Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 72–84

УДК 517.956.41

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2016 г. **В. Н. ДЕНИСОВ**

Аннотация. Исследуются достаточные условия стабилизации к нулю решений задачи Коши для линейного параболического уравнения второго порядка с растущими старшими коэффициентами и с начальными функциями степенного роста на бесконечности.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В полупространстве $\overline{D} = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$ при $N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L_1 u \equiv Lu + c(x,t)u - u_t = 0, \quad (x,t) \in D, \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t) u_{x_i x_k}. \tag{1.3}$$

Предполагается, что:

1. Коэффициенты уравнения (1.1) действительны, $a_{ik} = a_{ki}$ $(i,k = 1,\ldots,N)$ и существуют положительные постоянные λ_0, λ_1 такие, что

$$\lambda_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x,t)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2 b(|x|)|\xi|^2 \tag{1.4}$$

для всех $(x,t) \in D$, где

$$b(|x|) = \max(1, |x|^\alpha), \tag{1.5}$$

$$0 \leqslant \alpha < 2. \tag{1.6}$$

Из условий (1.4)–(1.6) следует, что старшие коэффициенты уравнения (1.1) растут на бесконечности как $|x|^\alpha, 0 \leqslant \alpha < 2$.

2. Коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны в D и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти D_1 области D.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-00471).

3. Коэффициент $c(x,t)$ неположителен в D и удовлетворяет следующему условию: найдутся постоянные α из неравенства (1.6), $\beta > 0$, такие, что
$$c(x,t) \leqslant -\beta^2 \min(1, |x|^{-2+\alpha}) \quad \forall (x,t) \text{ в } D. \tag{1.7}$$
4. Начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию роста
$$|u_0(x)| \leqslant M(1+|x|^m), \quad m>0,\ M>0. \tag{1.8}$$

Разрешимость классической задачи Коши (1.1), (1.2) хорошо изучена (см., например [7, 9, 11]).

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) *стабилизируется к нулю* в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$), если существует предел
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{1.9}$$
в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно по x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$).

Стабилизация решения задачи Коши с ограниченными старшими коэффициентами и растущими на бесконечности младшими коэффициентами была изучена в работах [3–6].

Обзор работ по стабилизации решений параболических уравнений см. в работе [2].

В настоящей работе мы изучим точные достаточные условия на коэффициенты уравнения (1.1), которые гарантируют стабилизацию к нулю решения задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условию степенного роста (1.8) и при условии, что старшие коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условию роста (1.4)–(1.6). Мы покажем на примерах неулучшаемость условий стабилизации.

2. Формулировка результатов

Теорема 2.1. *Если начальная функция* $u_0(x)$ (1.2) *удовлетворяет условию степенного роста* (1.8), *старшие коэффициенты уравнения* (1.1) *удовлетворяют условиям* (1.4)–(1.6), *младший коэффициент* $c(x,t)$ *уравнения удовлетворяет условию* (1.7) *при*
$$\beta^2 > \lambda_1^2 m(m+s-2) = \beta_0^2, \tag{2.1}$$
где
$$s = \frac{\lambda_1^2(N-1)+\lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \tag{2.2}$$
то решение задачи Коши (1.1), (1.2) *стабилизируется к нулю, т. е. существует предел* (1.9) *равномерно относительно* x *на каждом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Замечание 2.1. Теорема 2.1 является точной в том смысле, что нельзя в ее утверждении заменить компакт K на все $\mathbb{R}^N$.

Замечание 2.2. В теореме 2.1 неравенство (2.1) является близким к окончательному в том смысле, что выполнение противоположного относительно (2.1) неравенства не влечет за собой стабилизацию к нулю некоторого решения задачи Коши.

3. Некоторые свойства суперрешений эллиптических уравнений в $\mathbb{R}^N$

В области $D = \mathbb{R}^N \times (0,\infty)$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma = \Gamma_\beta(r)$ параболического неравенства
$$L_2\Gamma_\alpha \equiv L(x,t)\Gamma_\beta(r) + a_\beta(r)\Gamma_\beta(r) \leqslant 0, \tag{3.1}$$
где $L(x,t)$ — оператор (1.3) из введения, коэффициент $a_\beta(r)$ в неравенстве (3.1) определен по формуле
$$a_\beta(r) = \begin{cases} -\beta^2 & \text{при } r \leqslant 1, \\ -\dfrac{\beta^2}{r^{2-\alpha}} & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.2}$$
где $0 \leqslant \alpha < 2$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$.

Будем искать решения неравенства (3.1) такие, что
$$\Gamma_\beta(r) > 0, \Gamma'_\beta(r) \geqslant 0, \tag{3.3}$$

и для которых на бесконечности справедлива асимптотика

$$\Gamma_\beta(r) \sim C_1 r^{\delta_1} \text{ при } r \to \infty, \tag{3.4}$$

где $C_1 > 0$, δ_1 является большим корнем уравнения

$$\delta^2 + (s-2)\delta - \overline{\beta^2} = 0, \quad \overline{\beta} = \frac{\beta}{\lambda_1}, \tag{3.5}$$

$$\delta_1 = \frac{-(s-2)+\sqrt{D}}{2}, \quad D = (s-2)^2 + 4\overline{\beta^2}.$$

Применяя к $\Gamma(r)$ формулы дифференцирования:

$$\Gamma'_{x_i} = \frac{x_i}{r}\Gamma', \quad \Gamma''_{x_i x_k} = \frac{x_i \cdot x_k}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big],$$

$$\Gamma_{x_i x_i} = \frac{x_i^2}{r^2}\Big[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r}\Big] + \frac{\Gamma'}{r}, \tag{3.6}$$

будем иметь

$$L_2\Gamma_\beta = Q\Big\{\Big[\Gamma''_\beta - \frac{\Gamma'_\beta}{r}\Big] + \frac{\Gamma'_\beta}{r}\frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}}{Q} + \frac{a_\beta(r)\Gamma_\beta}{Q}\Big\}, \tag{3.7}$$

