Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 124–139

УДК 517.9

СЛЕДЫ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2016 г. **В. А. ПОПОВ**

Аннотация. В работе рассматривается дифференциально-разностное уравнение с вырождением в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ в случае дифференциально-разностного оператора, который не может быть представлен в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, а содержит несколько вырожденных разностных операторов, соответствующих операторам дифференцирования. Обобщенные решения таких уравнений могут не принадлежать даже пространству Соболева $W_2^1(Q)$.

Ранее при выполнении определенных условий на разностные операторы и операторы дифференцирования были получены априорные оценки, с помощью которых удалось доказать, что ортогональная проекция обобщенного решения на образ разностного оператора уже обладает определенной гладкостью, но не во всей области, а в некоторых подобластях $Q_r \subset Q$ $(\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q})$.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме существования следов на некоторых частях границ подобластей Q_r.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Интерес к эллиптическим уравнениям с вырождением возник после работы М. В. Келдыша [6]. Эта статья стала отправной точкой для исследований многих математиков и сыграла важную роль в развитии теории вырождающихся дифференциальных уравнений. В дальнейшем подобными задачами занимались многие математики: О. А. Олейник и Е. В. Радкевич [11], М. И. Вишик [2], Г. Фикера [19] и многие другие.

В своей работе [6] М. В. Келдыш впервые показал, что при определенных условиях часть границы (многообразие вырождения) свободна от краевых условий. Подобное явление возникает и в случае эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением. Но стоит отметить, что в отличие от эллиптических уравнений с вырождением, причиной такого явления служит не вырождение коэффициентов дифференциального оператора на многообразии вырождения, а присутствие в дифференциально-разностном операторе разностного оператора с вырождением, которое носит нелокальный характер.

Основы общей теории функционально-дифференциальных уравнений были построены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников (см. [4, 10, 14, 15, 18] и имеющуюся там библиографию).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание 1.1974.2014/К «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

Обзор последних результатов посвященных краевым задачам для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложениям можно найти в работе [17]. Кроме того, в указанной работе приведен целый ряд нерешенных задач в данной области.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия корректного определения следов обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений с вырождением. При этом дифференциально-разностный оператор содержит несколько вырожденных разностных операторов, в отличие от работ А. Л. Скубачевского [16, 22], в которых дифференциально-разностный оператор порядка $2m$ представляется в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, т. е. в виде $L_R u = LRu$, где L — сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R — разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором. Интерес к таким операторам вызван появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами (см. [21]), а также приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы (см. [1]). В частности, А. Л. Скубачевским было показано, что нелокальные эллиптические задачи, связывающие значения неизвестной функции на различных компактах, можно свести к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением.

В большинстве работ разностные операторы рассматриваются в пространстве сеточных функций, т. е. функций, определенных на конечном или счетном множестве точек. В настоящей работе мы будем опираться на теорию разностных операторов, действующих в пространстве $L_2(Q)$, которая построена в работах А. Л. Скубачевского.

Мы будем рассматривать уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij} u = f(x) \qquad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n)\,, \tag{1}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q, R_{ij} — разностные операторы, действующие в пространстве $L_2(Q)$ и определенные по формуле

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h),$$

$\mathcal{M}$ — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$. Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (1). Так как сдвиг на вектор h может отобразить точки $x \in Q$ в точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, то мы должны задать значения искомой функции не только на границе ∂Q, но и всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Таким образом, мы будем рассматривать однородное краевое условие

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q)\,. \tag{2}$$

В работах А. Л. Скубачевского было показано, что свойства разностных операторов можно охарактеризовать с помощью свойств некоторых матриц, элементами которых являются коэффициенты разностных операторов и нули. Данный подход основан на разбиении области Q на подобласти, которое порождается сдвигами разностного оператора границы ∂Q внутрь области Q.

Настоящая работа состоит из четырех разделов. В разделе 1 приведены необходимые результаты относительно геометрических построений и свойств разностных операторов, которые были получены в работах А. Л. Скубачевского [16, 22]. В разделе 2 рассмотрены априорные оценки и введено фридрихсово расширение рассматриваемого дифференциально-разностного оператора. Доказательство оценок и построение фридрихсова расширения, а также исследование его спектральных свойств можно найти в нашей работе [12]. В разделе 3 введено определение обобщенного решения рассматриваемой первой краевой задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, а также даны теоремы о локальной гладкости и о гладкости в близи границы, которые были получены нами в работах [13, 20]. Основной результат работы содержится в разделе 4. Доказаны необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на частях границы области.

1. Геометрические построения и разностные операторы

В данном разделе приведем результаты, посвященные геометрическим построениям и свойствам разностных операторов, которые были получены А. Л. Скубачевским. Доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в работах [16, 22].

1.1. Определение разбиения области и подобластей. Мы будем рассматривать ограниченную область Q, которая удовлетворяет следующему условию.

Условие 1.1. *Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \bigcup\limits_i \overline{X}_i$ $(i = 1, \ldots, N_1)$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n \geqslant 2$.*

Пусть, кроме того, в некоторой окрестности каждой точки $x^0 \in K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$ область Q диффеоморфна n-мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.

В частности, $Q \subset \mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q \in C^\infty$, а также цилиндром $(0,d) \times G$ или прямоугольником, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geqslant 3$).

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r — открытые связные компоненты множества

$$Q \setminus \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h).$$

Определение 1.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность $\mathcal{R}$ всевозможных подобластей Q_r $(r = 1, 2, \ldots)$ назовем *разбиением области Q*.

Легко убедиться, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно.

Лемма 1.1. $\bigcup\limits_r \partial Q_r = \left(\bigcup\limits_{h \in M} (\partial Q + h) \right) \bigcap \overline{Q}$.

Лемма 1.2.

1. $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$.
2. *Для любых Q_{r_1} и $h \in M$ либо найдется такое Q_{r_2}, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$.*

Следуя теории А. Л. Скубачевского, введем понятие классов подобластей.

Определение 1.2. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же *классу*, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса $(s = 1, 2, \ldots)$, а l — порядковый номер данной подобласти в s-м классе.

Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и

$$N(s) \leqslant ([\mathrm{diam} Q] + 1)^n.$$

Пример 1.1. Пусть $Q = (0,2) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из одного класса подобластей: $Q_{11} = (0,1) \times (0,1)$, $Q_{12} = (1,2) \times (0,1)$ (см. рис. 1).

Пример 1.2. Пусть $Q = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1,0)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из двух классов: $Q_{1,l} = (\pi - 4 + l, l)$ $(l = 1,2,3)$ и $Q_{2l} = (l-1, \pi - 4 + l) \times (0,1)$ $(l = 1,2,3,4)$ (см. рис. 2).

Пример 1.3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, которая в полосе $\{x : 0 < x_2 < 2\}$ состоит из двух линий $\left\{ x : x_1 = \dfrac{1}{3} \exp\left(-\dfrac{1}{x_2} \right) \sin \dfrac{1}{x_2} \right\}$ и $\{x : x_1 = 2\}$, а также пусть $\mathcal{M} = \{(0,1)\}$. Тогда разбиение $\mathcal{R}$ состоит из счетного числа подобластей.

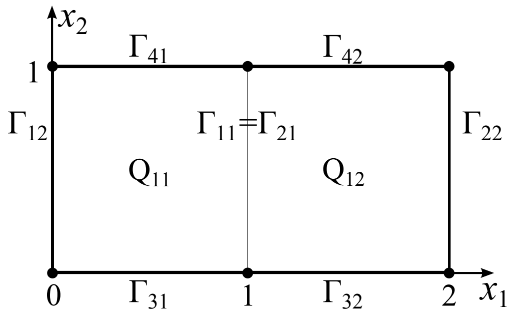

Рис. 1. Один класс подобластей.

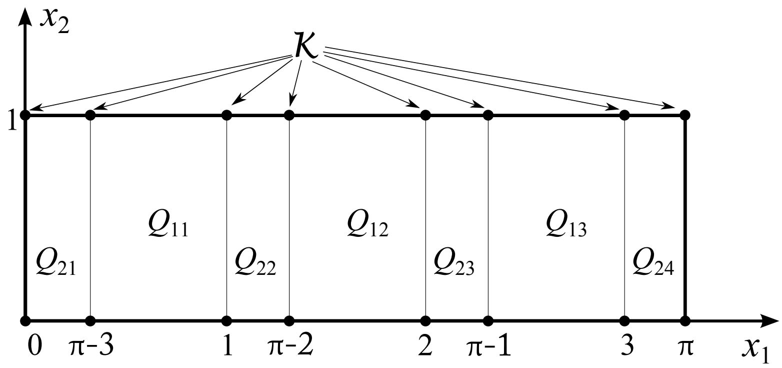

Рис. 2. Два класса подобластей.

При изучении гладкости обобщенных решений важную роль играет множество *точек сопряжения*, или *угловых точек*. Будем обозначать его через $\mathcal{K}$.

Введем множество $\mathcal{K}$ следующим образом:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}. \tag{1.1}$$

Свойства множества $\mathcal{K}$ описывают следующие утверждения, которые следуют из определения множества $\mathcal{K}$.

Лемма 1.3. *Пусть $x^0 \in \partial Q_{sl} \cap \partial Q$, и существует последовательность точек $x^n \to x^0$ при $n \to \infty$ такая, что $x^n \in \overline{Q}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.*

Следствие 1.1. *Пусть $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.*

Лемма 1.4. *Пусть $x^0 \in Q \cap \partial Q_{pl} \cap \partial Q_{qk}$, $(p, l) \neq (q, k)$, и существует последовательность точек $x^n \to x^0$ при $n \to \infty$ такая, что $x^n \in \overline{Q}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (p, l), (q, k)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.*

Следствие 1.2. *Пусть $x^0 \in \bigcap\limits_i \partial Q_{s_i l_i}$ и $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ при $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.*

Напомним определение множества $K = \partial Q \setminus \bigcup\limits_i X_i$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$-мерные многообразия класса C^∞, $n \geqslant 2$. Если $\partial Q \in C^\infty$, то $K = \varnothing$.

Будем считать, что выполнено следующее условие:

Условие 1.2.

$$\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0, \quad K \subset \mathcal{K}.$$

Пример 1.4. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из шести точек (i, j), где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$ (см. рис. 1).

Пример 1.5. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 2)$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\} \cup \{(0, 1)\}$. Тогда множество $\mathcal{K}$ состоит из девяти точек (i, j), где $i, j = 0, 1, 2$ (см. рис. 3).

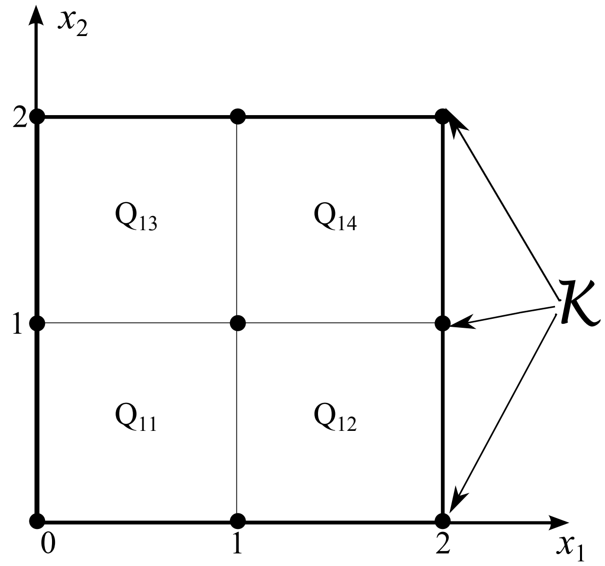

Рис. 3. Множество $\mathcal{K}$ состоит из девяти точек.

