Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 85–99

УДК 517.929

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

© 2016 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Изучаются краевые задачи на ограниченных областях для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах. Получены условия равномерной относительно сдвигов аргументов сильной эллиптичности таких уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В статье рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги пространственных переменных в старших членах. Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или соизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах построена в работах А. Л. Скубачевского (см. [8]). Эти задачи имеют важные приложения в теории плазмы, в теории многослойных пластин и оболочек (см. [8,9]). Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами в одномерном случае рассматривались в [2,8]. Изучение таких задач осложняется рядом особенностей.

Во-первых, это нарушение гладкости решений. Если решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами сохраняют гладкость в некоторых подобластях, то решения краевых задач с несоизмеримыми сдвигами могут иметь всюду плотное множество точек разрыва производной (см. [8, пример 3.10]).

Во-вторых, трудности связаны с проверкой условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами, действующих на ограниченных областях. Сильно эллиптическими здесь названы операторы, для которых выполняется неравенство типа Гординга. Проблема построения условий сильной эллиптичности операторов, выраженных в коэффициентах этих операторов, называется проблемой коэрцитивности. Если для дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами получены как необходимые, так и достаточные (близкие к необходимым) условия сильной эллиптичности (см. [8]), то для операторов с несоизмеримыми сдвигами известны только достаточные условия, выраженные в виде положительности скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора (см. [6, примеры 8.1, 8.2]). Поскольку в этом символе не учитываются свойства и размер области, эти условия являются избыточными и далекими от необходимых. В работе [6] приводятся также достаточные (тоже довольно грубые) условия сильной эллиптичности этих операторов с использованием операторной матрицы.

В-третьих, даже малые возмущения сдвигов нарушают их соизмеримость, и известные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ соглашение № 02.a03.21.0008.

являются неустойчивыми относительно этих сдвигов. Достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов для оператора Лапласа получены в [7]. Проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных уравнений с параметром и вопросы непрерывной зависимости решений таких задач от сдвигов аргументов впервые изучались в работе Л. Е. Россовского [5].

В данной статье предлагается метод построения достаточных условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных уравнений второго порядка с несоизмеримыми сдвигами аргументов. Получены достаточные условия сильной эллиптичности, учитывающие форму и размер области и устойчивые относительно малых возмущений сдвигов пространственных переменных.

1. Разбиения области, индуцированные разностными операторами

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$

$$Ru(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x+h), \tag{1.1}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, M — множество векторов с соизмеримыми координатами, $h_0 = 0 \in M$. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — область с кусочно-гладкой границей ∂Q. Для операторов с соизмеримыми сдвигами используем метод исследования, предложенный А. Л. Скубачевским (см. [8]). При этом изложим модификацию этого метода, впервые реализованную в статье [1].

Определение 1.1. Назовем $\Re$ *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти Q_r $(r = 1, 2, \ldots)$, если:

1. $\bigcup\limits_r \bar{Q}_r = \overline{Q}$;
2. для любой Q_{r_1} и $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ или найдется Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, или $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}^n \backslash Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1.1).

Приведем алгоритм построения регулярного разбиения.

Каждому упорядоченному набору $\beta = \{h_k\}_{k=1}^l$ $(h_k \in \widehat{M})$, поставим в соответствие множества $A_\beta^0 = \partial Q, \ldots, A_\beta^k = (A_\beta^{k-1} + h_k) \cap \bar{Q}, \ldots, A_\beta = A_\beta^l = (A_\beta^{l-1} + h_l) \cap \bar{Q}$. Введем множество $S = \bigcup\limits_{\beta \in B} A_\beta$, где B — множество всех β таких, что $A_\beta \neq \varnothing$.

Покажем, что множество S замкнуто. Действительно, обозначим через β' набор, полученный выбрасыванием из $\beta = \{h_k\}_{k=1}^l$ всех векторов $h_{s+1}, \ldots, h_r$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{s} h_k = \sum\limits_{k=1}^{r} h_k$, $1 \leqslant s < r \leqslant l$, $B' = \{\beta'\}$.

Из очевидного равенства $A_\beta = A_{\beta'}$ следует, что $S = \bigcup\limits_{\beta' \in B'} A_{\beta'}$. Но в силу ограниченности области Q множество B' конечно. Следовательно, множество S как объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \backslash S$. Очевидно, множество G состоит из конечного или счетного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2 \ldots)$ и $G = \bigcup\limits_r Q_r$,

$$S = \bigcup_r \partial Q_r. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением области Q.*

Доказательство. По условию множества Q_r — непересекающиеся и связные, а в силу (1.2)

$$\bigcup_r \bar{Q}_r = G \bigcup \Big(\bigcup_r \partial Q_r\Big) = (\bar{Q} \backslash S) \bigcup S = \bar{Q}.$$

Остается показать, что для любых Q_r и $h \in \widehat{M}$ либо найдется Q_l такая, что $Q_r + h = Q_l$, либо $Q_r + h \subset \mathbb{R}^n \backslash \bar{Q}$. Предположим противное: пусть существуют такие Q_r, h и Q_l, что $(Q_r + h) \cap Q_l \neq \varnothing$, $Q_r + h \neq Q_l$. Не ограничивая общности, будем считать, что $Q_l \backslash (Q_r + h) \neq \varnothing$. (Если $(Q_r + h) \backslash Q_l \neq \varnothing$, доказательство аналогично.) Так как множество Q_l связное, найдется точка $z \in \partial(Q_r + h) \cap Q_l$. Тогда $y = z - h \in \partial Q_r$, а в силу (1.2) найдется набор $\beta_l = \{h_1, \dots, h_l\} \in B$ такой, что $y \in A_{\beta_1}$. Тогда $z \in A_{\beta_2}$, где $\beta_2 = \{h_1, \dots, h_l, h\} \in B$. Следовательно, $z \in S$, что противоречит тому, что $z \in Q_l$. □

Построенное разбиение обозначим $\Re_0$. Каждое регулярное разбиение $\Re$ можно рассматривать как элемент множества всевозможных регулярных разбиений. Для этого множества можно ввести отношение порядка следующим образом. Если $\Re_1$, $\Re_2$ — регулярные разбиения области Q на подобласти Q_{r_1}, Q_{r_2}, соответственно, и для любой Q_{r_1} найдется Q_{r_2} такая, что $Q_{r_1} \subseteq Q_{r_2}$, то $\Re_1 \leqslant \Re_2$.

