Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 140–151

УДК 517.95+517.98

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2016 г. **Л. Е. РОССОВСКИЙ, А. Р. ХАНАЛЫЕВ**

Аннотация. В произвольном банаховом пространстве E рассматривается нелокальная задача

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$
$$v(0) = v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leqslant 1)$$

для абстрактного параболического уравнения с линейным неограниченным сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t всюду плотную в E область определения $D = D(A(t))$ и порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$.

Устанавливается коэрцитивная разрешимость задачи в банаховом пространстве $C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ с весом $(t+\tau)^\alpha$ — результат, который прежде был известен лишь для постоянного оператора. Рассматриваются приложения в классе параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованием пространственных переменных и параболических уравнений с нелокальными условиями на границе области. Таким образом, охвачен случай параболического уравнения с нелокальными условиями как по времени, так и по пространственным переменным.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 140
2. Коэрцитивная разрешимость в $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$ 142
3. Приложения 144
 3.1. Параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием пространственных переменных 144
 3.2. Параболическое дифференциальное уравнение с нелокальным условием на $\partial\Omega$ . . . 147
 Список литературы 149

1. Введение

Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена нелокальной краевой задаче

$$\begin{aligned} &v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\\ &v(0) = v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leqslant 1) \end{aligned} \tag{1.1}$$

в произвольном банаховом пространстве E для абстрактного зависящего от t оператора $A(t)$. Здесь $v(t)$ и $f(t)$ — искомая и заданная функции, определенные на $[0,1]$ со значениями в E; $v'(t)$ — производная, понимаемая как предел по норме E соответствующего конечно-разностного отношения; $A(t)$ — действующий в E линейный неограниченный оператор, имеющий не зависящую от t всюду плотную в E область определения D; $\mu \in D$.

Основной результат первой части — теорема 2.1 о разрешимости и оценках решений задачи (1.1). Во второй части рассматриваются приложения к различным операторам $A(t) \equiv A$, в свою очередь, нелокальным.

Ниже во введении приводятся необходимые определения и обозначения и даются ссылки на уже известные результаты. Будем предполагать, что

1. при любых $t \in [0,1]$ и $\rho \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Re}\rho \geqslant 0$, оператор $A(t) + \rho I$ имеет ограниченный обратный, причем

$$\left\| [A(t) + \rho I]^{-1} \right\|_{E \to E} \leqslant M(1 + |\rho|)^{-1} \tag{1.2}$$

(согласно [5], оператор $A(t)$ принято называть *сильно позитивным*);

2. для любых $t, s, \tau \in [0,1]$ справедливо неравенство

$$\left\|[A(t) - A(s)]A^{-1}(\tau)\right\|_{E\to E} \leqslant M|t-s|^{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.3}$$

Функцию $v(t)$ назовем *решением* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$;
2. элемент $v(t)$ принадлежит $D = D(A(t))$ при каждом $t \in [0,1]$, и $A(t)v(t)$ непрерывна на $[0,1]$;
3. функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению и нелокальному краевому условию (1.1).

Задача (1.1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t)$ при определенных ограничениях на μ и достаточно гладких функциях $f(t)$, а для ее решения справедлива формула

$$v(t) = v(t,0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\left\{\mu + \int\limits_0^{\lambda} v(\lambda,s)f(s)ds\right\} + \int\limits_0^t v(t,s)f(s)ds,$$

где $v(t,s)$ — фундаментальное решение уравнения (1.1), называемое также эволюционной оператор-функцией (см. [6, 20]). Она определяется из соотношения

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(t)\} + \int\limits_s^t \exp\{-(t-t_1)A(t)\}[A(t) - A(t_1)]v(t_1,s)dt_1,$$

или

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(s)\} + \int\limits_s^t v(t,t_1)[A(s) - A(t_1)]\exp\{-(t_1-s)A(s)\}dt_1,$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1. оператор $v(t,s)$ сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
2. $v(t,s) = v(t,\tau)v(\tau,s)$, $v(t,t) = I$ $(0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1)$;
3. оператор $v(t,s)$ отображает область определения $D = D(A(t))$ в себя, оператор $u(t,s) = A(t)v(t,s)A^{-1}(s)$ ограничен и сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
4. на области D оператор $v(t,s)$ сильно дифференцируем по t и s, причем

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = -A(t)v(t,s), \qquad \frac{\partial v(t,s)}{\partial s} = v(t,s)A(s).$$

Определение 1.1. Говорят, что задача (1.1) *коэрцитивно разрешима* в некотором банаховом пространстве $F(E) = F([0,1],E)$ функций $f(t)$ со значениями в E на $[0,1]$, если для всяких $f \in F(E)$, $\mu \in D$ существует единственное решение задачи (1.1), причем v' и $A(t)v$ принадлежат тому же пространству $F(E)$ (см. [7]).