Как уже отмечалось, в случае вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений часть границы ∂Q при определенных условиях может быть свободна от краевых условий. Нам понадобится следующее обозначение: через Γ_p обозначим компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 1.5. *Если $(\Gamma_p+h)\cap\overline{Q} \neq \varnothing$ при некотором $h \in M$, то либо $\Gamma_p+h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.*

В силу леммы 1.5 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \dots, h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;
2. в случае $\Gamma_{p_1}+h_1, \Gamma_{p_2}+h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1}+h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj}, где $r = 1, 2, \dots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе ($1 \leqslant j \leqslant J = J(r)$). Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r)$).

Лемма 1.6. *Для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, и при этом $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1l_1} = \varnothing$, если $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.*

Лемма 1.7. *Для любого $r = 1, 2, \dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и при этом подобласти s-го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \dots, N(s))$.*

Лемма 1.8. *Для любого $\Gamma_{rj} \subset Q$ существуют подобласти $Q_{s_1l_1}$ и $Q_{s_2l_2}$ такие, что $Q_{s_1l_1} \neq Q_{s_2l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1l_1} \cap \partial Q_{s_2l_2}$, и при этом $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3l_3} = \varnothing$, если $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.*

Пример 1.6. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Тогда существуют четыре класса множеств Γ_{rl} (см. рис. 1):

1. $\Gamma_{12} = \{0\} \times (0, 1)$, $\Gamma_{11} = \{1\} \times (0, 1)$;
2. $\Gamma_{21} = \Gamma_{11}$, $\Gamma_{22} = \{2\} \times (0, 1)$;
3. $\Gamma_{31} = (0, 1) \times \{0\}$, $\Gamma_{32} = (1, 2) \times \{0\}$;
4. $\Gamma_{41} = (0, 1) \times \{1\}$, $\Gamma_{42} = (1, 2) \times \{1\}$.

Теперь мы можем ввести понятие разностного оператора.

1.2. Разностный оператор в пространстве $L_2(Q)$. Будем рассматривать разностный оператор $R\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x+h), \tag{1.2}$$

где a_h — комплексные числа, множество $\mathcal{M}$ состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Сдвиги $x \to x + h$, вообще говоря, могут отобразить точку $x \in Q$ в точку $x + h \notin Q$. Поэтому краевое условие (2) задается не только на границе ∂Q, но всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Для того, чтобы формально записать это условие, мы введем оператор $I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. С другой стороны, функция $(RI_Qu)(x)$ задана в $\mathbb{R}^n$. Поэтому для рассмотрения этой функции только в области Q мы введем оператор $P_Q\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Таким образом, разностный оператор, действующий в пространстве $L_2(Q)$, введем следующим образом:

$$R_Q = P_Q R I_Q\colon L_2(Q) \to L_2(Q).$$

1.3. Свойства разностных операторов. В этом пункте мы изучим некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из нулей и коэффициентов разностного оператора R.

Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup\limits_l Q_{sl}$, а через $P_s\colon L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big), \tag{1.3}$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1.9. $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ — *инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s\colon L_2\Big(\bigcup_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1}), \tag{1.4}$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{1.5}$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_l L_2(Q_{s1})$.

Лемма 1.10. *Оператор $R_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, определенный по формуле*

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{1.6}$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^s = \begin{cases} a_h, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{1.7}$$

Замечание 1.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_s состоят из конечного множества чисел a_h и нулей, то множество различных матриц $\{R_{s_\nu}\}$ $(\nu = 1, \dots, n_1)$ конечно.

Лемма 1.11. *Спектр оператора R_Q совпадает с объединением спектров конечного числа матриц R_{s_ν} $(\nu = 1, \dots, n_1)$. Каждая точка спектра $\sigma(R_Q)$ является собственным значением бесконечной кратности.*

1.4. Разностные операторы с вырождением. Рассмотрим свойства разностных операторов $R_Q\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$, имеющих нетривиальное ядро.

Обозначим через $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора.

Лемма 1.12. $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Qs}) \oplus \mathcal{R}(R_{Qs}^*)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Qs}^*) \oplus \mathcal{R}(R_{Qs})$.

Введем обозначения $A_Q = (R_Q + R_Q^*)/2$, $B_Q = (R_Q - R_Q^*)/2i$. Очевидно, что

$$R_Q = A_Q + iB_Q.$$

Операторы A_Q и B_Q называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* оператора R_Q. Положим $A_{Qs} = U_s A_Q U_s^{-1}$ и $B_{Qs} = U_s B_Q U_s^{-1}$. В силу леммы 1.10 операторы $A_{Qs}, B_{Qs}\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$ являются операторами умножения на матрицы $A_s = (R_s + R_s^*)/2$, $B_s = (R_s - R_s^*)/2i$ соответственно. Обозначим через

$$P^R, P^{R^*}, P^A, P^B\colon L_2(Q) \to L_2(Q)$$

и

$$P_s^R, P_s^{R^*}, P_s^A, P_s^B\colon L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$$

операторы ортогонального проектирования на подпространства

$$\mathcal{R}(R_Q),\ \mathcal{R}(R_Q^*),\ \mathcal{R}(A_Q),\ \mathcal{R}(B_Q)$$

и

$$\mathcal{R}(R_{Qs}),\ \mathcal{R}(R_{Qs}^*),\ \mathcal{R}(A_{Qs}),\ \mathcal{R}(B_{Qs})$$

соответственно. Операторы P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B суть операторы умножения на некоторые матрицы, которые мы также обозначим P_s^R, $P_s^{R^*}$, P_s^A, P_s^B соответственно.

Лемма 1.13. $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q) \oplus \mathcal{R}(R_Q^*)$, $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) \oplus \mathcal{R}(R_Q)$, *при этом*

$$\|P^{R^*}u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R_Q u\|_{L_2(Q)}, \tag{1.8}$$

$$\|P^R u\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|R_Q^* u\|_{L_2(Q)} \tag{1.9}$$

для любой функции $u \in L_2(Q)$, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

Назовем ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H *положительным*, если $(Au, u)_H > 0$ для любого $0 \neq u \in H$, и *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geqslant 0$ для любого $u \in H$. Если же $(Au, u)_H > c\|u\|_H$ для любого $u \in H$, где $c > 0$, то оператор A будем называть *положительно определенным*.