где $Q = Q(x,t) = \sum\limits_{i,k=1}^N a_{ik}(x,t)\dfrac{x_i x_k}{r^2}$. Из неравенств (1.4)–(1.6) следует, что

$$\lambda_0^2 b(r) \leqslant Q(x,t) \leqslant \lambda_1^2 b(r), \qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^N a_{ii}}{Q} \leqslant \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}. \tag{3.8}$$

При $r \leqslant 1$ справедливо равенство $a_\beta(r) = -\beta^2$, поэтому, учитывая в правой части (3.7) неравенства (3.8), будем иметь:

$$L_2\Gamma_\beta(r) \leqslant Q\Big[\Gamma''_\beta + \Big(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} - 1\Big)\frac{\Gamma'_\beta}{r} - \frac{\beta^2}{\lambda_1^2}\Gamma_\beta\Big]. \tag{3.9}$$

Полагая для краткости $\overline{\beta} = \dfrac{\beta}{\lambda_1}$ и используя обозначение (2.2) и (3.5), рассмотрим для функции $Z_\beta(r)$ задачу

$$Z''_\beta(r) + \frac{(s-1)}{r}Z'_\beta(r) - \overline{\beta}^2 Z_\beta(r) = 0, \tag{3.10}$$

$$Z_\beta(0) = 1, Z'_\beta(0) = 0. \tag{3.11}$$

Положив в правой части (3.9) $\Gamma_\beta(r) = Z_\beta(r)$, где $Z_\beta(r)$ — решение задачи (3.10), (3.11), получим неравенство

$$L_2\Gamma_\beta(r) \leqslant 0, \quad r \leqslant 1, \quad t > 0. \tag{3.12}$$

Из теории функций Бесселя (см. [1]) следует, что решение задачи (3.10), (3.11) существует, единственно и представимо в виде

$$Z_\beta(r) = q_1(s) \cdot \frac{I_{\frac{s-2}{2}}(r\overline{\beta})}{(r\overline{\beta})^{\frac{s-2}{2}}}, \quad q_1(s) = 2^{\frac{s-2}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}), \tag{3.13}$$

где $\Gamma\Big(\dfrac{n}{2}\Big)$ — функция Эйлера (см. [8, т. 2, с. 272]), $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода (см. [1]). Из формулы (3.13) и формул из [1, п. 3.71] следует, что $Z_\beta(r) > 0$ при $r > 0$ и

$$b_0(\beta) = Z_\beta|_{r=1} = q(s)\overline{\beta}^{\frac{2-s}{2}} I_{\frac{s-2}{2}}(\overline{\beta}) > 0, \tag{3.14}$$

$$b_1(\beta) = Z'_\beta|_{r=1} = q(s)\overline{\beta}^{2-\frac{s}{2}} I_{\frac{s}{2}}(\overline{\beta}) > 0 \tag{3.15}$$

в силу формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dr}\frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0. \tag{3.16}$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство $a_\beta(r) = \dfrac{-\beta^2}{r^{2-\alpha}}$, поэтому, учитывая в (3.7) неравенства (3.8), будем иметь

$$L_2\Gamma_\beta \leqslant Q\Big[\Gamma''_\beta + \frac{s-1}{r}\Gamma'_\beta - \frac{\beta^2}{\lambda_1^2 r^2}\Gamma_\beta\Big]. \tag{3.17}$$

Рассмотрим для функции $y_\beta(r)$ при $r \geqslant 1$ задачу

$$y''_\beta(r) + \frac{s-1}{r}y'_\beta(r) - \overline{\beta}^2 y_\beta(r) r^{-2} = 0, \quad r > 1, \tag{3.18}$$

$$y_\beta(1) = b_0(\beta), \quad y'_\beta(1) = b_1(\beta), \tag{3.19}$$

где $b_0(\beta)$ и $b_1(\beta)$ — значения функции (3.13) и ее производной по r при $r = 1$, определенные формулами (3.14) и (3.15) соответственно. Будем искать решение задачи (3.18), (3.19) в виде $y_\beta(r) = r^\delta$, так как уравнение (3.18) представляет собой уравнение Эйлера (см. [10]). Получим при этом определяющее уравнение (3.5), которое имеет корни

$$\delta_1 = \frac{-(s-2)+\sqrt{D}}{2} > 0, \quad \delta_2 = \frac{-(s-2)-\sqrt{D}}{2} < 0, \quad D = (s-2)^2 + 4\overline{\beta}^2. \tag{3.20}$$

Решение задачи (3.18), (3.19) имеет вид

$$y_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1} + C_2 r^{\delta_2}, \tag{3.21}$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из условий (3.19), т. е. из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = b_0(\beta), \\ C_1\delta_1 + C_2\delta_2 = b_1(\beta). \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Решение задачи* (3.18), (3.19) *обладает следующими свойствами*:

1. $y_\beta(r) > 0$, $r > 1$,
2. $y'_\beta(r) > 0$, $r \geqslant 1$,
3. $\lim\limits_{t\to\infty} y_\beta(r) = +\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (3.18) в самосопряженном виде:

$$\frac{d}{dr}(r^{s-1}\frac{dy_\beta(r)}{dr}) = \overline{\beta}^2 r^{s-3} y_\beta(r), \quad r > 1.$$

Дважды проинтегрируем последнее уравнение по r от 1 до r и учтем при этом условия (3.19). При этом получим

$$\frac{dy_\beta(r)}{dr} = \frac{b_1(\beta)}{r^{s-1}} + \frac{\overline{\beta}^2}{r^{s-1}}\int\limits_0^r \tau^{s-3} y_\beta(\tau)d\tau, \tag{3.22}$$

$$y_\beta(r) = b_0(\beta) + b_1(\beta)\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau + \overline{\beta}^2\int\limits_1^r \tau^{1-s}d\tau \int\limits_1^\tau y_\beta(\xi)\xi^{s-3}d\xi. \tag{3.23}$$