Банахово пространство, полученное замыканием множества всех гладких функций $f(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями из E в норме

$$\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1}\frac{(t+\tau)^{\gamma}\,\|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^{\beta}}$$

обозначим через $C_0^{\beta,\gamma}(E) = C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta,\ 0 < \beta < 1)$. Здесь под $C(E) = C([0,1],E)$ понимается банахово пространство определенных на $[0,1]$ со значениями в E непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|f(t)\|_E\,.$$

Таким образом, при $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$ пространство $C_0^{\alpha,0}(E) = C_0^{\alpha,0}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C^{\alpha}(E) = C^{\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^{\alpha}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1}\frac{\|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^{\alpha}}.$$

А при $\gamma = \beta = \alpha$ пространство $C_0^{\alpha,\alpha}(E) = C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ с нормой

$$\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1}\frac{(t+\tau)^{\alpha}\,\|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^{\alpha}}$$

совпадает с пространством $C_0^{\alpha}(E) = C_0^{\alpha}([0,1], E)$ $(0 < \alpha < 1)$, норма в котором имеет вид

$$\|f\|_{C_0^{\alpha}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1} \frac{t^{\alpha} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^{\alpha}},$$

причем нормы этих пространств эквивалентны равномерно по $\alpha \in (0,1)$.

Ранее в [17, 18] исследовалась коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространствах $C^{\alpha}(E)$, $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ и $C_0^{\beta,\gamma}([0,1], E_{\alpha-\beta})$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha,\ 0 < \alpha < 1)$ в предположении о том, что элемент $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)$ принадлежит некоторому подпространству, полученному методом вещественной интерполяции из пары E и $D(A(t))$. А в [19] аналогичные результаты получены для задачи (1.1) с постоянным оператором $A(t) \equiv A$.

В настоящей работе доказывается коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространстве $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$ при $\mu \in D$ без привлечения интерполяционных пространств.

В то же время, для задачи Коши с переменным оператором

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad v(0) = v_0 \tag{1.4}$$

был получен следующий результат (см. [20]).

Теорема 1.1. *Пусть $v_0 \in D$, $f \in C_0^{\alpha,\alpha}(E)$ при некоторых $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. Тогда задача* (1.4) *коэрцитивно разрешима в $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$, и для ее единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} + \|A(\cdot)v\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} \leqslant M \left[\|A(0)v_0\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}\right] \tag{1.5}$$

с постоянной M, не зависящей от α, v_0 и f.

Известно, что при любых $t > s$, $\delta > 0$ и $M > 0$ для аналитической полугруппы справедливы следующие оценки (см. [14, 20]):

$$\|\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E \to E} \leqslant M \exp\{-\delta(t-s)\},$$

$$\|A(t)\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E \to E} \leqslant M(t-s)^{-1} \exp\{-\delta(t-s)\}.$$

Далее, для любых $0 \leqslant s < t \leqslant 1$ и $M > 0$ верны оценки (см. [14, 20]):

$$\|v(t,s)\|_{E \to E} \leqslant M, \quad \left\|A(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E \to E} \leqslant M,$$

$$\|A(t)v(t,s)\|_{E \to E} \leqslant \frac{M}{t-s}, \tag{1.6}$$

Кроме того, в [17, 18] установлены следующие леммы.

Лемма 1.1. *Пусть $A(t)A^{-1}(p) = A(t+\lambda)A^{-1}(p)$ при некоторых $0 \leqslant t \leqslant t+\lambda$, $p \in [0,1]$. Тогда для любых $0 \leqslant s < t \leqslant t+\lambda$, $u \in D$ справедливо тождество*

$$v(t,s)u = v(t+\lambda, s+\lambda)u. \tag{1.7}$$

Лемма 1.2. *Пусть выполняются условия леммы* 1.1. *Тогда оператор $I - v(\lambda, 0)$ имеет ограниченный обратный, и справедливы неравенства*

$$\left\|(I - v(\lambda,0))^{-1}\right\|_{E \to E} \leqslant M, \tag{1.8}$$

$$\left\|A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E \to E} \leqslant M. \tag{1.9}$$

2. Коэрцитивная разрешимость в $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$

Теорема 2.1. *Пусть $\mu \in D$, $f \in C_0^{\alpha,\alpha}(E)$ при некоторых $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$, и для ее единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} + \|A(\cdot)v\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} \leqslant M \left[\|A(0)\mu\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}\right] \tag{2.1}$$

с постоянной M, не зависящей от α, μ и f.