Рассмотрим разностные операторы R_i $(i = 1, 2)$ вида (1.2) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h $(h \in \mathcal{M})$. Положим $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$. Определим матрицы R_{is} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами r_{kl}^{is} $(k, l = 1, \ldots, N(s))$ по формуле (1.7) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h.

Лемма 1.14.

1. *Пусть $\mathcal{N}(R_{1s}) \subset \mathcal{N}(R_{2s})$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\mathcal{N}(R_{1Q}) \subset \mathcal{N}(R_{2Q})$, и для любой функции $u \in L_2(Q)$ справедливо неравенство*

$$\|R_{2Q}u\|_{L_2(Q)} \leqslant c_1\|R_{1Q}u\|_{L_2(Q)}, \tag{1.10}$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u.

2. *Если, кроме того, $R_{1Q} = A_Q$, $R_{2Q} = B_Q$, а матрицы A_s $(s = 1, 2, \ldots)$ неотрицательные, то оператор A_Q неотрицательный, при этом $\mathcal{N}(R_Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) = \mathcal{N}(A_Q)$ и $\mathcal{R}(R_Q) = \mathcal{R}(R_Q^*) = \mathcal{R}(A_Q)$.*

Лемма 1.15. *Для любого $u \in L_2(Q)$ справедливы равенства*

$$P^R u = \sum_s U_s^{-1} P_s^R U_s P_s u, \tag{1.11}$$

$$P^{R^*} u = \sum_s U_s^{-1} P_s^{R^*} U_s P_s u. \tag{1.12}$$

1.5. Разностные операторы в пространствах Соболева. Приведем некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространствах Соболева.

Пространство Соболева комплекснозначных функций будем обозначать через $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant k} \int\limits_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Лемма 1.16. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_2^k(Q)$ в $W_2^k(Q)$, при этом для всех $u \in \mathring{W}_2^k(Q)$ справедливо равенство*

$$\mathcal{D}^\alpha R_Q u = R_Q \mathcal{D}^\alpha u \quad (|\alpha| \leqslant k),$$

где $\mathring{W}_2^k(Q)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$.

Лемма 1.17. *Пусть при каждом $s = 1, 2, \dots$ заданы открытые связные множества Q'_{sl} такие, что $Q'_{sl} \subset Q_{sl}$ и $Q'_{sl} = Q'_{s1} + h_{sl}$ для каждого $1 \leqslant l \leqslant N = N(s)$.*

Тогда для всех $u \in L_2(Q)$ таких, что $R_Q u \in W_2^k(Q'_{sl})$ $(l = 1, 2, \dots, N(s),\ s = 1, 2, \dots)$ имеем $P^{R^*} u \in W_2^k(Q'_{sl})$, при этом

$$\|P^{R^*} u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^N \|R_Q u\|_{W_2^k(Q'_{sj})},$$

$$\left(\mathcal{D}^\alpha P^{R^*} u\right)(x) = \left(P^{R^*} \mathcal{D}^\alpha u\right)(x) \qquad (x \in Q'_{sl}),$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s и от u, $l = 1, 2, \dots, N(s)$, $s = 1, 2, \dots$, $|\alpha| \leqslant k$.

2. Априорные оценки и фридрихсово расширение

В настоящем разделе мы приведем априорные оценки, полученные нами в работе [12], из которых вытекает секториальность рассматриваемого дифференциально-разностного оператора с вырождением, что влечет за собой существование фридрихсова расширения. Свойства фридрихсова расширении, секториальных операторов и полуторалинейных форм можно найти, например, в [5]. Кроме того, с помощью рассматриваемых ниже априорных оценок были доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений.

Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R \colon D(L_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R\, u(x) = -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ} u(x), \tag{2.1}$$

с областью определения

$$D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q),$$

где

$$R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q, \quad R_{ij} = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}\, u(x+h) \quad (i, j = 1, \dots, n), \tag{2.2}$$

$\mathcal{M}$ — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$, $\dot{C}^\infty(Q)$ — множество бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактным носителем. Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Наряду с матрицами R_{ijs} введем матрицы $\widehat{R}_{ijs}$ следующим образом. Пусть $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все такие точки $x^i \in \overline{Q}$, что $x^i - x \in M$. Поскольку область Q ограниченная, множество $\{x^i\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s,x)$ $(I \geqslant N(s))$. Занумеруем точки x^i так, что $x^i = x + h_{si}$ для $i = 1,\dots,N = N(s)$, $x^1 = x$. Введем матрицы $\widehat{R}_{ijs} = \widehat{R}_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ $(I = I(s,x))$ с элементами

$$\widehat{r}_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = x^l - x^k \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = x^l - x^k \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Несмотря на то, что элементы матриц $\widehat{R}_{ijs}$ являются константами, порядок этих матриц зависит от выбора точки x.

Замечание 2.1. Если $I(s,x) = N(s)$, то $\widehat{R}_{ijs}(x) = R_{ijs}$. Если $I(s,x) > N(s)$, то матрица R_{ijs} получается из матрицы $\widehat{R}_{ijs}(x)$ вычеркиванием последних $I(s,x) - N(s)$ строк и столбцов.

Введем следующие обозначения

$$A_{ijs} = \frac{R_{ijs} + R_{jis}^*}{2}, \quad \widehat{A}_{ijs}(x) = \frac{\widehat{R}_{ijs}(x) + \widehat{R}_{jis}^*(x)}{2},$$
$$B_{ijs} = \frac{R_{ijs} - R_{jis}^*}{2i}, \quad \widehat{B}_{ijs}(x) = \frac{\widehat{R}_{ijs}(x) - \widehat{R}_{jis}^*(x)}{2i} \quad (i,j = 1,\dots,n).$$

Пусть

$$A_{ijQ} = \frac{R_{ijQ} + R_{jiQ}^*}{2}, \quad B_{ijQ} = \frac{R_{ijQ} - R_{jiQ}^*}{2i}.$$

Далее мы будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 2.1 (эллиптичности). *Существуют такие нетривиальные самосопряженные неотрицательные разностные операторы R_{iQ}, что справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \widehat{A}_{ijs}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} \widehat{R}_{is}(x)\xi_i^2$$

для любых $x \in \overline{Q}_{s1}$ $(s = 1,2,\dots)$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\widehat{R}_{is}$ — матрицы, соответствующие разностному оператору R_{iQ}.