В силу положительности $b_0(\beta)$ и $b_1(\beta)$ и непрерывности функции $y_\beta(r)$ правая часть равенства (3.23) является положительной в достаточно малой правой окрестности $r = 1$, т. е. при достаточно малом $r - 1 > 0$. Докажем, что правая часть (3.23) остается положительной при всех $r - 1 > 0$. Предположим противное, тогда при некотором $r = r_1 > 1$ функция $y_\beta(r)$ обратится в ноль (первый ноль $y_\beta(r)$ при $r = r_1 > 1$). Тогда из (3.23) при $r = r_1$ получим

$$y_\beta(r_1) = 0 = b_0(\beta) + b_1(\beta)\int\limits_1^{r_1} \tau^{1-s}d\tau + \overline{\beta}^2\int\limits_1^{r_1} \tau^{1-s}d\tau \int\limits_1^\tau y_\beta(\xi)\xi^{s-3}d\xi. \tag{3.24}$$

Так как при $1 \leqslant \xi \leqslant r_1$, $s > 1$ имеем $y_\beta(r) > 0$, то очевидно, что правая часть (3.24) является положительной. Полученное противоречие доказывает, что $y_\beta(r) > 0$ при всех $r > 1$.

Утверждение 1 леммы 3.1 доказано.

Из (3.22) и положительности $y_\beta(r) > 0$ при всех $r > 1$ тогда следует, что

$$\frac{dy_\beta(r)}{dr} > 0, \quad r > 1. \tag{3.25}$$

Утверждение 2 леммы 3.1 доказано. Из равенства (3.23) тогда следует, что $y_\beta(r) \geqslant b_0(\beta) > 0$ при $r \geqslant 1$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (см. [8, т. 1, с. 358]) и используя при этом равенство (3.22) и неравенство $y_\beta(r) \geqslant b_0(\beta)$ при $r \geqslant 1$, получим

$$y_\beta(r) - y_\beta(1) = \int\limits_1^r \frac{dy_\beta(\tau)}{d\tau} d\tau = b_1(\beta) \int\limits_1^r \tau^{1-s} d\tau + \overline{\beta}^2 \int\limits_1^r \tau^{1-s} d\tau \int\limits_1^\tau y_\beta(\xi)\xi^{s-3} d\xi >$$

$$> \overline{\beta}^2 b_0(\beta) \int\limits_1^r \tau^{1-s} ds \int\limits_1^\tau \xi^{s-3} d\xi = \frac{\overline{\beta}^2 b_0(\beta)}{(s-2)} \int\limits_1^r \tau^{1-s}(\tau^{s-2} - 1) d\tau =$$

$$= \frac{\overline{\beta}^2 b_0(\beta)}{(s-2)} \Big[\ln r - \frac{r^{2-s} - 1}{2-s} \Big] \to +\infty,$$

при $r \to +\infty$, так как

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} > N > 2.$$

Утверждение 3 леммы 3.1 доказано.

Лемма 3.1 доказана. □

Положим в (3.16) $\Gamma_\beta(r) = y_\beta(r)$, где $y_\beta(r)$ — решение задачи (3.18), (3.19), и получим неравенство

$$L_2\Gamma_\beta(r) \leqslant 0, \quad r \geqslant 1, \ t > 0. \tag{3.26}$$

Нами определена функция

$$\Gamma_\beta(r) = \begin{cases} Z_\beta(r) & \text{при } r \leqslant 1, \\ y_\beta(r) & \text{при } r \geqslant 1, \end{cases} \tag{3.27}$$

где $Z_\beta(r)$ — решение задачи (3.10), (3.11), $y_\beta(r)$ — решение задачи (3.18), (3.19).

Очевидно, что функция (3.27) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ справедливы «условия склейки» из (3.19):

$$Z_\beta(1) = y_\beta(1) = b_0(\beta), \quad Z'_\beta(1) = y'_\beta(1) = b_1(\beta). \tag{3.28}$$

Поэтому из непрерывности функции $\Gamma_\beta(r)$ при $r = 1$ и непрерывности $\Gamma'_\beta(r)$ при $r = 1$, вытекающих из «условий склейки» (3.28) и из непрерывности коэффициентов уравнений (3.10) и (3.18) при $r = 1$, получаем, что

$$Z''_\beta(1) = y''_\beta(1).$$

Покажем, что функция (3.27) является суперэллиптической.

Лемма 3.2. *Функция* (3.27) *обладает следующими свойствами*:

1. $L_2\Gamma_\beta(r) \leqslant 0$ *при* $r \geqslant 0$, $t > 0$;
2. $\Gamma_\beta(r_1) > \Gamma_\beta(r_2)$ *при* $r_1 > r_2$.

Доказательство. Из неравенств (3.12) и (3.26) вытекает, что функция (3.27) удовлетворяет свойству 1 леммы 3.2.

Свойство 2 при $r \leqslant 1$ непосредственно вытекает из (3.13) и (3.16), а при $r \geqslant 1$ — из утверждения 2 леммы 3.1.

Лемма 3.2 доказана. □

Докажем, что функция (3.27) является монотонно возрастающей функцией параметра β и растет на бесконечности как $C_1 r^{\delta_1}$, где δ_1 — больший корень уравнения (3.5).

Лемма 3.3. *Для функции* (3.27) *имеют место следующие свойства*:

1. $\Gamma_{\beta_1}(r) > \Gamma_{\beta_2}(r)$ *при* $\beta_1 > \beta_2$, $r > 0$;

2. $\Gamma_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1}(1+\varepsilon(r)),\ \lim\limits_{r\to\infty}\varepsilon(r) = 0$.

Доказательство. Докажем свойство 1.