Определение 1.2. Назовем регулярное разбиение максимальным ($\Re_{\max}$), если для любого регулярного разбиения $\Re$ выполнено $\Re \leqslant \Re_{\max}$.

Теорема 1.2. $\Re_0 = \Re_{\max}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует регулярное разбиение $\Re_1$ такое, что найдутся $Q_{r_1} \in \Re_1, Q_{r_0} \in \Re_0$, для которых $Q_{r_1} \cap Q_{r_0} \neq \varnothing$, $Q_{r_1} \backslash Q_{r_0} \neq \varnothing$. Следовательно (аналогично доказательству теоремы 1.1), найдется точка $z \in \partial Q_{r_0} \cap Q_{r_1}$. Тогда существуют точка $z_0 \in \partial Q$ и набор $\beta = \{h_1, \dots, h_l\} \in B$ такие, что $z = z_0 + \sum\limits_{k=1}^{l} h_k$ и $z_j = z_0 + \sum\limits_{k=1}^{j} h_k \in A_{\beta_j} \in \bar{Q}$, $j = 1, \dots, l$. Отсюда $z_{l-1} = z - h_l \in \bar{Q}$. Учитывая, что $z \in Q_{r_1}$, получим, что $Q_{r_1} - h_l \cap \bar{Q} \neq \varnothing$. Следовательно, в силу определения регулярного разбиения $\Re_1$ найдется подобласть $Q_{r_2} \in \Re_1$ такая, что $Q_{r_1} - h_l = Q_{r_2}$. Продолжая процесс возврата из точки z в точку $z_0 \in \partial Q$, получим последовательность областей $\{Q_{r_k}\}_{k=1}^{l+1}$ такую, что $Q_{r_k} \in \Re_1$, $Q_{r_k} - h_{l-k+1} = Q_{r_{k+1}}$ и $z_{l-k} \in Q_{r_{k+1}}$, в частности, $Q_{r_l} - h_1 = Q_{r_{l+1}}$, $z_0 \in Q_{r_{l+1}}$. Последнее, так как $z_0 \in \partial Q$, противоречит определению разбиения $\Re_1$. □

Замечание 1.1. В работе А. Л. Скубачевского [8] при построении разбиения области Q на подобласти вместо множества $\widehat{M} = \{M, -M\}$ использовалось множество векторов T, где T — аддитивная абелева группа, порожденная множеством M. В силу очевидного включения $\widehat{M} \subseteq T$, регулярное разбиение $\Re_0$ является максимальным и на множестве этих разбиений.

Использование максимальных разбиений области особенно важно при исследовании гладкости обобщенных решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Разбиению $\Re_0$ поставим в соответствие ориентированный граф (см. [4]). Вершины графа — это подобласти Q_r, дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1}, соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1.1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \Re_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\Re_0$ на классы эквивалентности. Обозначим подобласти Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Введем операторы I_Q, P_Q, R_Q, где $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — это оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n$, $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — это оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$. Обозначим через $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Обозначим $P_s : L_2(Q) \to L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$. В силу [8, лемма 8.5] $L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ}, при этом $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Big(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Big) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле $(U_s u)_l(x) = u(x+h_{sl})$ $(x \in Q_{s1})$, где $l = 1,\ldots,N = N(s)$, h_{sl} такой вектор, что $Q_{s1}+h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [8, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q {U_s}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s)\times N(s)$, элементы матрицы r_{km}^s вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h \ (h = h_{sm} - h_{sk} \in M), \\ 0 \ (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \tag{1.3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\Re_0$ граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm}\rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

Введем также операторы $R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$

$$R^*u(x) = \sum_{h\in M} a_h u(x-h),$$

$R_Q^* : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q^* = P_Q R^* I_Q$. Оператор R_Q^* является сопряженным к R_Q. Действию оператора R_Q^* будет соответствовать умножение на матрицы R_s^*, где R_s^* — эрмитово сопряженные с R_s матрицы.

Определение 1.3. Самосопряженный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем называть *положительно определенным*, если найдется $c > 0$ такое, что для всех $u \in L_2(Q)$, $u \neq 0$, выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u,u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(u,u)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

Лемма 1.1 ([8, лемма 8.8]). *Спектр оператора R_Q совпадает со спектром семейства матриц $R_{s_\nu}(\nu = 1,\ldots,n_1)$; самосопряженный оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R_{s_\nu}^*$ $(\nu = 1,\ldots,n_1)$ положительно определены.*

Пример 1.1. Пусть разностный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$Ru(x_1,x_2) = a_0 u(x_1,x_2) + a_1 u(x_1+7,x_2) + a_2 u(x_1+8,x_2),$$

область $Q = \{(x_1,x_2) | x_1 \in (0,9), x_2 \in (0,1)\}$. Множество M состоит из векторов $h_0 = (0,0)$, $h_1 = (7,0)$, $h_2 = (8,0)$. Для аддитивной группы T, порожденной этими векторами, образующей будет $h = (1,0)$. Разбиение области Q, построенное с помощью группы T, состоит из подобластей $G_i = (i,i+1)\times(0,1)$, $i = 0,\ldots,8$. Максимальное разбиение $\Re_0$, построенное на базе множества $\widehat{M} = \{M,-M\}$, состоит из пяти подобластей, распадающихся на два класса $Q_{11} = (0,1)\times(0,1)$, $Q_{12} = (1,2)\times(0,1), Q_{13} = (7,8)\times(0,1)$, $Q_{14} = (8,9)\times(0,1)$; $Q_{21} = (2,7)\times(0,1)$. Граф, соответствующий этому разбиению, приведен на рис. 1.

Для первого класса $s = 1$ подобластей оператор $R_1 : L_2^4(Q_{11}) \to L_2^4(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q {U_1}^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$. Действию оператора R_1 в силу формулы (1.3) соответствует умножение на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей оператор $R_2 : L_2(Q_{21}) \to L_2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q {U_2}^{-1}$. Действию оператора R_2 соответствует умножение на a_0.