Условие 2.2 (вырожденности). *Множество $S = \{s\colon \det A_{iis} = 0,\ i = 1,\dots,n\}$ непусто.*

Условие 2.3 (подчиненности). $\mathcal{N}(A_{ijs}) \subset \mathcal{N}(B_{ijs})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) \subset \mathcal{N}(A_{ijs}) \cap \mathcal{N}(A_{jis})$, $i,j = 1,\dots,n$, *где $\mathcal{N}(\cdot)$ — ядро матрицы.*

Теперь мы можем привести априорные оценки.

Лемма 2.1. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 1.1 *и выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда существуют такие константы $c_0 \geqslant 0$ и $c_1 > 0$, что для любой функции $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)}^2. \tag{2.5}$$

Для формулировки второй оценки нам понадобятся следующие обозначения. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R^+\colon D(L_R^+) \subset L_2(Q) \to L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R^+ u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{jiQ}^* u(x) \qquad (u \in D(L_R^+) = \dot{C}^\infty(Q)).$$

Лемма 2.2. *Пусть область Q удовлетворяет условию* 1.1 *и выполнены условия* 2.1–2.3. *Тогда существуют такая постоянная $c_2 > 0$, что для всех $u,v \in \dot{C}^\infty(Q)$ верны неравенства*

$$\left| \left(\frac{L_R + L_R^+}{2} u, v \right)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \left[\sum_{i,j=1}^{n} \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)} \|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)} \right], \tag{2.6}$$

$$\left| \left(\frac{L_R - L_R^+}{2i} u, v \right)_{L_2(Q)} \right| \leqslant c_2 \sum_{i,j=1}^{n} \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \left\|R_{jQ}v_{x_j}\right\|_{L_2(Q)}. \tag{2.7}$$

В силу ограниченности операторов A_{ijQ} в $L_2(Q)$, а также лемм 2.1, 2.2 следует, что операторы L_R, L_R^+ являются секториальными в $L_2(Q)$. Поэтому существует фридрихсово расширение оператора L_R, которое было построено в работе [12].

Введем скалярное произведение в $\dot{C}^\infty(Q)$ по формуле

$$(u, v)_{L_R} = \frac{1}{2} \left(\left(L_R + L_R^+ \right) u, v \right)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)} + (u, v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in \dot{C}^\infty(Q)).$$

Корректность такого скалярного произведения следует из условия 2.1 и лемм 1.11, 2.1.

Рассмотрим множество W_{L_R}, которое состоит из функций $u \in L_2(Q)$, для которых существует такая последовательность $\{u_p\} \subset \dot{C}^\infty(Q)$, что

$$\lim_{p\to\infty} \|u_p - u\|_{L_2(Q)} = 0, \quad \lim_{p,q\to\infty} \|u_p - u_q\|_{L_R} = 0. \tag{2.8}$$

Норму в W_{L_R} определим следующим образом:

$$\|u\|_{L_R} = \lim_{p\to\infty} \|u_p\|_{L_R}, \tag{2.9}$$

где $u_p \in \dot{C}^\infty(Q)$, $u_p \to u$ в $L_2(Q)$ и $\lim\limits_{p,q\to\infty} \|u_p - u_q\|_{L_R} = 0$. Эта норма не зависит от выбора последовательности $\{u_p\}$. Пространство W_{L_R} с такой нормой полно.

Введем неограниченные операторы

$$\mathcal{L}_R \colon D(\mathcal{L}_R) \subset L_2(Q) \to L_2(Q), \quad \mathcal{L}_R^* \colon D(\mathcal{L}_R^*) \subset L_2(Q) \to L_2(Q),$$

действующие по формулам

$$\mathcal{L}_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ} u(x) \quad (u \in D(\mathcal{L}_R) = \{u \in W_{L_R} \colon \mathcal{L}_R u \in L_2(Q)\}),$$

$$\mathcal{L}_R^* u = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ}^* u(x) \quad (u \in D(\mathcal{L}_R^*) = \{u \in W_{L_R} \colon \mathcal{L}_R^* u \in L_2(Q)\}).$$

Лемма 2.3. *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1, и условия 2.1–2.3 выполнены. Тогда $W_{L_R} \subset \{u \in L_2(Q) \colon (R_{iiQ}u)_{x_i} \in L_2(Q)\}$, при этом существует такая постоянная $c_3 > 0$, что*

$$c_3 \sum_{i=1}^{n} \left\| (R_{iiQ}u)_{x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leqslant a_R[u] + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \quad (u \in W_{L_R}), \tag{2.10}$$

где $a_R = (l_R + l_R^*)/2$, а l_R, l_R^* — полуторалинейные формы, с которыми ассоциированы фридрихсово расширение $\mathcal{L}_R$ и оператор $\mathcal{L}_R^*$ соответственно.

Таким образом, мы имеем, что $(R_{iiQ}u)_{x_i} \in L_2(Q)$, $i = 1, \ldots, n$, при этом мы не можем гарантировать априори большую гладкость. Поэтому дифференцирование будем понимать в смысле обобщенных функций, т. е. в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$.

Помимо условий 2.1–2.3 будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.4. $\mathcal{N}(A_{11s}) = \mathcal{N}(A_{iis})$, $i = 2, \ldots, n$.

Данное условие необходимо при доказательстве спектральных свойств, а также при исследовании гладкости. Равенство ядер матриц, которые соответствуют разностным операторам, позволяет оценивать нормы $\|A_{iiQ}u\|_{L_2(Q)}$ через одну норму $\|A_{11Q}u\|_{L_2(Q)}$, а также получить оценку в пространстве Соболева $W_2^1(Q)$.