Доказательство. Используем представление $A(0)v_0 =$

$$= A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\left\{\mu + \int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)f(s)ds\right\} = -A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds +$$

$$+ A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds +$$

$$+ A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}((I - v(\lambda,0))A^{-1}(\lambda)f(\lambda) + \mu) = -A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds +$$

$$+ A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds +$$

$$+ A(0)A^{-1}(\lambda)f(\lambda) + A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\mu = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = -A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds,$$

$$I_2 = A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\int\limits_0^\lambda v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds,$$

$$I_3 = A(0)A^{-1}(\lambda)f(\lambda), \quad I_4 = A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}\mu.$$

Воспользуемся неравенством (1.5), полученным для задачи Коши. Достаточно получить оценку для $A(0)v_0$ в норме E. Для этого нужно оценить I_1, I_2, I_3 и I_4. Сначала оценим I_1. В силу (1.6) и (1.9) имеем

$$\|I_1\|_E \leqslant \left\|A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E}\left\|\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)(f(\lambda) - f(s))ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^\lambda \|A(\lambda)v(\lambda,s)\|_{E\to E}\|f(\lambda) - f(s)\|_E\,ds \leqslant M_1\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda - s)^\alpha ds}{(\lambda - s)\lambda^\alpha}\ \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} =$$

$$= M_1\int\limits_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda - s)^{1-\alpha}\lambda^\alpha}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} = \frac{M_1}{\alpha}\ \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}.$$

Теперь оценим I_2. Воспользовавшись оценками (1.3), (1.6) и (1.9), получаем

$$\|I_2\|_E \leqslant \left\|A(0)(I - v(\lambda,0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E}\left\|\int\limits_0^\lambda A(\lambda)v(\lambda,s)[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)f(\lambda)ds\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^\lambda \|A(\lambda)v(\lambda,s)\|_{E\to E}\left\|[A(\lambda) - A(s)]A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E}\|f(\lambda)\|_E\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M_1\int\limits_0^\lambda \frac{(\lambda - s)^\varepsilon ds}{\lambda - s}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} \leqslant M_1\int\limits_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda - s)^{1-\alpha}}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} \leqslant \frac{M_1}{\alpha}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}.$$

Далее оцениваем I_3:

$$\|I_3\|_E \leqslant \left\|A(0)A^{-1}(\lambda)\right\|_{E\to E}\|f(\lambda)\|_E \leqslant M_1\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}.$$

Наконец, в силу (1.9) имеем, что

$$\|I_4\|_E \leqslant M_1 \|A(0)\mu\|_E .$$

Объединив оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4, получаем неравенство

$$\|A(0)v_0\|_E \leqslant M_1 \left[\|A(0)\mu\|_E + \frac{1}{\alpha}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)}\right]. \tag{2.2}$$

Используя последнюю оценку в правой части неравенства (1.5), получим (2.1). □

3. Приложения

В статьях [17–19] были рассмотрены примеры задачи (1.1) в классе параболических дифференциальных уравнений. Здесь же мы применим полученные в абстрактной ситуации результаты к двум следующим классам операторов:

1. сильно эллиптическим функционально-дифференциальным операторам с растяжением и сжатием пространственных переменных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;
2. эллиптическим операторам в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения функции и ее производных на границе области со значениями на некотором компакте внутри области.

Таким образом, данная статья охватывает случай параболических уравнений с нелокальными условиями как по времени, так и по пространственным переменным. В каждом из этих случаев мы убедимся, что соответствующий оператор удовлетворяет (1.2) и порождает аналитическую полугруппу в $E = L_2(\Omega)$.

Отметим, что смешанные задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами пространственных переменных изучались методами теории полугрупп в работах [9, 13]. Рассматривались вопросы, связанные с обобщенными и сильными решениями смешанных задач, а также с пространством начальных данных. Существенную роль здесь играют результаты, полученные ранее для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в [12, 16, 22, 23].

Начальные задачи для параболических функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени и неограниченными операторными коэффициентами рассматривались в [1, гл. 2]. Разрешимость, гладкость, асимптотические свойства и оценки решений в весовых пространствах Соболева на полуоси устанавливались на основе исследования соответствующих операторных пучков.