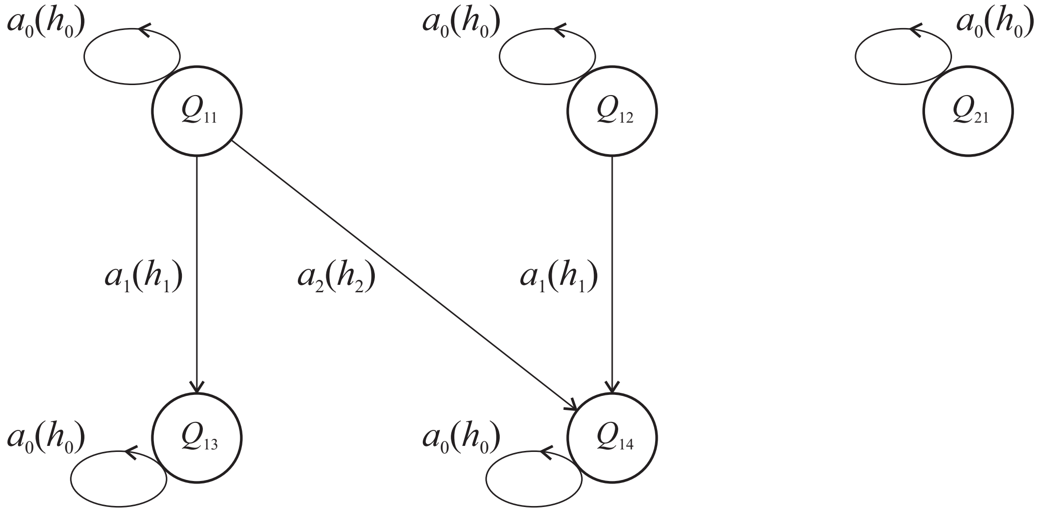

Рис. 1. Граф разбиения $\Re_0$ области Q из примера 1.1.

2. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q, $f \in L_2(Q)$. Операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, разностные операторы $R_{ij} = R_{ij}^a + R_{ij}^b$, $R_{ij}^a : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R_{ij}^b : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{ij}^a u(x) = \sum_{h \in M_{ij}^1} a_{ijh} u(x+h) \quad (a_{ijh} \in \mathbb{R}), \tag{2.3}$$

$$R_{ij}^b u(x) = \sum_{p \in M_{ij}^2} b_{ijp} u(x+p) \quad (b_{ijp} \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Здесь $M_{ij}^k \subseteq M^k$ $(k = 1, 2)$, где M^k — конечные множества векторов с соизмеримыми координатами, при этом координаты векторов h из множества M^1 несоизмеримы с координатами векторов p из множества M^2. Таким образом, уравнение (2.1) является дифференциально-разностным уравнением с несоизмеримыми сдвигами аргументов.

Определение 2.1. Решением краевой задачи (2.1)-(2.2) будем называть функцию $u \in \mathring{H}^1(Q)$, если для любой $v \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \; f \in L_2(Q). \tag{2.5}$$

Здесь $\mathring{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций $v \in H^1(Q)$, у которых $v|_{\partial Q} = 0$, где равенство понимается в смысле следов. В пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ будем использовать эквивалентное скалярное произведение $(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)}$

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla u \nabla \bar{v} dx.$$

Определение 2.2. Назовем уравнение (2.1) *сильно эллиптическим* в $\bar{Q}$, если для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга:

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c\,\|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}, \tag{2.6}$$

где $c > 0$ не зависит от u.

Определение 2.3. Задача (2.1)-(2.2) называется *первой краевой задачей*.

Получим условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов в алгебраической форме, выраженные в коэффициентах разностных операторов и устойчивые относительно малых возмущений сдвигов аргументов.

Необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами получены А. Л. Скубачевским (см. [8]). Далее будем предполагать, что область Q такова, что необходимые условия совпадают с достаточными (см. [8, теорема 3.3]).

Введем вспомогательное дифференциально-разностное уравнение

$$A_R^a u = -\sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}^a u_{x_j})_{x_i} = f_1(x) \quad (x \in Q). \tag{2.7}$$

Оператор A_R^α — это дифференциально-разностный оператор с соизмеримыми сдвигами аргументов. Для его исследования применим метод, изложенный в разделе 1. Для операторов R_{ijQ}^a построим разбиение $\Re_0^a$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе, $k = 1, \dots, N = N(s)$. В силу формулы (1.3) оператор $R_{ijs}^a : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_{ijs}^a = U_s R_{ijQ}^a U_s{}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_{ijs}^a порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^{ijs} матрицы R_{ijs}^a вычисляются по формуле

$$r_{km}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh} \ (h = h_{sm} - h_{sk} \in M_{ij}^1), \\ \quad 0 \qquad (h_{sm} - h_{sk} \notin M_{ij}^1). \end{cases} \tag{2.8}$$

В силу ограниченности области Q и постоянства коэффициентов a_{ijh} существует лишь конечное число n_1 различных матриц R_{ijs}^a. Для удобства дальнейшего изложения приведем здесь теоремы из работы [6].

Теорема 2.1 ([6, теорема 3.1]). *Пусть уравнение* (2.7) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$.
Тогда матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ijs}^a + R_{ijs}^{a*})\xi_i\xi_j \tag{2.9}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \dots, n_1$.

Для формулировки достаточных условий сильной эллиптичности в работе [6] используются матрицы A_{ijs}^a. В случае, если найдется область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $\overline{Q} \subset \Omega$, и матрицы R_{ijs}^Ω, построенные для области Ω, совпадают с аналогичными матрицами R_{ijs}^Q области Q, то все матрицы $A_{ijs} = R_{ijs}$. Предположим далее, что это выполняется. Для большого класса областей и дифференциально-разностных операторов это справедливо, см. [6, теорема 3.3].

Теорема 2.2 ([6, теорема 3.2]). *Пусть матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^n \left(R_{ijs}^a + R_{ijs}^{a*}\right)\xi_i\xi_j \tag{2.10}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \dots, n_1$. *Тогда уравнение* (2.7) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$.

Замечание 2.1. Теоремы 2.1, 2.2, остаются в силе, если в их формулировке использовать матрицы, построенные на основе регулярного разбиения $\Re_0$.