Лемма 2.4. *Пусть выполнены условия* 2.1–2.4. *Тогда образ разностного оператора* $\mathcal{R}(A_{11Q})$ *является инвариантным подпространством операторов* A_{11Q} *и* $\mathcal{L}_R$, *и существуют константы* $c_0 \geqslant 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ *такие, что для любой функции* $u \in D(\mathcal{L}_R)$ *выполнены неравенства*

$$c_1\|A_{11Q}u\|^2_{W_2^1(Q)} \leqslant \operatorname{Re}(\mathcal{L}_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0\sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \leqslant c_2\|A_{11Q}u\|^2_{W_2^1(Q)}. \tag{2.11}$$

3. Обобщенные решения

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения с вырождением. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ}u = f(x) \qquad (x \in Q) \tag{3.1}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q), \tag{3.2}$$

где $f \in L_2(Q)$.

Определение 3.1. Функцию $u \in D(\mathcal{L}_R)$ будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (3.1), (3.2), если она удовлетворяет операторному уравнению $\mathcal{L}_R u = f$.

Дадим эквивалентное определение обобщенного решения задачи (3.1), (3.2) в терминах интегрального тождества.

Определение 3.2. Функцию u назовем *обобщенным решением* краевой задачи (3.1), (3.2), если для любой функции $v \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j} \int_Q R_{ijQ}u_{x_j}\overline{v}_{x_i}\,dx = \int_Q f\overline{v}\,dx. \tag{3.3}$$

В силу [12, теорема 5.1] $\mathcal{N}(A_{11Q}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{L}_R)$. Поэтому уравнение (3.1) может иметь решения, не принадлежащие даже пространству $W_2^1(Q)$. Однако в работе [13] было показано, что ортогональная проекция решения на $\mathcal{R}(A_{11Q})$ уже обладает локальной гладкостью внутри подобластей Q_{sl}, а в работе [20] доказана теорема о гладкости обобщенных решений вблизи границ подобластей. Приведем эти теоремы без доказательств, которые можно найти в упомянутых выше работах.

Теорема 3.1. *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условию* 1.1, *и пусть выполнены условия* 2.1–2.4. *Пусть* $u \in D(\mathcal{L}_R)$ *является обобщенным решением краевой задачи* (3.1), (3.2), *и пусть* $f \in L_2(Q)$.

Тогда $P^{A_{11}}u \in W_2^2(Q'_{sl})$ *выполнено для любого открытого связного множества* Q'_{sl} *такого, что* $\overline{Q'_{sl}} \subset Q_{sl}$ $(s = 1, 2, \ldots, l = 1, \ldots, N(S))$.

Теорема 3.2. *Пусть* $Q \subset \mathbb{R}^n$ — *ограниченная область, удовлетворяющая условию* 1.1, *и пусть выполнены условия* 2.1–2.4. *Пусть* $u \in D(\mathcal{L}_R)$ *является обобщенным решением краевой задачи* (3.1), (3.2), *и пусть* $f \in L_2(Q)$.

Тогда $P^{A_{11}}u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для любого* $\varepsilon > 0$ $(s = 1, 2, \ldots, l = 1, \ldots, N(S))$, *где* $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

4. Следы обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением

В данном разделе будет доказан основной результат настоящей работы. Как уже отмечалось, в случае эллиптических уравнений с вырождением часть границы может быть свободна от краевых условий. Это связано с вырождением коэффициентов оператора. Аналогичное явление мы можем наблюдать и для краевых задач для рассматриваемых эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, однако причиной этого явления служит вырождение разностных операторов, которое носит нелокальный характер. Теоремы о гладкости гарантируют гладкость не самого обобщенного решения, а лишь ортогональной проекции решения на образ разностного оператора. Таким образом, обобщенное решение может не принадлежать пространству

Соболева, и встает вопрос о корректном определении следов решений. Ниже мы докажем теорему, в которой приведены необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на некоторых частях границ подобластей Q_{sl}.

После доказательства теоремы мы приведем пример области и дифференциально-разностного оператора, для которых выполнены все необходимые условия.

По лемме 1.7 для любого $r = 1, 2, \ldots$ существует номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$, и можно перенумеровать подобласти s-го класса так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1, \ldots, N(s))$.

Множество чисел l, $1 \leqslant l \leqslant N(s)$, таких, что l-й столбец матрицы R_{11s} не представляет собой линейную комбинацию остальных столбцов данной матрицы, мы будем обозначать $\mathcal{B}_r$.

Теорема 4.1. *Пусть область* $Q \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условиям* 1.1-1.2, *а также пусть выполнены условия* 2.1–2.4. *Тогда если* $\Gamma_{rl} \subset \partial Q$, *то следы* $u\big|_{\Gamma_{rl}}$ *определены для всех* $u \in D(\mathcal{L}_R)$ *тогда и только тогда, когда* $l \in \mathcal{B}_r$. *Кроме того, если* $l \in \mathcal{B}_r$, *то* $u\big|_{\Gamma_{rl}} = 0$.

Доказательство. Из условия 2.4 и в силу леммы 1.14 следует, что

$$\|B_{iiQ}u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_1 \|A_{iiQ}u\|_{W_2^1(Q)} \leqslant k_2 \|A_{11Q}u\|_{W_2^1(Q)}$$

для всех $u \in W_{L_R}$.

Тогда из лемм 2.3, 2.4 имеем

$$W_{L_R} \subset \{u \in L_2(Q) :\, R_{11Q}u \in W_2^1(Q)\}, \tag{4.1}$$

кроме того, существует такая постоянная $c_4 > 0$, что выполнено неравенство

$$c_4 \|R_{11Q}u\|^2_{W_2^1(Q)} \leqslant a_R[u] + c_0 \sum_{i=1}^{n} (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \tag{4.2}$$

для всех $u \in W_{L_R}$.