Пусть $\beta_1 > \beta_2$. При $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ определим по формуле (3.27) функции $\Gamma_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r)$ и рассмотрим выражение

$$W(r) = r^{s-1}[\Gamma'_{\beta_1}(r)\Gamma_{\beta_2}(r) - \Gamma_{\beta_1}(r)\Gamma'_{\beta_2}(r)]. \tag{3.29}$$

Дифференцируя функцию $W(r)$ по r и учитывая, что при $r \leqslant 1$ функции $\Gamma_{\beta_1}(r) = Z_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r) = Z_{\beta_2}(r)$ удовлетворяют уравнению (3.10) при $\beta = \beta_2$ и $\beta = \beta_1$ соответственно, а при $r \geqslant 1$ функции $\Gamma_{\beta_1}(r) = y_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r) = y_{\beta_2}(r)$ удовлетворяют уравнению (3.18) при $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ соответственно, получим

$$W'(r) = \frac{s-1}{r}W(r) + r^{s-1}[\Gamma''_{\beta_1}\Gamma_{\beta_2} - \Gamma_{\beta_1}(r)\Gamma''_{\beta_2}(r)] =$$

$$= \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{s-1}{r}W(r) - \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2}\Gamma_{\beta_1}(r)\Gamma_{\beta_2}(r)(C_{\beta_1}(r) - C_{\beta_2}(r)) > 0, \tag{3.30}$$

где

$$C_{\beta_1}(r) = -\overline{\beta}_1^2\min(1, r^{-2}), \quad C_{\beta_2}(r) = -\overline{\beta}_2^2\min(1, r^{-2}). \tag{3.31}$$

Так как $W(0) = 0$, то из (3.30) следует неравенство $W(r) > 0$ при $r > 0$. Следовательно,

$$\Big(\frac{\Gamma_{\beta_1}(r)}{\Gamma_{\beta_2}(r)}\Big)' = \frac{W(r)}{r^{s-1}\Gamma^2_{\beta_2}(r)} > 0 \text{ при } r > 0, \beta_1 > \beta_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что

$$\frac{\Gamma_{\beta_1}(0)}{\Gamma_{\beta_2}(0)} = 1,$$

получим

$$\frac{\Gamma_{\beta_1}(r)}{\Gamma_{\beta_2}(r)} - 1 = \int\limits_0^r \frac{W(\tau)d\tau}{\tau^{s-1}\Gamma^2_{\beta_2}(\tau)} > 0.$$

Свойство 1 леммы 3.3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу 2 из леммы 3.3. Из представления (3.21) решения задачи (3.18), (3.19) при $r \to \infty$ будем, очевидно иметь

$$\Gamma_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1}[1 + \frac{C_2}{C_1}r^{\delta_2-\delta_1}] = C_1 r^{\delta_1}[1+\varepsilon(r)],$$

где

$$\varepsilon(r) = \frac{C_2}{C_1}r^{\delta_2-\delta_1} = \frac{C_2}{C_1}r^{-\sqrt{D}} \to 0, \quad \text{при} \;\; r \to \infty,$$

$$D = (s-2)^2 + 4\overline{\beta}^2,$$

где δ_1, δ_2 — корни (3.20) уравнения (3.5).

Докажем, что постоянная C_1 в (3.21) является положительной. В самом деле, если бы это было не так, т. е. $C_1 < 0$, то из (3.21) мы получили бы, что

$$\Gamma_\beta(r) \to -\infty \quad \text{при} \;\; r \to \infty,$$

что приводит к противоречию в силу свойства 3 из леммы 3.1. Свойство 2 доказано.

Лемма 3.3 доказана. □

4. О стабилизации суперрешений параболических уравнений

Пусть при $\beta > 0$ определена функция

$$a_\beta(r) = \begin{cases} -\beta^2, & r \leqslant 1, \\ \dfrac{-\beta^2}{r^{2-\alpha}}, & r \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha < 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Рассмотрим эллиптический оператор

$$L_2 V = L(x,t)V + a_\beta(r)V, \tag{4.2}$$

где $L(x,t)$ — оператор (1.3) из введения, для которого выполнены условия (1.4)–(1.6).

Лемма 4.1. *Для любого $R > 1$, $\beta > 0$ найдется постоянная $A_0(R,\beta) > 0$ такая, что при $A \geqslant A_0$ и $\lambda = e^{-A}$ для функции*

$$V(r) = 1 - \exp\Big[A\Big(\frac{r^2}{4R^2} - 1\Big)\Big], \quad 0 \leqslant r \leqslant 2R, \tag{4.3}$$

справедливо неравенство

$$L_2 V(r) + \lambda V(r) < 0, \quad r < R. \tag{4.4}$$

Для функции

$$P(x,t) = V(r)e^{-\lambda t}, \tag{4.5}$$

где $V(r)$ — функция (4.3)*, выполняются следующие соотношения*:

$$L_2 P(x,\, t) - P_t(x,\, t) \leqslant 0, \quad |x| < R,\ t > 0, \tag{4.6}$$

$$P(x,\, t)|_{|x|=R} = (1 - e^{-\frac{3A}{4}})e^{-\lambda t} > 0, \tag{4.7}$$

$$P(x,\, 0) = V(|x|), \quad |x| < R, \tag{4.8}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(x,\, t) = 0 \tag{4.9}$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $|x| < R$.

Доказательство. Докажем только неравенство (4.4), так как соотношения (4.6)–(4.9) после этого очевидны.

Проводя вычисления, будем иметь

$$L_2 V + \lambda V = -\psi \frac{A^2}{4R^4} \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}x_i x_k - \psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + a_\beta(r)V(r) + \lambda v(r), \tag{4.10}$$

где $\psi(r) = \exp\Big[A\Big(\dfrac{r^2}{4R^2} - 1\Big)\Big] > 0$.