Используя результаты раздела 1, для разностных операторов R^b_{ijQ}, построим разбиение $\Re^b_0$ области Q на непересекающиеся подобласти $G_{\alpha k}$, где α ($\alpha = 1, \ldots, n_2$) — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе, $k = 1, \ldots, N = N(\alpha)$. Оператор $R^b_{ij\alpha} : L^N_2(G_{\alpha 1}) \to L^N_2(G_{\alpha 1})$, заданный формулой $R^b_{ij\alpha} = U_\alpha R^b_{ijQ} U_\alpha{}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу $R^b_{ij\alpha}$ порядка $N(\alpha) \times N(\alpha)$, элементы $r^{ij\alpha}_{km}$ матрицы $R^b_{ij\alpha}$ вычисляются по формуле

$$r^{ij\alpha}_{km} = \begin{cases} b_{ijp} \ (p = p_{sm} - p_{sk} \in M^2_{ij}), \\ 0 \ (p = p_{sm} - p_{sk} \notin M^2_{ij}). \end{cases} \tag{2.11}$$

Теорема 2.3. *Пусть для вектора $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ матрицы*

$$K_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijs} + R^{a*}_{ijs}) \xi_i \xi_j - E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{2.12}$$

неотрицательно определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $s = 1, 2, \ldots, n_1$.

При этом матрицы

$$K_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^b_{ija} + R^{b*}_{ija}) \xi_i \xi_j + E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{2.13}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha = 1, 2, \ldots, n_2$.

Тогда уравнение (2.1) *сильно эллиптическое в $\bar{Q}$.*

(*Здесь E — единичные матрицы размерности $N(s)$ или $N(\alpha)$.*)

Доказательство. Введем оператор $\tilde{A}^a_R$, действующий по формуле

$$\tilde{A}^a_R u = A^a_R u + \sum_{i=1}^{n} k_i u_{x_i x_i} = - \sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} k_i u_{x_i x_i} \quad (x \in Q).$$

Используя неотрицательную определенность матриц K_s, методом, аналогичным методу доказательства теоремы 2.2, можно показать, что для всех $u \in C^\infty_0(Q)$ выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} (\tilde{A}^a_R u, u)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re} (A^a_R u, u)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^{n} k_i (u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geqslant 0. \tag{2.14}$$

Введем теперь оператор A^C_R, который назовем *контрольным*, по формуле

$$A^C_R u = - \sum_{i,j=1}^{n} (R^b_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} k_i u_{x_i x_i} \quad (x \in Q). \tag{2.15}$$

Оператор A^C_R — это дифференциально-разностный оператор с соизмеримыми сдвигами аргументов. Поскольку матрицы K_α положительно определены, из теоремы 2.2 следует, оператор A^C_R является сильно эллиптическим и для всех $u \in C^\infty_0(Q)$ выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} (A^C_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c \, \|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)} \ , \tag{2.16}$$

где $c > 0$ не зависит от u.

Тогда оператор $A_R = \tilde{A}^a_R + A^C_R$ в силу формул (2.14), (2.16) также является сильно эллиптическим. □

Обозначим далее через $R_M = \left\| R^a_{ijQ} \right\|^n_{i,j=1} : L^n_2(Q) \to L^n_2(Q)$ матричный оператор, а через R_s блочную матрицу порядка $nN(s) \times nN(s)$ вида

$$R_s = \left\| R^a_{ijs} \right\|^n_{i,j=1}. \tag{2.17}$$

В силу ограниченности области Q существует лишь конечное число различных матриц R_{s_ν} ($\nu = 1, \ldots, n_1$).

Следствие 2.1. *Пусть в формуле* (2.12) $k_i = \lambda_{\min},\ i = 1,\ldots,n,$ *где* $\lambda_{\min}$ — *минимальное из всех собственных значений матриц* $\frac{1}{2}\left(R_{s_\nu} + R^*_{s_\nu}\right)$ $(\nu = 1,\ldots,n_1)$.

Тогда для оператора $\tilde{A}^a_R$, *определенного формулой*

$$\tilde{A}^a_R u = A^a_R u + \lambda_{\min}\sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = -\sum_{i,j=1}^{n}(R^a_{ijQ}u_{x_j})_{x_i} + \lambda_{\min}\Delta u,$$

выполнено условие (2.14), *и матрицы* K_s *удовлетворяют условиям теоремы* 2.3.

Доказательство. Введем блочные матрицы $\tilde{R}_s = \frac{1}{2}\left(R_s + R^*_s\right) - \lambda_{\min}E = \frac{1}{2}\left\|R^a_{ijs} + R^{a*}_{jis}\right\|^n_{i,j=1} - \lambda_{\min}E$ и соответствующий матричный оператор $\tilde{R}_M = \frac{1}{2}(R_M + R^*_M) - \lambda I$, где E — единичные матрицы порядка $nN(s)\times nN(s)$ и I — тождественный оператор. Матрицы $\tilde{R}_s$ по построению неотрицательно определены. В силу [3, § 10, теорема 1] матричный оператор $\tilde{R}_M + \tilde{R}^*_M$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $\tilde{R}_{s_\nu} + \tilde{R}^*_{s_\nu}$ $(\nu = 1,\ldots,n_1)$ положительно определены. А в силу [3, § 10, теорема 2], если матричный оператор $\tilde{R}_M + \tilde{R}^*_M$ положительно определен, то оператор $\tilde{A}^a_R$ сильно эллиптический. Если условие положительной определенности матриц заменить на условие их неотрицательной определенности, то можно доказать аналогичные утверждения. При этом условие сильной эллиптичности оператора $\tilde{A}^a_R$ также надо заменить условием (2.14). В силу теоремы 2.1 соответствующие оператору $\tilde{A}^a_R$ матрицы K_s являются неотрицательно определенными. □

С использованием неравенства (2.6) стандартным методом доказывается фредгольмовость и дискретность спектра оператора A_R (см. [8, теорема 10.1]). Также в силу [6, теорема 8.3] оператор A_R является регулярно аккретивным оператором, для которого выполняется гипотеза Т. Като (см. [6]).