Параболические уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным играют важную роль в теории многомерных диффузионных процессов (см. [2] и приведенную там библиографию). Систематическое изложение теории нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений можно найти в [3, 10, 11].

Далее через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка, а через $\mathring{H}^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(\Omega)$. Пространства $H^1(\Omega)$ и $\mathring{H}^1(\Omega)$ — гильбертовы со скалярными произведениями

$$(u,w)_{H^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega (u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})\,dx, \quad (u,w)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\,dx.$$

Пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^1(\mathbb{R}^n)$, равных нулю вне Ω.

В обозначении для нормы оператора $\|\cdot\|_{E\to E}$ индекс будем опускать.

3.1. Параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием пространственных переменных. В этом пункте рассматривается задача

$$v_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^n (R_{ij} v_{x_i}(x,t))_{x_j} = f(x,t) \quad (x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.1}$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=\lambda} + \mu(x), \quad v|_{\partial\Omega\times[0,1]} = 0. \tag{3.2}$$

Действие операторов R_{ij} связано только с переменной x, они определяются формулой

$$R_{ij}u(x) = \sum_l a_{ijl}u(q^{-l}x). \tag{3.3}$$

Здесь $\lambda \in (0,1]$ и $q > 1$ — фиксированные числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, содержащая начало координат, a_{ijl} — заданные комплексные числа, а $f(x,t)$ и $\mu(x)$ — заданные комплексные функции. Индекс l в (3.3) пробегает конечное подмножество целых чисел и может быть как положительным, так и отрицательным. Если $q^{-l}x \notin \Omega$ при некоторых l и $x \in \Omega$, то считаем $u(q^{-l}x) = 0$ в (3.3) (другими словами, функции продолжаются нулем вне Ω перед применением к ним оператора R_{ij}).

Центральное предположение, связанное со структурой выражения $-\sum\limits_{i,j=1}^{n}(R_{ij}u_{x_i})_{x_j}$, состоит в том, что мы требуем выполнения неравенства типа Гординга

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}(R_{ij}u_{x_i})\,\bar{u}_{x_j}\,dx \geqslant c_1\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{3.4}$$

в котором постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geqslant 0$ не зависят от $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

В [8] показано, что данное неравенство равносильно алгебраическому неравенству

$$\operatorname{Re}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ijl}\xi_i\xi_j z^l > 0 \quad (z \in \mathbb{C}, |z| = q^{n/2};\ \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1), \tag{3.5}$$

причем из (3.5) вытекает (3.4) с постоянной $c_2 = 0$ и постоянной c_1, равной минимуму выражения слева в (3.5). В этом пункте условие (3.5) будем предполагать выполненным.

Чтобы воспользоваться результатом первой части работы, необходимо дать формальное описание оператора, отвечающего уравнению (3.1) (в нашем случае это будет постоянный оператор, не зависящий от t). Для этого зададим на пространстве $L_2(\Omega)$ полуторалинейную форму

$$\mathfrak{a}_R[u,w] = \sum_{i,j=1}^{n}(R_{ij}u_{x_i}, w_{x_j})_{L_2(\Omega)} \tag{3.6}$$

с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $D(\mathfrak{a}_R) = \mathring{H}^1(\Omega)$. В силу основного предположения этого пункта она удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] \geqslant c_1\||\nabla u|\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (u \in \mathring{H}^1(\Omega)). \tag{3.7}$$

Кроме того, очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\mathfrak{a}_R[u,w]| \leqslant M\||\nabla u|\|_{L_2(\Omega)}\||\nabla w|\|_{L_2(\Omega)} \quad (u, w \in \mathring{H}^1(\Omega)). \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует замкнутость полуторалинейной формы и ее секториальность: значения $a_R[u,u]$ при $0 \neq u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ лежат на комплексной плоскости внутри угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось и имеющего полураствор $\operatorname{arctg}(M/c_1)$. Согласно первой теореме о представлении (см. [4, теорема 2.1, гл. IV]), формой (3.6) однозначно задается m-секториальный (в смысле Т. Като) оператор $A_R : D(A_R) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $D(A_R) \subset \mathring{H}^1(\Omega)$ такой, что $\mathfrak{a}_R[u,w] = (A_R u, w)_{L_2(\Omega)}$ при $u \in D(A_R)$, $w \in \mathring{H}^1(\Omega)$. В [8] показано, что $D(A_R)$ не лежит, вообще говоря, в $H^2_{loc}(\Omega)$. Там же получены достаточные условия, когда $D(A_R) = \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Итак, решение задачи (3.1), (3.2) понимается в смысле данного в начале работы определения, где оператор $A(t) \equiv A_R$ ассоциирован с полуторалинейной формой (3.6). Убедимся, что оператор $(-A_R)$ является генератором аналитической полугруппы. В [21, гл. II, §4] доказано, что данное свойство оператора равносильно его секториальности в следующем смысле (см. также [15]):

