Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 53–71

УДК 517.929

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2016 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [18, 23], а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [20, 32, 33, 39]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [5, 16, 17]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время существует обширная литература по абстрактным интегродифференциальным уравнениям (см., например, работы [2–14, 21, 29–31, 36–41, 43–45] и цитированную в них литературу). В работах [1–3, 29–31, 36, 44, 45] (см. также цитированную в них литературу) изучались интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение. Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см, например, [4, 7–14, 28, 37, 43]).

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geqslant \varkappa_0 I$ ($\varkappa_0 > 0$), действующий в пространстве H, имеющий компактный обратный. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-14-00592).

©2016 Российский университет дружбы народов

с областью определения $\mathrm{Dom}\,(B)$ $(\mathrm{Dom}\,(A) \subseteq \mathrm{Dom}\,(B))$, неотрицательный, $(Bx,x) \geqslant 0$ для любых $x, y \in \mathrm{Dom}\,(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leqslant \varkappa \|Ax\|$ $(0 < \varkappa < 1)$ для любого $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H.

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \tag{1.2}$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau), \quad Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\nu(\tau), \tag{1.3}$$

где $d\mu$ и $d\eta$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ и η, соответственно. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$0 < \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad 0 < \int_0^\infty \frac{d\nu(\tau)}{\tau} < 1. \tag{1.4}$$

Условие (1.4) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (1.4) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \mathrm{Var}\ \mu|_0^\infty < +\infty, \quad Q(0) = \int_0^\infty d\nu(\tau) \equiv \mathrm{Var}\ \nu|_0^\infty < +\infty, \tag{1.5}$$

тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\inf_{\substack{||x||=1,\\ x\in \mathrm{Dom}(A)}} ((A+B)x, x) > 1. \tag{1.6}$$

Интегродифференциальное уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, где операторы A и B порождаются дифференциальными выражениями

$$A = -\rho^{-1}\mu\left(\Delta u + \frac{1}{3}\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, u)\right), \quad B = -\frac{1}{3}\,\rho^{-1}\lambda \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, u),$$

где $u = \vec{u}(x,t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t)$, $Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.7}$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\mathrm{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (1.7). Условия (1.4) имеет конкретный физический смысл (подробнее см. [18, 23]).

В случае, когда оператор $B = 0$ и самосопряженный положительный оператор A может быть реализован как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0,\pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Другой класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [24, 25]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул (см. [22]).

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1.1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \tag{1.8}$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda+\tau}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\nu(\tau)}{\lambda+\tau}. \tag{1.9}$$

В настоящей работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1.1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [4, 6–14, 43] проводилось подробное исследование задачи (1.1), (1.2) в случае, когда оператор $B = 0$. Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (1.8), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [4, 6, 8–14, 43] подытожены в главе 3 монографии [7].

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [41], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$ вектор-функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, где A_0 — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 2.1 о разрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W^2_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A_0)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время как в работе [41] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leqslant cE$, выполненное с некоторой положительной константой c, выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы $:=$ и $=:$ для введения новых величин.

2. Формулировка результатов

Введем обозначение $A_0 := A + B$. Согласно известному результату (см. [34, с. 361]), оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β.

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} — ограниченные, а оператор A_0^{-1} — компактный.

В самом деле, из условия $\|Bx\| \leqslant \varkappa \|Ax\|$, $0 < \varkappa < 1$, $x \in \mathrm{Dom}\,(A)$, следует, что оператор BA^{-1} допускает ограниченное замыкание в пространстве H и $\left\|BA^{-1}\right\| \leqslant \varkappa < 1$. Следовательно, операторы AA_0^{-1}, BA_0^{-1} являются ограниченными, поскольку $AA_0^{-1} = (I + BA^{-1})^{-1}$, $BA_0^{-1} = BA^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}$ и оператор $A_0^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}$ является компактным.

2.1. Корректная разрешимость. Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|_H^2 + \|A_0 u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geqslant 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$, см. [19, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geqslant 0$ ($A_0 = A + B$), удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (1.2).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (1.5), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 \geqslant 0$, $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 \geqslant \gamma_0$, *что для любого* $\gamma > \gamma_1$ *задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение в пространстве* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)} \leqslant d \left(\left\|f'(t)\right\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2} \varphi_1\right\|_H \right), \tag{2.1}$$

где константа d *не зависит от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [11].

Уместно отметить, что из теоремы 2.3 немедленно вытекает результат о разрешимости задачи (1.1), (1.2) на конечном временном интервале $(0, T)$ в пространстве $W_2^2((0, T), A_0)$ для любого $T > 0$.

Определение 2.2. Будем называть вектор-функцию u *решением почти всюду* для задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W_2^2((0, T), A_0)$ для любого $T > 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальным условиям (1.2).

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие* (1.5), $f'(t) \in L_2((0, T), H)$ *для любого* $T > 0$, $f(0) = 0$, *кроме того,* $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. *Тогда задача* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение почти всюду, удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_2^2((0,T), A_0)} \leqslant K \left(\left\|f'(t)\right\|_{L_2((0,T), H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \left\|A_0^{1/2} \varphi_1\right\|_H \right), \tag{2.2}$$

с постоянной $K = K(T)$, *не зависящей от вектор-функции* f *и векторов* φ_0, φ_1.

2.2. Спектральный анализ. Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (1.4), (1.5), а также дополнительные условия.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5), (1.6) *и носители мер* $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ *принадлежат отрезку* $[d_1, d_2]$, *где* $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. *Тогда для любого сколь угодно малого* $\theta_0 > 0$ *существует такое число* $R_0 > 0$, *что спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *принадлежит множеству*

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A+B)f, f)}, \quad f \in D(A),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2}\inf_{\|f\|=1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{((K(0)A+Q(0)B)f,f)}{\big((A+B+d_2^2I)f,f\big)}. \tag{2.3}$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, *что для оператор-функции* $L^{-1}(\lambda)$ *на множестве* $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$ *справедлива оценка*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}. \tag{2.4}$$

Предложение 2.1. *Величина* α_0 *допускает следующую оценку*:

$$\alpha_0 \geqslant -\frac{1}{2}\left\|A_0^{-1/2}\left(K(0)A+Q(0)B\right)A_0^{-1/2}\right\|.$$

Замечание 2.2. Согласно [26, лемма 2.1] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H. В свою очередь, в силу упомянутой [26, лемма 2.1] и в силу самосопряженности оператора $A_0 = A+B$, оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H.

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Тогда невещественная часть спектра оператор-функции* $L(\lambda)$ *симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого* $\varepsilon > 0$ *в области* $\Omega_\varepsilon := \Omega\setminus\{\lambda : -d_2-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < 0,\ |\operatorname{Im}\lambda| < \varepsilon\}$ *собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.*

Отметим, что оператор-функция вида (1.8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в [10]. Теоремы 2.3, 2.4 представляют собой естественное развитие результатов работы [10].

3. Доказательство теорем 2.3, 2.4

Доказательству теорем 2.3, 2.4 предпошлем несколько лемм, представляющих, на наш взгляд, самостоятельную ценность.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5). *Тогда оператор-функция* $L(\lambda)$ *обратима в замкнутой правой полуплоскости и справедливо неравенство*

$$\left\|A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2}\right\| \leqslant \mathrm{const}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \gamma > 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Преобразуем оператор-функцию $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = A^{1/2}M(\lambda)A^{1/2}, \tag{3.2}$$

где

$$M(\lambda) = \lambda^2A^{-1} + \left(1-\hat{K}(\lambda)\right)I + \left(1-\hat{Q}(\lambda)\right)\mathcal{K}$$

и через оператор $\mathcal{K}$ обозначен оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Согласно [26, лемма 2.1] оператор $\mathcal{K}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H. Кроме того, оператор $\mathcal{K}$ является неотрицательным, т. е. $(\mathcal{K}x,x) \geqslant 0$ для любого $x \in H$, и симметричным в силу неотрицательности и симметричности оператора B.

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в правой полуплоскости. Рассмотрим форму $(M(\lambda)f,f)$ для $\lambda = x+iy$ таких, что $x > |y|$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\operatorname{Re}(M(\lambda)f,f) = \left(x^2-y^2\right)\left(A^{-1}f,f\right) + \left(1-\int_{d_1}^{+\infty}\frac{(x+\tau)d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1-\int_{d_1}^{+\infty}\frac{(x+\tau)d\nu(\tau)}{((x+\tau)^2+y^2)}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant \left(x^2-y^2\right)\left(A^{-1}f,f\right) + \left(1-\int_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{x+\tau}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1-\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{x+\tau}\right)(\mathcal{K}f,f)\geqslant\left(1-\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}\right)(f,f)\geqslant\delta\|f\|^2, \tag{3.3}$$

где $\delta=1-\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{\tau}>0.$

Для $\lambda=x+iy$ таких, что $y\geqslant x\geqslant\gamma>0$, справедливы следующие неравенства:

$$\operatorname{Im}(M(\lambda)f,f)=2xy\left(A^{-1}f,f\right)+y\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f)+y\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\geqslant$$

$$\geqslant 2x^2\left(A^{-1}f,f\right)+y\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f)+y\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\geqslant\gamma\|f\|^2. \tag{3.4}$$

Для $\lambda=x+iy$ таких, что $y<-x<-\gamma>0$, $\gamma>0$, справедливы следующие неравенства:

$$-\operatorname{Im}(M(\lambda)f,f)\geqslant 2x^2(f,f)+|y|\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(f,f)+|y|\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\geqslant\gamma\|f\|^2. \tag{3.5}$$

Объединяя неравенства (3.4) и (3.5), получаем что в области $\{\lambda=x+iy|\,|y|>x\geqslant\gamma>0\}$ справедлива оценка

$$|\operatorname{Im}(M(\lambda)f,f)|\geqslant\gamma\|f\|^2.$$

В силу произвольности $\gamma>0$, из неравенств (3.3) и (3.5) вытекает обратимость оператор-функции $M(\lambda)$, а следовательно, и оператор-функции $L(\lambda)$ в правой полуплоскости. Оценка (3.1) следует из неравенств (3.3), (3.5).

□

Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$ на мнимой оси. В силу представлений

$$\operatorname{Re}(M(iy)f,f)=-y^2\left(A^{-1}f,f\right)+\left(1-\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}\right)(f,f)+\left(1-\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}\right)(\mathcal{K}f,f),$$

$$\operatorname{Im}(M(iy)f,f)=y\int\limits_{d_1}^{+\infty}\frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+y\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)$$

из условия (1.4) вытекает, что существует такое $\delta>0$, что для всех y таких, что $|y|<\delta$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(M(iy)f,f)\geqslant k(f,f), \tag{3.6}$$

с некоторой постоянной $k>0$. С другой стороны, справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im}(M(iy)f,f)|\geqslant|y|\left[\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2+y^2}(f,f)+\int\limits_{d_1}^{d_2}\frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2+y^2}(\mathcal{K}f,f)\right]. \tag{3.7}$$

Из неравенств (3.6) и (3.7) вытекает обратимость оператор-функции $L(\lambda)$ на мнимой оси.

Перейдем к изучению спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости.

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.5) *и носители функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ лежат на отрезке $[d_1,d_2]$, где $0<d_1<d_2<+\infty$. Тогда найдутся такие $R_0>d_2$ и $\gamma_0>0$, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в объединении полуплоскостей $\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda<-R_0\}\cup\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\gamma_0\}$ и справедлива оценка*

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|},\quad\lambda\in\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda<-R_0\}\cup\{\lambda:\operatorname{Re}\lambda>\gamma_0\}.$$

Доказательство. Покажем, что в области $\Omega := \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -d_2, |\operatorname{Im}\lambda| < |\operatorname{Re}\lambda|\}$ оператор функция $L(\lambda)$ обратима. Для этого заметим, что при $\operatorname{Re}\lambda = x < -d_2$

$$\operatorname{Re}\left(1-\hat{K}(\lambda)\right) = \left(1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{(x+\tau)d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}\right) \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Re}\left(1-\hat{Q}(\lambda)\right) = \left(1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{(x+\tau)d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}\right) \geqslant 1$$

и, следовательно, в области Ω

$$\operatorname{Re}\left(M(\lambda)f,f\right) = \left(x^2-y^2\right)\left(A^{-1}f,f\right) + \left(1 - \int\limits_{d_1}^{+\infty} \frac{(x+\tau)d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2+y^2}\right)(f,f) +$$

$$+\left(1 - \int\limits_{d_1}^{+\infty} \frac{(x+\tau)d\nu(\tau)}{((x+\tau)^2+y^2)}\right)(\mathcal{K}f,f) \geqslant (f,f), \quad \lambda\in\Omega.$$

Покажем теперь, что найдутся такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\}$, а также в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$.

Представим оператор-функцию $L^{-1}(\lambda)$ в виде

$$L^{-1}(\lambda) = \left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\left(I - \hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1} - \hat{Q}(\lambda)B\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что найдутся такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что для всех λ, удовлетворяющих условию $\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$, справедливы следующие неравенства:

$$\left\|\hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\text{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad (3.9)$$

$$\left\|\hat{Q}(\lambda)B\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\text{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|}. \quad (3.10)$$

Согласно известному результату (см. [34, с. 361]), оператор $A_0 = A + B$ является самосопряженным и положительным.

Для доказательства неравенств (3.9) и (3.10) нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Существует такое $\gamma > 0$, что справедливо неравенство*

$$\sup_{\lambda:|\operatorname{Re}\lambda|>\gamma}\left\|\frac{1}{\lambda}A_0\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| < \frac{\text{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Принимая во внимание, что оператор A_0 — самосопряженный, используем спектральную теорему (см. [34, с. 452–453]). Положим $\lambda = \tau + i\nu$ $(\tau,\nu\in\mathbb{R})$ и $a \in \sigma(A_0) \subset [\varkappa_0, +\infty)$, т. е. a принадлежит спектру оператора A_0. Согласно утверждению спектральной теоремы, достаточно установить оценку

$$\frac{a}{(\tau^2+\nu^2)^{1/2}((\tau^2-\nu^2)+a)^2+4\tau^2\nu^2)^{1/2}} \leqslant \frac{\text{const}}{\tau}, \quad \tau \geqslant \gamma > 0. \quad (3.12)$$

Для этого оценим снизу функцию

$$f(a,\tau,\nu) = (\tau^2+\nu^2)((\tau^2-\nu^2)+a)^2+4\tau^2\nu^2).$$

Пусть $d\in(0,1)$, тогда имеет место оценка

$$f(a,\tau,\nu) \geqslant \min\left\{\min_{\nu^2\in[0,da]} f(a,\tau,\nu), \min_{\nu^2\in[da,+\infty]} f(a,\tau,\nu)\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \min\left\{\tau^2(\tau^2+(1-d)a\tau^2)^2, (\tau^2+da)4da\tau^2\right\}.$$

Следовательно,

$$\frac{a}{(f(a,\tau,\nu))^{1/2}} \leqslant a\max\left[\frac{1}{(\tau^2+(1-d)a)\tau}, \frac{1}{(\tau^2+da)^{1/2}2\sqrt{da}\tau}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \max\left[\frac{1}{\tau\left(\frac{\tau^2}{a}+(1-d)\right)}, \frac{1}{2\sqrt{d}\tau\left(\frac{\tau^2}{a}+d\right)^{1/2}}\right] \leqslant \max\left[\frac{1}{\tau(1-d)}, \frac{1}{2\tau d}\right]. \quad (3.13)$$

Полагая $d = 1/3$ в неравенстве (3.13), мы получаем искомую оценку (3.12). Лемма 3.3 доказана. $\square$

Легко видеть, что для функций $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ справедливы оценки

$$|\hat{K}(\lambda)| \leqslant \frac{\operatorname{Var}\mu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leqslant \frac{\operatorname{Var}\nu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda > 0, \quad (3.14)$$

и

$$|\hat{K}(\lambda)| \leqslant \frac{\operatorname{Var}\mu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|-d_2}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leqslant \frac{\operatorname{Var}\nu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|-d_2}, \quad \operatorname{Re}\lambda < -d_2.$$

Из последних оценок следует, что для всех таких λ, что $|\lambda| > R_0 > d_2$, найдется такое $K > 0$, что будут справедливы неравенства

$$|\hat{K}(\lambda)| \leqslant \frac{K}{|\lambda|}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leqslant \frac{K}{|\lambda|}, \quad |\lambda| > R_0. \quad (3.15)$$

Завершим доказательство леммы 3.2. В силу замечания 2.1, леммы 3.3 и оценок (3.14), (3.15), получаем, что

$$\left\|\hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| = \left\|\hat{K}(\lambda)AA_0^{-1}A_0\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{const}\left\|AA_0^{-1}\right\| \frac{1}{|\lambda|}\left\|A_0\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|},$$

$$\left\|\hat{Q}(\lambda)B\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| = \left\|\hat{Q}(\lambda)BA_0^{-1}A_0\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| \leqslant$$
$$\leqslant \operatorname{const}\left\|BA_0^{-1}\right\| \frac{1}{|\lambda|}\left\|A_0\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Re}\lambda|}.$$

Для дальнейших рассуждений будет использоваться следующее известное предложение.

Предложение 3.1. *Справедлива следующая оценка*:

$$\left\|\left(\lambda^2 I + A_0\right)^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0.$$

Доказательство предложения немедленно вытекает из спектральной теоремы и неравенств

$$\left|\frac{1}{\lambda^2+a^2}\right| = \left|\frac{1}{(\lambda+ia)(\lambda-ia)}\right| < \frac{1}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}.$$

На основании представления (3.8), неравенств (3.9), (3.10) и предложения 3.1, получаем, что существует такое $R_0 > 0$ и такое $\gamma_0 > 0$, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ допускает оценку

$$\left\|L^{-1}(\lambda)\right\| \leqslant \frac{\operatorname{const}}{|\lambda||\operatorname{Re}\lambda|}, \quad \lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}.$$

В самом деле, согласно оценкам (3.9), (3.10) можно выбрать такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что

$$\left\|\left(\hat{K}(\lambda)A + \hat{Q}(\lambda)B\right)\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\right\| < 1$$

при $\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$. Следовательно, для указанных λ будет существовать оператор-функция

$$\left(I - \hat{K}(\lambda)A\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1} - \hat{Q}(\lambda)B\left(\lambda^2 I + (A+B)\right)^{-1}\right)^{-1},$$

причем она будет регулярной и ограниченной на множестве $\{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda > \gamma_0\}$. Таким образом, из представления (3.8) и предложения 3.1 получим утверждение леммы.

Лемма 3.2 доказана. □

Объединяя полученные выше результаты, получаем, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в полосе $\{\lambda : -R_0 < \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

Перейдем теперь к уточнению локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости.

Введем следующие обозначения: $\omega^2 = ((A+B)f, f)$, где $f \in \operatorname{Dom}(A)$, $\|f\| = 1$,

$$r_1(f) = \frac{(Af, f)}{((A+B)f, f)}, \quad r_2(f) = \frac{(Bf, f)}{((A+B)f, f)}.$$

В указанных обозначениях форму $(L(\lambda)f, f)$, где $f \in \operatorname{Dom}(A)$, $\|f\| = 1$, можно переписать в следующем виде:

$$(L(\lambda)f, f) = \lambda^2 + \omega^2 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{r_1(f)\omega^2}{\tau+\lambda} d\mu(\tau) - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{r_2(f)\omega^2}{\tau+\lambda} d\nu(\tau).$$

После деления на ω^2 получаем

$$\frac{(L(\lambda)f, f)}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int\limits_{d_0}^{+\infty} \frac{d\theta(\tau)}{\tau+\lambda},$$

где $d\theta(\tau) = r_1(f)d\mu(\tau) + r_2(f)d\nu(\tau)$.

Заметим, что в силу условия (1.4) и того, что $r_1(f) + r_2(f) = 1$, справедливо неравенство

$$\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} = r_1(f)\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} + r_2(f)\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\nu(\tau)}{\tau} < 1.$$

Дальнейшему изложению предпошлем следующую лемму о расположении невещественных нулей функции

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau+\lambda}.$$

В дальнейшем предполагается, что параметр $\omega \in [\omega_0, +\infty)$, $\omega_0 = \inf\limits_{\substack{||x||=1,\\ x\in\operatorname{Dom}(A)}} ((A+B)x, x) > 1$.

Лемма 3.4. *При выполнении условий леммы* 3.2 *вещественные части* α *невещественных нулей* $\lambda^{\pm} = \alpha \pm i\beta$ *функции* $m(\lambda)$ *удовлетворяют следующему неравенству*:

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \leqslant \alpha \leqslant -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2+d_2^2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}. \tag{3.16}$$

Доказательство. Доказательство леммы 3.4 существенно опирается на [10, лемма 4.3]. Для удобства читателей приведем ее формулировку. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{\lambda^2(N)}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{\lambda(N)+\gamma_k}, \quad \lambda(N) \in \mathbb{C}, \tag{3.17}$$

зависящих от параметра $N \in \mathbb{N}$ при фиксированном значении $\omega \geqslant \omega_0 > 1$, где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.5 (А. И. Милославский, см. [10, 21])**.** *Для любого фиксированного значения N уравнение* (3.17) *имеет N вещественных корней $\lambda_k(N) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$, удовлетворяющих неравенствам*

$$-\gamma_k < \lambda_k(N) < p_k(N) < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \gamma_0 = 0, \tag{3.18}$$

а также пару комплексно-сопряженных корней $\lambda^{\pm}(N) = \alpha(N) \pm i\beta(N) \in \mathbb{C}$, $\alpha(N), \beta(N) \in \mathbb{R}$, *причем для вещественной части* $\alpha(N)$ *справедливо неравенство*

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k < \alpha(N) < -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}. \tag{3.19}$$

Вначале, построим последовательность ступенчатых функций $\{\theta_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ сходящуюся к изучаемой функции $\theta(\tau)$ в пространстве $L_1[d_1, d_2]$, т. е.

$$\int_{d_1}^{d_2} |d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)| \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{3.20}$$

такую, что для каждой ступенчатой функции $\theta_n(x)$ справедливо представление

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta_n(\tau)}{\tau + \lambda} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(n)}{\gamma_k(n) + \lambda}.$$

Функция $\theta(\tau)$ является монотонной, поэтому множество ее точек разрыва не более чем счетно. Изменяя функцию $\theta(\tau)$ на множестве сколь угодно малой меры, получим непрерывную функцию $\tilde{\theta}(\tau) \in C[d_1, d_2]$. Функцию $\tilde{\theta}(\tau)$ приблизим последовательностью ступенчатых функций вида $\theta_n(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi(\gamma_{k-1}, \gamma_k](\tau) c_k$, где

$$\gamma_k = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{n} k, \quad c_k = \tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.21}$$

где $\chi(\gamma_{k-1}, \gamma_k]$ — характеристическая функция полуинтервала $(\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, $k, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность функций $\{\theta_n(\tau)\}_{n=1}^{\infty}$ будет равномерно сходиться к функции $\tilde{\theta}(\tau)$ и, следовательно, указанная последовательность будет сходится к функции $\tilde{\theta}(\tau)$ в пространстве $L_1[d_1, d_2]$. Одновременно мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k = \operatorname{Var} \theta_n(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \tilde{\theta}(d_2) - \tilde{\theta}(d_1) = \operatorname{Var} \tilde{\theta}(\tau)\Big|_{d_1}^{d_2} = \operatorname{Var} \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}.$$

Кроме того, справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2} \leqslant \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_1^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1})\right) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_1^2} \operatorname{Var}\, \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2},$$

следовательно, последовательность $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}$ сходится при $n \to +\infty$, кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2} \geqslant \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1})\right) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \operatorname{Var}\, \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \beta > 0. \tag{3.22}$$

Рассмотрим последовательность функций

$$l_n(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(n)}{\gamma_k(n) + \lambda},$$

где функции последовательности $c_k(n)$ и $\gamma_k(n)$ определены формулами (3.21). Покажем, что последовательность функций $\{l_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к функции $m(\lambda)$ на любом компакте, отделенном от отрицательной вещественной полуоси. Действительно, справедлива цепочка неравенств

$$|m(\lambda) - l_n(\lambda)| = \left| \int_{d_1}^{d_2} \frac{(d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau))}{\tau + \lambda} \right| \leqslant \int_{d_1}^{d_2} \frac{|d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)|}{\sqrt{(x+\tau)^2 + y^2}} \leqslant \frac{1}{|y|} \int_{d_1}^{d_2} |d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)| \to 0 \tag{3.23}$$

при $n \to +\infty$, где $\lambda = x + iy$, $|y| \geqslant \theta_0 > 0$.

В силу аналитичности функции $l_n(\lambda)$ на любом компакте, отделенном от отрицательной действительной полуоси, соотношения (3.23), равномерной сходимости последовательности функций $l_n(\lambda)$ к функции $m(\lambda)$ и равномерной отделенности мнимых частей λ от нуля, по теореме Гурвица получаем, что невещественные нули $\lambda_n^{\pm} = \alpha_n + i\beta_n$ функции $l_n(\lambda)$ сходятся к невещественным нулям $\lambda^{\pm} = \alpha + i\beta$ функции $m(\lambda)$. Таким образом, совершая предельный переход в неравенстве

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} c_k < \alpha_n < -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}$$

при $n \to +\infty$ и используя оценку (3.22), получаем искомое неравенство

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \leqslant \alpha \leqslant -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}. \tag{3.24}$$

Лемма 3.4 доказана. □

Лемма 3.6. *При выполнении условий леммы* 3.2 *функции* $l_n(\lambda)$ *и* $m(\lambda)$ *не имеют нулей в замкнутой правой полуплоскости и имеют не более пары комплексно-сопряженных нулей в открытой левой полуплоскости.*

Доказательство. Покажем, что функция $m(\lambda)$ не имеет нулей в открытой правой полуплоскости. В самом деле, уравнение $m(\lambda) = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 = \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau}. \tag{3.25}$$

Вначале рассмотрим λ, лежащие в первом квадранте ($\operatorname{Re}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$). Тогда

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1\right) > 0, \quad \operatorname{Im}\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} < 0.$$

Следовательно, уравнение (3.25) не может иметь корней в первом квадранте. Вследствие комплексной сопряженности невещественных корней уравнение (3.25) не может иметь корней в открытом четвертом квадранте.

Рассмотрим теперь $\lambda = x \in \mathbb{R}_+$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{\omega^2} + 1 = \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{x + \tau}. \tag{3.26}$$

Из условия (4) и неравенства

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{x + \tau} \leqslant \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} < 1$$

получаем, что уравнение (3.26) не имеет корней при $x > 0$.

Рассмотрим функцию $m(\lambda)$на мнимой оси:

$$m(iy) = \frac{-y^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{iy + \tau} = \left(\frac{-y^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2}\right) + iy\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2}. \tag{3.27}$$

Из представления (3.27) вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, что для всех таких y, для которых $|y| < \delta$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} m(iy) = 1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} > 0. \tag{3.28}$$

В самом деле, в силу того, что $\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} < 1$ и $\omega \geqslant \omega_0 > 0$, будут справедливы неравенства

$$1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2+\tau^2} \geqslant 1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} > 0.$$

С другой стороны, при $|y| > \delta$ выполнено неравенство

$$|\mathrm{Im}\, m(iy)| = |y| \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2+\tau^2} \geqslant \delta \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2+\tau^2} > 0. \tag{3.29}$$

Из неравенств (3.28), (3.29) следует обратимость функции $m(\lambda)$ на мнимой оси. Для функции $l_n(\lambda)$ рассуждения проводятся аналогично.

Покажем, что функция $m(\lambda)$, а также функция $l_n(\lambda)$ имеют не более одного невещественного нуля в открытой верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Действительно, рассмотрим регулярную ветвь φ квадратного корня, которая отображает нижнюю полуплоскость во второй квадрант, тогда уравнение

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda+\tau} = 0 \tag{3.30}$$

эквивалентно уравнению

$$\lambda = g(\lambda) := \omega\varphi\left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda+\tau}\right).$$

Отметим, что функция $g(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя. В самом деле,

$$\mathrm{Im}\left(\int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda+\tau}\right) < 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому, по лемме Шварца, уравнение $\lambda = g(\lambda)$ имеет не более одного решения в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$. Для функции $l_n(\lambda)$ рассуждения проводятся аналогично. Для удобства читателей приведем здесь формулировку леммы Шварца.

Лемма 3.7 (Шварц). *Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя. Тогда уравнение $z = f(z)$ имеет не более одного решения, и если такое решение существует, то $|f'(w)| < 1$. В противном случае f — эллиптическое дробно-линейное преобразование.*

В дальнейшем будет существенно использоваться следующая теорема.

Теорема 3.1 (Denjoy—Wolff, см. [42]). *Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}^+$ в себя и f не является эллиптическим дробно-линейным преобразованием. Тогда существует единственная точка $\omega \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ такая, что итерации f^{*n} сходятся равномерно к ω на компактных множествах в $\mathbb{C}^+$. Угловой предел $\lim\limits_{z\to\omega} f(z)$ существует и удовлетворяет уравнению $\omega = f(\omega)$. Более того, угловая производная $f'(\omega)$ существует и удовлетворяет неравенству $|f'(\omega)| \leqslant 1$.*

Замечание 3.1. Существование решения уравнения $\lambda = g(\lambda)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$ можно установить с помощью итераций отображения

$$g(\lambda) := \omega\varphi\left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int\limits_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda+\tau}\right),$$

начиная с любой точки в $\mathbb{C}^+$. При этом последовательность $\lambda_k = g(\lambda_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ сходится по теореме 3.1. Если указанная последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке в верхней полуплоскости, то эта точка единственна. Если последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке на отрицательной вещественной полуоси, то по теореме 3.1 (Denjoy—Wolff) уравнение $\lambda = g(\lambda)$ не имеет решений в $\mathbb{C}^+$.

Лемма 3.6 доказана.

$\square$

Для полноты изложения приведем здесь утверждение об асимптотике нулей функции $m(\lambda)$ при $\omega \to +\infty$.

Лемма 3.8. *Пусть выполнены условия леммы* 3.2 *и параметр* $\omega \to +\infty$. *Тогда невещественные нули функции* $m(\lambda)$ *имеют следующую асимптотику*:

$$\lambda^{\pm}(\omega) = -\frac{1}{2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \pm i\omega + \underline{O}\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \omega \to +\infty.$$

Доказательство леммы проводится совершенно аналогично доказательству [9, теорема 2].

Здесь также уместно привести следующее предложение.

Предложение 3.2. *Для любого* $\omega_0 > 0$ *можно указать такое* $k \in \mathbb{N}$, *что на подпространстве конечной размерности* $H_{\omega_0}^{+} = H \oplus H_{\omega_0}$, *где* $H_{\omega_0} = \underset{a_k<\omega_0^2}{\operatorname{Span}}\{e_j\}_{j=1}^{k}$, a_j *и* e_j — *собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора* A_0 $(A_0 e_j = a_j e_j)$, *будет выполняться неравенство*

$$(A_0 f, f) \geqslant \omega_0^2, \quad f \in H_{\omega_0}^{\perp},\ ||f|| = 1,\ f \in \operatorname{Dom}(A).$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим форму $\omega^2 = (A_0 f, f)$, $||f|| = 1$, $f \in \operatorname{Dom}(A)$. Как уже отмечалось, оператор A_0 является самосопряженным, положительным, имеющим компактный обратный. Следовательно, согласно минимаксному принципу, для собственных значений $a_{j,}$ оператора A_0 $(A_0 e_j = a_j e_j)$ выполняются соотношения

$$a_{j,} = \inf_{\substack{||f||=1,\,(f,e_k)=0,\\ k=1,\dots,j-1\\ f\in\operatorname{Dom}(A)}} (A_0 f, f),$$

при этом, в силу неограниченности оператора A_0, $a_j \to +\infty$ при $(j \to +\infty)$. Таким образом, для любого $\omega_0 > 0$ будет выполнено неравенство $(A_0 f, f) \geqslant \omega_0^2$, $||f|| = 1$, $f \in \operatorname{Dom}(A)$, $f \in H_{\omega_0}^{\perp}$. $\square$

Перейдем к завершению доказательства теоремы 2.3. Определим теперь расположение невещественных нулей функции $(L(\lambda)f, f)$ в терминах коэффициентов исходного уравнения. Заметим, что $\operatorname{Var}\ \mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} = K(0)$, $\operatorname{Var}\ \nu(\tau)|_{d_1}^{d_2} = Q(0)$. В силу оценки (3.24), имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\lambda^{\pm} \geqslant -\frac{1}{2}\operatorname{Var}\ \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = -\frac{1}{2}\left[r_1(f)\operatorname{Var}\ \mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} + r_2(f)\operatorname{Var}\ \nu(\tau)|_{d_1}^{d_2}\right] = \\ = -\frac{1}{2}\sup_{||f||=1}\left[\frac{K(0)(Af,f) + Q(0)(Bf,f)}{((A+B)f,f)}\right], \quad f \in \operatorname{Dom}(A). \quad (3.31)\end{aligned}$$

Отметим, что из оценки (3.24) и определения функции $\theta(\tau)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\alpha = \operatorname{Re}\lambda^{\pm} \leqslant -\frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega^2+d^2}\operatorname{Var}\theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \\ = -\frac{1}{2}\frac{(A_0f,f)}{(A_0f,f)+d_2^2}\left[\frac{(Af,f)}{(A_0f,f)}\operatorname{Var}\mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} + \frac{(Bf,f)}{(A_0f,f)}\operatorname{Var}\nu(\tau)|_{d_1}^{d_2}\right] = \\ = -\frac{1}{2}\left[\frac{(Af,f)}{(A_0f,f)+d_2^2}K(0) + \frac{(Bf,f)}{(A_0f,f)+d_2^2}Q(0)\right] \leqslant \\ \leqslant -\frac{1}{2}\inf_{\substack{\|f\|=1,\\ f\in\operatorname{Dom}(A)}}\left[\frac{(Af,f)}{(A_0f,f)+d_2^2}K(0) + \frac{(Bf,f)}{(A_0f,f)+d_2^2}Q(0)\right] =\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \inf_{\substack{||f||=1,\\ f\in \mathrm{Dom}(A)}} \frac{((K(0)A + Q(0)B)\, f, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} = \mu_1. \quad (3.32)$$

Введем обозначения

$$\alpha_0 := -\frac{1}{2} \sup_{\substack{||f||=1,\\ f\in \mathrm{Dom}(A)}} \left[\frac{((K(0)A + Q(0)B) f, f)}{(A_0 f, f)}\right],$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\substack{||f||=1,\\ f\in \mathrm{Dom}(A)}} \left[\frac{((K(0)A + Q(0)B)\, f, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2}\right].$$

Согласно лемме 3.2, спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в полосе $\{\lambda : -R_0 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$. В соответствии с оценками (3.31), (3.32) невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$, лежащая на положительном расстоянии от отрицательной полуоси, лежит в полосе $\{\lambda : -\alpha_0 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda < \alpha_2\}$. Следовательно, для любого сколь угодно малого θ_0 можно указать такое R_0, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ будет принадлежать множеству

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : -\alpha_1 \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda \leqslant \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$. При этом $R_0 \geqslant \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$. Оценка (2.4) установлена в лемме 3.2.

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство предложения 2.1. Положим в неравенстве (3.31) $f = A_0^{-1/2} g$, где $A_0 = A + B$. Тогда

$$\mathrm{Re}\,\lambda^{\pm} \geqslant -\frac{1}{2} \sup_{||f||=1} \left[\frac{K(0)(AA_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g) + Q(0)(BA_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g)}{\left((A+B)A_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g\right)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \sup_{||f||=1} \left[\frac{K(0)(A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}g, g) + Q(0)(A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}g, g)}{(g,g)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \left\| A_0^{-1/2} \left(K(0)A + Q(0)B\right) A_0^{-1/2} \right\|. \quad (3.33)$$

□

Замечание 3.2. В силу самосопряженности оператора A_0 и согласно [26, лемма 2.1], операторы $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ и $A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в пространстве H.

Доказательство теоремы 2.4. Покажем, что невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности. Для этого рассмотрим оператор-функцию $D(\lambda) = (1 - \hat{K}(\lambda))I + (1 - \hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}$. Оператор-функция $D(\lambda)$ обратима для невещественных λ. В самом деле, рассмотрим форму $(D(\lambda)f, f) = (1 - \hat{K}(\lambda))(f, f) + (1 - \hat{Q}(\lambda))(\mathcal{K}f, f)$. Из представления

$$\mathrm{Im}\,(D(\lambda)f, f) = y \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}\right)(f, f) + y \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2}\right)(\mathcal{K}f, f), \quad \lambda = x + iy,$$

вытекает, что при выполнения условия невырожденности функций $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ и справедливости условий (1.4), (1.5) оператор-функция $D(\lambda)$ обратима при $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$.

Более того, легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будут справедливы неравенства

$$\mathrm{Re}\,(D(x)f, f) = \left(1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{x+\tau}\right)(f, f) + \left(1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{x+\tau}\right)(\mathcal{K}f, f) > \delta(f, f),$$

$$x > -d_1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\mathrm{Re}\,(D(x)f, f) < -\delta(f, f), \quad x < -d_2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, оператор-функция $D(\lambda)$ будет обратимой вне отрезка $[-d_2, -d_1]$.

Согласно теореме И. Ц. Гохберга (см. [15]), оператор-функция $M(\lambda) = D(\lambda) + \lambda^2 A^{-1}$ $\left(A^{-1} \in \sigma_\infty\right)$ обратима при всех невещественных λ, за исключением некоторого счетного множества характеристических чисел конечной алгебраической кратности, которые могут иметь точки сгущения лишь на отрезке $[d_1, d_2]$. В силу представления (3.2), это утверждение справедливо и для оператор-функции $L(\lambda)$. Симметрия невещественной части спектра $L(\lambda)$ относительно вещественной оси вытекает из соотношения $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$. □

Авторы глубоко признательны профессору А. А. Шкаликову за полезные обсуждения и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. В.* О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1995. — *186*, № 8. — С. 67–92.
2. *Власов В. В.* О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева// Тр. МИАН. — 1999. — *227*. — С. 109–121.
3. *Власов В. В.* О корректной разрешимости абстрактных параболических уравнений с последействием// Докл. РАН. — 2007. — *415*, № 2. — С. 151–152.
4. *Власов В. В., Ву Дж., Кабирова Г. Р.* Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *35*. — С. 44–59.
5. *Власов В. В., Гавриков А. А., Иванов С. А., Князьков Д. Ю., Самарин В. А., Шамаев А. С.* Спектральные свойства комбинированных сред// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 134–155.
6. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30*. — С. 3–173.
7. *Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: МГУ, 2011.
8. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — *28*. — С. 75–114.
9. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории тепломассообмена // Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2014. — *75*, № 2. — С. 131–155.
10. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 22–42.
11. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Корректная разрешимость вольтерровых интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, № 9. — С. 1168–1177.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Докл. РАН. — 2010. — *434*, № 1. — С. 12–15.
13. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39*. — С. 36–65.
14. *Власов В. В., Шматов К. И.* Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с запаздыванием в гильбертовом пространстве// Тр. МИАН. — 2003. — *243*. — С. 127–137.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
16. *Жиков В. В.* Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 7. — С. 31–72.
17. *Жиков В. В.* О двухмасштабной сходимости// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — *23*. — С. 149–187.
18. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
19. *Лионс Ж. П., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
20. *Лыков А. В.* Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
21. *Милославский А. И.* Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости// Деп. в Укр. НИИНТИ, 13.07.87, № 1229-УК87, Харьков. — 1987.

22. *Палин В. В., Радкевич Е. В.* Законы сохранения и их гиперболические регуляризации// Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — *5*, № 1. — С. 88–115.
23. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
24. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
25. *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью// Изв. РАН. Сер. Мех. жид. и газа. — 2011. — № 2. — С. 92–103.
26. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1988. — *177*, № 1. — С. 96–118.
27. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1989. — *14*. — С. 140–224.
28. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space. // J. Differ. Equ. — 1987. — *70*. — С. 366–389.
29. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// J. Integr. Equ. Appl. — 1994. — *6*. — С. 479–508.
30. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1984. — *102*. — С. 38–57.
31. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations// Israel J. Math. — 1985. — *50*, № 3. — С. 231–263.
32. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed. // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 113–126.
33. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// J. Math. Anal. Appl. — 2009. — *355*. — С. 1–11.
34. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — New York: Springer, 1966.
35. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonselfadjoint problems for viscous fluids. — Berlin—Basel—Boston: Birkhäuser, 2003.
36. *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structural operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays// Differ. Integr. Equ. — 1990. — *3*, № 4. — С. 733–756.
37. *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2008. — *66*, № 3-4. — С. 249–272.
38. *Miller R. K.* Volterra integral equation in Banach space// Funkcial. Ekvac. — 1975. — *18*. — С. 163–194.
39. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory// J. Math. Anal. Appl. — 1978. — *66*. — С. 313–332.
40. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces// Funkcial. Ekvac. — 1978. — *21*. — С. 279–305.
41. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*. — С. 143–165.
42. *Shapiro J.* Composition operators and classical function theory. — New York: Springer, 1993.
43. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// J. Funct. Differ. Equ. — 2009. — *16*, № 4. — С. 751–768.
44. *Wu J.* Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay// Differ. Integr. Equ. — 1991. — *4*, № 6. — С. 1325–1351.
45. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1996.

В. В. Власов
МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва
E-mail: `vicvvlasov@rambler.ru`

Н. А. Раутиан
МГУ им. М. В. Ломоносова
механико-математический факультет,
Россия, 119899, Москва
E-mail: `nrautian@mail.ru`

UDC 517.929

Spectral Analysis of Integrodifferential Equations in a Hilbert Space

© 2016 **V. V. Vlasov, N. A. Rautian**

Abstract. We investigate the correct solvability of initial-value problems for abstract integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. We do spectral analysis of operator-functions describing symbols of such equations. These equations are an abstract form of linear integrodifferential partial derivative equations arising in the viscoelasticity theory and having some other important applications. We establish the localization and the spectrum structure of operator-functions describing symbols of these equations.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i svoystvakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [On solvability and properties of solutions of functional differential equations in a Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 8, 67–92.
2. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i otsenkakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Soboleva" [On solvability and estimates of solutions of functional differential equations in Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1999, **227**, 109–121.
3. V. V. Vlasov, "O korrektnoy razreshimosti abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy s posledeystviem" [On correct solvability of abstract parabolic equations with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 2, 151–152.
4. V. V. Vlasov, Dzh. Vu, and G. R. Kabirova, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nye svoystva abstraktnykh giperbolicheskikh uravneniy s posledeystviem" [Correct solvability and spectral properties of abstract hyperbolic equations with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **35**, 44–59.
5. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, and A. S. Shamaev, "Spektral'nye svoystva kombinirovannykh sred" [Spectral properties of combined media], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 134–155.
6. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii" [Functional differential equations in Sobolev spaces and related questions of the spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173.
7. V. V. Vlasov, D. A. Medvedev, and N. A. Rautian, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyy analiz* [Functional differential equations in Sobolev spaces and their spectral analysis], MSU, Moscow, 2011.
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Correct solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–114.
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [On properties of solutions of integrodifferential equations arising in the heat-mass exchange theory], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 131–155.
10. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Correct solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in the viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42.
11. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrektnaya razreshimost' vol'terrovykh integrodifferentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in a Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177.
12. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Solvability and spectral analysis of

©2016 RUDN University

integrodifferential equations arising in thermal physics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15.
13. V.V. Vlasov, N.A. Rautian, and A.C. Shamaev, “Spektral’nyy analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, voznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermal physics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65.
14. V.V. Vlasov and K.I. Shmatov, “Korrektnaya razreshimost’ uravneniy giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem v gil’bertovom prostranstve” [Correct solvability of hyperbolic-type equations with delay in a Hilbert space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2003, **243**, 127–137.
15. I.Ts. Gokhberg and M.G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators], Nauka, Moscow, 1965.
16. V.V. Zhikov, “Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On one extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72.
17. V.V. Zhikov, “O dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On two-scale convergence], *Tr. sem. im. I.G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2003, **23**, 149–187.
18. A.A. Il’yushin and B.E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkouprugosti* [Essentials of Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970.
19. Zh.P. Lions and E. Madzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971.
20. A.V. Lykov, *Problema teplo- i massoobmena* [Problem of Heat-Mass Exchange], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976.
21. A.I. Miloslavskiy “Spektral’nye svoystva operatornogo puchka, voznikayushchego v vyazkouprugosti” [Spectral properties of an operator pencil arising in viscoelasticity], submitted to Ukr. NIINTI, 13.07.87, No. 1229-UK87, Khar’kov, 1987.
22. V.V. Palin and E.V. Radkevich, “Zakony sokhraneniya i ikh giperbolicheskie regulyarizatsii” [Conservation laws and their hyperbolic regularizations], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 88–115.
23. Yu.N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Heritable Mechanics of Solid Bodies], Nauka, Moscow, 1977.
24. E. Sanches-Palensiya, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous Media and Oscillation Theory], Mir, Moscow, 1984.
25. A.S. Shamaev and V.V. Shumilova, “Usrednenie uravneniy akustiki dlya vyazkouprugogo materiala s kanalami, zapolnennymi vyazkoy szhimaemoy zhidkost’yu” [Averaging of the acoustics equations for viscoelastic matter with channels filled with viscous compressible fluid], *Izv. RAN. Ser. Mekh. zhid. i gaza* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Mech. Fluid & Gas], 2011, No. 2, 92–103.
26. A.A. Shkalikov, “Sil’no dempfirovannye puchki operatorov i razreshimost’ sootvetstvuyushchikh operatorno-differentsial’nykh uravneniy” [Strongly dumped operator pencils and solvability of corresponding operator-differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **177**, No. 1, 96–118.
27. A.A. Shkalikov, “Ellipticheskie uravneniya v gil’bertovom prostranstve i spektral’nye zadachi, svyazannye s nimi” [Elliptic equations in a Hilbert space and related spectral problems], *Tr. sem. im. I.G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1989, **14**, 140–224.
28. W. Desch and R.K. Miller, “Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space,” *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
29. G. Di Blasio, “Parabolic Volterra equations of convolution type,” *J. Integr. Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
30. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “L^2-regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
31. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “Stability for abstract linear functional differential equations,” *Israel J. Math.*, 1985, **50**, No. 3, 231–263.
32. M.E. Gurtin and A.C. Pipkin, “Theory of heat conduction with finite wave speed,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
33. S. Ivanov and L. Pandolfi, “Heat equations with memory: lack of controllability to the rest,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**, 1–11.
34. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1966.
35. N.D. Kopachevsky and S.G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Berlin—Basel—Boston, 2003.

36. K. Kunisch and M. Mastinsek, “Dual semigroups and structural operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays,” *Differ. Integr. Equ.*, 1990, **3**, No. 4, 733–756.
37. D. A. Medvedev, V. V. Vlasov, and J. Wu, “Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2008, **66**, No. 3-4, 249–272.
38. R. K. Miller, “Volterra integral equation in Banach space,” *Funkcial. Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
39. R. K. Miller, “An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **66**, 313–332.
40. R. K. Miller and R. L. Wheeler, “Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces,” *Funkcial. Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
41. L. Pandolfi, “The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach,” *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
42. J. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.
43. V. V. Vlasov and J. Wu, “Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay,” *J. Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 4, 751–768.
44. J. Wu, “Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay,” *Differ. Integr. Equ.*, 1991, **4**, No. 6, 1325–1351.
45. J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

V. V. Vlasov
Mech.-Math. Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `vicvvlasov@rambler.ru`

N. A. Rautian
Mech.-Math. Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `nrautian@mail.ru`