Из [8, теорема 10.1] получим теорему

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Тогда уравнение* (2.1) *является сильно эллиптическим в* $\bar{Q}$, *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (2.1)-(2.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Пример 2.1. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$A_R u = -(R^a_{11Q}u_{x_1})_{x_1} - (R^a_{22Q}u_{x_2})_{x_2} - 2(R^b_{12Q}u_{x_1})_{x_2} \quad (x \in Q). \tag{2.18}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = (0;1{,}9)\times(0;1{,}9) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, разностные операторы R^a_{11}, R^a_{22}, R^b_{12} имеют вид

$$\begin{gathered}
R^a_{11}u(x) = a^0_1 u(x_1,x_2) + a_1(u(x_1+1,x_2) + u(x_1-1,x_2)),\\
R^a_{22}u(x) = a^0_2 u(x_1,x_2) + a_2(u(x_1,x_2+1) + u(x_1,x_2-1)),\\
R^b_{12}u(x) = b_\tau(u(x_1+\tau,x_2+\tau) + u(x_1-\tau,x_2-\tau)).
\end{gathered}$$

Здесь τ — иррациональное, $\frac{1{,}9}{2} + \varepsilon < \tau < 1{,}9 - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Для операторов $R^a_{11Q} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R^a_{22Q} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R^a_{11Q} = P_Q R^a_{11} I_Q$, $R^a_{22Q} = P_Q R^a_{22} I_Q$ построим разбиение $\Re^a_0$ области Q. Это разбиение состоит из четырех классов подобластей (см. рис. 2). Первый класс: $Q_{11} = (0;0{,}9)\times(0;0{,}9)$, $Q_{12} = (1;1{,}9)\times(0;0{,}9)$, $Q_{13} = (0;0{,}9)\times(1;1{,}9), Q_{14} = (1;1{,}9)\times(1;1{,}9)$.

Обозначим $h_0 = (0,0)$, $h_1 = (1,0)$, $h_2 = (0,1)$. Граф, соответствующий разбиению $\Re^a_0$, приведен на рис. 3.

Действию разностного оператора R^a_{11Q} на первом классе подобластей в силу формулы (2.8) соответствует умножение на матрицу R^a_{11s}:

$$R^a_{11s} = \begin{pmatrix} a^0_1 & a_1 & 0 & 0\\ a_1 & a^0_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^0_1 & a_1\\ 0 & 0 & a_1 & a^0_1 \end{pmatrix}, \quad s = 1.$$

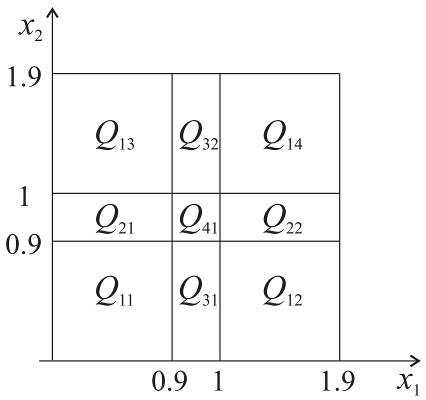

Рис. 2. Разбиение $\Re_0^a$ области Q из примера 2.1.

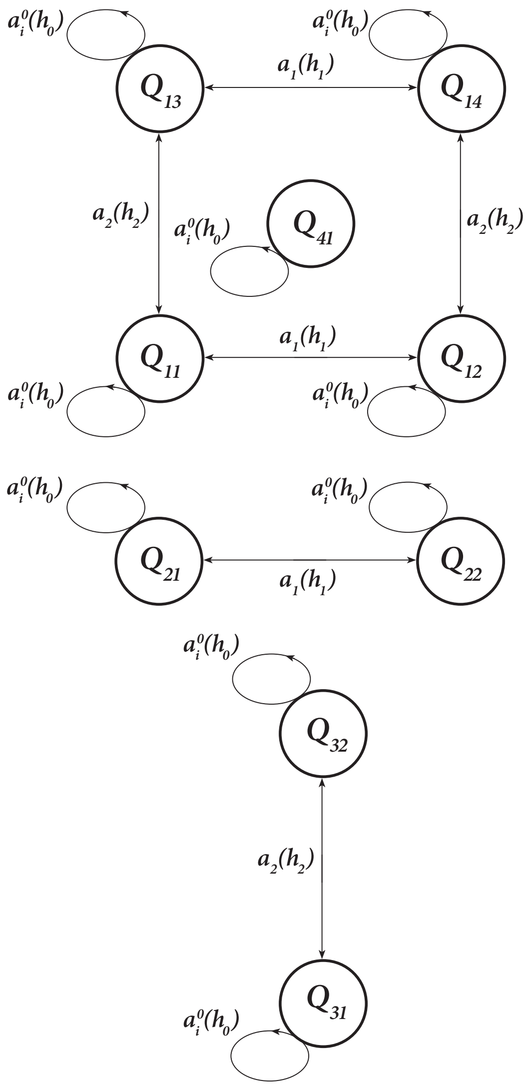

Рис. 3. Граф разбиения $\Re_0^a$ из примера 2.1.

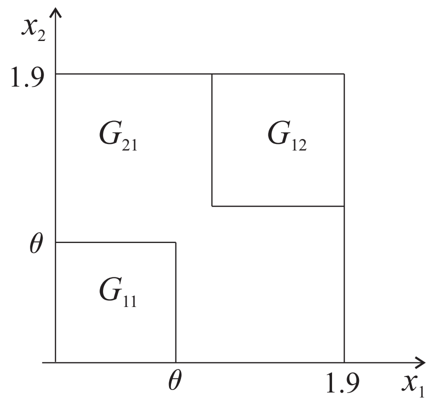

Рис. 4. Разбиение $\Re_0^b$ области Q на подобласти G_{ij} из примера 2.1.

Собственные значения матрицы R_{11s}^a: $\lambda_{1,2} = a_1^0 + a_1$, $\lambda_{3,4} = a_1^0 - a_1$. Второй класс подобластей: $Q_{21} = (0;0{,}9) \times (0{,}9;1)$, $Q_{22} = (1;1{,}9) \times (0{,}9;1)$. На этом классе действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на матрицу

$$R_{11s}^a = \begin{pmatrix} a_1^0 & a_1 \\ a_1 & a_1^0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = a_1^0 + a_1, \lambda_2 = a_1^0 - a_1$.