Пусть $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Тогда $R_{11Q}u \in W_2^1(Q)$. Далее из оценки норм следов функций из пространства Соболева получим

$$\sum_{j=1}^{N(s)} \|(R_{11Q}u)\big|_{\Gamma_{rj}}\|_{L_2(\Gamma_{rj})} \leqslant k_3 \|R_{11Q}u\|_{W_2^1(Q)} \tag{4.3}$$

для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Поэтому из (4.1), (4.2), а также из лемм 1.14, 1.17 имеем

$$\|(P^{R_{11}u})\big|_{\Gamma_{rj}}\|_{L_2(\Gamma_{rj})} \leqslant k_4 \|u\|_{L_R}. \tag{4.4}$$

Поскольку $\dot{C}^\infty(Q)$ плотно в W_{L_R}, то следы $(P^{R_{11}}u)\big|_{\Gamma_{rl}}$ определены для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Из [12, теорема 5.1] $\mathcal{N}(A_{11Q}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{L}_R)$. Следовательно, по лемме 1.12, из условий 2.2–2.4 и леммы 1.14 следы $u\big|_{\Gamma_{rl}}$ определены в пространстве $L_2(\Gamma_{rl})$ для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$ тогда и только тогда, когда $(P^{R_{11}}u)(x) = u(x)$ для $x \in Q_{sl}$. Данное условие можно выразить в терминах матриц следующим образом:

$$\mathcal{N}(R_{11s}) \subset \{(x_1, \ldots x_{l-1},\, 0,\, x_{l+1}, \ldots,\, x_N) \in \mathbb{R}^N\},$$

т. е. l-й столбец матрицы R_{11s} не является линейной комбинацией остальных столбцов.

Далее, предположим, что $l \in B_r$ и $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Рассмотрим последовательность функций $u_p \in \dot{C}^\infty(Q)$ таких, что

$$\|u - u_p\|_{L_R} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty.$$

Тогда из неравенства (4.4) получим

$$\|(u - u_p)\big|_{\Gamma_{rl}}\|_{L_2(\Gamma_{rl})} \to 0 \quad \text{при} \quad p \to \infty,$$

что означает $u\big|_{\Gamma_{rl}} = 0$. □

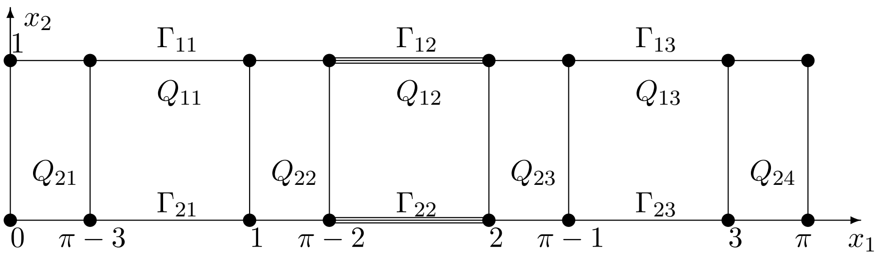

Рис. 4

Пример 4.1. Рассмотрим ограниченную область $Q=(0,\pi)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$ и дифференциально-разностный оператор вида

$$L_R u=-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}R_{11Q}u-\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}R_{12Q}u-\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1}R_{21Q}u-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}R_{22Q}u, \tag{4.5}$$

где разностные операторы задаются формулами

$$R_{ijQ}u=a_{ij}\left[u(x_1,x_2)+u(x_1+2,x_2)+u(x_1-2,x_2)\right]+$$
$$+b_{ij}\left[u(x_1+1,x_2)+u(x_1-1,x_2)+u(x_1+3,x_2)+u(x_1-3,x_2)\right],$$

где $b_{ij}<a_{ij}$, $a_{ij}=a_{ji}$, $b_{ij}=b_{ji}$. По построению $B_{ijQ}=0$, $A_{ijQ}=R_{ijQ}=R_{jiQ}$.

Разбиение области состоит из двух классов подобластей: 1-й класс — Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}; 2-й класс — Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, Q_{24} (см. рис. 4). Отметим, что в данном примере матрицы $\widehat{A}_{ijs}(x)=A_{ijs}$.

Матрицы, соответствующие первому классу A_{ij1}, имеют вид

$$A_{ij1}=\begin{pmatrix}a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}\\ b_{ij}&a_{ij}&b_{ij}\\ a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}\end{pmatrix}.$$

Ядро матрицы $A_{ij1}\,(i,j=1,2)$ есть линейная оболочка, натянутая на вектор $(1,0,-1)^T$. Собственные значения матриц такого вида: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\dfrac{3a_{ij}+\sqrt{a_{ij}^2+8b_{ij}^2}}{2}$, $\lambda_3=\dfrac{3a_{ij}-\sqrt{a_{ij}^2+8b_{ij}^2}}{2}$. Очевидно, что при $a_{ij}>b_{ij}>0$ все собственные значения матриц будут неотрицательными. Матрицы, соответствующие второму классу $\tilde{A}_{ij2}(x)=A_{ij2}$, имеют следующий вид:

$$A_{ij2}=\begin{pmatrix}a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}&b_{ij}\\ b_{ij}&a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}\\ a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}&b_{ij}\\ b_{ij}&a_{ij}&b_{ij}&a_{ij}\end{pmatrix}.$$

Ядро матрицы $A_{ij2}\,(i,j=1,2)$ есть линейная оболочка, натянутая на 2 вектора: $(1,0,-1,0)^T$ и $(0,1,0,-1)^T$. Собственные значения матриц такого вида: $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=2(a_{ij}-b_{ij})$, $\lambda_4=2(a_{ij}+b_{ij})$. Очевидно, что при $a_{ij}>b_{ij}>0$ все собственные значения данных матриц также будут неотрицательными.