существует число $\delta > 0$ такое, что угол $\sum\limits_{\pi/2+\delta} = \{0 \neq z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/2 + \delta\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $(-A_R)$ и для любого $\varepsilon \in (0,\delta)$ существует $M_\varepsilon > 0$:

$$\left\|(zI + A_R)^{-1}\right\| \leqslant M_\varepsilon/|z| \quad (z \in \Sigma_{\pi/2+\delta-\varepsilon}). \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. *Оператор $(-A_R)$ — секториальный в указанном выше смысле.*

Доказательство. Положим для удобства $\sigma = \operatorname{Re} z$, $\nu = \operatorname{Im} z$, $C = M/c_1$. Тот факт, что угол $\{\sigma + i\nu : C\sigma + |\nu| > 0\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $(-A_R)$, хорошо известен (см., например, не претендующий на новизну вывод в [8, §2.3]). Осталось получить оценку для резольвенты (3.9) в этом угле. Равенство $(zI + A_R)u = g$, $0 \neq u \in D(A_R)$, $g \in L_2(\Omega)$, можно записать эквивалентным образом в виде (интегрального) тождества

$$z(u,w)_{L_2(\Omega)} + \mathfrak{a}_R[u,w] = (g,w)_{L_2(\Omega)} \quad (w \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

При $w = u$ будем иметь

$$\sigma\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] + i\left(\nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Im}\mathfrak{a}_R[u,u]\right) = (g,u)_{L_2(\Omega)},$$

откуда следует, что

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \sigma\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] \leqslant \|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.10}$$

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Im}\mathfrak{a}_R[u,u] \leqslant \|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)}. \tag{3.11}$$

Кроме того,

$$-C\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] < \operatorname{Im}\mathfrak{a}_R[u,u] < C\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u]. \tag{3.12}$$

Комбинируя (3.10)–(3.12), получаем

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} < \nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] \leqslant \nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + C\|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} - C\sigma\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

или

$$(C\sigma - \nu)\|u\|_{L_2(\Omega)} < (C+1)\|g\|_{L_2(\Omega)},$$

а также

$$\nu\|u\|^2_{L_2(\Omega)} < C\operatorname{Re}\mathfrak{a}_R[u,u] + \|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (C+1)\|g\|_{L_2(\Omega)}\|u\|_{L_2(\Omega)} - C\sigma\|u\|^2_{L_2(\Omega)},$$

или

$$(C\sigma + \nu)\|u\|_{L_2(\Omega)} < (C+1)\|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, $(C\sigma + |\nu|)\|u\|_{L_2(\Omega)} < (C+1)\|g\|_{L_2(\Omega)}$, что означает оценку для резольвенты

$$\left\|(zI + A_R)^{-1}\right\| \leqslant \frac{C+1}{C\sigma + |\nu|}$$

в рассматриваемом угле. В то же время, нетрудно убедиться, что в любом охватывающем положительную вещественную полуось симметричном угле меньшего раствора $\{\sigma + i\nu : C'\sigma + |\nu| > 0\}$ $(C' > C)$ справедливо неравенство

$$K(C\sigma + |\nu|) \geqslant |\sigma| + |\nu|,$$

где

$$K = \max\left\{\frac{1}{C}, \frac{C'+1}{C'-C}\right\}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\left\|(zI + A_R)^{-1}\right\| \leqslant \frac{K(C+1)}{|\sigma| + |\nu|} \leqslant \frac{K(C+1)}{|z|} \quad (C'\sigma + |\nu| > 0).$$

□

Замечание 3.1. Резольвента $(zI + A_R)^{-1}$ существует и в окрестности точки $z = 0$. Вместе с леммой 3.1 это означает, что спектр оператора $(-A_R)$ сдвинут влево от мнимой оси, и имеет место неравенство

$$\left\|(zI + A_R)^{-1}\right\| \leqslant \frac{M}{1+|z|} \quad (\operatorname{Re} z \geqslant 0),$$

т. е. для оператора A_R выполнено условие (1.2).

Таким образом, мы приходим к основному результату этого пункта — следствию из теоремы 2.1.