Третий класс подобластей: $Q_{31} = (0{,}9;1) \times (0;0{,}9)$, $Q_{32} = (0{,}9;1) \times (1;1{,}9)$. На этом классе действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на матрицу

$$R_{11s}^a = \begin{pmatrix} a_1^0 & 0 \\ 0 & a_1^0 \end{pmatrix}, \quad s = 3.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_1^0$.

Четвертый класс ($s = 4$) состоит из одной области $Q_{41} = (0{,}9;1) \times (0{,}9;1)$. Действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на константу a_1^0.

Минимальное собственное значение матриц всех классов: $\lambda_{11\,\min} = a_1^0 - |a_1|$ $(s = 1, \ldots, 4)$.

Аналогично можно сформировать матрицы R_{22s}^a $(s = 1, \ldots, 4)$, соответствующие действию оператора R_{22Q}^a. Нетрудно убедиться, что минимальное собственное значение этих матриц $\lambda_{22\,\min} = a_2^0 - |a_2|$.

Замечание 2.2. Немного увеличив область Q, можно построить область Ω такую, что $\bar{Q} \subset \Omega$, при этом матрицы R_{ijs} для Ω не изменятся, следовательно, $R_{ijs} = A_{ijs}$.

Для оператора $A_R^a u = -\left(R_{11Q}^a u_{x_1}\right)_{x_1} - \left(R_{22Q}^a u_{x_2}\right)_{x_2}$ матрицы K_s из формулы (2.12) примут вид

$$K_s = R_{11s}^a \xi_1^2 + R_{22s}^a \xi_2^2 - E(k_1 \xi_1^2 + k_2 \xi_2^2) = (R_{11s}^a - Ek_1)\xi_1^2 + (R_{22s}^a - Ek_2)\xi_2^2, \; s = 1, \ldots, 4. \quad (2.19)$$

Если в формуле (2.19) положить $k_1 = \lambda_{11\,\min}$, $k_2 = \lambda_{22\,\min}$, то построенные матрицы K_s для всех $s = 1, \ldots, 4$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$ будут неотрицательно определены. В силу теоремы 2.3

$$(\tilde{A}_R^a u, u) = \left(R_{11Q}^a u_{x_1}, u_{x_1}\right)_{L_2(Q)} + \left(R_{22Q}^a u_{x_2}, u_{x_2}\right)_{L_2(Q)} - \lambda_{11\,\min}(u_{x_1}, u_{x_1})_{L_2(Q)} - \lambda_{22\,\min}(u_{x_2}, u_{x_2})_{L_2(Q)} \geqslant 0. \quad (2.20)$$

Введем контрольный оператор $A_R^C u = -2\left(R_{12Q}^b u_{x_1}\right)_{x_2} - \lambda_{11\,\min} u_{x_1 x_1} - \lambda_{22\,\min} u_{x_2 x_2}$ и получим условия его сильной эллиптичности.

Построим разбиение $\Re_0^b$ области Q на подобласти $G_{\alpha k}$. Это разбиение состоит из 2-х классов подобластей (см. рис. 4).

Первый класс: $G_{11} = (0;\theta) \times (0;\theta)$, $G_{12} = (\tau;1{,}9) \times (\tau;1{,}9)$. Здесь $\theta = 1{,}9 - \tau$. На этом классе областей действию оператора R_{12Q}^b соответствует умножение на матрицу

$$R_{12\alpha}^b = \begin{pmatrix} 0 & b_\tau \\ b_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = b_\tau$, $\lambda_2 = -b_\tau$. Второй класс состоит из одной области $G_{21} = Q \backslash ((\bar{G}_{11} \cup \bar{G}_{12}) \cap Q)$. Ему соответствует умножение на матрицу $R^b_{12\alpha} = (0)$, $\alpha = 2$.

Минимальное собственное значение всех этих матриц $\lambda_{12\min} = -|b_\tau|$. Замечание 2.2 для этого случая также справедливо.

Выпишем матрицы $K_\alpha = 2R^b_{12\alpha}\xi_1\xi_2 + \lambda_{11\min}\xi_1^2 E + \lambda_{22\min}\xi_2^2 E$ для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = 1, 2$:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11\min}\xi_1^2 + \lambda_{22\min}\xi_2^2 & 2b_\tau\xi_1\xi_2 \\ 2b_\tau\xi_1\xi_2 & \lambda_{11\min}\xi_1^2 + \lambda_{22\min}\xi_2^2 \end{pmatrix}, \ K_2 = \left(\lambda_{11\min}\xi_1^2 + \lambda_{22\min}\xi_2^2\right).$$

Эти матрицы положительно определены, если $\lambda_{11\min}\xi_1^2 + \lambda_{22\min}\xi_2^2 > 2|b_\tau|\xi_1\xi_2$ для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$. Это неравенство выполняется, если $\lambda_{11\min}\lambda_{22\min} - b_\tau^2 > 0$, $\lambda_{11\min} > 0, \lambda_{22\min} > 0$. Подставив значения $\lambda_{11\min}, \lambda_{22\min}$, получим

$$\begin{aligned} &(a_1^0 - |a_1|)(a_2^0 - |a_2|) - (b_\tau)^2 > 0, \\ &a_1^0 - |a_1| > 0, \quad a_1^0 - |a_1| > 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Условия (2.21) в силу теоремы 2.3 являются достаточными условиями сильной эллиптичности оператора A_R. Сравним полученные условия с достаточным условием сильной эллиптичности, сформированным на основе символа $A_R(\xi) = \sum\limits_{k,j=1}^{n} \sum\limits_{h \in M^1 \cup M^2} a_{kjh} \exp(i(h,\xi))\xi_k\xi_j$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ дифференциально-разностного оператора A_R (см. [6]).