Пусть операторы R_{iQ} имеют вид

$$R_{iQ}u=p_i\left[u(x_1,x_2)+u(x_1+2,x_2)+u(x_1-2,x_2)\right]+$$
$$+q_i\left[u(x_1+1,x_2)+u(x_1-1,x_2)+u(x_1+3,x_2)+u(x_1-3,x_2)\right],$$

где $p_i>q_i>0$. Матрицы $\widehat{R}_{is}=R_{is}$ строятся аналогично матрицам A_{ijs}, только вместо чисел a_{ij} стоят p_i, а вместо b_{ij} стоят q_i. По доказанному, $\det A_{iis}=0$ $(i=1,2,\ s=1,2)$. Следовательно, $S=\{1,2\}$. Таким образом, условие 2.2 выполнено. Кроме того, мы показали, что $\mathcal{N}(A_{ijs})=\mathcal{N}(A_{jis})=\mathcal{N}(A_{iis})=\mathcal{N}(R_{is})\,(i,j,s=1,2)$, а B_{ijs}—нулевая матрица. Поэтому условия 2.3-2.4

также выполнены. Тогда условие 2.1 примет вид

$$\begin{pmatrix} A-P & B-Q & A-P \\ B-Q & A-P & B-Q \\ A-P & B-Q & A-P \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \text{для любых}\, \xi \in \mathbb{R}^2,\ \text{если } s=1,$$

и

$$\begin{pmatrix} A-P & B-Q & A-P & B-Q \\ B-Q & A-P & B-Q & A-P \\ A-P & B-Q & A-P & B-Q \\ B-Q & A-P & B-Q & A-P \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad \text{для любых } \xi \in \mathbb{R}^2,\ \text{если } s=2,$$

где $A = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2,\ B = b_{11}\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + b_{22}\xi_2^2,\ P = p_1\xi_1^2 + p_2\xi_2^2,\ Q = q_1\xi_1^2 + q_2\xi_2^2$. Эти условия выполнены, если $A - P > B - Q > 0$ для любых $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$, т. е. если

$$(a_{11} - b_{11} - (p_1 - q_1))\xi_1^2 + 2(a_{12} - b_{12})\xi_1\xi_2 + (a_{22} - b_{22} - (p_2 - q_2))\xi_2^2 > 0,$$
$$(b_{11} - q_1)\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + (b_{22} - q_2)\xi_2^2 > 0,$$

для любых $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, если матрицы $||b_{ij}||_{i,j=1}^2$, $||a_{ij} - b_{ij}||_{i,j=1}^2$ положительно определены, а $a_{ij} > b_{ij}$ $(i,j = 1,2)$, то выполняются условия 2.1–2.4. Очевидно, что второй столбец матрицы R_{111} не является линейной комбинацией остальных столбцов, поэтому по теореме 4.1 следы $u\big|_{\Gamma_{12}}$ и $u\big|_{\Gamma_{22}}$ определены для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$. При этом следы $u\big|_{\partial Q_{11} \cap \partial Q}$ и $u\big|_{\partial Q_{13} \cap \partial Q}$ не определены для некоторых функций $u \in D(\mathcal{L}_R)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739-740.
2. *Вишик М. И.* Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области// Мат. сб. — *35*, № 3. — 1954. — С. 513–568.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
4. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59*. — С. 74–96.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
6. *Келдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области// Докл. АН СССР. — 1951. — *77*. — С. 181–183.
7. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
8. *Лионс Ж., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
9. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
10. *Муравник А. Б.* Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 4. — С. 566–576.
11. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — М.: ВИНИТИ, 1971.
12. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 125–142.
13. *Попов В. А., Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 130–140.
14. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
15. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *36*. — С. 125–142.
16. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — *59*. — С. 240–285.
17. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3—112.
18. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 153–165.

19. *Фикера Г.* К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка// Математика. — 1963. — *7*, № 6. — С. 99–121.
20. *Popov V. A., Skubachevskii A. L.* On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — *20*, № 4. — С. 492–507.
21. *Skubachevskii A. L.* The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*, № 3. — С. 332–361.
22. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Владимир Алексеевич Попов
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com

UDC 517.9

Traces of Generalized Solutions of Elliptic Differential-Difference Equations with Degeneration

© 2016 **V. A. Popov**

Abstract. The paper is devoted to differential-difference equations with degeneration in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$. We consider differential-difference operators that cannot be expressed as a composition of a strongly elliptic differential operator and a degenerated difference operator. Instead of this, operators under consideration contain several degenerated difference operators corresponding to differentiation operators. Generalized solutions of such equations may not belong even to the Sobolev space $W_2^1(Q)$.

Earlier, under certain conditions on difference and differentiation operators, we had obtained a priori estimates and proved that the orthogonal projection of the generalized solution onto the image of the difference operator preserves certain smoothness inside some subdomains $Q_r \subset Q$ $(\bigcup_r \overline{Q}_r = \overline{Q})$ instead of the whole domain.

In this paper, we prove necessary and sufficient conditions in algebraic form for existence of traces on some parts of boundaries of subdomains Q_r.

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskiy, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739-740.
2. M. I. Vishik, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na granitse oblasti” [Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of domain], *Mat. sb.* [Math. Digest], **35**, No. 3, 1954, 513–568.
3. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 2: Spektral’naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil’bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966.
4. E. P. Ivanova, “Nepreryvnaya zavisimost’ resheniy kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy ot sdvigov argumenta” [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96.
5. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972.
6. M. V. Keldysh, “O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti” [On some cases of degeneration of elliptic-type equations on the boundary of domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, 181–183.

7. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971.
8. J. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971.
9. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976.
10. A. B. Muravnik, "Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576.
11. O. A. Oleynik and E. V. Radkevich, *Uravneniya vtorogo poryadka s neotritsatel'noy kharakteristicheskoy formoy* [Second-Order Equations with Nonnegative Characteristic Form], VINITI, Moscow, 1971.
12. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem" [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142.
13. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Smoothness of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degenerations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140.
14. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113.
15. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **36**, 125–142.
16. A. L. Skubachevskii, "Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem" [Elliptic functional differential equations with degeneration], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1997, **59**, 240–285.
17. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No 5, 3—112.
18. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of the Dirichlet problem for strong elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165.
19. G. Fikera, "K edinoy teorii kraevykh zadach dlya elliptiko-parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [On a unified theory of boundary-value problems for elliptic-parabolic equations of second order], *Matematika* [Mathematics], 1963, **7**, No. 6, 99–121.
20. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 4, 492–507.
21. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
22. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

Vladimir Popov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com