

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРОГОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

© 2016 г. **М. В. ВЕСНИК**

Аннотация. Предложена новая методика построения эвристических формул, описывающих решение задачи дифракции. Формулы основаны на физических принципах и позволяют проводить интерпретацию результатов математически строгого решения. Поскольку эвристические формулы обладают высокими быстродействием и точностью, их также можно использовать совместно с любыми строгими подходами или результатами эксперимента для существенного повышения эффективности решения практических задач, связанных с применением теории дифракции.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	32
2.	Эвристические подходы. ГТД и МКВ	33
3.	Новый эвристический подход МБК	34
4.	Интегральное представление на основе метода обобщенного эйконала	34
5.	Трехмерное решение в приближении физической оптики	39
6.	Анализ дифракционных коэффициентов	42
7.	Базовые компоненты МБК	45
8.	Точность и эффективность ГТД, МКВ и МБК	46
9.	Примеры применения МБК	47
10.	Заключение	47
	Список литературы	48

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифракции — междисциплинарная наука, находящаяся между физикой и математикой. Исторически теория дифракции имела сменяющие друг друга периоды, в течение которых развивалась либо как раздел физики, либо как раздел математики. В середине 20-го века появились две эвристические теории: геометрическая теория дифракции (ГТД) [32,33] и метод краевых волн (МКВ) [25–27], сыгравшие важную роль при решении ряда практических задач дифракции на объектах большого размера, для которых было невозможно получить математически строгие решения. Недавно отмечали 50-летний юбилей этих теорий [36].

В настоящее время также есть ряд практических проблем, которые представляют значительный интерес и связаны с решениями задач дифракции. Это дифракция на объектах с пониженной радиолокационной заметностью, распространение радиоволн в городских условиях, дифракция на кристаллах, локация сейсмическими волнами и т. п.

При решении практической проблемы, связанной, например, с маскировкой или распознаванием объекта радиолокации, важно иметь эффективный (точный и быстродействующий) способ получения решения задачи дифракции на таком объекте. При этом строгие аналитические или численные решения не всегда являются лучшим вариантом, поскольку могут быть громоздкими или недостаточно быстродействующими.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

Данная статья посвящена описанию нового подхода (метода базовых компонентов — МБК) в физической теории дифракции (ФТД). Иногда под ФТД понимают то же, что и под МКВ. Но термин ФТД имеет и более широкое толкование. Его можно применять к любому подходу теории дифракции, основанному не на строгих математических, а на физических принципах. Это метод физической оптики (ФО), уже упомянутые ГТД и МКВ, а также другие методы.

2. Эвристические подходы. ГТД и МКВ

Математически строгое решение в целом отражает комплексное воздействие на решение всех параметров постановки задачи. Вид строгих аналитических формул зависит от способа получения решения и может, например, представлять собой ряд из специальных функций, каждая из которых зависит от всех параметров задачи [4, 19, 24, 35]. Разобраться во влиянии отдельных факторов сложно. Численные решения вообще не имеют аналитических выражений.

В отличие от математически строгих подходов, эвристические формулы основаны на физических принципах [1, 30, 34]. Применение эвристических формул позволяет выразить зависимость от физических характеристик в наиболее компактной и понятной форме. Поэтому наличие математически строгого решения не снимает необходимости получать аналитические эвристические формулы, которые помогают разобраться в физике решения.

Зависимость от условий задачи компактно входит в эвристические формулы в явном виде. В число условий задачи входят: геометрия задачи, форма рассеивателя, граничные условия. С физической точки зрения граничные условия удобно описывать коэффициентами отражения и прохождения R и T , наглядно описывающими взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. К задаче физической интерпретации результатов относится выявление факторов влияния условий задачи на те или иные характеристики решения.

Эвристические решения строятся на основе математически строгих решений простейших задач, на основе базовых физических принципов электродинамики и теории волн (таких как принцип локальности поля, принцип дополнительности и т. п. [5, 21, 28]), а также на основе интуиции и опыта. Точность эвристических решений проверяется верификацией, т. е. сравнением со строгим решением. Если размеры исследуемого рассеивателя не позволяют получить строгое решение, эвристическую методику можно отработать на рассеивателе меньшего размера, а затем применить для рассеивателя большего размера.

Иногда эвристические формулы получают строгое математическое доказательство, как это произошло с классическим решением Зоммерфельда для дифракции на клине. Вначале интегральное представление для этого решения было получено эвристическим способом, а позже было доказано при помощи разложения по цилиндрическим функциям [25].

Современная тенденция развития теории дифракции заключается в том, что решения аналитических задач усложняются, в то время как возможность получения всевозможных численных решений увеличивается (см., например, [3, 20]).

При построении эвристических формул большую роль играют строгие эталонные решения для полубесконечных рассеивателей. На таких решениях основаны ГТД и МКВ.

Подходы ГТД и МКВ берут за основу строгое двумерное решение для полубесконечного рассеивателя. В ГТД постулируют, что поле вдали от трехмерного рассеивателя определяется полем области стационарной фазы на кромке. Под областью стационарной фазы понимается область точек на кромке, которые дают в рассеянное поле вклад с постоянной фазой. В качестве решения берут эталонную задачу рассеяния на полубесконечном двумерном рассеивателе. В МКВ постулируют, что поле на поверхности трехмерного рассеивателя равно полю в окрестности кромки для соответствующей двумерной эталонной задачи. В приближении ГТД трехмерное решение равно сумме вкладов от точек стационарной фазы, а в приближении МКВ трехмерное решение равно интегралу от эвристически найденного поля на поверхности рассеивателя. Как в ГТД, так и в МКВ в течение всего процесса решения практической задачи используют эталонное решение для двумерного рассеивателя. Если это решение численное, то должны быть постоянно задействованы необходимая вычислительная техника и соответствующие программное обеспечение.

3. НОВЫЙ ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД МБК

В монографии [46], основанной на результатах многолетней работы автора [6–17, 39–45], предложен ряд подходов, позволяющих получать эвристические формулы задач дифракции на рассеивателях в форме многоугольников и многогранников. Отличия этих подходов от известных ГТД и МКВ дают основание выделить совокупность новых подходов в отдельный метод — метод базовых компонентов (МБК).

Предлагаемый новый подход МБК отличается от ГТД и МКВ. В МБК при построении трехмерного решения за основу берут базовые компоненты из заранее подготовленного набора. Базовые компоненты — это фрагменты формул, найденные из анализа математически строгих аналитических решений простейших задач. Точность решений МБК проверяется при помощи верификации, т. е. сравнения формул со строгим решением. При этом может осуществляться и «настройка» решения, т. е. его видоизменение с целью повышения точности. В дальнейшем формулы МБК используют автономно от верификационного решения.

Базовые компоненты, характеризующие зависимость от геометрии задачи, можно выделить из математически строгих аналитических формул для наиболее простых постановок задачи. Строгое трехмерное решение получено в приближении физической оптики для плоского идеально проводящего рассеивателя при выполнении условия дальней зоны. Строгое двумерное решение получено для идеально проводящего клина. Дифракционные коэффициенты также получены для идеально проводящего клина и в приближении физической оптики. Решения более сложных задач строятся на основе комбинирования базовых компонентов из подготовленного набора.

С целью учета влияния граничных условий на поверхности рассеивателя в МБК применяют «одномерные» решения для коэффициентов отражения и прохождения R и T , которые описывают взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. Поэтому МБК объясняет поведение двумерного решения для бесконечной кромки, в отличие от ГТД и МКВ, которые принимают это решение в качестве условия задачи. В связи с этим можно утверждать, что для интерпретации строгих результатов при помощи эвристических формул МБК подходит лучше, чем ГТД и МКВ.

В основе МБК лежат два решения.

1. Интегральное представление решения (4.15), полученное на основе МОЭ [7–10, 41–43, 46]. Оно является обобщением интегрального представления Зоммерфельда [29, 37, 38] для рассеивателей произвольной формы.
2. Решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально проводящей плоской пластине в приближении физической оптики при выполнении условия дальней зоны (5.5) [31, 39, 40, 46]. Без ограничения общности мы рассматриваем пластину многоугольной формы, поскольку на ней можно лучше выявить все особенности решения.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА

Рассмотрим электромагнитную волну P вида

$$P = A \exp(iS), \quad (4.1)$$

распространяющуюся в двумерном безграничном пространстве. В формуле (4.1) P , A и S зависят от координат, A — амплитуда волны, S — функция эйконала, i — мнимая единица.

Пусть P удовлетворяет волновому уравнению вида

$$\Delta_z P + k^2 P = 0, \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{или } \Delta_{kz} P + P = 0, \quad \Delta_{kz} = \frac{\partial^2}{\partial (kx)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ky)^2}), \quad (4.2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Внесем в рассматриваемое пространство двумерный идеально проводящий полубесконечный рассеиватель, ограниченный поверхностью S_0 . С точки зрения геометрической оптики этот рассеиватель разделит падающее поле на две составляющие: падающую и отраженную, возникнут две границы «свет—тень». Требуется найти рассеянное поле.

Как известно, сказанное выше означает, что мы ищем решение краевой задачи вида $U = u + P$, где U — полное поле, u — рассеянное поле, удовлетворяющее:

1. волновому уравнению (4.2);
2. граничным условиям $U = 0$ или $dU/dn = 0$ на поверхности S_0 ;
3. условиям регулярности $u = O(r^{-1/2})$ и излучения $\partial u/\partial r - iku = o(r^{-1/2})$ при $kr \rightarrow \infty$;
4. условию Мейкснера на ребре

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{grad} u = 0,$$

где ρ — радиус небольшой окружности, охватывающей ребро.

Метод обобщенного эйконала представляет собой способ построения интегральных представлений, на основе которых можно построить решение краевой задачи.

Рассмотрим конформное отображение $kZ(w)$ области w , представляющей собой верхнюю полуплоскость комплексного переменного, на область z , внешнюю по отношению к рассеивателю:

$$kZ = kZ(w), \quad r_z = r_z(w), \quad \varphi_z = \varphi_z(w), \quad (4.3)$$

где r_z и φ_z — полярные координаты точки в области z , являющиеся функциями комплексной переменной w .

Конформное отображение $kZ(w)$ выбираем таким, чтобы между точками областей z и w существовало взаимно однозначное соответствие. Действительная ось области w соответствует границе рассеивателя в области z .

В области w функция P удовлетворяет волновому уравнению с переменным волновым числом

$$\Delta_w P + k^2 |dz/dw|^2 P = 0, \quad (4.4)$$

однако можно выделить семейство кривых

$$k |dz/dw| = |d(kz)/dw| = |d| = r_d = \operatorname{const}, \quad (4.5)$$

на которых переменное волновое число $k |dz/dw|$ постоянно. Назовем термином «кривая r_d » ту кривую из семейства $r_d = \operatorname{const}$, на которой $r_d = 1 = r_{d0}$, а волновое число равно первоначальному волновому числу.

Для построения интегрального представления решения воспользуемся методикой, которую применил Зоммерфельд [29, 37, 38]. Решение краевой задачи для рассеянного поля представим в виде интеграла по отрезкам замкнутого контура в области комплексного переменного. В подынтегральное выражение интегрального представления включим функцию P^c , представляющую собой аналитическое продолжение функции падающего поля P с какой-либо из кривых r_{d0} области w в область комплексного переменного \hat{w} .

Предположим, что существует замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющая условиям:

- а) на кривой r_{d0} должно выполняться $\hat{w} = w$, $P^c(\hat{w}) = P(w)$;
- б) в области w функция $P(w)$ должна удовлетворять волновому уравнению (4.4);
- в) в области \hat{w} функция $P^c(\hat{w})$ должна быть аналитической.

При подстановке координат переменной \hat{w} вместо координат w в функции P и S меняются как характер зависимости этих функций от координат, так и их свойства. Функция эйконала $S(w)$ преобразуется в функцию обобщенного эйконала $S^c(\hat{w})$, это преобразование дает название всему методу МОЭ. Функция геометрической оптики $P(w)$ преобразуется в обобщенную функцию геометрической оптики $P^c(\hat{w})$.

Рассмотрим обобщенную функцию геометрической оптики, которая на кривой r_{d0} в области z зависит от действительных переменных и имеет вид (4.1), а в текущей точке интегрирования вспомогательной области \hat{w} равна

$$P^c(\hat{w}) = A(\hat{w}) \exp[iS^c(\hat{w})]. \quad (4.7)$$

Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий освещенные участки области \hat{w}_{12} . Под освещенными участками понимаются области присутствия на r_{d0} (в смысле геометрической оптики) функции P^c , под теньвыми — области ее отсутствия. Тогда при помощи теоремы Коши о вычетах можно построить интегральное представление функции $P^c(\hat{w})$ в точке наблюдения w_0 на кривой r_{d0} , которая находится на пересечении областей \hat{w}_{12} и w_{12} (т. е. одновременно находится в

областях \hat{w}_{12} и w_{12}):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = K \cdot P^c(w_0), \quad (4.8)$$

где $K = 1$, если w_0 находится внутри контура, и $K = 0$, если вне его.

Область \hat{w}_{12} можно построить на кривой r_{d0} при помощи аналитического продолжения угловой переменной φ_w в комплексную область, а функцию P^c можно построить, преобразовав определенным образом функцию P .

Пусть в области \hat{w}_{12} существуют участки, на которых $P^c(\hat{w})$ убывает при увеличении волнового числа k . Назовем эти участки области \hat{w}_{12} «участками сходимости». Фрагменты контура интегрирования проходят через седловые точки по участкам сходимости $s1$ и $s2$.

Для области с двумя участками сходимости $s1$ и $s2$ получим:

$$K \cdot P^c(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} + \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right], \quad (4.9)$$

где C — оставшаяся после выделения $s1$ и $s2$ часть замкнутого контура интегрирования.

Обозначив в (4.9) сумму интегралов по сходящимся участкам $s1$ и $s2$ как $v(w_0)$, а интеграл по оставшейся части C как

$$V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w},$$

получим выражение:

$$V(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + v(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right]. \quad (4.10)$$

Знаки интегралов по $s1$ и $s2$ отличаются, поскольку направления прохода по этим участкам по отношению к центру координат противоположны.

Применяя метод стационарной фазы, вычислим интеграл вида (4.10) [46]. Пусть существует седловая точка \hat{w}_{sm} функции $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$, в которой $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$. Тогда для преобразования соответствующего интеграла можно совершить шаги в соответствии с методикой, примененной в [25]. При этом несингулярная часть подынтегральной функции разлагается в ряд по степеням переменной интегрирования, после чего первый член этого ряда удерживается и выносится за знак интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} &= \frac{\exp[iS^c(w_0)]}{2\pi i} \int_{sm} \frac{A(\hat{w}) [S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)] \exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{\hat{w} - w_0 S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} \approx \\ &\approx \frac{A(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)]}{2\pi i} \frac{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}{\hat{w}_{sm} - w_0} \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Записав в окрестности седловой точки \hat{w}_{sm} разность эйконалов при помощи разложения в ряд Тейлора функции $S^c(\hat{w})$, где $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$:

$$S^c(\hat{w}) - S^c(\hat{w}_0) \approx S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(\hat{w}_0) + [S^c(\hat{w}_{sm})]'' \frac{(\hat{w} - \hat{w}_{sm})^2}{2} + \dots, \quad (4.12)$$

можно, ограничившись в разложении (4.12) двумя первыми членами, вычислить интеграл из правой части выражения (4.11) при помощи метода стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{w} i \int_{\infty}^1 \exp[iS^c(\hat{w})t - iS^c(w_0)t] dt = \\ &= i \int_{\infty}^1 \exp[-iS^c(w_0)t] dt \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iS^c(\hat{w})t] d\hat{w} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq.$$

При выводе были использованы выражения

$$\frac{\exp(iz^2)}{z^2} = i \int_{\infty}^1 \exp(iz^2 t) dt,$$

а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{2}[S^c(\hat{w}_{sm})]''(\hat{w} - \hat{w}_{sm})^2 t\right\} d\hat{w} = \sqrt{\frac{2\pi i}{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' t}}.$$

Таким образом, доказана справедливость выражения

$$\int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} = \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.11), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \approx \frac{2iA(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)] \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq, \quad (4.14)$$

где знак интеграла берется с учетом направления прохода по контуру в окрестности \hat{w}_{sm} . В случае двух седловых точек (одна граница «свет—тень» для отраженного поля и одна — для прошедшего) получаем (см. [46]):

$$v(w_0) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \frac{2i\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq, \quad (4.15)$$

справедливое для рассеивателей сложной формы.

Вдали от границы тени произведение двух последних множителей в (4.15)

$$v(w_0) \approx \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}}. \quad (4.16)$$

При получении выражения (4.15) мы предположили, что замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющая условиям (4.6), уже проведена. Однако для рассеивателя произвольной формы для рассеянного поля формулу (4.15) пока удастся получить лишь эвристически (см. [46]). В явном виде выражение для замены переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющей условиям (4.6), удастся получить для рассеивателей простой формы, когда система координат позволяет провести разделение переменной. Например, в случае дифракции на клине с внешним углом πn можно получить (см. [46]):

$$kz(w) = \frac{1}{n} w^n, \quad \frac{\partial}{\partial w} [kz(w)] = w^{n-1}. \quad (4.17)$$

Кривая r_{d0} в случае клиновидного рассеивателя представляет собой фрагмент окружности $|w| = 1$. Поскольку точка наблюдения w_0 находится на окружности r_{d0} , то $r_{w0} = |w_0| = 1$. В области z на этой окружности выполняется $kr_{z0} = 1/n$.

Пусть (r_{z0}, φ_{z0}) и (r_{w0}, φ_{w0}) — координаты точки наблюдения в областях z и w соответственно. Выберем функцию P^c следующим образом: зафиксируем радиальную координату $r_z = r_{z0}$, а угловую координату сделаем комплексной, $\varphi_z \rightarrow \varphi_z^c$. Тогда получим $P^c = \exp[-ikz_{z0} \cos(\varphi_z^c - \varphi_0)]$. Для установления зависимости $P^c(\hat{w})$ следует установить связь между переменными \hat{w} и φ_z^c .

Замена переменной (4.6) для клина (4.17) имеет вид $w \rightarrow \hat{w}(r_{w0})$ (или $\varphi_w \rightarrow \varphi_w^c$) (см. [46]):

$$w = r_w \exp(i\varphi_w), \quad \hat{w}(r_{w0}) = r_{w0} \exp(i\varphi_w^c) = \hat{r}_w \exp(i\varphi_w),$$

$$\varphi_w^c = i \ln(r_{w0}) - i \ln[\hat{w}(r_{w0})] = i \ln(r_{w0}) - i \ln(\hat{r}_w) + \varphi_w = -i \ln\left(\frac{\hat{r}_w}{r_{w0}}\right) + \varphi_w, \quad (4.18)$$

где $r_{w0} = |w_0|$, w_0 — точка наблюдения, которая всегда находится на кривой r_{d0} .

Функция P зависит от переменных (r_z, φ_z) , причем $r_z = |z|$, $\varphi_z = \arg(z)$. Преобразования такого рода не являются аналитическими, поэтому функция P удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца (4.2), а не уравнению Лапласа. Если зафиксировать $r_z = r_{z0} = r_{w0}^n / (kn)$, положив $r_w = r_{w0}$, то на этой окружности получим

$$\varphi_z^c = -i \ln(z) + i \ln(r_{z0}) = -i \ln\left(\frac{w^n}{kn}\right) + i \ln\left(\frac{r_{w0}^n}{kn}\right) = n\varphi_w^c, \quad (4.19)$$

при этом $P^c(\hat{w})$ — аналитическая функция от \hat{w} (см. [46]) и удовлетворяет условиям (4.6).

Замена переменной (4.18) в интегральном представлении (4.15) приводит к результату, который в точности совпадает с интегральным представлением Зоммерфельда. В классических работах Зоммерфельда [29, 37, 38] доказано, что функция, аналогичная $V(w_0)$ (4.10), характеризует полное поле. В книге [46] приведена общая формула для поля $V(\varphi)$ в точке наблюдения (r, φ) , возбужденного источником, находящимся в точке (r_0, φ_0) и рассеянного идеально проводящим клином с внешним углом раствора πn при нормальном падении на кромку ТН- или ТЕ-поляризованной электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) - v(\varphi + \varphi_0) \quad (TH), \\ V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) + v(\varphi + \varphi_0) \quad (TE), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$v(\psi) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi i \frac{rr_0}{r+r_0}}} \frac{\frac{i}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{2i \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}{\exp[iS(w_{sm}) - iS(\psi)]} \frac{\sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}{\int_{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}^{\infty \sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}} \exp(iq^2) dq}. \quad (4.21)$$

Здесь $P(w_{sm})$ — поле источника в седловой точке w_{sm} (с геометрической точки зрения это соответствует ситуации, когда кромка находится на линии, соединяющей точку наблюдения с источником), а входящие в формулу эйконал $S(\psi)$ и эйконал в седловой точке $S(w_{sm})$ равны:

$$S(w_{sm}) = k(r + r_0), \quad S(\psi) = k\rho = k\sqrt{(r + r_0)^2 - 2rr_0(1 + \cos \psi)}, \quad \psi = \varphi \mp \varphi_0. \quad (4.22)$$

Область, внешняя по отношению к клину, занимает пространство углов $0 < \varphi < \pi n$.

Рассмотрим интегральное представление для рассеянного поля в случае двух седловых точек (4.15) и его частный случай для дифракции на клине (4.21).

Каждое из двух слагаемых в правой части выражения (4.21) состоит из четырех множителей. Первый множитель

$$\frac{\sqrt{i}P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi k \frac{rr_0}{r+r_0}}} \quad (4.23)$$

не зависит от угловой переменной и представляет собой произведение значения поля в седловой точке (т. е. на границе тени) на фактор, определяющий зависимость решения от расстояний до источника и точки наблюдения.

Второй множитель

$$\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \quad (4.24)$$

представляет собой половину дифракционного коэффициента. Полный дифракционный коэффициент для определенного вида поляризации получится, если сложить или вычесть значения этого множителя в точке наблюдения:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (4.25)$$

Произведение третьего и четвертого множителей

$$\frac{2i \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\int_{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq} \quad (4.26)$$

представляет собой частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику и характеризует зависимость поля от углового расстояния до границы тени. Вдали от границы «свет—тьень» это произведение равно 1. На границе «свет—тьень» этот множитель равен нулю и компенсирует сингулярность половины дифракционного коэффициента (4.24). Эта компенсация приводит к тому, что на границе «свет—тьень» у полубесконечного рассеивателя поле равно $\frac{1}{2}$ от поля геометрической оптики.

Некоторые исследователи стремятся привести решение именно к такому виду, когда сингулярность дифракционного коэффициента скомпенсирована, а решение с нескомпенсированной сингулярностью считают неполноценным. Однако в [39, 40], было показано, что для трехмерных рассеивателей компенсировать сингулярность неверно. Интегрирование сингулярных дифракционных коэффициентов по замкнутому контуру автоматически компенсирует все сингулярности, приводя к правильному результату.

Изменяя вид сомножителей (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) или входящих в них параметров, можно построить множество эвристических решений: для рассеивателей двумерных или трехмерных, конечного или бесконечного размера, с выполнением или без выполнения условия дальней зоны, для разных видов граничных условий и профиля кромок.

Для более общей формулы (4.15) разделение на слагаемые можно провести аналогично. Соотношением (4.15) следует пользоваться в случае, когда рассеиватель имеет сложную форму.

5. ТРЕХМЕРНОЕ РЕШЕНИЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим в приближении физической оптики задачу дифракции электромагнитного поля на плоском трехмерном рассеивателе при выполнении условия дальней зоны. Пусть на поверхность рассеивателя падает электромагнитное поле \vec{E}^0, \vec{H}^0 .

При рассеянии электромагнитной волны на теле конечных размеров решение для комплексных векторных амплитуд электрического и магнитного полей можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div } \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e \right) - \text{rot } \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div } \vec{A}^m + k^2 \vec{A}^m \right) + \text{rot } \vec{A}^e. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$.

В дальней зоне ($kR \rightarrow \infty$) в сферических координатах можно записать

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = ik (A_\vartheta^e + A_\varphi^m), \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = ik (A_\varphi^e - A_\vartheta^m), \\ E_r &= H_r = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $A_z, A_\vartheta, A_\varphi$ связаны с A_x, A_y, A_z через известные из справочников линейные преобразования физических координат вектора. Компоненты A_x, A_y, A_z в свою очередь определяем путем интегрирования соответствующих компонент поверхностных токов по рассеивающей поверхности в

приближении физической оптики

$$\vec{A}^e(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} [\vec{n} \times \vec{H}^0] ds, \quad \vec{A}^m(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} [\vec{n} \times \vec{E}^0] ds, \quad (5.3)$$

где нормаль \vec{n} к поверхности S направлена в сторону области, занятой полем.

Интеграл по поверхности рассеивателя можно связать с интегралом по его контуру при помощи теоремы Стокса

$$I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \oint_C (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt, \quad (5.4)$$

где \vec{n}^j — единичная внутренняя нормаль к контуру C , окружающему рассеиватель, $\vec{\rho}'$ — единичный вектор, касательный к контуру, t — координата, отсчитываемая вдоль контура. Если рассеиватель представляет собой многоугольник с N вершинами, тогда:

$$I_j = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} dt = \frac{ia_j (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_{j-1})},$$

или $I = \sum_{j=1}^N I_j$, $I_j = \frac{ia_j (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \sin(\Phi_j - \Phi_{j-1})/2}{k|\vec{\Delta}|^2 (\Phi_j - \Phi_{j-1})/2} \exp\left[\frac{i(\Phi_j + \Phi_{j-1})}{2}\right]$, (5.5)

где $\Phi = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho})$ — фаза в точке интегрирования, $\Phi_j = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)$ — фаза сигнала j -ой вершины с направляющим вектором $\vec{\rho}_j$, a_j — длина j -ой стороны многоугольника (расположенной между $(j-1)$ -ой и j -ой вершинами). Если точка наблюдения расположена на дифракционном конусе, когда $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$, тогда:

$$|\vec{\Delta}| = |(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)|, \quad (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) = (\vec{n}', \vec{n}^j) - (\vec{n}'', \vec{n}^j) = \sin\beta(-\cos\varphi_0 - \cos\varphi), \quad (5.6)$$

где $(\varphi_0 + \pi)$ и φ — углы между проекциями направляющих векторов \vec{n}' и \vec{n}'' на плоскость, перпендикулярную $\vec{\rho}'$, и внутренней нормалью \vec{n}^j к контуру C , β — угол между \vec{n}' (или \vec{n}'') и $\vec{\rho}'$ (эти вектора составляют одинаковый угол с кромкой, поскольку на дифракционном конусе не только \vec{n}' , но и \vec{n}'' направлен вдоль образующей конуса, которая задается вектором \vec{n}'). И, наконец, получаем на дифракционном конусе для j -ой стороны

$$I_j = \frac{ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)} = \frac{-ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k \sin\beta (\cos\varphi_0 + \cos\varphi)}, \quad (5.7)$$

при этом $\Phi_{j-1} = \Phi_j$.

В формулах (5.5) I_j представляет собой вклад j -ой стороны. В этом выражении фигурируют две фазы прилегающих к стороне вершин. Сумму из (5.5) можно преобразовать таким образом (см. [46]):

$$I = \sum_{j=1}^N I_j = \sum_{j=1}^N I^j, \quad \text{где} \quad I^j = \frac{\exp\{i\Phi_j\}}{k^2 |\vec{\Delta}|^2} \left[\frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} - \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} \right]. \quad (5.8)$$

Слагаемые I^j иногда называют *вершинными волнами*, поскольку каждому слагаемому соответствует фаза одной из вершин. Однако на самом деле вклад вершин в физическом интеграле никак не учитывается, поскольку контурный интеграл I характеризует лишь вклад сторон.

В случае положения плоскости падения и наблюдения перпендикулярно кромке, расположенной в начале координат (т. е. на дифракционном конусе j -ой стороны с параметрами $\beta = \pi/2$,

$\Phi_{j-1} = \Phi_j$) из (5.2) и (5.7) следует:

$$\begin{pmatrix} E_\varphi \\ E_\vartheta \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} A_\varphi^e \\ A_\varphi^e \end{pmatrix} = \frac{ik \exp(ikR)}{2\pi R} I_j \begin{pmatrix} [\vec{n} \times \vec{H}^0] \\ [\vec{n} \times \vec{H}^0]_\vartheta \end{pmatrix}_\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Это выражение соответствует случаю трехмерной дифракции на стороне ограниченной длины a_j . Для перехода к двумерному случаю следует провести интегрирование по всей стороне от $-\infty$ до ∞ . С учетом выражения для функции Ханкеля и его асимптотики:

$$\frac{a_j \exp(ikR)}{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{ik\sqrt{r_1^2 + z^2}\}}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} dz = i\pi H_0^{(1)}(kr_1) \cong \sqrt{2\pi i} \frac{\exp(ikr_1)}{\sqrt{kr_1}}. \quad (5.10)$$

Здесь r_1 — это расстояние от кромки до точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной кромке. Переменная r_1 — аналог r из двумерного пространства, рассматриваемого в [25].

Интегрируя при $-\infty < a_j < \infty$, получим для двумерного случая

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Здесь f^0 и g^0 — введенные в [25] сингулярные дифракционные коэффициенты идеально проводящей полуплоскости в приближении физической оптики для случаев ТН- и ТЕ-волны соответственно:

$$\begin{aligned} f^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TH), \\ g^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TE). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Существует аналогичная формула для строгого двумерного решения

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

и соответствующие дифракционные коэффициенты

$$\begin{aligned} f(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TH), \\ g(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TE). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Очень важным является то обстоятельство, что из решения для трехмерной кромки (5.9) можно выделить те же дифракционные коэффициенты, которые фигурируют в известном из [25] решении двумерной задачи (5.11).

Формулы (5.14) соответствуют формуле (4.25) для случая $n = 2$, когда клин превращается в полуплоскость.

Физический смысл дифракционных коэффициентов (5.12) и (5.14) состоит в том, что дифракционные коэффициенты (5.12) описывают поле в приближении физической оптики, т. е. без учета возмущения поля краем полуплоскости, а дифракционные коэффициенты (5.14) описывают поле с учетом возмущения на краю идеально проводящей полуплоскости.

Соотношение между строгим решением двумерной задачи (5.13) и физическим (5.11) соответствует формуле из [30], устанавливающей, что двумерное решение в приближении физической оптики $v^0(r, \psi)$ для рассеянного поля, непрерывного на двулистной римановой поверхности, имеет вид, с точностью до множителя $\sin \frac{\psi}{2}$ соответствующий строгому решению $v(r, \psi)$:

$$v^0(r, \psi) = \sin \frac{\psi}{2} v(r, \psi), \quad \text{где } \psi = \varphi \mp \varphi_0. \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) отражает соотношение между дифракционными коэффициентами (5.14) строго двумерного решения и физоптическими дифракционными коэффициентами в случае дифракции на полуплоскости, в том числе — соотношение между асимптотиками физоптического и строгого решений при удалении от границы «свет—тень». Что касается трехмерного случая, то для него строгого решения не существует, поэтому непосредственно проверить соотношение (5.15) невозможно. Однако можно предположить, что и в трехмерном случае соотношение (5.15) сохранится, и именно это предположение мы будем использовать при построении эвристического решения. Аналогичное предположение лежит в основе метода краевых волн (см. [25]).

Формулы (5.12) и (5.14) соответствуют случаю идеально проводящей полуплоскости, когда коэффициенты отражения и прохождения R и T принимают значения $R = \pm 1$, $T = 0$.

В [14, 17, 46] была рассмотрена функция, обобщающая дифракционные коэффициенты f и g из (5.14):

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - T}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{R}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \quad (5.16)$$

Аналогичное выражение имеет место для дифракционных коэффициентов физической оптики f^0 и g^0 из (5.12):

$$fg^0(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left[(1 - T) \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + R \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right]. \quad (5.17)$$

Здесь R и T — соответственно коэффициенты отражения и прохождения, описывающие взаимодействие плоской волны с плоской безграничной поверхностью.

Для R и T , соответствующих ТН- или ТЕ-поляризации, дифракционные коэффициенты (5.16) можно подставлять вместо f или g в (5.13), а дифракционные коэффициенты (5.17) можно подставлять вместо f^0 и g^0 в (5.11).

При $T = 0$, $R = -1$ получим выражения для сингулярных дифракционных коэффициентов идеально проводящей полуплоскости в случае падения ТН-поляризованной электромагнитной волны (см. [25]). В частности, для физоптических дифракционных коэффициентов связь между (5.14) и (5.17) можно описать так: $fg^0(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f^0(\varphi, \varphi_0)$, $fg^0(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g^0(\varphi, \varphi_0)$. Аналогичные выражения можно получить и для дифракционных коэффициентов строгого решения: $fg(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f(\varphi, \varphi_0)$, $fg(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g(\varphi, \varphi_0)$.

Таким образом, в физоптическом решении [16] можно выделить важные особенности [46]:

- решение для многоугольной пластины представляет собой сумму вкладов отдельных кромок;
- из вклада отдельной кромки в случае дифракционного конуса можно выделить сингулярный дифракционный коэффициент, совпадающий с дифракционным коэффициентом двумерной задачи;
- в направлении зеркального отражения вклады всех кромок сингулярны, но в сумме дают правильный результат [39];
- изменив порядок суммирования, можно представить решение в виде вкладов вершин.

Меняя в (5.5) порядок суммирования слагаемых, можно записать решение задачи дифракции как в виде вкладов сторон, так и в виде вершинных волн (5.8). Выделяя в решении (5.5) дифракционные коэффициенты, можно установить связь между двумерными и трехмерными решениями. Заменяя в (5.5) дифракционные коэффициенты (о чем будет сказано далее), можно получать решение в приближении МКВ для трехмерного рассеивателя, а затем уточнить это решение при помощи функционального множителя.

6. АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим выражения для дифракционных коэффициентов (5.12), (5.14) и сравним их между собой. Каждый дифракционный коэффициент (5.12) или (5.14) состоит из двух слагаемых, которые получаются в результате применения операции сложения или вычитания (4.20) к выражению (4.21). В выражении (4.21) для полубесконечного рассеивателя (клина) фигурируют интегралы Френеля, но вдали от границы «свет—тень» частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику равно 1. Поэтому выражения (5.12) или (5.14) имеют место лишь вдали от границы «свет—тень». В окрестности границы «свет—тень» частные от деления интегралов

Френеля на свои асимптотики (4.26), будучи умноженными на сингулярные дифракционные коэффициенты (4.24), компенсируют эти сингулярности и обеспечивают непрерывность решения. Для рассеивателя конечного размера можно пользоваться сингулярными дифракционными коэффициентами для каждого элемента кромки, поскольку в данном случае непрерывность всего решения в целом будет обеспечена интегралом по замкнутому теневому контуру [39, 40, 46]. Поэтому мы будем говорить о сингулярных дифракционных коэффициентах, имея в виду, что решение в целом является непрерывным.

Сравним между собой выражения (5.12) и (5.14). Знаменатели, как половинок дифракционных коэффициентов, так и выражений в целом, одинаковы, в то время как числители отличаются. Этому обстоятельству можно дать физическую интерпретацию. Назовем знаменатели «геометрической» частью дифракционного коэффициента, а числители — «поляризационной» частью. Геометрическая часть зависит от геометрии задачи, а поляризационная часть — от профиля кромки и от граничных условий.

Заменяя поляризационные составляющие дифракционных коэффициентов в выражениях для интегралов по кромке, можно получить эвристические решения множества задач. Так, при помощи замены поляризационной составляющей дифракционных коэффициентов в физоптических формулах были получены эвристические решения задач дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе [12, 45, 46], на неоднородности в среде распространения упругой волны [44, 46] и на полупрозрачной полуплоскости [14, 17].

6.1. Применение МБК для получения дифракционных коэффициентов полупрозрачной полуплоскости. Построим эвристическое решение для полупрозрачной полуплоскости с граничными условиями [17]. Сравним эвристическое решение с численным решением для случая дифракции электромагнитной волны ТН-поляризации на полуплоскости с граничными условиями типа тонкого слоя [2, 18]:

$$\begin{cases} H_{x+} - H_{x-} = -Z^{-1}E_z, \\ E_{z+} = E_{z-} = E_z, \end{cases} \quad (6.1)$$

где импеданс $Z = iX$, X — параметр, i — мнимая единица. Здесь знаки «+» и «-» соответствуют областям $y > 0$ и $y < 0$ соответственно.

Рассмотрим плоский трехмерный рассеиватель, представляющий собой фрагмент плоской поверхности, граничные условия на которой характеризуются коэффициентами отражения и прохождения R и T для задачи взаимодействия волны с плоской безграничной поверхностью с рассматриваемыми граничными условиями типа тонкого слоя:

$$R = \frac{W_0}{-2i \sin(\varphi_0) X - W_0}, \quad W_0 = 120\pi, \quad (6.2)$$

$$T = 1 + R. \quad (6.3)$$

Здесь X — изменяемый параметр, от которого зависит коэффициент отражения.

Заметим, что при $X = 0$ выполняется $R = -1$, $T = 0$, что соответствует параметрам идеально проводящей полуплоскости при ТЕ-поляризации падающей волны. Как уже было сказано, МБК позволяет создавать эвристические формулы на основе любого строгого решения. Подставим значения параметров R и T из (6.2) и (6.3) в обобщенный дифракционный коэффициент (5.16) и физоптический дифракционный коэффициент (5.17). Сравним получившиеся зависимости со строгим численным решением.

Результаты численного расчета строгого решения и выражения (6.2) для коэффициентов R и T , соответствующие граничным условиям (6.1), были предоставлены С. Е. Банковым. Решение основано на методе Винера—Хопфа [22, 23].

По мере изменения параметра X от 0 до бесконечности коэффициент отражения R меняется от -1 до 0. Поэтому можно считать, что параметр X характеризует прозрачность рассеивателя. Чем больше X , тем больше прозрачность. Исследуя поведение строгого решения, можно убедиться, что по мере увеличения прозрачности строгое решение смещается от решения ОДК к физоптике.

Это смещение можно описать при помощи переходной функции [17]

$$cx(X, \varphi) = 1 - x(X) \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi - \varphi}{1 + x(X)} \right] \right\}, \quad x(X) = 1 - \exp(-0,003 |X|). \quad (6.4)$$

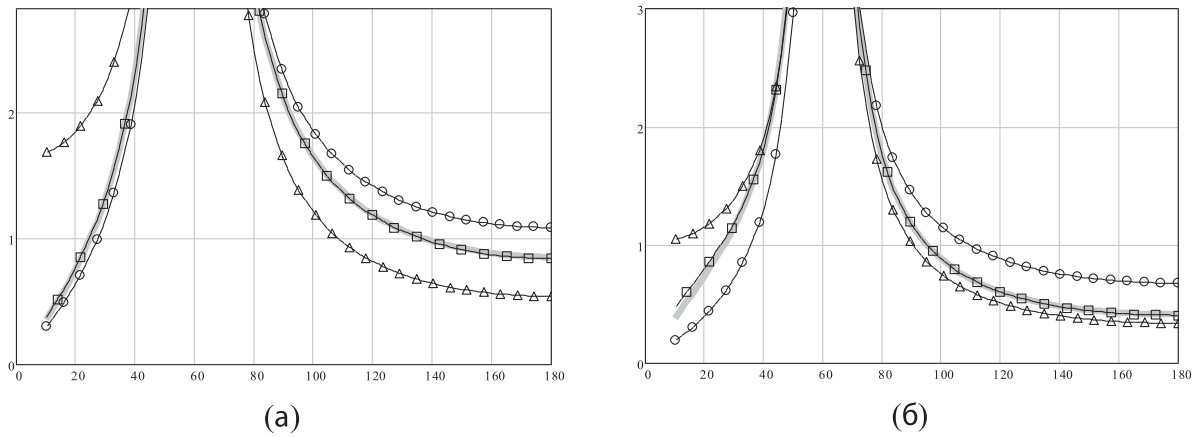


Рис. 1. Сравнение дифракционного коэффициента строгого решения для полупрозрачной полуплоскости (сплошная серая линия) с эвристическими решениями ОДК (5.14) (кружки), физической оптикой (5.12) (треугольники) и решением (6.5) (квадратики). Угол падения $\varphi_0 = 120^\circ$. Значения параметра прозрачности: (а) $X = 80$, ($|R| = 0,939$), (б) $X = 300$, ($|R| = 0,587$).

При $X \rightarrow 0$ выполняется $x \rightarrow 0$, $cx(X, \varphi) \rightarrow 1$. При $X \rightarrow \infty$ имеем: $x \rightarrow 1$, $cx(X, \varphi) \rightarrow \sin(\varphi/2)$. В результате можно построить эвристическую формулу

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{cx(X, \varphi_s)}{cx(X, \varphi)}, \quad (6.5)$$

которая при всех значениях входных параметров с высокой точностью совпадает с численным решением [17]. Здесь $cx(X, \varphi_s)$ — значение функции $cx(X, \varphi)$ в точке сингулярности $\varphi_s = \pi - \varphi_0$, т. е. на границе «свет—тень». Нормировка переходной функции $cx(X, \varphi)$ на свое значение в точке сингулярности сделана потому, что значение функции $fg(R, T, \varphi_s, \varphi_0)$ (5.16) в точке сингулярности является правильным и совпадает с $fg^0(R, T, \varphi_s, \varphi_0)$ (5.17).

Результаты расчета приведены на рис. 1 (а), (б). Из этого рисунка видно, что по мере увеличения параметра прозрачности X строгое решение (сплошная серая линия) отходит от решения ОДК (5.14) (кружки) и перемещается к физоптическому решению (5.12) (треугольники), в то время как эвристическое решение (6.5) (квадратики) практически совпадает со строгим.

Расчеты показывают, что совпадение эвристического и строгого решения имеет место для всех углов падения φ_0 . Небольшие отличия между расчетами по эвристической формуле (6.5) и строгим решением имеют место лишь в окрестности угла $\varphi = 0$, там строгое решение стремится к нулю сильнее, чем эвристическая формула. Как уже было сказано, чем больше прозрачность рассеивателя, тем в большей степени строгое решение совпадает с физоптическим (5.12).

При помощи данной методики можно строить эвристические аналитические решения на основе строгих численных решений рассеивателей с разными типами граничных условий. При этом не требуется получать строгие аналитические решения. Простой вид базовых компонентов, имеющих ясное физическое объяснение, позволяет исследовать физические особенности процесса дифракции при помощи сравнения друг с другом решений ОДК, ФО и строгого при разных значениях входных параметров. Применяя автономные эвристические формулы вместо строгого решения, можно существенно повысить быстродействие вычислений без потери точности, но с сохранением простоты и физичности эвристических выражений.

Таким образом, применяя принципы МБК, мы на основе двух типов дифракционных коэффициентов (5.12) и (5.14), а также выражений для R и T (6.2) и (6.3) построили дифракционный коэффициент, с высокой точностью совпадающий со строгим численным решением задачи со сложными граничными условиями (6.1) при всех значениях входных параметров.

Аналогичным образом можно строить дифракционные коэффициенты и для других задач. Суть предлагаемой методики (находить баланс между решением с возмущением вблизи кромки и без него) останется той же при изменении граничных условий, типов возбуждения и физической природы волн.

6.2. Коррекция дифракционных коэффициентов на вершинах. Задача дифракции на плоском идеально проводящем угловом секторе является одной из важных ключевых задач. Существуют эвристические решения данной задачи в приближении ГТД и МКВ. Подробнее об этом см. в [12, 45, 46].

По поводу ее сложности достаточно сказать, что между получениями строгих аналитических решений для идеально проводящей полуплоскости и плоского углового сектора прошло более 100 лет. Рост сложности можно объяснить ростом размерности задачи: дифракция на полуплоскости является двумерной задачей, а дифракция на плоском угловом секторе — трехмерной задачей. По аналогии можно прогнозировать уменьшение сложности при переходе от двумерной задачи к одномерной. Напомним, что МБК строится на основе одномерных задач для R и T , а ГТД и МКВ — на основе двумерных.

Как известно, МКВ и аналогичные подходы, такие, как метод эквивалентных контурных токов (МЭКТ), дают достаточно точное решение только на дифракционных конусах, а вне этих направлений решение является неточным. МБК дает возможность скорректировать решение МЭКТ при помощи функциональных множителей типа [12, 46]

$$c(\varphi, \varphi_0) = \frac{f(\varphi, \varphi_0)}{f^0(\varphi, \varphi_0)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \varphi_0} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}. \quad (6.6)$$

Здесь f и f^0 — дифракционные коэффициенты двумерных физоптического и строгого решений для идеально проводящей полуплоскости (5.12) и (5.14) соответственно.

Физический смысл применения формулы (6.6) состоит в том, что она корректирует дифракционный коэффициент физической оптики таким образом, чтобы учесть возмущение поля, т. е. неравномерность амплитуды поля строгого решения вблизи кромки. В приближении МЭКТ ток на кромке имеет постоянную амплитуду. Применение множителей типа (6.6) приводит к уточнению решения, поскольку позволяет учесть возмущение поля вблизи вершины, т. е. вблизи конца кромки.

Поскольку решение (6.5) соответствует приближению физической оптики при больших значениях параметра прозрачности X , можно предположить, что в данном случае коррекция (6.6) на вершинах не потребуется. Это следует из того, что в данном случае дифракционный коэффициент (6.5) соответствует приближению физической оптики. Подстановка его вместо дифракционного коэффициента ОДК в числитель выражения (6.6) приведет к тому, что это выражение будет стремиться к 1. Таким образом, для больших значений прозрачности физоптическое решение может правильно описывать не только двумерное решение, но и вершинные волны. Для непрозрачных рассеивателей множитель (6.6) будет отличаться от 1 и поэтому оказывать влияние на вершинную волну. Степень прозрачности рассеивателя можно оценить, исследуя R и T для заданных граничных условий.

7. БАЗОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ МБК

Как уже было сказано, в соответствии с МБК эвристическая формула строится при помощи сочетания базовых компонентов, которые выбираются из имеющегося набора в зависимости от условий задачи. Точность эвристического решения проверяется при помощи верификации.

В состав базовых компонентов к настоящему моменту предлагаем включить следующие формулы.

7.1. Поверхностный физоптический интеграл. Поверхностный (с формулой перехода в линейный) физоптический интеграл с выделением вкладов отдельных кромок (5.5).

7.2. Компоненты двумерной формулы. Компоненты двумерной формулы для рассеянного поля $v(r, \psi)$ (4.15), (4.21): зависимость от расстояний от источника и точки наблюдения до кромки, зависимость от угла до границы «свет—тень», дифракционные коэффициенты.

7.3. Коэффициенты R и T . Коэффициенты R и T для безграничной плоской поверхности. В данной статье мы в качестве примера применили выражения (6.2), (6.3), но могут быть и другие. Конкретные значения R и T определяются заданным видом граничных условий.

7.4. Дифракционные коэффициенты ОДК. Дифракционные коэффициенты ОДК (5.16) и ФО (5.17) с R и T . Эти формулы характеризуют рассеянное поле с учетом возмущения на краю полуплоскости и без учета такого возмущения.

7.5. Поляризационная составляющая дифракционного коэффициента. Поляризационная составляющая дифракционного коэффициента (числитель): зависимость от формы профиля (МОЭ) (4.15), поляризации падающего поля (4.20), (4.21), типа решения (физоптическое/строгое (5.12)/(5.14)), граничных условий (5.16), (5.17).

7.6. Геометрическая составляющая дифракционного коэффициента. Геометрическая составляющая дифракционного коэффициента (знаменатель): зеркальный/незеркальный угол отражения дифракционного коэффициента [46].

7.7. Модифицирующая функция. Модифицирующая функция $s(\varphi, \varphi_0)$ (6.6) для МЭКТ. Результирующие выражения получаются проще, чем строгое аналитическое решение [12, 45, 46].

7.8. Переходная формула. Переходная формула $cx(X, \varphi)$ (6.4) для дифракционного коэффициента полупрозрачного рассеивателя на основе формул ОДК и ФО [14, 17]. Для другого вида граничных условий переходная формула может измениться или остаться той же.

По мере проведения дальнейших исследований набор базовых компонентов может пополняться. Также базовые компоненты можно комбинировать между собой, что расширяет область их применения.

8. Точность и эффективность ГТД, МКВ и МБК

Математической строгостью эвристические решения не обладают. Точность (т. е. согласие со строгим решением той же задачи) проверяется верификацией, т. е. непосредственным сравнением с этим строгим решением. Обычно поправки в эвристические решения не вносят, но априори (на основе предварительных исследований задач со сходными условиями) знают точность этих решений. Точность эвристических решений зависит не только от свойств рассеивателя (формы и граничных условий), но и от геометрии задачи (т. е. от взаимного расположения рассеивателя, источника и точки наблюдения). Иногда эта точность бывает очень велика, иногда — достаточна, иногда — невысока (см. [45]).

Тем не менее, при необходимости увеличить точность и довести ее до заданных величин МБК предусматривает проведение процедуры настройки при помощи добавления к решению феноменологических корректирующих функций. Эти зависимости можно выявить при помощи сравнения строгого и эвристического решения для всех значений входных параметров. Чем лучше изначально построено решение на основе базовых компонентов, тем меньше потребуется изменять его для достижения заданной точности.

Отличие МБК от ГТД и МКВ состоит в том, что ГТД и МКВ используют строгие двумерные решения, в то время как МБК использует строгие одномерные решения (R и T). Одномерные решения получать проще, чем двумерные, для одномерных функций чаще существуют аналитические выражения. Поэтому МБК позволяет получить аналитические выражения, в то время как ГТД и МКВ используют готовые двумерные решения. Таким образом, МБК дает возможность получать аналитические формулы, обладающие большей эффективностью (простотой и точностью), чем решения в приближениях ГТД и МКВ.

При помощи МБК можно получить более точное решение путем использования строгого решения исходной задачи в качестве исходных данных (сравнивая с эвристическими формулами и применяя инженерные формулы-поправки), в то время как ГТД и МКВ если и используют строгое решение, то в основном для проверки. Это связано с тем, что при создании ГТД и МКВ компьютерная техника была не столь развита, и эти приближения предполагалось использовать в случае, когда не было надежды получить строгие трехмерные решения. В настоящее время численные решения получать проще, чем аналитические, поэтому численное решение можно использовать в качестве исходных данных для получения аналитического решения.

Если точность полученного решения недостаточна, можно применить для его настройки инженерные формулы. При объяснении физического смысла инженерных формул их можно будет

включать в набор базовых компонентов. Чем шире набор базовых компонентов, тем меньше изменений в решение будут вносить инженерные формулы.

Заметим, что на основе имеющихся строгих трехмерных решений можно сразу получить инженерные формулы. Но они (обладая простотой и точностью) будут лишь имитировать строгое решение, в то время как применение базовых компонентов наполняет решение физическим содержанием.

9. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МБК

Описанные принципы применения МБК уже были использованы при построении решений ряда задач, см. [6–17, 39–46].

9.1. Дифракция на плоском угловом секторе. Дифракция на плоском угловом секторе (см. [12, 45, 46]), в том числе:

- навязанное условие дальней зоны (для полубесконечного рассеивателя),
- условная кромка,
- замена поляризованной составляющей дифракционного коэффициента.

9.2. Исследование влияния полупрозрачности. Исследование влияния полупрозрачности, в том числе:

- получение функции, учитывающей влияние полупрозрачности (6.4), см. [14, 17].

9.3. Дифракция упругой волны. Дифракция упругой волны (приложение — сейсмические волны; см. [44, 46]), в том числе:

- переход из частотной области во временную.

9.4. Распространение радиоволн в условиях городской застройки. Распространение радиоволн в условиях городской застройки (см. [16, 46]), в том числе:

- построение теории на основе сочетания элементов теории антенн, теории распространения радиоволн и теории дифракции.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод построения эвристических формул (МБК), позволяющий проводить физическую интерпретацию результатов математически строгого решения задачи дифракции. К преимуществам МБК перед другими эвристическими методами, такими как ГТД и МКВ, относится возможность применять аналитические эвристические формулы автономно, без постоянного использования двумерных решений. Метод универсален и позволяет получать эффективные (простые, но точные) аналитические эвристические решения задач дифракции на основе любых строгих решений: аналитических, численных и экспериментальных.

Наличие строгих численных решений не является причиной для отказа от эвристических формул. Для перевода математически строгих решений в сферу их практического использования важно иметь возможность интерпретировать полученные результаты. Такая интерпретация является еще одной причиной применения эвристических формул. (Другой причиной является упомянутая ранее необходимость повышения эффективности вычислителей при решении практических задач). Эвристические формулы дают наилучшую возможность дать решению физическую интерпретацию. В этом они превосходят даже строгие аналитические формулы.

Существует мнение, что эвристическими решениями пытаются заменить строгие. Это совершенно не так. Ничто не может заменить строгие решения, полученные любыми методами. Но при решении практических задач строгие решения не всегда являются самым эффективным подходом. Эвристические формулы с успехом дополняют набор средств решения практической задачи.

В связи с тем, что новые эвристические формулы обладают высокими быстродействием и точностью, их также можно использовать совместно с любыми строгими подходами или с результатами эксперимента для существенного повышения эффективности решения практических задач, связанных с применением теории дифракции. Новые подходы являются универсальными и подходят для любых типов граничных условий и любых типов волн.

Автор благодарен С. Е. Банкову за предоставленные результаты численного расчета строгого решения для полупрозрачной полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
2. *Банков С. Е., Левченко И. В.* Эквивалентные граничные условия для ленточной частопериодической решетки на границе раздела двух сред// Радиотехн. и электрон. — 1988. — 33, № 10. — С. 2045.
3. *Бирюков В. А., Муратов М. В., Петров И. Б., Санников А. В., Фаворская А. В.* Применение сеточно-характеристического метода на неструктурированных тетраэдральных сетках в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — 55, № 10. — С. 1762–1772.
4. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. — М.: Наука, 1966.
5. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
6. *Весник М. В.* Использование двумерных решений в трехмерных задачах// Радиотехн. и электрон. — 1993. — 38, № 8. — С. 1416–1423.
7. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца// Радиотехн. и электрон. — 2000. — 45, № 1. — С. 66–76.
8. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевых задач теории дифракции методом обобщенного эйконала// Радиотехн. и электрон. — 2003. — 48, № 9. — С. 1078–1084.
9. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевых задач для волнового уравнения с переменным волновым числом методом обобщенного эйконала// Нелин. мир. — 2003. — 1, № 1-2. — С. 59–63.
10. *Весник М. В.* Получение дифракционных коэффициентов для двумерного полубесконечного идеально проводящего рассеивателя при помощи метода обобщенного эйконала// Электромагн. волны и электрон. сист. — 2004. — 9, № 11. — С. 23–29.
11. *Весник М. В.* Аналитическое решение задачи дифракции электромагнитной волны на двумерной идеально проводящей полупластине при помощи метода обобщенного эйконала// Радиотехн. и электрон. — 2008. — 53, № 2. — С. 144–156.
12. *Весник М. В.* О возможности построения уточненного эвристического решения в задаче дифракции на плоском угловом секторе// Радиотехн. и электрон. — 2011. — 56, № 5. — С. 573–586.
13. *Весник М. В.* Аналитическое решение двумерной задачи дифракции электромагнитной волны на усеченном клине// Радиотехн. и электрон. — 2012. — 57, № 10. — С. 1053–1065.
14. *Весник М. В.* Построение эвристических дифракционных коэффициентов в аналитических решениях задач рассеяния волновых полей разной физической природы на плоских многоугольных пластинах со сложными граничными условиями// Радиотехн. и электрон. — 2014. — 59, № 6. — С. 543–551.
15. *Весник М. В.* Уточнение приближения физической оптики в задачах дифракции на трехмерных объектах// Тр. 2-ой Всерос. микроволн. конф. — Москва, 26–28 ноября 2014. — С. 443–448.
16. *Весник М. В.* Детерминированная теория распространения радиоволн в условиях городской застройки// Тр. ИРЭМВ-2015. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015, С. 378–382.
17. *Весник М. В.* Эвристическое выражение для дифракционного коэффициента полупрозрачной полуплоскости// Сб. тр. III Всерос. микроволн. конф. — Москва, 25–27 ноября 2015. — С. 281–285.
18. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Коршунова Е. Н., Пангонис Л. И., Переяславец М. Л., Сивов А. Н., Шатров А. Д.* Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: методы конструктивного синтеза. — М.: Наука, 1989.
19. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
20. *Левянт В. Б., Петров И. Б., Муратов М. В.* Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин// Технолог. сейсморазвед. — 2012. — 1. — С. 5–21.
21. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. — М.—Л.: Энергия, 1967.
22. *Нефедов Е. И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979.
23. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Мир, 1962.
24. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
25. *Уфимцев П. Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962.
26. *Уфимцев П. Я.* Основы физической теории дифракции. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
27. *Уфимцев П. Я.* Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
28. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.

29. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.
30. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.
31. Gordon W.B. Far field approximations to the Kirchhoff—Helmholtz representations of scattered fields// IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 1975. — AP-23. — С. 590–592.
32. James G.L. Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. — London: Peter Peregrinus Ltd., 1976.
33. Keller J.B. Geometrical theory of diffraction// J. Opt. Soc. Amer. — 1962. — 52, № 2. — С. 116–130.
34. Kravtsov Yu.A., Zhu N.Ya. Theory of diffraction: heuristic approaches. — Oxford: Alpha Science International Ltd., 2010.
35. Lyalinov M.A., Zhu N.Y. Scattering of waves by wedges and cones with impedance boundary conditions. — Raileigh: SciTech Publishing Inc., 2012.
36. Pelosi G., Rahmat-Samii Ya., Volakis J.L. High-frequency techniques in diffraction theory: 50 years of achievements in GTD, PTD, and related approaches// IEEE Antennas Propag. Mag. — 2013. — 55, № 3. — С. 16.
37. Sommerfeld A. Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung// Math. Ann. — 1894. — 45. — С. 263–277.
38. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction// Math. Ann. — 1896. — 47. — С. 317–374.
39. Vesnik M.V., Ufimtsev P.Y. An asymptotic feature of corner waves scattered by polygonal plates// Electromagnetics. — 1992. — 12, № 3-4. — С. 265–272.
40. Vesnik M.V. Elimination of infinities in diffraction coefficients of physical optics current's components for a shadow contour of a scatterer// Proc. 1995 Int. Symp. Electromag. Theor. — St. Petersburg, Russia, May 23–26, 1995. — С. 407–409.
41. Vesnik M.V. The analytical solution for the electromagnetic diffraction on 2-D perfectly conducting scatterers of arbitrary shape// IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 2001. — AP-49, № 12. — С. 1638–1644.
42. Vesnik M.V. Method of generalized eikonal as a new approach to diffraction process description// Int. Semin. Days Diffraction'2006. — St. Petersburg, May 30 — June 2, 2006.
43. Vesnik M., Kravtsov Yu.A. Diffraction by bodies with wedges: method of generalised eikonal (MGE)// В кн.: «Theory of Diffraction: Heuristic Approaches». — Oxford: Alpha Science International Ltd., 2010.
44. Vesnik M.V. Analytical heuristic solution for the problem of elastic wave diffraction by a polygonal flat 3D scatterer// Abstr. Int. Conf. Days Diffraction'2013. — St. Petersburg, May 27–31, 2013. — С. 89.
45. Vesnik M.V. Efficiency of different heuristic approaches to calculation of electromagnetic diffraction by polyhedrons and other scatterers// Radio Sci. — 2014. — 49, № 10. — С. 945–953.
46. Vesnik M.V. The method of the generalized eikonal. New approaches in the diffraction theory. — Berlin—Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015.

Михаил Владимирович Весник

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,

125009, Москва К-9, Моховая, 11, кор. 7;

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

E-mail: vesnik@cplire.ru

Physical Interpretation of a Mathematical Strict Solution for the Diffraction Problem by Means of Heuristic Formulas

© 2016 М. В. Vesnik

Abstract. We propose a new approach to constructing heuristic formulas describing the solution of the diffraction problem. The formulas are based on physical principles and allow one to interpret the results of the mathematical strict solution. Since the heuristic formulas possess high performance and accuracy, they can also be used along with any strict approaches or experimental results for significant improvement of efficiency of solution of practical problems related to applications of the diffraction theory.

REFERENCES

1. V. M. Babich and V. S. Buldyrev, *Asimptoticheskie metody v zadachakh difraktsii korotkikh voln* [Asymptotics Methods in Problems of Diffraction of Short Waves], Nauka, Moscow, 1972.
2. S. E. Bankov and I. V. Levchenko, “Ekvivalentnye granichnye usloviya dlya lentochnoy chastoperiodicheskoy reshetki na granitse razdela dvukh sred” [Equivalent boundary-value conditions for a band high-frequency array on the boundary separating two media], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 1988, **33**, No. 10, 2045.
3. V. A. Biryukov, M. V. Muratov, I. B. Petrov, A. V. Sannikov, and A. V. Favorskaya, “Primenenie setochno-kharakteristicheskogo metoda na nestrukturovannykh tetraedral’nykh setkakh v reshenii pryamykh zadach seysmorazvedki treshchinovatykh plastov” [Application of the net-characteristic method to unstructured tetrahedral nets for solution of direct problems in seismography of fissured strata], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 10, 1762–1772.
4. V. A. Borovikov, *Difraktsiya na mnogougol’nikakh i mnogogrannikakh* [Diffraction on Polygons and Polyhedrons], Nauka, Moscow, 1966.
5. L. A. Vaynshteyn, *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic Waves], Radio i svyaz’, Moscow, 1988.
6. M. V. Vesnik, “Ispol’zovanie dvukhmernykh resheniy v trekhmernykh zadachakh” [Using two-dimensional solutions in three-dimensional problems], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 1993, **38**, No. 8, 1416–1423.
7. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevoy zadachi dlya uravneniya Gel’mgol’tsa” [Analytic solution of the boundary-value problem for the Helmholtz equation], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2000, **45**, No. 1, 66–76.
8. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevykh zadach teorii difraktsii metodom obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of boundary-value problems in the diffraction theory by the method of generalized eikonal], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2003, **48**, No. 9, 1078–1084.
9. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevykh zadach dlya volnovogo uravneniya s peremennym volnovym chislom metodom obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of boundary-value problems for the wave equation with variable wave number by the method of generalized eikonal], *Nelin. mir* [Nonlin. World], 2003, **1**, No. 1-2, 59–63.
10. M. V. Vesnik, “Poluchenie difraktsionnykh koeffitsientov dlya dvukhmernogo polubeskonechnogo ideal’no provodyashchego rasseivatelya pri pomoshchi metoda obobshchennogo eykonala” [Computing diffraction coefficients for two-dimensional semi-infinite perfectly conductive scatterer by means of the generalized eikonal method], *Elektromagn. volny i elektron. sist.* [Electromag. Waves Electron. Syst.], 2004, **9**, No. 11, 23–29.
11. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie zadachi difraktsii elektromagnitnoy volny na dvumernoy ideal’no provodyashchey poluplastine pri pomoshchi metoda obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of the diffraction problem for an electromagnetic wave on two-dimensional perfectly conductive half-plate by the method of generalized eikonal], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2008, **53**, No. 2, 144–156.
12. M. V. Vesnik, “O vozmozhnosti postroeniya utochnennogo evristicheskogo resheniya v zadache difraktsii na ploskom uglovom sektore” [On construction of the refined heuristic solution in the diffraction problem for a flat angular sector], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2011, **56**, No. 5, 573–586.

13. M. V. Vesnik, "Analyticheskoe reshenie dvumernoy zadachi difraktsii elektromagnitnoy volny na usechenom kline" [Analytic solution of two-dimensional diffraction problem for an electromagnetic wave on a truncated wedge], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2012, **57**, No. 10, 1053–1065.
14. M. V. Vesnik, "Postroenie evristicheskikh difraktsionnykh koeffitsientov v analiticheskikh resheniyakh zadach rasseyaniya volnovykh poley raznoy fizicheskoy prirody na ploskikh mnogougol'nykh platinakh so slozhnymi granichnymi usloviyami" [Construction of heuristic diffraction coefficients in analytic solutions of scattering problems for wave fields of various physical nature on flat polygonal plates with compound boundary-value conditions], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2014, **59**, No. 6, 543–551.
15. M. V. Vesnik, "Utochnenie priblizheniya fizicheskoy optiki v zadachakh difraktsii na trekhmernykh ob"ektakh" [Refinement of physical optics approximations in the diffraction problems on three-dimensional objects], *Trudy 2-oy Vserossiyskoy mikrovolnovoy konferentsii* [Proc. 2nd All-Russ. Microwave Conf.], Moscow, November 26–28, 2014, 443–448.
16. M. V. Vesnik, "Determinirovannaya teoriya rasprostraneniya radiovoln v usloviyakh gorodskoy zastroyki" [Deterministic theory of radio-waves propagation in urban environment], *Trudy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Izлучenie i rasseyanie EMV — IREMV-2015"* [Proc. Int. Sci. Conf. "Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves"], YuFU, Rostov-na-Donu, 2015, 378–382.
17. M. V. Vesnik, "Evristicheskoe vyrazhenie dlya difraktsionnogo koeffitsienta poluprozrachnoy poluploskosti" [Heuristic expression for the diffraction coefficient of a semitransparent half-plane], *Sbornik trudov III Vserossiyskoy mikrovolnovoy konferentsii* [Proc. III All-Russ. Microwave Conf.], Moscow, November 25–27, 2015, 281–285.
18. N. N. Voytovich, B. Z. Katsenelenbaum, E. N. Korshunova, L. I. Pangonis, M. L. Pereyaslavets, A. N. Sivov, and A. D. Shatrov, *Elektrodinamika anten s poluprozrachnymi poverkhnostyami: metody konstruktivnogo sinteza* [Electrodynamics of Antennas with Semitransparent Surfaces: Methods of Constructive Synthesis], Nauka, Moscow, 1989.
19. G. A. Grinberg, *Izbrannye voprosy matematicheskoy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy* [Selected Topics of Mathematical Theory of Electric and Magnetic Phenomena], AN SSSR, Moscow, 1948.
20. V. B. Levyant, I. B. Petrov, and M. V. Muratov, "Chislennoe modelirovanie volnovykh otklikov ot sistemy (klastera) subvertikal'nykh makrotreshchin" [Numeric simulation of wave responses from a system (cluster) of subvertical macrofissures], *Tekhnolog. seysmorazved.* [Technol. Seismogr.], 2012, **1**, 5–21.
21. G. T. Markov and A. F. Chaplin, *Vozbuzhdenie elektromagnitnykh voln* [Launching of Electromagnetic Waves], Energiya, Moscow—Leningrad, 1967.
22. E. I. Nefedov, *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na dielektricheskikh strukturakh* [Diffraction of Electromagnetic Waves on Dielectric Structures], Nauka, Moscow, 1979.
23. B. Nobl, *Metod Vinera—Khopfa dlya resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [The Wiener—Hopf Method for Solution of Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1962.
24. M. Teylor, *Pseudodifferentsial'nye operatory* [Pseudodifferential Operators], Mir, Moscow, 1985.
25. P. Ya. Ufimtsev, *Metod kraevykh voln v fizicheskoy teorii difraktsii* [Method of Edge Waves in Physical Theory of Diffraction], Sov. Radio, Moscow, 1962.
26. P. Ya. Ufimtsev, *Osnovy fizicheskoy teorii difraktsii* [Essentials of Physical Theory of Diffraction], BINOM. Laboratoriya znaniy, Moscow, 2009.
27. P. Ya. Ufimtsev, *Teoriya difraktsionnykh kraevykh voln v elektrodinamike. Vvedenie v fizicheskuyu teoriyu difraktsii* [Theory of diffractive edge waves in electrodynamics. Introduction to physical theory of diffraction], BINOM. Laboratoriya znaniy, Moscow, 2012.
28. V. A. Fok, *Problemy difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln* [Problems of Diffraction and Propagation of Magnetic Waves], Sov. radio, Moscow, 1970.
29. F. Frank and R. Mizes, *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential and Integral Equations of Mathematical Physics], ONTI, Moscow—Leningrad, 1937.
30. Kh. Khenl, A. Maue, and K. Vestpfal', *Teoriya difraktsii* [Diffraction Theory], Mir, Moscow, 1964.
31. W. B. Gordon, "Far field approximations to the Kirchhoff—Helmholtz representations of scattered fields," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1975, **AP-23**, 590–592.
32. G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1976.
33. J. B. Keller, "Geometrical theory of diffraction" [Geometrical theory of diffraction], *J. Opt. Soc. Amer.*, 1962, **52**, No. 2, 116–130.

34. Yu. A. Kravtsov and N. Ya. Zhu, *Theory of Diffraction: Heuristic Approaches*, Alpha Science Int. Ltd., Oxford, 2010.
35. M. A. Lyalinov and N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions*, SciTech Publishing Inc., Raileigh, 2012.
36. G. Pelosi, Ya. Rahmat-Samii, and J. L. Volakis, "High-frequency techniques in diffraction theory: 50 years of achievements in GTD, PTD, and related approaches," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2013, **55**, No. 3, 16.
37. A. Sommerfeld, "Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung," *Math. Ann.*, 1894, **45**, 263–277.
38. A. Sommerfeld, "Mathematische Theorie der Diffraction," *Math. Ann.*, 1896, **47**, 317–374.
39. M. V. Vesnik and P. Y. Ufimtsev, "An asymptotic feature of corner waves scattered by polygonal plates," *Electromagnetics*, 1992, **12**, No. 3-4, 265–272.
40. M. V. Vesnik, "Elimination of infinities in diffraction coefficients of physical optics current's components for a shadow contour of a scatterer," Proceedings of the 1995 International Symposium on Electromagnetic Theory, St. Petersburg, Russia, May 23–26, 1995, 407–409.
41. M. V. Vesnik, "The analytical solution for the electromagnetic diffraction on 2-D perfectly conducting scatterers of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 2001, **AP-49**, No. 12, 1638–1644.
42. M. V. Vesnik, "Method of generalized eikonal as a new approach to diffraction process description," International Seminar Days on Diffraction'2006, St. Petersburg, May 30–June 2, 2006.
43. M. Vesnik, Yu. A. Kravtsov, "Diffraction by bodies with wedges: method of generalised eikonal (MGE)," In: *Theory of Diffraction: Heuristic Approaches*, Alpha Science Int. Ltd., Oxford, 2010.
44. M. V. Vesnik, "Analytical heuristic solution for the problem of elastic wave diffraction by a polygonal flat 3D scatterer," Abstracts of International conference Days on Diffraction'2013, St. Petersburg, May 27–31, 2013, 89.
45. M. V. Vesnik, "Efficiency of different heuristic approaches to calculation of electromagnetic diffraction by polyhedrons and other scatterers," *Radio Science*, 2014, **49**, No. 10, 945–953.
46. M. V. Vesnik, *The method of the Generalized Eikonal. New Approaches in the Diffraction Theory*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin–Boston, 2015.

Mikhail Vesnik

Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, 11-7 Mokhovaya st., 125009 Moscow, Russia

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: vesnik@cplire.ru