Отбрасывая в правой части (4.10) слагаемые

$$-\psi \frac{A^2}{4R^4} \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ik}x_i x_k < 0, \quad -\psi \frac{A^2}{2R^4} \sum_{i,\,k=1}^{N} a_{ii} < 0,$$

будем иметь в шаре $|x| < R$ неравенство

$$L_2 V + \lambda V < \psi(r)\left[V(r)a_\beta(r)\exp\left[A\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)\right] + \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right)V(r)\right]. \tag{4.11}$$

Обозначим

$$K_1(r) = V(r)a_\beta(r)\exp\left[A\left(1 - \frac{r^2}{4R^2}\right)\right] + \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right)V(r). \tag{4.12}$$

При $1 \leqslant r \leqslant R$ учтем в (4.12) неравенства

$$\frac{\beta^2}{r^{2-\alpha}} \leqslant \beta^2, \quad \frac{-\beta^2}{r^{2-\alpha}} \leqslant \frac{-\beta^2}{R^{2-\alpha}}, \quad \exp\left(-A\frac{r^2}{4R^2}\right)V(r) \leqslant 1$$

и получим

$$K_1(r) \leqslant \beta^2 + 1 - \frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}}e^{\frac{3A}{4}}. \tag{4.13}$$

Выберем A_0 из условия
$$\frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}}\exp\Big(\frac{3}{4}A_0\Big) > \beta^2+1. \tag{4.14}$$
При $A \geqslant A_0$ из (4.13) и (4.14) следует, что
$$K_1(r) < 0 \ \text{ при } \ 1 \leqslant r \leqslant R. \tag{4.15}$$
При $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $A \geqslant A_0$ для всех $K_1(r)$ в силу (4.14) имеет место оценка
$$K_1(r) \leqslant \beta^2+1-\alpha^2\exp\Big(\frac{3}{4}A\Big) \leqslant \beta^2+1-\frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}}\exp\Big(\frac{3}{4}A\Big). \tag{4.16}$$
Из неравенств (4.11), (4.15), (4.16) следует, что неравенство (4.4) доказано.

Лемма 4.1 доказана. □

5. Доказательство основной теоремы

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Наряду с задачей Коши (1.1), (1.2) рассмотрим задачу Коши
$$L(x,t)W_\beta + a_\beta(r)W_\beta - W_{\beta t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{5.1}$$
$$W_\beta(x,0) = u_1(x), \quad u_1(x) = C_1(1+|x|^m), \tag{5.2}$$
где $a_\beta(r)$ определено по формуле (4.1).

Из принципа максимума (см. [7, п. 1]) элементарно следует неравенство.

Лемма 5.1.
$$|u(x,t)| \leqslant W_\beta(x,t) \quad \text{в } D, \tag{5.3}$$

Рассмотрим задачи Коши
$$L(x,t)W_{\beta_1} + a_{\beta_1}(r)W_{\beta_1} - W_{\beta_1 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{5.4}$$
$$W_{\beta_1}(x,0) = u_1(x), \tag{5.5}$$

$$L(x,t)W_{\beta_2} + a_{\beta_2}(r)W_{\beta_2} - W_{\beta_2 t} = 0 \quad \text{в } D, \tag{5.6}$$
$$W_{\beta_2}(x,0) = u_1(x) \tag{5.7}$$
с одинаковыми начальными функциями (5.2).

Лемма 5.2. *Если $\beta_2 > \beta_1$, то для решений задачи Коши* (5.4), (5.5) *и* (5.6), (5.7) *таких, что*
$$|W_{\beta i}(x,t)| \leqslant M(1+|x|^m), \quad i=1,2$$
в полосе $H_T = \{x \in \mathbb{R}^N, 0 \leqslant t \leqslant T\}, \forall T > 0$ справедливо неравенство
$$W_{\beta_2}(x,t) \leqslant W_{\beta_1}(x,t) \quad \text{в } D, \tag{5.8}$$

Доказательство. Рассмотрим функции $z(x,y) = W_{\beta_2}(x,t) - W_{\beta_1}(x,t)$ и получим, что функция $z(x,t)$ удовлетворяет соотношениям
$$L(x,t)z + a_{\beta_2}z - z_t = W_{\beta_1}(x,t)(a_{\beta_1}(r) - a_{\beta_2}(r)) > 0, \quad z(x,0) = 0 \quad \text{в } D,$$
так как $W_{\beta_1}(x,t) > 0$ и $a_{\beta_1}(r) - a_{\beta_2}(r) > 0$ при $\beta_2 > \beta_1$, то из принципа максимума (см. [7, п. 1]) получим:
$$z(x,t) \leqslant 0 \text{ в полосе } H_T \text{ для } \forall T.$$
Из произвольности $T > 0$ получаем справедливость (5.8) в D.

Лемма 5.2 доказана. □

Лемма 5.3. *Для $m > 0$ и*
$$\beta_0^2 = m(m+s-2)\lambda_1^2 \tag{5.9}$$
существует постоянная $l > 0$ такая, что решение $W_\beta(x,t)$ задачи Коши (5.1), (5.2) *с $\beta^2 = \beta_0^2$ удовлетворяет неравенству*
$$W_{\beta_0}(x,t) \leqslant l\Gamma_{\beta_0}(r), \tag{5.10}$$
где $\Gamma_{\beta_0}(r)$ — функция (3.27) *при $\beta = \beta_0$.*

Доказательство. Пусть
$$a_{\beta_0}(r) = -\beta_0^2 \min(1, r^{-2+\alpha}).$$

Выбрав β_0 из условия $\delta_1(\beta_0) = m > 0$, где $\delta_1(\beta)$ больший корень уравнения (3.5), получим, что β_0^2 удовлетворяет (5.9). Тогда по лемме 3.2 функция (3.27) удовлетворяет равенству
$$\Gamma_{\beta_0}(r) = C_1 r^m (1 + \varepsilon(r)), \quad \lim_{r\to\infty} \varepsilon(r) = 0. \tag{5.11}$$

Не ограничивая общности считаем, что $|\varepsilon(r)| \leqslant 1$ для всех $r \geqslant 0$.