Следствие 3.1. *При $\mu \in D(A_R)$ и $f \in C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$ задача* (3.1), (3.2) *имеет единственное решение $v(x,t)$, функции $v_t(\cdot,t)$ и $A_R v(\cdot,t)$ принадлежат пространству $C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$, и справедлива оценка*

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} + \|A_R v\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} \leqslant M_R \left[\|A_R \mu\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))}\right]$$

с постоянной $M_R > 0$, не зависящей от α, μ и f.

3.2. Параболическое дифференциальное уравнение с нелокальным условием на $\partial\Omega$. В этом пункте изучается задача

$$v_t(x,t) - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) v_{x_i x_j}(x,t) + a_0 v(x,t) = f(x,t) \quad (x \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.13}$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=\lambda} + \mu(x), \quad \left(v(x,t) - \sum_{s=1}^{S} b_s(x) v(\omega_s(x),t)\right)\Bigg|_{\partial\Omega\times[0,1]} = 0. \tag{3.14}$$

Здесь Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $\lambda \in (0,1]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{ij}, b_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ — вещественные функции,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad (x \in \overline{\Omega},\ 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n)$$

и ω_s $(s = 1,\dots,S)$ — C^∞-диффеоморфизмы, отображающие некоторую окрестность U границы $\partial\Omega$ на множества $\omega_s(U) \subset \Omega$.

Введем неограниченный оператор $A_\Gamma : D(A_\Gamma) \subset L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ с областью определения

$$D(A_\Gamma) \equiv H^2_\Gamma(\Omega) = \left\{u \in H^2(\Omega) : \left(u(x) - \sum_{s=1}^{S} b_s(x) u(\omega_s(x))\right)\Bigg|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

действующий по формуле

$$A_\Gamma u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j}, \quad u \in H^2_\Gamma(\Omega).$$

Лемма 3.2. *Оператор $A_\Gamma - a_0 I$ является секториальным при всех достаточно больших a_0.*

Доказательство. Введем оператор-функцию $L(z) : H^2(\Omega) \to L_2(\Omega) \times H^{3/2}(\partial\Omega)$ по формуле

$$L(z)w(x) = \left(-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) w_{x_i x_j} + zw,\ \left(w(x) - \sum_{s=1}^{S} b_s(x) w(\omega_s(x))\right)\Bigg|_{\partial\Omega}\right),$$

представляющую собой ограниченный оператор при каждом $z \in \mathbb{C}$.

Согласно [10, теорема 2.1.2, гл. 2, §2.1] для любого числа $0 < \delta < \pi/2$ существует число $r_\delta > 0$ такое, что при всех z из множества $\Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$ оператор $L(z)$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(z) : L_2(\Omega) \times H^{3/2}(\partial\Omega) \to H^2(\Omega)$. При этом неравенство

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} + |z|\|w\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\delta \left(\|g_0\|_{L_2(\Omega)} + \|g_1\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + |z|^{3/4}\|g_1\|_{L_2(\partial\Omega)}\right),$$

где для краткости обозначили $(g_0, g_1) = Lw$, выполняется с постоянной $C_\delta > 0$, не зависящей как от $w \in H^2(\Omega)$, так и от $z \in \Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$. Но это в точности означает, что всякое множество вида $\Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$ состоит из резольвентных точек оператора A_Γ, и на нем справедлива оценка для резольвенты $\|(zI - A_\Gamma)^{-1}\| \leqslant C_\delta/|z|$. Тогда при $a_0 > r_\delta/\cos\delta$ весь угол $\Sigma_{\pi/2+\delta}$ лежит в резольвентном множестве оператора $A_\Gamma - a_0 I$, и имеет место неравенство

$$\|(zI - (A_\Gamma - a_0 I))^{-1}\| \leqslant \frac{C_\delta}{|z + a_0|} \leqslant \frac{C_\delta/\cos\delta}{|z|} \quad (z \in \Sigma_{\pi/2+\delta}).$$

Кроме того, спектр оператора $A_\Gamma - a_0 I$ сдвинут влево от мнимой оси и имеет место оценка $\|(zI - (A_\Gamma - a_0 I))^{-1}\| \leqslant M(1 + |z|)^{-1}$ $(\operatorname{Re} z \geqslant 0)$. □

Решение $v(x,t)$ задачи (3.13), (3.14) вновь понимается в смысле определения, данного в начале работы, в этот раз с оператором $A(t) \equiv -A_\Gamma + a_0 I$. А именно, v есть непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0,1]$ функция со значениями в $L_2(\Omega)$, $v(\cdot,t) \in H^2_\Gamma(\Omega)$ при каждом $t \in [0,1]$, функция $A_\Gamma v(\cdot,t)$ непрерывна на $[0,1]$ со значениями в $L_2(\Omega)$, при каждом $t \in [0,1]$ правая и левая части (3.13) совпадают как элементы $L_2(\Omega)$, и $v(\cdot,0) = v(\cdot,\lambda) + \mu$.