Квадратичная форма

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_R(\xi) = (a_1^0 + 2a_1\cos\xi_1)\xi_1^2 + (a_2^0 + 2a_2\cos\xi_2)\xi_2^2 + 4b_\tau\cos\tau(\xi_1 + \xi_2)\xi_1\xi_2 \geqslant \\ \geqslant (a_1^0 - 2|a_1|)\xi_1^2 + (a_2^0 - 2|a_2|)\xi_2^2 - 4|b_\tau|\xi_1\xi_2 \end{aligned}$$

является положительно определенной, если

$$\begin{aligned} &(a_1^0 - 2|a_1|)(a_2^0 - 2|a_2|) - 4(b_\tau)^2 > 0, \\ &a_1^0 - 2|a_1| > 0, \quad a_1^0 - 2|a_1| > 0, \end{aligned}$$

и эти условия будут достаточными условиями сильной эллиптичности оператора A_R (см. [6, пример 8.1]). Очевидно, что последние условия грубее, чем условия (2.21).

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.22}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{2.23}$$

Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей, $f \in L_2(Q)$. Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$; $R = R^1 + R^2$ — разностные операторы $R^1 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M^1} a_h(u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_h \in \mathbb{R}), \tag{2.24}$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M^2} b_p(u(x+p) + u(x-p)) \quad (b_p \in \mathbb{R}). \tag{2.25}$$

Здесь M^k $(k = 1, 2)$ — множества векторов с соизмеримыми координатами, при этом координаты векторов из множества M^2 несоизмеримы с координатами векторов из множества M^1.

Эта краевая задача впервые рассмотрена в работе [7] и является частным случаем задачи (2.1)-(2.2). Получим условия сильной эллиптичности уравнения (2.22), выраженные в коэффициентах разностных операторов R^1, R^2. Для этого исследуем условия положительной определенности оператора R_Q с несоизмеримыми сдвигами аргументов.

Введем операторы $R^i_Q = P_Q R^i I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $i = 1, 2$.

Для исследования оператора R^1_Q применим метод, изложенный в разделе 1. Построим разбиение $\Re^1_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе. Каждый класс s состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sk}. В силу формулы (1.3) оператор $R^1_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R^1_s = U_s R^1_Q U_s{}^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_s^1 порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km} матрицы R_s^1 вычисляются по формуле

$$r_{km} = \begin{cases} a_h \ (h = h_{sm} - h_{sk} \in M^1), \\ 0 \ (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M^1). \end{cases} \tag{2.26}$$

Обозначим через $\lambda_{\min}$ минимальное собственное значение всего семейства матриц $R^1_{s_\nu}(\nu = 1, \ldots, n_1)$. Тогда в силу леммы 1.1

$$(R_Q^1 u, u)_{L_2(Q)} \geqslant \lambda_{\min}(u, u)_{L_2(Q)} \quad (\ \forall u \in L_2(Q)). \tag{2.27}$$

Введем в рассмотрение контрольные операторы $R^C : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^C = R^2 + \lambda_{\min} I$, $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $I : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — тождественный оператор.

Теорема 2.5. *Если контрольный оператор R_Q^C положительно определен, то оператор R_Q также положительно определен.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным, т. е.

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1(u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)). \tag{2.28}$$

Тогда в силу неравенств (2.27), (2.28),

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} = ((R_Q^1 + R_Q^2)u, u)_{L_2(Q)} = ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u) + (\lambda_{\min} I u + R_Q^2)u, u)_{L_2(Q)} =$$
$$= ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u), u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1(u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)).$$

□

Замечание 2.3. Так как оператор R_Q^C в силу построения содержит только соизмеримые сдвиги, для исследования его положительной определенности можно применить тот же метод разбиения области Q и свести исследование спектра оператора R_Q^C к оценке спектра конечного числа соответствующих ему матриц.

Из [6, теорема 10.1] получим следующую теорему.

Теорема 2.6. *Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным. Тогда уравнение* (2.22) *является сильно эллиптическим в Q, и для любой функции $f \in L_2(Q)$ краевая задача* (2.22)-(2.23) *имеет единственное решение $u \in \mathring{H}(Q)$.*

Пример 2.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.29}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{2.30}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = (0; 2{,}4) \times (0; 1) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$Ru(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)) + a_1(u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2))$$

и содержит два соизмеримых сдвига $h_1 = (1, 0)$, $h_2 = (2, 0)$.

Для оператора R_Q разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс: $Q_{11} = (0; 0{,}4) \times (0; 1)$, $Q_{12} = (1; 1{,}4) \times (0; 1)$, $Q_{13} = (2; 2{,}4) \times (0; 1)$. Второй класс: $Q_{21} = (0{,}4; 1) \times (0; 1)$, $Q_{22} = (1{,}4; 2) \times (0; 1)$. Действию оператора R_Q на первом классе подобластей в силу формулы (2.26) соответствует умножение на матрицу R_1:

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_0 - a_1$, $\lambda_3 = a_0 + 2a_1$.

Второму классу областей соответствует умножение на матрицу R_2:

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_4 = a_0 - a_1,\ \lambda_5 = a_0 + a_1$.

Условия одновременной положительной определенности обеих матриц:

$$a_0 - |a_1| > 0,\ a_0 + 2a_1 > 0. \tag{2.31}$$

При выполнении этих условий в силу теоремы 2.6 уравнение (2.29) является сильно эллиптическим, и решение краевой задачи (2.29)-(2.30) существует и единственно.

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения

$$-\Delta(R_Q^\tau u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.32}$$

с разностным оператором

$$R^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+\tau, x_2) + u(x_1-\tau, x_2)) + a_1(u(x_1+2, x_2) + u(x_1-2, x_2)).$$

Здесь $\tau = 1+\varepsilon$, ε — малый параметр, $|\varepsilon| < 0{,}2$. Сдвиги $h_1^\tau = (\tau, 0)$, $h_2 = (2,0)$ становятся несоизмеримыми. Уравнение (2.32) для уравнения (2.29) является возмущенным относительно сдвигов аргументов.

Построим разбиение $\Re^\tau$ области Q для оператора $R_Q^\tau : L_2(Q) \to L_2(Q),\ R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q$. Разностный оператор $R^\tau : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$

$$R^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+\tau, x_2) + u(x_1-\tau, x_2))$$

содержит сдвиги $\pm h_1^\tau = \pm(\tau, 0)$.

Обозначим $\theta = 2{,}4 - 2\tau > 0$. Разбиение $\Re^\tau$ состоит из двух классов областей. Первый класс: $Q_{11}^\tau = (0,\theta) \times (0,1),\ Q_{12}^\tau = (\tau, \tau+\theta) \times (0,1),\ Q_{13}^\tau = (2\tau, 2{,}4) \times (0,1)$. Действию оператора R_Q^τ на этом классе соответствует умножение на матрицу R_1^τ:

$$R_1^\tau = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = a_0 - a_1,\ \lambda_{2,3} = a_0 \pm \sqrt{2} a_1$.

Второй класс областей: $Q_{21}^\tau = (\theta, \tau) \times (0,1),\ Q_{22}^\tau = (\tau+\theta, 2{,}4) \times (0,1)$; действию оператора R_Q^τ на этом классе соответствует умножение на матрицу

$$R_2^\tau = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{4,5} = a_0 \pm a_1$. Минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \min\limits_{i=1,\ldots,5} \lambda_i = a_0 - \sqrt{2}|a_1|$.

Введем разностный оператор $\tilde{R}^\tau : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\tilde{R}^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+\tau, x_2) + u(x_1-\tau, x_2)) - \lambda_{\min} u(x)$$

и оператор $\tilde{R}_Q^\tau = P_Q \tilde{R}^\tau I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. В силу построения и леммы 1.1 оператор $\tilde{R}_Q^\tau$ является неотрицательно определенным.

Сформируем контрольный оператор R^C:

$$\begin{aligned} R^C u(x) &= \lambda_{\min} u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+2, x_2) + u(x_1-2, x_2)) = \\ &= (a_0 - \sqrt{2}|a_1|) u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+2, x_2) + u(x_1-2, x_2)) \end{aligned}$$

и оператор $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Оператор R_Q^τ разбивается на сумму операторов $R_Q^\tau = \tilde{R}_Q^\tau + R_Q^C$. В силу теоремы 2.5, если оператор R_Q^C является положительно определенным, то и оператор R_Q^τ будет положительно определен. Исследуем условия положительной определенности оператора R_Q^C. Этому оператору соответствует разбиение области Q на два класса подобластей. Первый класс подобластей: $G_{11} = (0; 0{,}4) \times (0,1)$, $G_{12} = (2; 2{,}4) \times (0,1)$. Действию оператора R_Q^C на этом классе соответствует умножение на матрицу R_1^C:

$$R_1^C = \begin{pmatrix} a_0 - \sqrt{2}|a_1| & a_1 \\ a_1 & a_0 - \sqrt{2}|a_1| \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_0 - \sqrt{2}|a_1| \pm a_1$.

Второй класс состоит из одной области $G_{21} = (0{,}4; 2) \times (0, 1)$. Этому классу соответствует умножение на константу $a_0 - \sqrt{2}|a_1|$. В силу леммы 1.1 необходимым и достаточным условием положительной определенности оператора R_Q^C является условие положительной определенности матрицы R_1^C, а именно

$$a_0 - (\sqrt{2} + 1)\,|a_1| > 0. \tag{2.33}$$

При выполнении условия (2.33) в силу теоремы 2.6 уравнение (2.32) является равномерно по $\tau \in (0{,}8; 1{,}2)$ сильно эллиптическим, и для любого τ из этого интервала существует решение $u_\tau \in \mathring{H}(Q)$ краевой задачи для уравнения (2.32). Используя условие равномерной по τ сильной эллиптичности уравнения (2.32), методами, изложенным в работе [5], можно доказать, что решение $u_\tau \to u_1$ при $\tau \to 1$ в норме пространства $\mathring{H}(Q)$. Здесь u_1 — решение краевой задачи для уравнения (2.32) при $\tau = 1$. Таким образом, условие (2.33) гарантирует устойчивость решения задачи (2.29), (2.30) относительно малых возмущений сдвигов аргумента. В то же время, условие (2.31) гарантирует существование решения только исходной (невозмущенной) задачи с соизмеримыми сдвигами аргументов, при этом возмущенные задачи могут не иметь решений, т. е. исходная задача является неустойчивой относительно сдвигов аргументов.

Если для проверки равномерной сильной эллиптичности уравнения (2.32) использовать символ $A_R(\xi) = (a_0 + 2a_1(\cos(\tau\xi_1) + \cos(2\xi_1))(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, то достаточным условием будет $a_0 - 4|a_1| > 0$ (см. [8, теорема 9.4]).

Автор выражает благодарность Л. Е. Россовскому и А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и полезные обсуждения ее результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е. П.* О максимальном разбиении области и о гладкости решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Деп. в ВИНИТИ. — 1981. — № 297-81. — С. 1–14.
2. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *59*. — С. 74–96.
3. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1995.
4. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975.
5. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
6. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
7. *Ivanova E. P.* Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Euras. Math. J. — 2016. — *7*, № 3. — С. 33–40.
8. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
9. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 2. — С. 261–278.

Е. П. Иванова

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра дифференциальных уравнений

E-mail: elpaliv@yandex.ru

UDC 517.929

On Coercivity of Differential-Difference Equations with Incommensurable Shifts of Arguments

© 2016 **E. P. Ivanova**

Abstract. Изучаются краевые задачи на ограниченных областях для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах. Получены условия равномерной относительно сдвигов аргументов сильной эллиптичности таких уравнений.

REFERENCES

1. E. P. Ivanova, “O maksimal’nom razbienii oblasti i o gladkosti resheniy kraevykh zadach dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [On maximal partition of domains and smoothness of solutions of boundary-value problems for elliptic differential difference equations], *Submitted to VINITI*, 1981, No. 297-81, 1–14.
2. E. P. Ivanova, “Nepreryvnaya zavisimost’ resheniy kraevykh zadach dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy ot sdvigov argumenta” [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96.
3. G. A. Kamenskiy and A. L. Skubachevskiy, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1995.
4. A. Kofman, *Vvedenie v prikladnuyu kombinatoriku* [Introduction to Applied Combinatorics], Nauka, Moscow, 1975.
5. L. E. Rossovskiy, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138.
6. A. L. Skubachevskiy, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112.
7. E. P. Ivanova, “Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments,” *Euras. Math. J.*, 2016, **7**, No. 3, 33–40.
8. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
9. A. L. Skubachevskii, “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics,” *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.

E. P. Ivanova
Department of Applied Mathematics, RUDN University, Moscow, Russia
Department of Differential Equations, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: elpaliv@yandex.ru