Рассмотрим функцию
$$z(x,t) = l\Gamma_{\beta_0}(r) - V_{\beta_0}(x,t), \tag{5.12}$$
где $\Gamma_{\beta_0}(r)$ — функция (5.11), а $V_{\beta_0}(x,t)$ — решение задачи Коши (5.1), (5.2). Ясно, что функция (5.12) при $\beta^2 = \beta_0^2$ удовлетворяет соотношениям
$$L(x,t)z + a_{\beta_0}(r)z - z_t \leqslant 0 \quad \text{в } D, \tag{5.13}$$
$$z(x,0) = l\Gamma_{\beta_0}(r) - C_1(1 + |x|^m). \tag{5.14}$$

Выберем постоянную $l > 0$ настолько большой, чтобы
$$l\Gamma_{\beta_0}(r) \geqslant C_1(1 + |x|^m). \tag{5.15}$$

Такой выбор $l \geqslant 2$ возможен, так как $C_1 > 0$, а для функции $\Gamma_{\beta_0}(r)$ справедливо равенство (5.11).

В силу соотношений (5.13), (5.14) и (5.15) можем применить принцип максимума (см. [7, п. 1.7]) и получим, что
$$z(x,t) \leqslant 0 \text{ в полосе } H_T \text{ для } \forall T > 0. \tag{5.16}$$

Из произвольности $T > 0$ и из (5.16) следует, что неравенство (5.10) доказано.

Лемма 5.3 доказана. □

Замечание. Так как $\Gamma_\beta(r) \leqslant lr^m$ при $r \geqslant 1$, то неравенство (5.10) можно записать в более простом виде:
$$W_\beta(x,t) \leqslant l(r^m + 1)). \tag{5.17}$$

Лемма 5.4. *Пусть функция $u_1(x)$ определена в* (5.2)*, и $c(x,t)$ удовлетворяет условию* (1.7) *при $\beta^2 > \beta_0^2 = \lambda_1^2 m(m+s-2)$, тогда решение задачи Коши* (5.1), (5.2) *удовлетворяет неравенству*
$$W_\beta(x,t) < C\Gamma_\beta(r), \quad t > 0, \; C > C_1. \tag{5.18}$$

Доказательство. Применяя лемму 5.2 к функциям $W_{\beta_0}(x,t)$ и $W_\beta(x,t)$, где $\beta^2 > \beta_0^2$, и учитывая лемму 5.3, получим доказательство леммы 5.4 с постоянной $C > C_1$. □

Докажем основную теорему. В силу неравенства (5.3) достаточно доказать, что при выполнении условий теоремы решение задачи Коши (5.1), (5.2) имеет предел
$$\lim_{t\to+\infty} W_{\beta_0}(x,t) = 0 \tag{5.19}$$
равномерно относительно x на каждом компакте K в $\mathbb{R}^N$.

Пусть задано $m > 0$. Выберем β_0 из условия, чтобы $\delta_1(\beta_0) = m$. При этом получим равенство
$$\sqrt{(s-2)^2 + 4\overline{\beta}_0^2} = 2m + (s-2),$$
из которого, после возведения в квадрат, получаем
$$\beta_0^2 = \lambda_1^2 m(m+s-2).$$

Пусть теперь β таково, что $\delta_1(\beta) > m$, тогда аналогично получим неравенство $\beta^2 > \beta_0^2$, где β_0^2 из (5.9). В силу леммы 3.3 функция $\Gamma_\beta(r)$, определенная формулой (3.27) при $\beta^2 > \beta_0^2$, имеет на бесконечности больший порядок роста по сравнению с функцией $\Gamma_{\beta_0}(r)$, растущей как $l(r^m + 1)$.

Фиксируем произвольный компакт K в $\mathbb{R}^N$ и выберем $r_1 > 0$ столь большим, чтобы $K \in \overline{B}_{r_1}$. Для фиксированного $m > 0$ найдем функцию $\Gamma_{\beta_0}(r)$ по формуле (3.27). Для $\Gamma_{\beta_0}(r)$ имеет место лемма 5.3 и неравенство (5.17).

При $\beta^2 > \beta_0^2$ в силу леммы 5.4 для решения $W_\beta(x,t)$ задачи Коши (5.1), (5.2) справедливо неравенство (5.18).

При $\beta^2 > \beta_0^2$ в силу леммы 5.2 справедливо неравенство

$$W_\beta(x,t) \leqslant W_{\beta_0}(x,t). \tag{5.20}$$

Рассмотрим функцию

$$z(x,t) = \gamma\Gamma_\beta(r) - W_\beta(x,t). \tag{5.21}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\gamma > 0$ так, чтобы

$$\gamma\Gamma_\beta(r) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |r| \leqslant r_1. \tag{5.22}$$

В силу второй теоремы Вейерштрасса (см. [8, т. 1, с. 174]) такой выбор γ возможен.

В силу неравенств (5.10) и (5.20) получим

$$z(x,t) \geqslant \gamma\Gamma_\beta(r) - W_{\beta_0}(x,t) \geqslant \gamma\Gamma_\beta(r) - l\Gamma_{\beta_0}(r).$$

Так как, по условию выбора β, $\gamma\Gamma_\beta(r)$ растет на бесконечности как $C\gamma|x|^{\delta_1}$, а функция $\gamma\Gamma_{\beta_0}(r)$ имеет порядок роста $l|x|^m$, то существует $R > \max(r_1, |x_0|)$, где $|x_0| = x_0(\lambda_0, \lambda_1, N)$, для которого

$$z(x,t)|_{|x|=R} \geqslant 0 \quad \forall t > 0. \tag{5.23}$$

Функция (5.21) очевидно удовлетворяет соотношениям

$$L(x,t)z + a_\beta(r)z - z_t \leqslant 0, \quad N < R,\ t > 0, \tag{5.24}$$

$$z(x,t)|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{5.25}$$

$$z(x,0) = \gamma\Gamma_\beta(r) - C(1+r^m) \equiv \varphi(r) \quad \text{при } |x| < R. \tag{5.26}$$

