индексов p и q равен трем, то компоненты тензора Римана—Кристоффеля (25.5) равны нулю, так что в правой части (25.5) каждое слагаемое равно нулю. Отсюда заключаем, что соотношения, получаемые из первых двух строк (25.6) рассматривать не следует. Они выполняются, но ничего нового не дают. Остаются соотношения последней строки (25.6)

$$\mathbb{R}_{1223}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{1231}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{1212}^{\dots} = 0, \quad (25.7)$$

являющиеся в рассматриваемом случае существенными тождествами Ламе. Учитывая, что

$$\mathbb{R}_{PQ33}^{\dots} = -\mathbb{R}_{PQ3S}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = \epsilon_{PQ}^{\dots} \epsilon_{ST}^{\dots} \mathbb{R}_{1212}^{\dots}, \quad (25.8)$$

соотношения (25.7) можно представить, например, в виде

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQ33}^{\dots} = 0, \quad (\mathbb{R}_{PQSt}^{\dots} = 0), \quad (25.9)$$

или

$$\mathbb{R}_{PQS\cdot}^{\dots\bar{T}} = 0, \quad \mathbb{R}_{PQS\cdot}^{\dots\bar{3}} = 0, \quad (\mathbb{R}_{PQS\cdot}^{\dots\bar{t}} = 0). \quad (25.10)$$

Итак, предметом нашего исследования является (25.9) или (25.10). Рассмотрим каждое соотношение в отдельности, например, в (25.9). Первое соотношение (25.9) в силу (25.5) представится в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{n}} \Gamma_{TP,n}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{n}} \Gamma_{TQ,n}^{\dots} = \\ &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{3}} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{3}} \Gamma_{TQ,3}^{\dots} = \\ &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} + g^{\bar{3}k} (\Gamma_{SQ,k}^{\dots} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \Gamma_{SP,k}^{\dots} \Gamma_{TQ,3}^{\dots}) = \\ &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} + g^{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{SQ,K}^{\dots} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \Gamma_{SP,K}^{\dots} \Gamma_{TQ,3}^{\dots}) + \\ &+ g^{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{SQ,3}^{\dots} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \Gamma_{SP,3}^{\dots} \Gamma_{TQ,3}^{\dots}). \end{aligned}$$

Далее, учитывая выражения символов Кристоффеля из (23.6), преобразуем последнее слагаемое в правой части этого соотношения. Имеем

$$\begin{aligned} g^{\bar{3}\bar{3}} (\Gamma_{SQ,3}^{\dots} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \Gamma_{SP,3}^{\dots} \Gamma_{TQ,3}^{\dots}) &= g^{\bar{3}\bar{3}} [\partial_Q g_{S3}^{\dots} \partial_P g_{T3}^{\dots} - \partial_P g_{S3}^{\dots} \partial_Q g_{T3}^{\dots} + \partial_Q g_{S3}^{\dots} (g_{PT}^{\dots} - g_{PT}^{\dots}) - \\ &- \partial_P g_{S3}^{\dots} (g_{QT}^{\dots} - g_{QT}^{\dots}) + \partial_P g_{T3}^{\dots} (g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\dots}) - \partial_Q g_{T3}^{\dots} (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\dots})] + \\ &+ g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\dots}) (g_{PT}^{\dots} - g_{PT}^{\dots}) - (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\dots}) (g_{QT}^{\dots} - g_{QT}^{\dots})]. \end{aligned}$$

Учитывая последнее и предпоследнее соотношения и вводя обозначение

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} + g^{\bar{3}\bar{K}} (\Gamma_{SQ,K}^{\dots} \Gamma_{TP,3}^{\dots} - \\ &- \Gamma_{SP,K}^{\dots} \Gamma_{TQ,3}^{\dots}) + g^{\bar{3}\bar{3}} [\partial_Q g_{S3}^{\dots} \partial_P g_{T3}^{\dots} - \partial_P g_{S3}^{\dots} \partial_Q g_{T3}^{\dots} + \partial_Q g_{S3}^{\dots} (g_{PT}^{\dots} - g_{PT}^{\dots}) - \\ &- \partial_P g_{S3}^{\dots} (g_{QT}^{\dots} - g_{QT}^{\dots}) + \partial_P g_{T3}^{\dots} (g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\dots}) - \partial_Q g_{T3}^{\dots} (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\dots})], \end{aligned} \quad (25.11)$$

получим

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = R_{PQST}^{\dots} + g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\dots}) (g_{PT}^{\dots} - g_{PT}^{\dots}) - (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\dots}) (g_{QT}^{\dots} - g_{QT}^{\dots})] = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$R_{PQST}^{\dots\dots} = g^{\bar{3}\bar{3}} [(g_{PS}^- - g_{PS}^+)(g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+)(g_{PT}^- - g_{PT}^+)]. \quad (25.12)$$

Правая часть (25.12) (как сумма произведений компонент ЕТВР при новой параметризации области тонкого тела и с учетом того, что $g^{\bar{3}\bar{3}}$ — инвариант) образует ковариантные компоненты тензора четвертого ранга. Поэтому и правая часть, выражающаяся еще в виде (25.11), является компонентами тензора четвертого ранга. Вспомним, что тензориальность величин рассматривается относительно группы преобразований (25.4).

Нетрудно доказать, что компоненты (25.11) обладают аналогичными (24.91) свойствами. В самом деле, эти свойства вытекают из соотношения (25.12), точнее, из его правой части. Докажем их еще другим путем. В частности, преобразуем правую часть (25.12), приведя ее к такому виду, на основании которого легко доказываются приведенные выше свойства. Имеем

$$\begin{aligned} & (g_{PS}^- - g_{PS}^+)(g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+)(g_{PT}^- - g_{PT}^+) = \\ & = \epsilon_{PQ} [(g_{1S}^- - g_{1S}^+)(g_{2T}^- - g_{2T}^+) - (g_{2S}^- - g_{2S}^+)(g_{1T}^- - g_{1T}^+)] = \\ & = \epsilon_{PQ} \epsilon^{KL} (g_{KS}^- - g_{KS}^+)(g_{LT}^- - g_{LT}^+). \end{aligned} \quad (25.13)$$

Рассмотрим выражение

$$A_{ST}^- \equiv \epsilon^{KL} (g_{KS}^- - g_{KS}^+)(g_{LT}^- - g_{LT}^+) = -\epsilon^{LK} (g_{LT}^- - g_{LT}^+)(g_{KS}^- - g_{KS}^+) = -A_{TS}^-.$$

Итак, A_{ST}^- — кососимметричная матрица. Поэтому

$$A_{ST}^- = \epsilon_{ST} A_{12}^- = \epsilon_{ST} \epsilon^{KL} (g_{K1}^- - g_{K1}^+)(g_{L2}^- - g_{L2}^+) = \epsilon_{ST} \det (g_{KM}^- - g_{KM}^+).$$

Учитывая последнее соотношение в (25.13), получим

$$(g_{PS}^- - g_{PS}^+)(g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+)(g_{PT}^- - g_{PT}^+) = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} \det (g_{KM}^- - g_{KM}^+). \quad (25.14)$$

В силу (25.14) соотношение (25.12) представится в искомом виде

$$R_{PQST}^{\dots\dots} = \epsilon_{PQ} \epsilon_{ST} g^{\bar{3}\bar{3}} \det (g_{KM}^- - g_{KM}^+). \quad (25.15)$$

Учитывая свойства символов Леви-Чивиты, из (25.15) видно, что компоненты $R_{PQST}^{\dots\dots}$ обладают аналогичными (24.91) свойствами. Заметим, что соотношение (25.15) является аналогом уравнения Гаусса при $S_{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен к базовыми поверхностями $S^{(-)}$ и $S^{(+)}$.

Теперь найдем выражение детерминанта в правой части (25.15). Имеем

$$\begin{aligned} \det (g_{KM}^- - g_{KM}^+) & = \frac{1}{2} \epsilon^{KL} \epsilon^{MN} (g_{KM}^- - g_{KM}^+)(g_{LN}^- - g_{LN}^+) = \\ & = \frac{(-)}{g} \frac{1}{2} C^{\bar{K}\bar{L}} C^{\bar{M}\bar{N}} (g_{KM}^- - g_{KM}^+)(g_{LN}^- - g_{LN}^+) = \\ & = \frac{(-)}{g} \frac{1}{2} C^{\bar{K}\bar{L}} C^{\bar{M}\bar{N}} (g_{\bar{K}}^{\bar{M}} - g_{\bar{K}}^{\bar{N}})(g_{\bar{L}}^{\bar{M}} - g_{\bar{L}}^{\bar{N}}) = \frac{(-)}{g} \det (g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) = \\ & = \frac{(-)}{g} \frac{1}{2} \epsilon^{\bar{K}\bar{L}} \epsilon^{\bar{M}\bar{N}} [g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}} - (g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}} + g_{\bar{L}\bar{N}}^- g_{\bar{K}\bar{M}}^+) + g_{\bar{K}}^{\bar{M}} g_{\bar{L}}^{\bar{N}}] = \frac{(-)}{g} [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det (g_{\bar{I}}^{\bar{J}})], \end{aligned}$$

т. е.

$$\det (g_{KM}^- - g_{KM}^+) = \frac{(-)}{g} \det (g_{\bar{I}}^{\bar{J}} - g_{\bar{I}}^{\bar{J}}) = \frac{(-)}{g} [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det (g_{\bar{I}}^{\bar{J}})]. \quad (25.16)$$

На основании (25.16) уравнение (25.15) получит более удобный вид

$$R_{PQST}^{\dots\dots} = C_{PQ}^{\dots\dots} R_{ST}^{\dots\dots} g^{\bar{3}\bar{3}} \det [1 - g_{\bar{I}}^{\bar{I}} + \det (g_{\bar{I}}^{\bar{J}})]. \quad (25.17)$$

Заметим, что для получения уравнения Гаусса мы могли поступить иначе. В частности, первое соотношение (25.9) можно было представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{PQST}^{\dots} &= \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} + g_{3K}^{\dots} (\Gamma_{SQ}^{\bar{3}} \Gamma_{TP}^{\bar{K}} - \Gamma_{SP}^{\bar{3}} \Gamma_{TQ}^{\bar{K}}) + \\ &+ g_{33}^{\dots} (\Gamma_{SQ}^{\bar{3}} \Gamma_{TP}^{\bar{3}} - \Gamma_{SP}^{\bar{3}} \Gamma_{TQ}^{\bar{3}}) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, вводя обозначение

$$\mathbb{R}_{PQST}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,T}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,T}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{N}} \Gamma_{TP,N}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{N}} \Gamma_{TQ,N}^{\dots} + g_{3K}^{\dots} (\Gamma_{SQ}^{\bar{3}} \Gamma_{TP}^{\bar{K}} - \Gamma_{SP}^{\bar{3}} \Gamma_{TQ}^{\bar{K}}),$$

имеем

$$R_{PQST}^{\dots} = g_{33}^{\dots} (\Gamma_{PS}^{\bar{3}} \Gamma_{QT}^{\bar{3}} - \Gamma_{QS}^{\bar{3}} \Gamma_{PT}^{\bar{3}}). \quad (25.18)$$

Теперь, умножая обе части последнего соотношения (24.13) на $C_{PQ}^{\dots} C_{ST}^{\dots}$ и учитывая свойства компонент дискриминантного тензора, получим

$$\begin{aligned} g^{\check{3}\check{3}(\check{\nu})} K C_{PQ}^{\dots} C_{ST}^{\dots} &= \frac{1}{2} C_{PQ}^{\dots} C_{ST}^{\dots} C_{\check{S}\check{T}}^{\check{J}\check{I}} C_{\check{L}\check{M}}^{\check{L}\check{M}} \Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{3}} = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_P^{\check{I}} \delta_Q^{\check{J}} - \delta_P^{\check{J}} \delta_Q^{\check{I}}) (\delta_S^{\check{L}} \delta_T^{\check{M}} - \delta_S^{\check{M}} \delta_T^{\check{L}}) \Gamma_{\check{I}\check{L}}^{\check{3}} \Gamma_{\check{J}\check{M}}^{\check{3}} = \Gamma_{P\check{S}}^{\check{3}} \Gamma_{Q\check{T}}^{\check{3}} - \Gamma_{P\check{T}}^{\check{3}} \Gamma_{Q\check{S}}^{\check{3}}, \end{aligned}$$

т. е.

$$g^{\check{3}\check{3}(\check{\nu})} K C_{PQ}^{\dots} C_{ST}^{\dots} = \Gamma_{P\check{S}}^{\check{3}} \Gamma_{Q\check{T}}^{\check{3}} - \Gamma_{P\check{T}}^{\check{3}} \Gamma_{Q\check{S}}^{\check{3}}, \quad \check{\nu} \in \{-, \infty, +\}. \quad (25.19)$$

В силу (25.19), предварительно записывая его при $\check{\nu} = -$, соотношение (25.18) представится в виде

$$R_{PQST}^{\dots} = g_{33}^{\dots} g^{\check{3}\check{3}(-)} K C_{PQ}^{\dots} C_{ST}^{\dots}. \quad (25.20)$$

Сравнивая (25.20) с (25.17), можно утверждать, что

$$K^{\check{3}\check{3}(-)} = g_{33}^{-1} [1 - g_{\check{I}\check{I}}^{\check{3}} + \det(g_{\check{I}\check{I}}^{\check{3}})] = h^{-2} (1 - g_{\check{I}\check{I}}^{\check{3}} + \check{\vartheta}). \quad (25.21)$$

На основании второго соотношения (24.16) и (25.21) заключаем, что гауссова кривизна $K^{\check{3}\check{3}(-)}$ в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен $S^{\check{3}\check{3}(-)}$, имеет такое же выражение, что и при $\mathbf{h} \perp S^{\check{3}\check{3}(-)}$, несмотря на то, что основные компоненты переноса ЕТВР при рассматриваемых случаях имеют различные значения.

Теперь рассмотрим второе соотношение (25.9). Это соотношение в силу (25.5) можно записать в форме

$$\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,3}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,3}^{\dots} + \Gamma_{SQ}^{\bar{n}} \Gamma_{3P,\bar{n}}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{n}} \Gamma_{3Q,\bar{n}}^{\dots} = 0. \quad (25.22)$$

Записывая (23.6) при $\check{\nu} = -$, имеем

$$\begin{aligned} \partial_Q \Gamma_{SP,3}^{\dots} &= \partial_Q \partial_P g_{S3}^{\dots} + \partial_Q (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\check{+}\check{-}}), \\ \partial_P \Gamma_{SQ,3}^{\dots} &= \partial_P \partial_Q g_{S3}^{\dots} + \partial_P (g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\check{+}\check{-}}). \end{aligned}$$

Вычитая из первого соотношения почленно второе, получим

$$\partial_Q \Gamma_{SP,3}^{\dots} - \partial_P \Gamma_{SQ,3}^{\dots} = \partial_Q (g_{PS}^{\dots} - g_{PS}^{\check{+}\check{-}}) - \partial_P (g_{QS}^{\dots} - g_{QS}^{\check{+}\check{-}}). \quad (25.23)$$

Аналогично, представляя второе соотношение (23.4) при $\check{\nu} = -$, а потом учитывая во второй разности (25.22), будем иметь

$$\Gamma_{SQ}^{\bar{n}} \Gamma_{3P,\bar{n}}^{\dots} - \Gamma_{SP}^{\bar{n}} \Gamma_{3Q,\bar{n}}^{\dots} = \Gamma_{SQ}^{\bar{n}} (g_{P\bar{n}}^{\check{+}\check{-}} - g_{P\bar{n}}^{\check{-}\check{+}}) - \Gamma_{SP}^{\bar{n}} (g_{Q\bar{n}}^{\check{+}\check{-}} - g_{Q\bar{n}}^{\check{-}\check{+}}). \quad (25.24)$$

Подставляя (25.23) и (25.24) в (25.22) и, кроме того, добавляя и вычитая выражение $(g_{nS}^{+-} - g_{nS}^{-})\Gamma_{PQ}^{\bar{n}}$, получим

$$\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots} = \bar{\nabla}_P(g_{QS}^{+-} - g_{QS}^{-}) - \bar{\nabla}_Q(g_{PS}^{+-} - g_{PS}^{-}) = 0.$$

Отсюда в свою очередь имеем

$$\bar{\nabla}_P(g_{QS}^{+-} - g_{QS}^{-}) = \bar{\nabla}_Q(g_{PS}^{+-} - g_{PS}^{-}), \quad \bar{\nabla}_P(g_{+Q}^{\bar{S}} - g_{-Q}^{\bar{S}}) = \bar{\nabla}_Q(g_{+P}^{\bar{S}} - g_{-P}^{\bar{S}}), \quad (25.25)$$

или, учитывая, что

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^{-} = 0, \quad \bar{\nabla}_P g_{+Q}^{\bar{S}} = 0, \quad (25.26)$$

из (25.25) получим

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^{+-} = \bar{\nabla}_Q g_{PS}^{+-}, \quad \bar{\nabla}_P g_{+Q}^{\bar{S}} = \bar{\nabla}_Q g_{+P}^{\bar{S}}. \quad (25.27)$$

Здесь $\bar{\nabla}_P$ — (пространственный) оператор ковариантного дифференцирования при $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Соотношения (25.25) или получаемые из них соотношения (25.27) представляют аналог уравнений Петерсона—Кодацци при $S_{(-)}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Очевидно, если бы мы исходили из соотношений (25.10), то получили те же самые соотношения. Заметим, что имеют место соотношения

$$(\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^{-} = \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^{-} = \mathbf{0}) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} = \mathbf{0}). \quad (25.28)$$

Заметим также, что в силу определения ковариантной производной $\bar{\nabla}_K$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^{+} &= \partial_P \mathbf{r}_Q^{+} - \mathbf{r}_m \Gamma_{QP}^{\bar{m}} = \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}_m \Gamma_{QP}^{\bar{m}}, \\ \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^{+} &= \partial_Q \mathbf{r}_P^{+} - \mathbf{r}_m \Gamma_{PQ}^{\bar{m}} = \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} - \mathbf{r}_m \Gamma_{PQ}^{\bar{m}}, \end{aligned}$$

из которых видно, что верны формулы

$$(\bar{\nabla}_P \mathbf{r}_Q^{+} = \bar{\nabla}_Q \mathbf{r}_P^{+}) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)}). \quad (25.29)$$

Вычитая из (25.29) почленно (25.28), получим

$$(\bar{\nabla}_P (\mathbf{r}_Q^{+} - \mathbf{r}_Q^{-}) = \bar{\nabla}_Q (\mathbf{r}_P^{+} - \mathbf{r}_P^{-})) \Leftrightarrow (\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{h} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{h}). \quad (25.30)$$

Далее, умножая обе части (25.30) на x^3 и потом прибавляя почленно к равенству (25.28), будем иметь

$$\bar{\nabla}_P \partial_Q \mathbf{r} = \bar{\nabla}_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (25.31)$$

Очевидно, из (25.31) при $x^3 = 0$ получаем (25.28), а при $x^3 = 1$ получаем (25.29). Вычитая из (25.30) почленно (25.31), получим (25.29).

Умножая скалярно обе части (25.30), (25.28) и (25.29) на \mathbf{r}_S^{-} и $\mathbf{r}_S^{\bar{S}}$ и учитывая

$$\bar{\nabla}_K \mathbf{r}_L^{-} = \mathbf{0}, \quad \bar{\nabla}_K \mathbf{r}_L^{\bar{L}} = \mathbf{0},$$

получим соотношения (25.25)–(25.27) соответственно.

Таким образом, имея соотношение (25.31), можно получить (25.25), (25.27), (25.28) и (25.30).

Умножая обе части соотношений

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^- = \bar{\nabla}_Q g_{PS}^-, \quad \bar{\nabla}_P g_Q^S = \bar{\nabla}_Q g_P^S,$$

получаемых при умножении обеих частей (25.28) на \mathbf{r}_S^- и \mathbf{r}^S соответственно, на $1 - x^3$, а соотношений (25.27) — на x^3 и складывая полученные равенства почленно, будем иметь

$$\bar{\nabla}_P g_{QS}^- = \bar{\nabla}_Q g_{PS}^-, \quad \bar{\nabla}_P g_Q^S = \bar{\nabla}_Q g_P^S. \quad (25.32)$$

Следует заметить, что аналогичное второму соотношению (25.32) соотношение при классической параметризации (когда в качестве базовой рассматривается срединная поверхность) области тонкого тела в \mathbb{R}^3 приведено в монографии [63, соотношение (1.3.44)].

Заметим также, что компоненты тензора Римана—Кристоффеля и тождества Ламе при $S_{(-)g}^{(-)}$ -семействе параметризации области тонкого тела рассматриваются совершенно аналогично рассмотренному случаю, поэтому на этом случае мы останавливаться не будем. Ниже рассмотрим их при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Компоненты тензора Римана—Кристоффеля и тождества Ламе при S_g -семействе параметризации. В рассматриваемом случае чисто ковариантные компоненты тензора Римана—Кристоффеля получим из второго соотношения (25.2) при $\sim = \emptyset$

$$\mathbb{R}_{pqst}^{\dots} = \partial_q \Gamma_{sp,t} - \partial_p \Gamma_{sq,t} + \Gamma_{sq}^n \Gamma_{tp,n} - \Gamma_{sp}^n \Gamma_{tq,n}. \quad (25.33)$$

Эти компоненты обладают свойствами, аналогичными (24.91), поэтому в этом случае тождества Ламе представляются в виде соотношений (24.102). Наша задача заключается в рассмотрении каждого из них.

Учитывая (25.33), первое соотношение (24.102) можно записать в виде

$$\mathbb{R}_{P3S3}^{\dots} = \partial_3 \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{S3,3} + \Gamma_{S3}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{33,n} = 0. \quad (25.34)$$

На основании (23.4), (23.6) и (23.7) из (23.8), производя простые выкладки, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{SP,3} = \Gamma_{PS,3} = \partial_P g_{S3} - g_S^k (g_{Pk}^+ - g_{Pk}^-), \quad \Gamma_{S3,3} = \Gamma_{3S,3} = \partial_3 g_{S3} = g_{S3}^+ - g_{S3}^-, \\ \Gamma_{S3}^n = \Gamma_{3S}^n = g_k^n (g_S^k - g_S^k), \quad \Gamma_{P3,n} = \Gamma_{3P,n} = g_{nm}^m (g_P^m - g_P^m), \quad \Gamma_{33,n} = 0. \end{aligned} \quad (25.35)$$

Подставляя (25.34) в (25.33), имеем

$$(\mathbb{R}_{P3S3}^{\dots} = 0) \Rightarrow [\partial_P (g_{S3}^+ - g_{S3}^-) - \partial_S (g_{P3}^+ - g_{P3}^-) = 0].$$

Отсюда, добавляя и вычитая недостающие до ковариантных производных слагаемые, будем иметь

$$\bar{\nabla}_P (g_{S3}^+ - g_{S3}^-) = \bar{\nabla}_S (g_{P3}^+ - g_{P3}^-),$$

или

$$\nabla_P (g_{S3}^+ - g_{S3}^-) = \nabla_S (g_{P3}^+ - g_{P3}^-), \quad (25.36)$$

где ∇_P — оператор (пространственный) ковариантного дифференцирования при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Теперь рассмотрим второе соотношение (24.102). Так как $\mathbb{R}_{P3ST}^{\dots} = \mathbb{R}_{STP3}^{\dots}$, то вместо упомянутого соотношения можно рассматривать $\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots} = 0$, которое в силу (25.33) представится в виде

$$\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots} = \partial_Q \Gamma_{SP,3} - \partial_P \Gamma_{SQ,3} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{3P,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{3Q,n} = 0.$$

Учитывая соответствующие соотношения (25.35), после простых преобразований получим

$$(\mathbb{R}_{PQS3}^{\dots} = 0) \Rightarrow [\nabla_P (g_{QS}^+ - g_{QS}^-) = \nabla_Q (g_{PS}^+ - g_{PS}^-)]. \quad (25.37)$$

Нетрудно заметить, что (25.36) и (25.37) можно объединить и представить одним соотношением

$$\nabla_P (g_{Qs}^+ - g_{Qs}^-) = \nabla_Q (g_{Ps}^+ - g_{Ps}^-) \quad (25.38)$$

или

$$\nabla_P(g_{+Q}^s - g_{-Q}^s) = \nabla_Q(g_{+P}^s - g_{-P}^s). \quad (25.39)$$

Из (25.38) и (25.39) посредством элементарных преобразований следуют соотношения

$$\nabla_P g_{\check{Q}s}^s = \nabla_Q g_{\check{P}s}^s, \quad \nabla_P g_{\check{Q}}^s = \nabla_Q g_{\check{P}}^s, \quad \check{\sim} \in \{-, +\}. \quad (25.40)$$

Соотношения (25.38)–(25.40) представляют аналоги уравнений Петерсона–Кодацци, представленных в различных формах, при S_g -семействе параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Легко видеть, что верны равенства

$$\begin{aligned} \nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} &= \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} - \partial_M \mathbf{r}^{(-)} \Gamma_{PQ}^M = \nabla_P \mathbf{r}_{-Q}^{(-)}, \\ \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} &= \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)} - \partial_M \mathbf{r}^{(-)} \Gamma_{QP}^M = \nabla_Q \mathbf{r}_{-P}^{(-)}, \end{aligned} \quad (25.41)$$

на основании которых можно написать

$$(\nabla_P \mathbf{r}_{-Q}^{(-)} = \nabla_Q \mathbf{r}_{-P}^{(-)}) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(-)} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(-)}). \quad (25.42)$$

Аналогично (25.41) находим формулы

$$\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \partial_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} - \partial_M \mathbf{r}^{(+)} \Gamma_{PQ}^M = \nabla_P \mathbf{r}_{+Q}^{(+)}, \quad \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} = \partial_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)} - \partial_M \mathbf{r}^{(+)} \Gamma_{QP}^M = \nabla_Q \mathbf{r}_{+P}^{(+)},$$

в силу которых имеем

$$(\nabla_P \mathbf{r}_{+Q}^{(+)} = \nabla_Q \mathbf{r}_{+P}^{(+)}) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{r}^{(+)} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}^{(+)}). \quad (25.43)$$

Вычитая из (25.43) почленно (25.42), будем иметь

$$(\nabla_P (\mathbf{r}_{+Q}^{(+)} - \mathbf{r}_{-Q}^{(-)}) = \nabla_Q (\mathbf{r}_{+P}^{(+)} - \mathbf{r}_{-P}^{(-)})) \Leftrightarrow (\nabla_P \partial_Q \mathbf{h} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{h}). \quad (25.44)$$

Умножая обе части первого соотношения (25.42) на $1 - x^3$, а (25.43) — на x^3 и потом складывая полученные равенства почленно, найдем

$$\nabla_P \partial_Q \mathbf{r} = \nabla_Q \partial_P \mathbf{r}. \quad (25.45)$$

Заметим, что (25.45) можно еще получить, если обе части равенства (25.44) умножить на x^3 и потом прибавить почленно к соотношению (25.42).

Нетрудно усмотреть, что, имея соотношение (25.45), можно получить все соотношения (25.38)–(25.44).

Остается рассмотреть третье соотношение (24.102). В силу (25.33) имеем

$$\begin{aligned} 0 = \mathbb{R}_{P\check{Q}ST} \dots &= \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^n \Gamma_{TP,n} - \Gamma_{SP}^n \Gamma_{TQ,n} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \\ &+ \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + \Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP,3} - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ,3} = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \\ &- \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K) + g_{33} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3). \end{aligned}$$

Вводя обозначение

$$\mathbf{R}_{P\check{Q}ST} \dots = \partial_Q \Gamma_{SP,T} - \partial_P \Gamma_{SQ,T} + \Gamma_{SQ}^N \Gamma_{TP,N} - \Gamma_{SP}^N \Gamma_{TQ,N} + g_{3K} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^K - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^K), \quad (25.46)$$

из предыдущего соотношения получаем

$$\mathbb{R}_{P\check{Q}ST} \dots = \mathbf{R}_{P\check{Q}ST} \dots + g_{33} (\Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3 - \Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3) = 0.$$

Отсюда в свою очередь следует

$$\mathbf{R}_{P\check{Q}ST} \dots = g_{33} (\Gamma_{SP}^3 \Gamma_{TQ}^3 - \Gamma_{SQ}^3 \Gamma_{TP}^3). \quad (25.47)$$

Учитывая в правой части (25.47) значение разности произведений символов Кристоффеля из (25.19) при $\check{\sim} = \emptyset$, будем иметь

$$\mathbf{R}_{P\check{Q}ST} \dots = g_{33} g^{33} K C_{P\check{Q}} \dots C_{ST} \dots \quad (25.48)$$

Очевидно, в силу (25.48) можно утверждать, что (25.46) являются компонентами тензора четвертого ранга относительно группы преобразований (25.4), а также то, что они обладают свойствами, аналогичным (24.91).

Поступая так же, как и при выводе соотношения (25.12), в рассматриваемом случае аналогичное соотношение представим в виде

$$\mathbf{R}_{\dot{P}\dot{Q}\dot{S}\dot{T}} = g^{33} [(g_{PS}^- - g_{PS}^+) (g_{QT}^- - g_{QT}^+) - (g_{QS}^- - g_{QS}^+) (g_{PT}^- - g_{PT}^+)]. \quad (25.49)$$

Далее, преобразуя правую часть (25.49) аналогично правой части (25.12), получим

$$\mathbf{R}_{\dot{P}\dot{Q}\dot{S}\dot{T}} = \epsilon_{PQ}\epsilon_{ST} g^{33} \det (g_{MN}^- - g_{MN}^+). \quad (25.50)$$

Нетрудно заметить, что для определителя в правой части (25.50) имеем

$$\begin{aligned} \det (g_{MN}^- - g_{MN}^+) &= \frac{1}{2} \epsilon^{IJ} \epsilon^{KL} (g_{IK}^- - g_{IK}^+) (g_{JL}^- - g_{JL}^+) = \\ &= \frac{1}{2} g C^{IJ} C^{KL} (g_{IK}^- - g_{IK}^+) (g_{JL}^- - g_{JL}^+) = \frac{1}{2} g C^{IJ} C_{KL} (g_I^K - g_I^+) (g_J^L - g_J^+) = g \det (g_I^K - g_I^+), \end{aligned}$$

т. е.

$$\det (g_{MN}^- - g_{MN}^+) = g \det (g_I^K - g_I^+). \quad (25.51)$$

Учитывая (25.51) и (25.50), получим

$$\mathbf{R}_{\dot{P}\dot{Q}\dot{S}\dot{T}} = C_{P\dot{Q}} C_{S\dot{T}} g^{33} \det (g_I^K - g_I^+). \quad (25.52)$$

Сравнивая (25.48) и (25.52), заключаем, что

$$K = g_{33}^{-1} \det (g_I^K - g_I^+). \quad (25.53)$$

Придадим (25.53) другой вид. В этой связи в правой части (25.53) преобразуем определитель. В силу (20.16), (20.18) и (25.16) имеем

$$\det (g_I^K - g_I^+) = \det [g_J^K (g_I^J - g_I^+)] = \det (g_L^K) \det (g_I^J - g_I^+) = \vartheta^{-1} [1 - g_I^+ + \det (g_I^J)]. \quad (25.54)$$

Подставляя (25.54) в (25.53) и учитывая (25.21), найдем искомые выражения для K , а именно

$$K = \vartheta^{-1} g_{33}^{-1} [1 - g_I^+ + \det (g_I^J)] = \vartheta^{-1} K^{\bar{(-)}}. \quad (25.55)$$

На основании (25.55) заключаем, что второе соотношение (24.25) имеет место и в том случае, когда \mathbf{h} не перпендикулярен $S^{\bar{(-)}}$.

Ниже приведем формулировку фундаментальной теоремы теории поверхностей и, резюмируя изложенное выше, дадим формулировку аналогичной теоремы для области тонкого тела в \mathbb{R}^3 .

Теорема 25.1 (фундаментальная теорема теории поверхностей). *Задание двух любых тензоров*

$$\mathbf{E} = g_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J, \quad \mathbf{b} = b_{IJ} \mathbf{r}^I \mathbf{r}^J,$$

первый из которых является положительно определенным и компоненты которых связаны между собой уравнениями Гаусса и Петерсона—Кодацци, необходимо и достаточно для существования и единственности с точностью до движения в \mathbb{R}^3 некоторой регулярной поверхности, для которой эти тензоры являются первым и вторым тензорами.

Заметим, что необходимая часть этой теоремы — теорема Бонне [11, 51].

Теорема 25.2 (фундаментальная теорема о параметризации области тонкого тела в \mathbb{R}^3). *Задание единичного тензора второго ранга, представленного в виде*

$$\mathbf{E} = g_{\dot{p}\dot{q}} \mathbf{r}^{\dot{p}} \mathbf{r}^{\dot{q}}, \quad \wedge, \sim \in \{-, \emptyset, +\},$$

необходимо и достаточно для существования и единственности с точностью до движения в \mathbb{R}^3 некоторой регулярной области тонкого тела при ее новой параметризации. При этом число независимых основных компонент ЕТВР зависит от типа семейства параметризации.

Упражнение 1. Осуществить все построения четвертой главы, если радиус-вектор $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$ произвольной точки тонкого тела задается соотношением

$$\hat{\mathbf{r}}(x', x^3) = \mathbf{r}(x') + [h(x')x^3 + \bar{h}(x')] \mathbf{n}(x'), \quad -1 \leq x^3 \leq 1,$$

где $h(x') = (1/2)[\overset{(+)}{h}(x') + \overset{(-)}{h}(x')]$, $\bar{h}(x') = (1/2)[\overset{(+)}{h}(x') - \overset{(-)}{h}(x')]$, $\mathbf{r}(x')$ — радиус-вектор произвольной точки базовой поверхности, которая не является срединной поверхностью.

Указание. При дифференцировании $\hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$ ввести обозначение $\mathbf{r}_{\hat{p}} = \partial_p \hat{\mathbf{r}}(x', x^3)$ и индекс с крышечкой сохранить для геометрических объектов в произвольной точке тонкого тела. Например, $g_{\hat{p}\hat{q}} = \mathbf{r}_{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}_{\hat{q}}$, $g^{\hat{p}\hat{q}} = \mathbf{r}^{\hat{p}} \cdot \mathbf{r}^{\hat{q}}$, $\mathbf{r}^{\hat{p}} = (1/2)C^{\hat{p}\hat{q}\hat{s}} \mathbf{r}_{\hat{q}} \times \mathbf{r}_{\hat{s}}$ и т. д. Такое представление радиус-вектора удобно во многих случаях, особенно тогда, когда при построении тонких тел используются системы классических ортогональных полиномов (Лежандра, Чебышева первого и второго родов) [45].

Упражнение 2. Придумать представление радиус-вектора произвольной точки области стержня с поперечным сечением в виде прямоугольника, когда в качестве базовой рассматривается произвольная кривая внутри области [44].

Упражнение 3. Придумать представление радиус-вектора произвольной точки области стержня с поперечным сечением в виде параллелограмма, когда в качестве базовых рассматриваются граничные кривые области стержня [44].

Следует заметить, что при наборе работы были использованы замечательные книги [8, 23, 70]. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 12-01-00020-а и 14-01-00317-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров К. С. Упругие свойства анизотропных сред. Автореф. докт. дисс. — М.: Ин-т кристаллогр. АН СССР, 1967.
2. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: Наука, 1979.
3. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. — М.: Физматгиз, 1962.
4. Бурбаки Н. Алгебра. Модули, кольца, формы. — М.: Наука, 1966.
5. Векуа И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978.
6. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. — М.: Наука, 1988.
7. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.
8. Гуссенс М., Миттельбах Ф., Самарин А. Путеводитель по пакету L^AT_EX и его расширению L^AT_EX₂_ε. — М.: Мир, 1999.
9. Димитриенко Ю. И. Тензорное исчисление. — М.: Высш. шк., 2001.
10. Димитриенко Ю. И. Механика сплошной среды. Т. 1. Тензорный анализ. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011.
11. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1, 2. — М.: Эдиториал. УРСС, 1998.
12. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. Учебник. 3-е изд. — М.: Изд-во, 1990.
13. Колмогоров А. Н., Фомин С. Н. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
14. Корнев Г. В. Тензорное исчисление. — М.: Изд-во МФТИ, 1995.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974.
16. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976.
17. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. — М.: Гостехиздат, 1957.
18. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977.
19. Лохин В. В. Нелинейные тензорные функции в пространстве Минковского// В кн.: Научные труды Ин-та механики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. — 31. — С. 6–66.
20. Лохин В. В., Седов Л. И. Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов// Прикл. мат. мех. — 1963. — 27, № 3. — С. 393–417.
21. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980.
22. Лурье К. А. Некоторые задачи оптимального изгиба и растяжения упругих пластин// Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. — 1979. — 6. — С. 86–93.

23. Львовский С. М. Набор и верстка в пакете \LaTeX . — М.: Космосинформ, 1995.
24. Любарский Г. Я. Теория групп и ее применение в физике. — М.: Физматгиз, 1958.
25. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.
26. Ляв А. Математическая теория упругости. — М.—Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935.
27. Мак-Коннел А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: Физматгиз, 1963.
28. Минкевич Л. М. Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры// В кн.: Вопросы динамики механических систем виброударного действия. — Новосибирск: НЭТИ, 1973. — С. 107–110.
29. Никабадзе М. У. Параметризация оболочек на основе двух базовых поверхностей// Деп. в ВИНТИ АН СССР. — 1988. — №5588-В88. — 30 с.
30. Никабадзе М. У. О символах Кристоффеля и втором тензоре поверхности при новой параметризации пространства оболочки// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2000. — 3. — С. 41–45.
31. Никабадзе М. У. Некоторые вопросы тензорного исчисления. I. — М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.
32. Никабадзе М. У. Некоторые вопросы тензорного исчисления. II. — М.: ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, 2007.
33. Никабадзе М. У. Применение систем полиномов Лежандра и Чебышева при моделировании упругих тонких тел с одним малым размером// Деп. в ВИНТИ РАН. — 2008. — №720-В2008. — 287 с.
34. Никабадзе М. У. Варианты математической теории многослойных конструкций с несколькими базовыми поверхностями// Деп. в ВИНТИ РАН. — 2008. — №721-В2008. — 127 с.
35. Никабадзе М. У. К задаче о нахождении у тензора четного ранга собственных значений и собственных тензоров// Изв. РАН. Сер. Мех. тверд. тела. — 2008. — 4. — С. 77–94.
36. Никабадзе М. У. О некоторых вопросах тензорного исчисления. I// Соврем. мат. и ее прилож. — 2009. — 62. — С. 67–95.
37. Никабадзе М. У. О некоторых вопросах тензорного исчисления. II// Соврем. мат. и ее прилож. — 2009. — 62. — С. 96–130.
38. Никабадзе М. У. К построению линейно независимых тензоров// Изв. РАН. Сер. Мех. тверд. тела. — 2009. — 1. — С. 17–36.
39. Никабадзе М. У. Задачи на собственные значения для тензора и тензорно-блочной матрицы любого четного ранга с некоторыми приложениями к механике// Соврем. пробл. мат. мех. — 7, Мат. Мех., № 2. — 2013. — С. 170–245.
40. Никабадзе М. У. Некоторые вопросы тензорного исчисления с приложениями к механике// Деп. в ВИНТИ РАН. — 2013. — №231-В2013. — 242 с.
41. Никабадзе М. У. Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. — М.: Изд-во Попечительского совета мех.-мат. ф-та МГУ, 2014.
42. Никабадзе М. У. Метод ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. Дисс. докт. физ.-мат. наук. — М.: МАИ, 2014.
43. Никабадзе М. У. К построению собственных тензорных столбцов в микрополярной линейной теории упругости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2014. — 1. — С. 30–39.
44. Никабадзе М. У., Кантор М. М., Улуханян А. Р. К математическому моделированию упругих тонких тел и численная реализация некоторых задач о полосе// Деп. в ВИНТИ РАН. — 2011. — №204-В2011. — 207 с.
45. Никабадзе М. У., Улуханян А. Р. Математическое моделирование упругих тонких тел с одним малым размером с помощью систем ортогональных полиномов// Деп. в ВИНТИ РАН. — 2008. — №723-В2008. — 64 с.
46. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
47. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния// Динам. сплошн. среды. — 1984. — 66. — С. 113–125.
48. Остросаблин Н. И. О структуре тензора модулей упругости и классификация анизотропных материалов// Журн. прикл. мех. техн. физ. — 1986. — 4. — С. 127–135.
49. Остросаблин Н. И. Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний// Динам. сплошн. среды. — 1986. — 75. — С. 113–125.
50. Остросаблин Н. И. Анизотропия и общие решения уравнений линейной теории упругости. Дисс. докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 2000.
51. Погорелов А. В. Геометрия. — М.: Наука, 1983.
52. Победря Б. Е. Теория пластичности анизотропных материалов// Прикл. пробл. прочн. и пластичн. Всесоюз. межвуз. сб. — 1984. — 26. — С. 110–115.

53. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. — М.: МГУ, 1984.
54. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. — М.: МГУ, 1986.
55. *Победря Б. Е.* Теория течения анизотропной среды// В кн.: Прочность, пластичность и вязкоупругость материалов и конструкций. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986.
56. *Победря Б. Е.* О теории пластичности трансверсально-изотропных материалов// Изв. АН СССР. Сер. Мех. тверд. тела. — 1990. — 3. — С. 96–101.
57. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. Учеб. пособие. 2-ое изд. — М.: МГУ, 1995.
58. *Победря Б. Е.* О теории определяющих соотношений в механике деформируемого твердого тела// Проблемы механики: Сб. статей. К 90-летию со дня рождения А. Ю. Ишлинского. — М.: Физматлит, 2003. — С. 635–657.
59. *Победря Б. Е., Георгиевский Д. В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2006.
60. *Потапов М. К., Александров В. В., Пасиченко П. И.* Алгебра и начала анализа. Современный курс для поступающих в ВУЗы. — М.: 1 Федеративная Книготорговая Компания, 1998.
61. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988.
62. *Ревуженко А. Ф., Чанышев А. И., Шемякин Е. И.* Математические модели упругопластических тел// В кн.: Актуал. пробл. вычисл. мат. и мат. модел. — Новосибирск: Наука, 1985. — С. 108–119.
63. *Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А.* Устойчивость оболочек из композитных материалов. — Рига: «Зинатне», 1974.
64. *Рыхлевский Я.* «Ceiiinossttuv»: Математическая структура упругих тел. — М.: Ин-т проблем механики АН СССР, 1983. — Препр. № 217. — 113 с.
65. *Рыхлевский Я.* О законе Гука// Прикл. мат. мех. — 1984. — 48, № 3. — С. 420–435.
66. *Садовничий В. А.* Теория операторов. — М.: Дрофа, 2001.
67. *Седов Л. И.* Введение в механику сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962.
68. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1983.
69. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. — М.: Наука, 1971.
70. *Спивак М.* Восхитительный TeX: Руководство по комфортному изготовлению научных публикаций в пакете AMS-TeX. — М.: Мир, 1993.
71. *Толоконников Л. А., Матченко Н. М.* О представлениях предельных условий для начально анизотропных тел// Пробл. прочн. — 1974. — 3. — С. 54–56.
72. *Уоткинс Д. С.* Основы матричных вычислений. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006.
73. *Фаддеев Д. К.* Лекции по алгебре. — М.: Наука, 1984.
74. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Задачи по высшей алгебре. — СПб: Лань, 1999.
75. *Чанышев А. И.* О пластичности анизотропных сред// Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1984. — 2. — С. 149–151.
76. *Чанышев А. И.* К решению задач о предельных нагрузках для жесткопластического анизотропного тела// Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1984. — 5. — С. 151–154.
77. *Черных К. Ф.* Введение в анизотропную упругость. — М.: Наука, 1988.
78. *Eringen A. C.* Microcontinuum field theories. 1. Foundation and solids. — N. Y.: Springer, 1999.
79. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. — Oxford, 1954.
80. *Nikabadze M. U.* On some problems of tensor calculus. I// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2009. — 161, № 5. — С. 668–697.
81. *Nikabadze M. U.* On some problems of tensor calculus. II// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2009. — 161, № 5. — С. 698–733.
82. *Nikabadze M. U.* Mathematical modeling of multilayer thin body deformation// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2012. — 187, № 3. — С. 300–336.
83. *Pipkin A. C.* Constraints in linearly elastic materials// J. Elast. — 1976. — 6, №2. — С. 179–193.

Михаил Ушангиевич Никабадзе

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, Главное здание, сектор А, ком. 1411

E-mail: munikabadze@yandex.ru