Следствие 3.2. *Пусть $a_0 > 0$ достаточно велико. Тогда при всех функциях $\mu \in H^2_\Gamma(\Omega)$ и $f \in C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$ задача* (3.13), (3.14) *имеет единственное решение $v(x,t)$, функции $v_t(\cdot,t)$ и $A_\Gamma v(\cdot,t)$ принадлежат пространству $C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$, и справедлива оценка*

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} + \|(-A_\Gamma + a_0 I)v\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} \leqslant M_\Gamma \left[\|(-A_\Gamma + a_0 I)\mu\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} \right]$$

с постоянной $M_\Gamma > 0$, не зависящей от α, μ и f.

Замечание 3.2. Недостатком приведенного результата является то, что нижняя граница для a_0 не описана явно. Вопрос о том, будет ли секториальным сам оператор A_Γ, сводится к локализации его спектра. Принимая во внимание, что в круге $\{|z| \leqslant r_\delta\}$ спектр состоит лишь из конечного числа собственных значений оператора A_Γ (см. [10, следствие 2.1.2, гл. 2, §2.1]), достаточно установить, что все собственные значения оператора A_Γ лежат строго в левой полуплоскости. Однако в общем случае это сделать затруднительно. Ниже приведен пример секториального оператора A_Γ.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу в прямоугольнике

$$v_t(x,t) - a^2 v_{xx}(x,t) = f(x,t) \quad (0 < x < 2,\ 0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{3.15}$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=\lambda} + \mu(x), \quad v|_{x=0} = b_1 v|_{x=1}, \quad v|_{x=2} = b_2 v|_{x=1}, \tag{3.16}$$

где $a > 0$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Получим условия, при которых оператор $A_\Gamma : L_2(0,2) \to L_2(0,2)$,

$$A_\Gamma u(x) = a^2 u''(x), \quad u \in D(A_\Gamma) = H^2_\Gamma(0,2) = \{u \in H^2(0,2) : u(0) = b_1 u(1), u(2) = b_2 u(1)\},$$

является секториальным. Его собственные значения вычисляются непосредственно. Независимо от коэффициентов b_1, b_2 в нелокальных условиях, числа $z_{1,k}$,

$$\frac{z_{1,k}}{a^2} = -(\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.17}$$

являются собственными значениями оператора A_Γ.

Если $-2 \leqslant b_1 + b_2 < 2$, то к этой серии добавляется еще одна серия

$$\frac{z_{2,k}}{a^2} = -\left(\pm \arccos \frac{b_1 + b_2}{2} + 2\pi m\right)^2, \quad m \in \mathbb{Z},$$

также отрицательных собственных значений.

При $b_1 + b_2 \geqslant 2$ к серии (3.17) добавляется серия

$$\frac{z_{3,k}}{a^2} = \ln^2 \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right) - (2\pi k)^2 \pm i4\pi k \ln \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right),$$

$$k = 0, 1, \ldots,$$

в которой всегда есть неотрицательное собственное значение (при $k = 0$).

Если же $b_1 + b_2 < -2$, то собственные значения оператора A_Γ состоят из (3.17) и серии

$$\frac{z_{4,k}}{a^2} = \ln^2 \left(\frac{|b_1 + b_2|}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right) - \pi^2 (2m+1)^2 \pm$$

$$\pm\, i2\pi(2m+1) \ln \left(\frac{|b_1 + b_2|}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right), \quad m = 0, 1, \ldots.$$

Вещественные части всех собственных значений этой последней серии будут отрицательными, если

$$\ln\left(\frac{|b_1+b_2|}{2}+\sqrt{\left(\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2-1}\right)<\pi,$$

т. е. $b_1+b_2>-2\operatorname{ch}\pi$. Итак, условие $-2\operatorname{ch}\pi<b_1+b_2<2$ является необходимым и достаточным для секториальности (и сильной позитивности) оператора A_Γ в этом примере.