Рассмотрим функцию (4.5) при $\lambda = e^{-A}$ из леммы 4.1 и введем новую функцию

$$P_1(x,t) = \frac{A_1}{\gamma_1} p(x,t), \tag{5.27}$$

где

$$A_1 = \max|\varphi(r)| \quad \text{при } r \leqslant R, \quad \gamma_1 = 1 - e^{-A\frac{3}{4}} = V(R), \tag{5.28}$$

$p(x,t)$ — функция (4.5), $\varphi(r)$ — функция (5.26). Заметим, что

$$P_1(x,0) = \frac{A_1}{\gamma_1} \geqslant A_1, \tag{5.29}$$

так как $\gamma_1 \leqslant V(r) \leqslant 1$, где $V(r)$ функция (4.3). Из леммы 4.1 следует, что функция (5.27) удовлетворяет соотношениям

$$LP_1 + a_\beta(r)P_1 - P_{1t} \leqslant 0, \quad |x| < R,\ t > 0, \tag{5.30}$$

$$P_1(x,t)|_{|x|=R} > 0, \quad t > 0, \tag{5.31}$$

$$P_1(x,0) \geqslant A_1 = \max|\varphi(r)| \geqslant 0 \quad \text{при } r \leqslant R \tag{5.32}$$

и существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} P_1(x,t) = 0 \tag{5.33}$$

равномерно по x в шаре $|x| < R$, т. е. для $\forall\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geqslant T$ и всех x, удовлетворяющих $|x| < R$,

$$P_1(x,t) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.34}$$

Рассмотрим функцию

$$q(x,t) = z(x,t) + P_1(x,t), \tag{5.35}$$

где $z(x,t)$ — функция (5.21), а $P_1(x,t)$ — функция (5.27). Ясно, что в силу соотношений (5.24)–(5.26) и (5.30)–(5.32) функция (5.35) удовлетворяет неравенствам:

$$L(x,t)q + a_\beta(r) - q_t \leqslant 0, \quad |x| < R,\ t > 0, \tag{5.36}$$

$$q|_{|x|=R} \geqslant 0, \quad t > 0, \tag{5.37}$$

$$q|_{t=0} \geqslant \varphi(r) + |\varphi(r)| \geqslant 0, \quad r \leqslant R. \tag{5.38}$$

В силу принципа максимума (см. [7]), из (5.36)–(5.38) следует, что справедливо неравенство:

$$q(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при } \ |x| < R,\ t > 0. \tag{5.39}$$

Учитывая формулу (5.21) и неравенство (5.39), можем записать
$$W_\beta(x,t) \leqslant \gamma\Gamma_\beta(r) + P_1(x,t) \quad \text{при} \quad |x| < R,\ t > 0. \tag{5.40}$$
Учитывая при $|x| \leqslant r_1$ неравенство (5.22) и неравенство (5.34) при $t \geqslant T(\varepsilon)$ получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$, такое, что при $t \geqslant T(\varepsilon)$ и всех x, удовлетворяющих $|x| \leqslant r_1$, справедливо неравенство
$$W_\beta(x,t) < \varepsilon. \tag{5.41}$$
Тогда из (5.41) и (5.3) мы получаем, что теорема доказана.

6. Точность условий теоремы

На примере мы покажем, что условие (2.1) в теореме является точным. С этой целью рассмотрим в полупространстве $D = \mathbb{R}^N \times [0,\infty)$, $N \geqslant 3$, задачу Коши
$$b(r)\Delta u + a_\beta(r)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \tag{6.1}$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{6.2}$$
в которой, как и выше в разделах 1 и 2,
$$b(r) = \max(1, r^\alpha), \quad 0 \leqslant \alpha < 2, \tag{6.3}$$
$$a_\beta(r) = -\beta^2 \min(1, r^{\alpha-2}). \tag{6.4}$$
Ясно, что в обозначениях разделов 1 и 2 $\lambda_0^2 = \lambda_1^2 = 1$, $s = N$, так как $L = \Delta$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$.

Далее будем предполагать, что начальная функция $u_0(x)$ является непрерывной в $\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию (1.8).

Лемма 6.1. *Для произвольного $m > 0$ существует непрерывная начальная функция $u_1(x)$, удовлетворяющая условию степенного роста порядка $m > 0$ и коэффициент $a_{\beta_0}(r)$* (6.4)*, удовлетворяющий условию* (1.7) *при $\beta^2 = \beta_0^2$,*
$$\beta_0^2 = m(m+N-2), \tag{6.5}$$
для которых решение соответствующей задачи Коши (6.1), (6.2) *не имеет нулевого предела*
$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0 \tag{6.6}$$
ни в одной точке x пространства $\mathbb{R}^N$.

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^N$ задачу о построении положительного в $\mathbb{R}^N$ решения $\Gamma_{\beta_0}(r)$ уравнения
$$b(r)\Delta\Gamma_{\beta_0}(r) + a_{\beta_0}(r)\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \tag{6.7}$$
имеющего на бесконечности заданный порядок роста $m > 0$.

Переходя к сферическим N-мерным координатам с центром в начале координат, рассмотрим при $r \leqslant 1$ задачу
$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) + \frac{a_{\beta_0}(r)}{b(r)}\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad 0 < r \leqslant 1, \tag{6.8}$$
$$\Gamma_{\beta_0}(0) = 1, \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = 0. \tag{6.9}$$
При $r \leqslant 1$ справедливо равенство $\dfrac{a_{\beta_0}(r)}{b(r)} = -\beta_0^2$. Поэтому задача (6.8), (6.9) имеет вид
$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) - \beta_0^2\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad r \leqslant 1, \tag{6.10}$$
$$\Gamma_{\beta_0}(0) = 1, \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = 0. \tag{6.11}$$
Заметим, что задача (6.10), (6.11) только обозначениями отличается от задачи (3.10), (3.11) из раздела 3. Следует заменить в (3.10), (3.11) S на N и $\overline{\beta}^2$ на β^2.

При этом мы получаем решение задачи (6.10), (6.11) в виде
$$\Gamma_{\beta_0}(r) = q_1(N)\frac{I_{\frac{N-2}{2}}(r\beta_0)}{(r\beta_0)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad q_1(N) = 2^{\frac{N-2}{2}}\Gamma\Big(\frac{N}{2}\Big), \tag{6.12}$$

и это решение положительно и

$$\Gamma_{\beta_0}(1) = q_1(N)\beta_0^{\frac{2-N}{2}} I_{\frac{N-2}{2}}(\beta_0) = b_0(\beta_0) > 0, \tag{6.13}$$

$$\Gamma'_{\beta}(1) = q_1(N)\beta_0^{2-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}}(\beta_0) = b_1(\beta_0) > 0. \tag{6.14}$$

При $r \geqslant 1$ имеет место равенство $a_{\beta_0}(r) = -\dfrac{\beta_0^2}{r^{2-\alpha}}$, поэтому при $r \geqslant 1$ получаем задачу

$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) - \frac{\beta_0^2}{r^2}\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad r > 1, \tag{6.15}$$

$$\Gamma_{\beta_0}(1) = b_0(\beta_0), \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = b_1(\beta_0). \tag{6.16}$$

Задача (6.15), (6.16) только обозначениями отличается от задачи (3.18), (3.19) из раздела 3, при этом следует заменить S на N и $\overline{\beta}^2$ на $\overline{\beta}_0^2$ в (3.18), (3.19), чтобы получить задачу (6.15), (6.16). Поэтому решение задачи (6.15), (6.16) имеет при $r > 1$ вид

$$\Gamma_{\beta_0}(r) = C_1 r^{\delta_1} + C_2 r^{\delta_2}, \tag{6.17}$$

где δ_1, δ_2 — корни уравнения (3.5) при $S = N$, имеющие вид

$$\delta_1 = \frac{-(N-2)+\sqrt{D}}{2} > 0, \quad \delta_2 = \frac{-(N-2)-\sqrt{D}}{2} < 0, \quad D = (N-2)^2 + 4\beta^2. \tag{6.18}$$

Постоянные C_1, C_2 в (6.17) определяются из условий (6.16). Важно, что при этом

$$C_1 > 0. \tag{6.19}$$

Для функции $\Gamma_{\beta_0}(r)$, определяемой формулами (6.12) при $r \leqslant 1$ и (6.18) при $r \geqslant 1$, получаем гладкое решение уравнения (6.7). Выбирая β из условия $\delta_1 = m$, в силу (6.18), (6.19) мы придем к условию $\beta^2 = \beta_0^2$. Тогда $\Gamma_{\beta_0}(r)$ растет на бесконечности как r^m.

Положим в задаче Коши (6.1), (6.2) $u_1(x) = \Gamma_{\beta_0}(r)$ и получим положительное решение задачи

$$u(x,t) = \Gamma_{\beta_0}(r) > 0.$$

Таким образом, решение $u(x,t)$ не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 6.1 доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
2. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени// Усп. мат. наук. — 2005. — *60*, № 4. — С. 145–212.
3. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 61–71.
4. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами в классах растущих начальных функций// Докл. РАН. — 2010. — *430*. — С. 586–588.
5. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного уравнения с растущими коэффициентами// Труды МИАН. — 2010. — *270*. — С. 97–109.
6. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недивергентного параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами// Соврем. мат. и ее прилож. — 2013. — *78*. — С. 17–49.
7. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// Усп. мат. наук. — 1962. — *17*, № 3. — С. 3–141.
8. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. 2. — М.: МГУ, 2004.
9. *Смирнова Г. Н.* Задачи Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности// Мат. сб. — 1966. — *70*, № 4. — С. 591–604.
10. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
11. *Aronson D. G., Besala P.* Parabolic equation with unbounded coefficients// J. Differ. Equ. — 1967. — *3*. — С. 1–14.

Василий Николаевич Денисов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

UDC 517.956.41

On Behavior of Solutions of Parabolic Nondivergent Equations with Increasing Higher-Order Coefficients at Large Values of Time

 V. N. Denisov

Abstract. We investigate sufficient conditions of stabilization to zero for solutions of the Cauchy problem for linear parabolic second-order equation with increasing higher-order coefficients and initial-value functions of power growth rate at infinity.

REFERENCES

1. G. Vatson, *Teoriya besselevykh funktsiy* [Bessel Functions Theory], IL, Moscow, 1949.
2. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On behavior of solutions of parabolic equations at large values of time], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2005, **60**, No. 4, 145–212.
3. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71.
4. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koeffitsientami v klassakh rastushchikh nachal'nykh funktsiy" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients in classes of increasing initial-value functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **430**, 586–588.
5. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo uravneniya s rastushchimi koeffitsientami" [Stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent equations with increasing coefficients], *Trudy MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 97–109.
6. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi mladshimi koeffitsientami" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with increasing lower-order coefficients], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2013, **78**, 17–49.
7. A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik, "Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa" [Linear second-order equations of parabolic type], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1962, **17**, No. 3, 3–141.
8. V. A. Il'in, V. A. Sadovnichiy, and B. Kh. Sendov, *Matematicheskiy analiz. T. 2* [Mathematical Analysis. Vol. 2], MSU, Moscow, 2004.
9. G. N. Smirnova, "Zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy, vyrozhdayushchikhsya na beskonechnosti" [Cauchy problems for parabolic equations degenerating at infinity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, No. 4, 591–604.
10. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985.
11. D. G. Aronson and P. Besala, "Parabolic equation with unbounded coefficients," *J. Differ. Equ.*, 1967, **3**, 1–14.

Vasiliy Denisov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: vdenisov2008@yandex.ru