Следствие 3.3. *Предположим, что* $-2\operatorname{ch}\pi<b_1+b_2<2$. *Тогда для всех функций* $\mu\in H^2_\Gamma(0,2)$ *и* $f\in C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(0,2))$ *задача* (3.15), (3.16) *имеет единственное решение* $v(x,t)$. *При этом функции* $v_t(\cdot,t)$ *и* $v_{xx}(\cdot,t)$ *принадлежат пространству* $C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(0,2))$, *и выполняется оценка*

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(0,2))}+\|v_{xx}\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(0,2))}\leqslant M_\Gamma\left[\|\mu_{xx}\|_{L_2(0,2)}+\frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(0,2))}\right]$$

с постоянной $M_\Gamma>0$, *не зависящей от* α,μ *и* f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: Изд-во Попечит. Сов. мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011.
2. *Галахов Е. И., Скубачевский А. Л.* О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 1. — С. 45–78.
3. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
4. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
5. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
6. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1983. — *21*. — С. 130–264.
8. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
9. *Селицкий А. М., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — *26*. — С. 324–347.
10. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
11. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
12. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
13. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1999. — *66*, № 1. — С. 145–153.
14. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Труды Моск. мат. об-ва. — 1961. — *10*. — С. 297–350.
15. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
16. *Цветков Е. Л.* Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1992. — *51*, № 6. — С. 107–114.
17. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators// TWMS J. Appl. Eng. Math. — 2012. — *2*, № 1. — C. 75–93.
18. *Ashyralyev A., Hanalyev A.* Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators// The Sci. World J. — 2014. — *2014*. — C. 1–11.
19. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — *6*, № 1. — C. 53–61.
20. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
21. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 2000.
22. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*. — C. 332–361.

23. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional-differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Л. Е. Россовский
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: lrossovskii@gmail.com

А. Р. Ханалыев
Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru

UDC 517.95+517.98

Coercive Solvability of Nonlocal Boundary-Value Problems for Parabolic Equations

© 2016 **L. E. Rossovskii, A. R. Khanalyev**

Abstract. In a Banach space E we consider nonlocal problem

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$
$$v(0) = v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leqslant 1)$$

for abstract parabolic equation with linear unbounded strongly positive operator $A(t)$ with independent of t, everywhere dense in E domain $D = D(A(t))$. This operator generates analytic semigroup $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$.

We prove the coercive solvability of the problem in the Banach space $C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ with the weight $(t+\tau)^\alpha$. This result was previously known only for a constant operator. We consider applications in the class of parabolic functional differential equations with transformation of spatial variables and in the class of parabolic equations with nonlocal conditions on the boundary of domain. Thus, this describes parabolic equations with nonlocal conditions both in time and in spatial variables.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyy analiz* [Functional Differential Equations in Sobolev Spaces and Their Spectral Analysis], Izd-vo Popechit. Sov. mekh.-mat. f-ta MGU im. M. V. Lomonosova, Moscow, 2011.
2. E. I. Galakhov and A. L. Skubachevskii, "O szhimayushchikh neotritsatel'nykh polugruppakh s nelokal'nymi usloviyami" [On contracting nonnegative semigroups with nonlocal conditions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 1, 45–78.
3. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173.
4. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972.
5. M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966.
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967.
7. S. G. Kreyn and M. I. Khazan, "Differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve" [Differential equations in Banach space], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1983, **21**, 130–264.

8. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138.
9. A. M. Selitskiy and A. L. Skubachevskii, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [Second boundary-value problem for parabolic differential-difference equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347.
10. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132.
11. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179.
12. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776.
13. A. L. Skubachevskii and R. V. Shamin, "Pervaya smeshannaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [First mixed problem for a parabolic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 1, 145–153.
14. P. E. Sobolevskiy, "Ob uravneniyakh parabolicheskogo tipa v banakhovom prostranstve" [On equations of parabolic type in a Banach space], *Trudy Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1961, **10**, 297–350.
15. D. Henry, *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985.
16. E. L. Tsvetkov, "Razreshimost' i spektr tret'ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [Solvability and spectrum of the third boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **51**, No. 6, 107–114.
17. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, "Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators," *TWMS J. Appl. Eng. Math.*, 2012, **2**, No. 1, 75–93.
18. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, "Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators," *The Sci. World J.*, 2014, **2014**, 1–11.
19. A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, "Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations," *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 1, 53–61.
20. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004.
21. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
22. A. L. Skubachevskii, "The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
23. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

L. E. Rossovskii
Department of Applied Math, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: lrossovskii@gmail.com

A. R. Khanalyev
Department of Applied Math, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru