Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 19–31

УДК 517.9

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДВУКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2016 г. **Ю. О. БЕЛЯЕВА**

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре, описывающая эволюцию плотностей распределения ионов и электронов в высокотемпературной плазме при наличии внешнего магнитного поля. Построены стационарные решения системы уравнений Власова—Пуассона с тривиальным потенциалом самосогласованного электрического поля для двукомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре с носителями, лежащими на некотором расстоянии от границы рассматриваемой области.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, впервые были получены в работе [4]. В последние десятилетия возрастание интереса к изучению этих уравнений обусловлено многочисленными приложениями, основным из которых является их использование в изучении высокотемпературной, разреженной плазмы и процессов управления термоядерным синтезом. В зависимости от исходных физических моделей различают уравнения Власова—Пуассона, Власова—Максвелла, Власова—Эйнштейна, обобщенные уравнения Власова и т. д.

Будем рассматривать систему уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv \qquad (x\in Q,\ 0<t<T), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x\varphi + \frac{1}{c}\,[v,B], \nabla_v f^{\beta}\right) = 0 \tag{1.2}$$
$$(x\in Q,\ v\in\mathbb{R}^3,\ 0<t<T,\ \beta=\pm 1)$$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x,v,t)\big|_{t=0} = f_0^{\beta}(x,v) \qquad (x\in\bar{Q},\ v\in\mathbb{R}^3,\ \beta=\pm1) \tag{1.3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t)=0 \qquad (x\in\partial Q,\ 0\leqslant t<T). \tag{1.4}$$

Здесь $Q=G\times\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G\in C^\infty$, $\partial Q=\partial G\times\mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta=+1$, и электронов, если $\beta=-1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi=\varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v, соответственно;

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ, соглашение № 02.a03.21.0008.

m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\cdot,\cdot]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Уравнения Власова получаются из уравнений Больцмана, если в последних пренебречь интегралом столкновений. Для разреженной плазмы это допущение является оправданным. Несмотря на отсутствие интеграла столкновений, взаимодействие заряженных частиц учитывается через самосогласованное электрическое поле, которое вычисляется из плотностей распределения заряженных частиц.

Как в физике, так и в математике уравнениям Власова посвящена обширная литература (см. [1–23] и имеющуюся там библиографию). Глобальная разрешимость «сглаженных» уравнений Власова исследована в работах Р. Л. Добрушина и В. П. Маслова [5, 7]. Существование и устойчивость слабых решений начальных и начально-краевых задач для системы уравнений Власова—Пуассона и Власова—Максвелла изучались в работах А. А. Арсеньева, В. В. Козлова, Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионса, Ю. Веклера [1, 6, 16, 23] и др. Вопрос о существовании глобальных классических решений задачи Коши для уравнений Власова—Пуассона исследовался в работах Ю. Батта, К. Пфаффельмозера и Дж. Шеффера [12,19,21] и ряде других работ. Существование классических решений начально-краевых задач для уравнений Власова—Пуассона исследовано в значительно меньшей степени. В работе Я. Гуо [18] доказано существование глобального классического решения второй начально-краевой задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве.

Важную роль играют стационарные решения уравнений Власова. Они описывают возможные положения равновесия плазмы, которые в дальнейшем можно исследовать на устойчивость. В работах В. В. Веденяпина [2, 3] доказана единственность решения граничной задачи системы Власова—Пуассона в предположении, что функции распределения плотностей зависят только от энергии и интегралов импульса в случае двумерного пространства скоростей в интеграле энергии. Доказаны существование периодических стационарных решений и нарушение единственности в случае одномерного пространства скоростей. Описан метод построения стационарных решений задачи Дирихле для уравнений Власова в случае, когда функции распределения плотностей частиц зависят только от интеграла энергии. В работе Ю. Батта и К. Фабиана [13] доказано существование стационарных решений системы Власова—Максвелла. Сферически симметричные стационарные решения начальной задачи для системы Власова—Пуассона исследованы в работе Ю. Батта, В. Фальтенбахера и Э. Хорста [14]. В работе С. И. Похожаева [8] рассматривается проблема существования стационарных решений уравнений Власова—Пуассона при $x \in \mathbb{R}^n$, доказано отсутствие стационарных решений, представленных распределениями типа Максвелла—Больцмана. В случае граничной задачи для системы Власова—Пуассона в одномерной (по пространству) и имеющей реалистичную, с точки зрения физики, границу области в работе К. Грингарда и П. А. Равьяра [17] доказаны существование и единственность стационарного решения. Для случая бесстолкновительной плазмы, которая состоит из электронов и положительно заряженных ионов, в работе Г. Райна [20] исследованы стационарные решения в ограниченной области из $x \in \mathbb{R}^3$ для двух случаев: нерелятивистского электростатического случая, описываемого системой Власова—Пуассона и релятивистского электродинамического случая, описываемого системой Власова—Максвелла. В диссертационном исследовании П. Браша [15] получен ряд результатов для стационарных решений систем Власова—Максвелла и Власова—Пуассона в случае бесконечного цилиндра.

Наиболее известной установкой для термоядерного синтеза является *токамак*. Этот термин является аббревиатурой русских слов «ток», «камера», «магнитная катушка». Вакуумная камера токамака-реактора представляет собой тор, сечение которого имеет вид прописной латинской буквы «D», см. рис. 1. Одной из альтернативных установок для термоядерного синтеза является *пробочная ловушка* (*mirror trap*), имеющая вид длинного цилиндра, сужающегося на концах, см. рис. 2.

В работах А. Л. Скубачевского [9–11, 22] рассматривались смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы. При этом учитывалось влияние внешнего магнитного поля, а также исследовались решения, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы рассматриваемой области. В случае полуплоскости для достаточно малых начальных плотностей с компактными носителями и большой напряженности внешнего магнитного поля

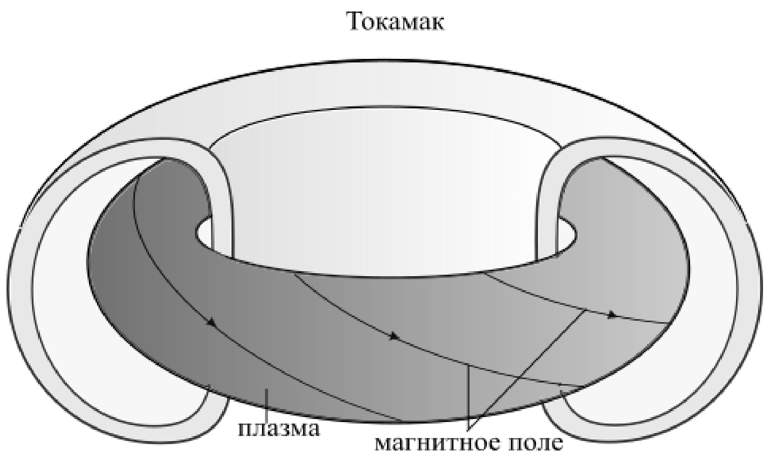

Рис. 1

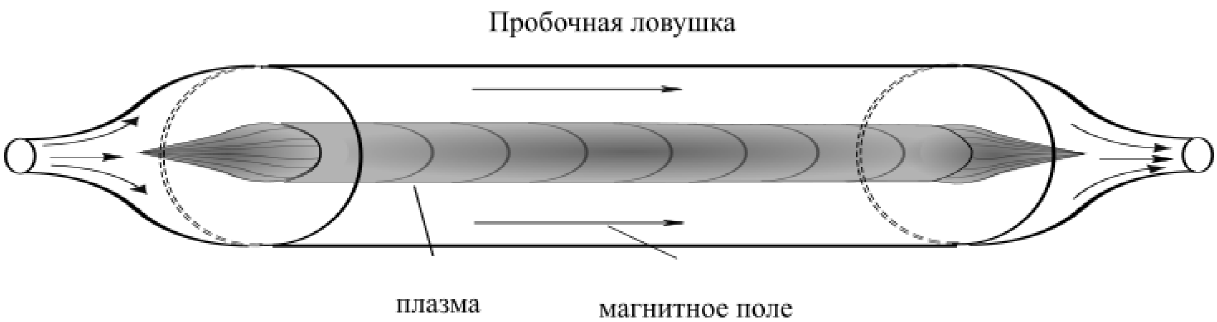

Рис. 2

доказаны существование и единственность классических решений смешанных задач с различными краевыми условиями для потенциала электрического поля: условиями Дирихле, условиями Неймана и нелокальными условиями [9, 10]. В работе [22] доказаны существование и единственность классического решения системы уравнений Власова—Пуассона с нелокальными условиями в бесконечном цилиндре и достаточно малыми начальными условиями. Для случая бесконечного цилиндра в некоторой окрестности стационарного решения доказаны существование и единственность классического решения с носителями плотностей распределения заряженных частиц во внутреннем цилиндре [11].

Данная работа посвящена построению стационарных решений с тривиальным потенциалом самосогласованного электрического поля для двукомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от цилиндрической границы.

2. Постановка задачи и полученные результаты

Рассмотрим систему уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре

$$- \Delta\varphi(x,t) = 4\pi e \int\limits_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x,v,t)\,dv \qquad (x \in Q,\ 0 < t < T), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c}\,[v,B], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0 \tag{2.2}$$

$$(x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < T,\ \beta = \pm 1)$$

с начальными условиями

$$f^\beta(x,v,t)\big|_{t=0} = f_0^\beta(x,v) \qquad (x\in\bar{Q},\ v\in\mathbb{R}^3,\ \beta=\pm1) \tag{2.3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x,t)=0 \qquad (x\in\partial Q,\ 0\leqslant t<T). \tag{2.4}$$

Здесь $Q = G\times\mathbb{R}$, $G\subset\mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G\in C^\infty$, $\partial Q=\partial G\times\mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x,v,t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta=+1$, и электронов, если $\beta=-1$, в точке x со скоростью v в момент времени t; $\varphi=\varphi(x,t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v, соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; $(\,\cdot,\cdot\,)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$; $[\,\cdot,\cdot\,]$ — векторное произведение в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $B_\rho(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^3\colon |x-x_0|<\rho\}$, и пусть $B_\rho=B_\rho(0)$.

Для определения классического решения задачи (2.1)–(2.4) введем некоторые функциональные пространства. Обозначим через $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\bar\Omega))$, $s\geqslant0$, $n\in\mathbb{N}$, пространство непрерывных функций в $\mathbb{R}^n(\bar\Omega)$, имеющих все непрерывные производные в $\mathbb{R}^n(\bar\Omega)$ вплоть до k-го порядка, $k=[s]$, с конечной нормой

$$\|u\|_s=\max_{|\alpha|\leqslant k}\sup_x|\mathcal{D}^\alpha u(x)|,$$

если $s=k\in\mathbb{Z}$, $0\leqslant k$,

$$\|u\|_s=\|u\|_k+\max_{|\alpha|=k}\sup_{x\neq y}|x-y|^{-\sigma}|\mathcal{D}^\alpha u(x)-\mathcal{D}^\alpha u(y)|,$$

если $s=k+\sigma$, $0\leqslant k\in\mathbb{Z}$, $0<\sigma<1$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — область с липшицевой границей, $\mathcal{D}^\alpha=\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big)^{\alpha_1}\dots\Big(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\Big)^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\dots+\alpha_n$.

Для любого $s\geqslant0$ пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\bar\Omega))$ является банаховым. Если $s=k$, $0\leqslant k\in\mathbb{Z}$, пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\bar\Omega))$ — сепарабельное. Если же $s=k+\sigma$, $0\leqslant k\in\mathbb{Z}$, $0<\sigma<1$, пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ $(C^s(\bar\Omega))$ не будет сепарабельным.

Обозначим через $C_0^s(\bar Q)$, $s\geqslant0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar Q)$ с компактными в $\bar Q$ носителями. Введем банахово пространство $C([0,T],\,C^s(\bar\Omega))$, $s>0$, непрерывных функций $[0,T]\ni t\mapsto\varphi(\cdot,t)\in C^s(\bar\Omega)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s,T}=\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|\varphi(\cdot,t)\|_s.$$

Аналогично можно определить пространство $C([0,T],\,C_0^s(\bar Q))$.

Определение 2.1. Вектор-функцию $\{\varphi,f^\beta\}$, $\varphi\in C([0,T],C_0^{2+\sigma}(\bar Q))$, $f^\beta\in C^1(\bar Q\times\mathbb{R}^3\times[0,T])$, мы назовем *классическим решением* задачи (2.1)–(2.4), если $\{\varphi,f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.2), начальным условиям (2.3) и краевому условию (2.4).

Важную роль в исследовании уравнений Власова играют стационарные решения.

Определение 2.2. Вектор-функцию $\{\mathring\varphi,\mathring f^\beta\}$, $\mathring\varphi\in C_0^{2+\sigma}(\bar Q)$, $\mathring f^\beta\in C^1(\bar Q\times\mathbb{R}^3)$, мы назовем *стационарным решением* уравнений (2.1), (2.2) с краевым условием (2.4), если $\{\mathring\varphi,\mathring f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям

$$-\Delta\mathring\varphi(x)=4\pi e\int\limits_{\mathbb{R}^3}\sum_\beta\beta\mathring f^\beta(x,v)\,dv \quad (x\in Q), \tag{2.5}$$

$$\big(v,\nabla_x\mathring f^\beta\big)+\frac{\beta e}{m_\beta}\left(-\nabla_x\mathring\varphi+\frac1c[v,B],\nabla_v\mathring f^\beta\right)=0 \quad (x\in Q,\ v\in\mathbb{R}^3,\ \beta=\pm1) \tag{2.6}$$

и краевому условию (2.4).

Сформулируем теперь условие, которому должно удовлетворять магнитное поле B. Обозначим $G_\delta=\{x'\in G:\ \mathrm{dist}(x',\partial G)>\delta\}$, $Q_\delta=\{x\in Q\colon \mathrm{dist}(x,\partial Q)>\delta\}$, где $\delta>0$. Предполагая, что $G_{2\delta}\neq\varnothing$, обозначим через $\delta_0=\delta_0(\delta)>0$ наибольший радиус круга, вписанного в $G_{2\delta}$. В дальнейшем будем полагать, что $\delta_0>\delta$.

Условие 2.1. *Пусть $B = (0, 0, h)$ для $x \in \bar{Q}$, где $h > 0$ не зависит от x и*

$$32\,\frac{c\rho m_{+1}}{e\delta} < h. \tag{2.7}$$

А. Л. Скубачевским в работе [11] был получен следующий результат:

Теорема 2.1. *Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \varnothing$ и $\delta_0 > \delta$, и пусть для этого δ и некоторых $h, \rho > 0$ выполняется условие 2.1. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует стационарное решение уравнений (2.1), (2.2) с краевым условием (2.4) вида*

$$\{0, \mathring{f}^\beta\} = \Big\{0, \psi_1^\beta(|v|^2)\cdot\psi_2^\beta\Big(\Big(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_1 + \beta v_2\Big)^2 + \Big(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_2 - \beta v_1\Big)^2\Big)\Big\},$$

обладающее следующими свойствами: $\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4}$ и $\sup\limits_{x,v}\mathring{f}^\beta(x,v) > \alpha$. Здесь $\psi_1^\beta(\cdot)$ и $\psi_2^\beta(\cdot)$ — четные неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям: $\psi_1^\beta(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_2^\beta(0) = 1$, $\operatorname{supp}\psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, $\operatorname{supp}\psi_2^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$, где $0 < \rho_1 < \rho$, $\rho_0 = \dfrac{15\rho\delta_0}{\delta}$ и $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_1^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^2}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_1^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^2}\Big)$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_2^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^2}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_2^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^2}\Big)$.

В данной работе будут также построены стационарные решения с нулевым потенциалом в бесконечном цилиндре с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от цилиндрической границы. Однако, в отличии от стационарных решений, построенных в [11], аргументами срезающих функций будут служить формы четвертого порядка и формы порядка $2m$. Будет доказана следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* (2.1)*, тогда для любого $\alpha > 0$ функции*

$$\{0, \mathring{f_1}^\beta\cdot\mathring{f_2}^\beta\}, \tag{2.8}$$

$$\{0, \mathring{f_1}^\beta\cdot\mathring{f_m}^\beta\}, \tag{2.9}$$

где

$$\mathring{f_1}^\beta = \psi_1^\beta(|v|^2),$$

$$\mathring{f_2}^\beta = \psi_2^\beta\left(\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^4 + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^4\right),$$

$$\mathring{f_m}^\beta = \psi_m^\beta\left(\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m} + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m}\right),$$

являются стационарными решениями системы уравнений (2.1)-(2.2)*, удовлетворяющими условию* (2.4) *и обладают свойствами: $\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3)$, $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4}$, $\sup\mathring{f}^\beta_{x,v} > \alpha$. Здесь $\psi_1^\beta(\cdot)$, $\psi_2^\beta(\cdot)$, $\psi_m^\beta(\cdot)$ — четные неотрицательные функции такие, что $\psi_1^\beta(\cdot), \psi_2^\beta(\cdot), \psi_m^\beta(\cdot) \in \dot{C}^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3)$, $\psi_1^{-1}(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_2^{-1}(0) = \psi_m^{-1}(0) = 1$, $\operatorname{supp}\psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, $\operatorname{supp}\psi_2^{-1} \subset \Big(\dfrac{-\rho_0^4}{2}, \dfrac{\rho_0^4}{2}\Big)$, $\operatorname{supp}\psi_m^{-1} \subset \Big(\dfrac{-\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}, \dfrac{\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}\Big)$, где $0 < \rho_1 < \rho$, $\rho_0 = \dfrac{15\rho\delta_0}{\delta}$, а также $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_j^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^{2j}}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_j^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^{2j}}\Big)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ $(\tau \in \mathbb{R})$.*

3. Построение стационарного решения в виде формы четвертого порядка

Построим стационарное решение уравнений (2.5), (2.6) вида (2.8), обладающее свойствами:

$$\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q}\times\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{supp}\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4} \text{ и } \sup_{x,v}\mathring{f}^\beta(x,v) > \alpha.$$

1. Пусть $\mathring{\varphi}(x) \equiv 0$ $(x \in \bar{Q})$. Тогда система (2.6) примет вид

$$\Big(v, \nabla_x\mathring{f}^\beta\Big) + \frac{\beta e}{cm_\beta}\Big([v, B], \nabla_v\mathring{f}^\beta\Big) = 0 \qquad (x \in Q,\ v \in \mathbb{R}^3,\ \beta = \pm1). \tag{3.1}$$

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде произведения двух срезающих функций, аргументами которых являются формы четвертого порядка. Различные частные решения уравнения (3.1) будем обозначать через $\mathring{f}_i^\beta$ $(i = 0, \dots, m.)$

Нетрудно проверить, что функция $\mathring{f}_0^\beta(x, v) = |v|^2$ является решением уравнения (3.1) для любых $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$. Введем четные функции $\psi_1^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_1^{-1}(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_1^\beta(\tau) \geqslant 0$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_1^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^2}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_1^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^2}\Big)$ $(\tau \in \mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, где $0 < \rho_1 < \rho$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\operatorname{supp}\psi_1^{+1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$ и $\psi_1^{+1}(0) > 2\alpha$. Функция $\mathring{f}_1^\beta(x, v) = \psi_1^\beta(|v|^2)$ является решением уравнения (3.1). Будем искать теперь решение уравнения (3.1) в виде формы четвертого порядка с неопределенными коэффициентами:

$$\mathring{f}_3^\beta(x, v) = \sum_{i,j,k,m=1}^{3}(a_{ijkm}x_ix_jx_kx_m + b_{ijkm}v_iv_jv_kv_m + c_{ijkm}x_ix_jv_kv_m + \\ + d_{ijkm}x_ix_jx_kv_m + l_{ijkm}x_iv_jv_kv_m). \tag{3.2}$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$v_1\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_3} + \frac{\beta eh}{cm_\beta}v_2\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial v_1} - \frac{\beta eh}{cm_\beta}v_1\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial v_2} = 0$$

где

$$\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_1} = \sum a_{1jkm}x_jx_kx_m + \sum a_{i1km}x_ix_kx_m + \\ + \sum a_{ij1m}x_ix_jx_m + \sum a_{ijk1}x_ix_jx_k + \sum c_{1jkm}x_jv_kv_m + \sum c_{i1km}x_iv_kv_m + \\ + \sum d_{1jkm}x_jx_kv_m + \sum d_{i1km}x_ix_kv_m + \sum d_{ij1m}x_ix_jv_m + \sum l_{1jkm}v_jv_kv_m, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_2} = \sum a_{2jkm}x_jx_kx_m + \sum a_{i2km}x_ix_kx_m + \\ + \sum a_{ij2m}x_ix_jx_m + \sum a_{ijk2}x_ix_jx_k + \sum c_{2jkm}x_jv_kv_m + \sum c_{i2km}x_iv_kv_m + \\ + \sum d_{2jkm}x_jx_kv_m + \sum d_{i2km}x_ix_kv_m + \sum d_{ij2m}x_ix_jv_m + \sum l_{2jkm}v_jv_kv_m, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial x_3} = \sum a_{3jkm}x_jx_kx_m + \sum a_{i3km}x_ix_kx_m + \\ + \sum a_{ij3m}x_ix_jx_m + \sum a_{ijk3}x_ix_jx_k + \sum c_{3jkm}x_jv_kv_m + \sum c_{i3km}x_iv_kv_m + \\ + \sum d_{3jkm}x_jx_kv_m + \sum d_{i3km}x_ix_kv_m + \sum d_{ij3m}x_ix_jv_m + \sum l_{3jkm}v_jv_kv_m, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial v_1} = \sum b_{1jkm}v_jv_kv_m + \sum b_{i1km}v_iv_kv_m + \\ + \sum b_{ij1m}v_iv_jv_m + \sum b_{ijk1}v_iv_jv_k + \sum c_{ij1m}x_ix_jv_m + \sum c_{ijk1}x_ix_jv_k + \\ + \sum d_{ijk1}x_ix_jx_k + \sum l_{i1km}x_iv_kv_m + \sum l_{ij1m}x_iv_jv_m + \sum l_{ijk1}x_iv_jv_k, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathring{f}_3^\beta}{\partial v_2} = \sum b_{2jkm}v_jv_kv_m + \sum b_{i2km}v_iv_kv_m + \\ + \sum b_{ij2m}v_iv_jv_m + \sum b_{ijk2}v_iv_jv_k + \sum c_{ij2m}x_ix_jv_m + \sum c_{ijk2}x_ix_jv_k + \\ + \sum d_{ijk2}x_ix_jx_k + \sum l_{i2km}x_iv_kv_m + \sum l_{ij2m}x_iv_jv_m + \sum l_{ijk2}x_iv_jv_k. \tag{3.7}$$

В формулах (3.3)–(3.7) суммирование производится по индексам, имеющимся у членов, стоящих под знаком суммы.

Подставим в уравнение (3.1) соотношения (3.3)–(3.7) и выделим группы подобных слагаемых. Выберем сначала многочлены, состоящие из мономов одинаковых степеней как по x, так и по v, и имеющих общий множитель v_3:

$$\sum x_j x_k x_m v_3 + \sum a_{i3km} x_i x_k x_m v_3 + \sum a_{ij3m} x_i x_j x_m v_3 + \sum a_{ijk3} x_i x_j x_k v_3 = 0,$$
$$\sum c_{3jkm} x_j v_k v_m v_3 + \sum c_{i3km} x_i v_k v_m v_3 = 0,$$
$$\sum d_{3jkm} x_i x_k v_m v_3 + \sum d_{i3km} x_i x_k v_m v_3 + \sum d_{ij3m} x_i x_j v_m v_3) = 0,$$
$$\sum l_{3jkm} v_j v_k v_m v_3 = 0.$$

Полученные равенства справедливы, если для всех $j,k,m = 1,2,3$ выполняются соотношения:

$$\begin{gathered} a_{3jkm} = a_{j3km} = a_{kj3m} = a_{mjk3} = 0, \quad c_{3jkm} = c_{j3km} = 0, \\ d_{3jkm} = d_{j3km} = d_{kj3m} = 0, \quad l_{3jkm} = 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Выберем теперь многочлены,состоящие из мономов одинаковых степеней как по x, так и по v, и имеющих общий множитель v_1:

$$\sum a_{1jkm} x_j x_k x_m v_1 + \sum a_{i1km} x_i x_k x_m v_1 + \sum a_{ij1m} x_i x_j x_m v_1 + \sum a_{ijk1} x_i x_j x_k v_1 -$$
$$- \frac{\beta e h}{c m_\beta} \sum d_{ijk2} x_i x_j x_k v_1 = 0,$$
$$\sum c_{1jkm} x_j v_k v_m v_1 + \sum c_{i1km} x_i v_k v_m v_1 -$$
$$- \frac{\beta e h}{c m_\beta} \Big(\sum l_{i2km} x_i v_k v_m v_1 + \sum l_{ij2m} x_i v_j v_m v_1 + \sum l_{ijk2} x_i v_j v_k v_1 \Big) = 0,$$
$$\sum d_{1jkm} x_i x_k v_m v_1 + \sum d_{i1km} x_i x_k v_m v_1 + \sum d_{ij1m} x_i x_j v_m v_1 -$$
$$- \frac{\beta e h}{c m_\beta} \Big(\sum c_{ij2m} x_i x_j v_m v_1 + \sum c_{ijk2} x_i x_j v_k v_1 \Big) = 0,$$
$$\sum l_{1jkm} v_j v_k v_m v_1 -$$
$$- \frac{\beta e h}{c m_\beta} \Big(\sum b_{2jkm} v_j v_k v_m v_1 + \sum b_{i2km} v_i v_k v_m v_1 + \sum b_{ij2m} v_i v_j v_m v_1 + \sum_{i,j,k=1} b_{ijk2} v_i v_j v_k v_1 \Big) = 0.$$

Здесь, полагая $a_{1jkm} = a_{j1km} = a_{kj1m} = a_{mjk1}$, $c_{1jkm} = c_{j1km}$, $l_{i2km} = l_{ik2m} = l_{imk2}$, $d_{1jkm} = d_{j1km} = d_{kj1m}$, $c_{ij2m} = c_{ijm2}$, $b_{2jkm} = b_{j2km} = b_{kj2m} = b_{mjk2}$, получим следующие соотношения для коэффициентов $(j,k,m = 1,2,3)$:

$$\begin{gathered} 4a_{1jkm} = \frac{\beta e h}{c m_\beta} d_{jkm2}, \quad 2c_{1jkm} = 3\frac{\beta e h}{c m_\beta} l_{jkm2}, \\ 3d_{1jkm} = 2\frac{\beta e h}{c m_\beta} c_{jkm2}, \quad l_{1jkm} = 4\frac{\beta e h}{c m_\beta} b_{2jkm}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Учитывая равенства (3.8), если один из индексов коэффициентов в (3.9) равен 3, то этот коэффициент обращается в нуль. Выберем теперь многочлены, состоящие из мономов одинаковых степеней как по x, так и по v, и имеющих общий множитель v_2:

$$\sum a_{2jkm} x_j x_k x_m v_2 + \sum a_{i2km} x_i x_k x_m v_2 + \sum a_{ij2m} x_i x_j x_m v_2 + \sum a_{ijk2} x_i x_j x_k v_2 +$$
$$+ \frac{\beta e h}{c m_\beta} \sum d_{ijk1} x_i x_j x_k v_2 = 0,$$
$$\sum c_{2jkm} x_j v_k v_m v_2 + \sum c_{i2km} x_i v_k v_m v_2 +$$
$$+ \frac{\beta e h}{c m_\beta} \Big(\sum l_{i1km} x_i v_k v_m v_2 + \sum l_{ij1m} x_i v_j v_m v_2 + \sum l_{ijk1} x_i v_j v_k v_2 \Big) = 0,$$
$$\sum d_{2jkm} x_i x_k v_m v_2 + \sum d_{i2km} x_i x_k v_m v_2 + \sum d_{ij2m} x_i x_j v_m v_2 +$$

$$+\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big(\sum c_{ij1m}x_ix_jv_mv_2+\sum c_{ijk1}x_ix_jv_kv_2\Big)=0,$$

$$\sum l_{2jkm}v_jv_kv_mv_2+$$

$$+\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big(\sum b_{1jkm}v_jv_kv_mv_2+\sum b_{i1km}v_iv_kv_mv_2+\sum b_{ij1m}v_iv_jv_mv_2+\sum b_{ijk1}v_iv_jv_kv_2\Big)=0.$$

Полагая $a_{2jkm}=a_{j2km}=a_{kj2m}=a_{mjk2}$, $c_{2jkm}=c_{j2km}$, $l_{i1km}=l_{ik1m}=l_{imk1}$, $d_{2jkm}=d_{j2km}=d_{kj2m}$, $c_{ij1m}=c_{ijm1}$, $b_{1jkm}=b_{j1km}=b_{kj1m}=b_{mjk1}$, получим соотношения следующего вида $(j,k,m=1,2,3)$:

$$\begin{aligned}4a_{2jkm}&=-\frac{\beta eh}{cm_\beta}d_{jkm1}, \quad 2c_{2jkm}=-3\frac{\beta eh}{cm_\beta}l_{jkm1},\\ 3d_{2jkm}&=-2\frac{\beta eh}{cm_\beta}c_{jkm1}, \quad l_{2jkm}=-4\frac{\beta eh}{cm_\beta}b_{1jkm}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Как и в предыдущем случае, в силу равенств (3.8), коэффициенты, содержащие в индексе 3, равны нулю.

Положим $b_{1111}=b_{2222}=1$ и $b_{2111}=b_{2112}=b_{2211}=b_{2212}=0$, тогда отличными от нуля останутся коэффициенты:

$$l_{1222}=4\frac{\beta eh}{cm_\beta}, \quad l_{2111}=-4\frac{\beta eh}{cm_\beta}, \quad c_{1122}=6\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^2, \quad c_{2211}=6\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^2,$$

$$d_{1112}=4\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^3, \quad d_{2221}=-4\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^3, \quad a_{1111}=\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^4, \quad a_{2222}=\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^4.$$

Возвращаясь к искомому виду решения, получим:

$$\begin{aligned}\mathring{f}_3^\beta(x,v)&=\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^4x_1^4+\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^4x_2^4+4\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^3x_1^3v_2-4\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^3x_2^3v_1+\\ &+6\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^2x_1^2v_2^2+6\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\Big)^2x_2^2v_1^2+4\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_1v_2^3-4\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_2v_1^3+v_1^4+v_2^4=\\ &=\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_1+v_2\Big)^4+\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_2-v_1\Big)^4=\Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_1+\beta v_2\Big)^4+\Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_2-\beta v_1\Big)^4.\end{aligned}$$

Введем четные функции $\psi_2^\beta\in\dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_2^{-1}(0)=1$, $\psi_2^\beta(\tau)\geqslant 0$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_2^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^4}\Big)=\dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_2^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^4}\Big)$ $(\tau\in\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi_2^{-1}\subset\Big(\dfrac{-\rho_0^4}{2},\dfrac{\rho_0^4}{2}\Big)$, где $\rho_0=15\rho\delta_0/\delta$. Поскольку $m_{+1}>m_{-1}$, то $\operatorname{supp}\psi_2^{+1}\subset(-\rho_0^2,\rho_0^2)$ и $\psi_2^{+1}(0)>1$. Функция

$$\mathring{f}_2^\beta(x,v)=\psi_2^\beta\left(\Big(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_1+\beta v_2\Big)^4+\Big(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_2-\beta v_1\Big)^4\right)$$

является решением уравнения (3.1).

2. Докажем, что вектор-функция $\{0,\mathring{f}_1^\beta\mathring{f}_2^\beta\}$ является стационарным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4), удовлетворяющим условиям теоремы (2.1).

По построению функция $\mathring{f}^\beta(x,v)=\mathring{f}_1^\beta(x,v)\times\mathring{f}_2^\beta(x,v)$ удовлетворяет уравнению (3.1), а также $\sup\limits_{x,v}\mathring{f}^\beta(x,v)\geqslant\mathring{f}^\beta(0,0)\geqslant 2\alpha>0$. Остается доказать, что правая часть уравнения (2.5) тождественно равна нулю и $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta\subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4}$. Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathring{f}^{+1}(x,v)\,dv=\int\limits_{\mathbb{R}^3}\mathring{f}^{-1}(x,v)\,dv.$$

Сделаем замены переменных $y=\dfrac{eh}{c}\,x$ и $w=m_{+1}(v_2,-v_1,v_3)$. Тогда, используя равенства $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_1^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^2}\Big)=\dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_1^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^2}\Big)$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_2^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^4}\Big)=\dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_2^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^4}\Big)$ и вводя переменные

$x = \dfrac{c}{eh}\, y$ и $v = \dfrac{1}{m_{-1}}\,(w_2, -w_1, w_3)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x,v)\,dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{+1}(|v|^2)\psi_2^{+1}\left(\left(\frac{eh}{m_{+1}c}\,x_1 + v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{m_{+1}c}\,x_2 - v_1\right)^4\right)dv =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{+1}^3}\,\psi_1^{+1}\left(\frac{|w|^2}{m_{+1}^2}\right)\psi_2^{+1}\left(\frac{(y_1+w_1)^4 + (y_2+w_2)^4}{m_{+1}^4}\right)dw =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{-1}^3}\,\psi_1^{-1}\left(\frac{|w|^2}{m_{-1}^2}\right)\psi_2^{-1}\left(\frac{(y_1+w_1)^4 + (y_2+w_2)^4}{m_{-1}^4}\right)dw =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{-1}\left(|v|^2\right)\psi_2^{-1}\left(\left(\frac{eh}{m_{-1}c}\,x_1 - v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{m_{-1}c}\,x_2 + v_1\right)^4\right)dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x,v)\,dv.$$

Докажем теперь, что $\operatorname{supp}\mathring{f}^{\beta} \subset Q_{2\delta}\times B_{\rho/4}$. Действительно, если $|v| > \rho_1/4$, то по построению $f_1^{\beta}(x,v) = \psi_1^{\beta}(|v|^2) = 0$. Следовательно, $\mathring{f}^{\beta}(x,v) = 0$ для $|v| > \rho_1/4$. Пусть $B_{\delta_0}(g)$ — круг наибольшего радиуса такой, что $B_{\delta_0}(g) \subset G_{2\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g = 0$. Если $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leqslant \rho_1/4$, то из условия 2.1 и неравенства $\delta_0/\delta > 1$ вытекает, что

$$\left|\frac{eh}{m_\beta c}x' + \beta z'\right| \geqslant \frac{eh}{m_\beta c}|x'| - |z'| > \frac{16c\rho}{e\delta}\,\frac{m_\beta e\delta_0}{m_\beta c} - \rho > \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

где $z' = (v_2, -v_1)$. Отсюда, используя очевидное неравенство

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \leqslant 2(a^4 + b^4),$$

имеем

$$\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^4 \geqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^2 + \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^2\right)^2 > \frac{1}{2}\rho_0^4.$$

Следовательно,

$$f_2^{\beta}(x,v) = \psi_2^{\beta}\left(\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^4\right) = 0.$$

Таким образом, $\mathring{f}^{\beta}(x,v) = 0$ для $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leqslant \rho/4$.

4. Построение стационарного решения в виде формы порядка $2m$

1. Несложно убедиться, что функция

$$f_4^{\beta}(x,v) = \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m} + \left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m}$$

удовлетворяет уравнению (3.1). Действительно, подставляя в (3.1) выражения

$$\frac{\partial \mathring{f}_5^{\beta}}{\partial x_1} = 2m\frac{eh}{cm_\beta}\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m-1}, \quad \frac{\partial \mathring{f}_5^{\beta}}{\partial x_2} = 2m\frac{eh}{cm_\beta}\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m-1}, \quad \frac{\partial \mathring{f}_5^{\beta}}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathring{f}_5^{\beta}}{\partial v_1} = -2m\beta\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m-1}, \quad \frac{\partial \mathring{f}_5^{\beta}}{\partial v_2} = 2m\beta\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m-1},$$

получим

$$2m\frac{eh}{cm_\beta}v_1\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m-1} + 2m\frac{eh}{cm_\beta}v_2\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m-1} -$$

$$-2m\frac{eh}{cm_\beta}v_2\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\right)^{2m-1} - 2m\frac{eh}{cm_\beta}v_1\left(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\right)^{2m-1} \equiv 0.$$

Введем четные функции $\psi_m^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_m^{-1}(0)=1$, $\psi_m^\beta(\tau) \geqslant 0$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_m^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^{2m}}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_m^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^{2m}}\Big)$ $(\tau \in \mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi_m^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$, где $\rho_0 = \Big(15\rho\delta_0/\delta\Big)$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\operatorname{supp}\psi_m^{+1} \subset \Big(-\dfrac{\rho_0^m}{2^{m-1}}, \dfrac{\rho_0^m}{2^{m-1}}\Big)$ и $\psi_m^{+1}(0) > 1$. Функция

$$\mathring{f}_m^\beta(x,v) = \psi_m^\beta\left(\left(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_1 + \beta v_2\right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_\beta c}\,x_2 - \beta v_1\right)^{2m}\right)$$

является решением уравнения (3.1).

2. Докажем теперь, что вектор-функция $\{0, \mathring{f}_1^\beta \mathring{f}_m^\beta\}$ является стационарным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4), удовлетворяющим условиям теоремы (2.1). По построению функция $\mathring{f}^\beta(x,v) = \mathring{f}_1^\beta(x,v) \times \mathring{f}_m^\beta(x,v)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и $\sup\limits_{x,v} \mathring{f}^\beta(x,v) \geqslant \mathring{f}^\beta(0,0) \geqslant 2\alpha > 0$. Остается доказать, что правая часть уравнения (2.5) тождественно равна нулю и $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Докажем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x,v)\,dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x,v)\,dv.$$

Аналогично предыдущему случаю, сделаем замены переменных $y = \dfrac{eh}{c}\,x$ и $w = m_{+1}(v_2, -v_1, v_3)$. Тогда, принимая во внимание равенства $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_1^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^2}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_1^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^2}\Big)$, $\dfrac{1}{m_{+1}^{3/2}}\,\psi_m^{+1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{+1}^{2m}}\Big) = \dfrac{1}{m_{-1}^{3/2}}\,\psi_m^{-1}\Big(\dfrac{\tau}{m_{-1}^{2m}}\Big)$ и вводя переменные $x = \dfrac{c}{eh}\,y$ и $v = \dfrac{1}{m_{-1}}\,(w_2, -w_1, w_3)$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_3} \mathring{f}^{+1}(x,v)\,dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{+1}(|v|^2)\psi_m^{+1}\left(\left(\frac{eh}{m_{+1}c}\,x_1 + v_2\right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_{+1}c}\,x_2 - v_1\right)^{2m}\right)dv =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{+1}^3}\,\psi_1^{+1}\left(\frac{|w|^2}{m_{+1}^2}\right)\psi_m^{+1}\left(\frac{(y_1+w_1)^{2m} + (y_2+w_2)^{2m}}{m_{+1}^{2m}}\right)dw =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{-1}^3}\,\psi_1^{-1}\left(\frac{|w|^2}{m_{-1}^2}\right)\psi_m^{-1}\left(\frac{(y_1+w_1)^{2m} + (y_2+w_2)^{2m}}{m_{-1}^{2m}}\right)dw =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{-1}\left(|v|^2\right)\psi_m^{-1}\left(\left(\frac{eh}{m_{-1}c}\,x_1 - v_2\right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_{-1}c}\,x_2 + v_1\right)^{2m}\right)dv = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x,v)\,dv.$$

Докажем теперь, что $\operatorname{supp}\mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Действительно если $|v| > \rho_1/4$, то по построению $f_1^\beta(x,v) = \psi_1^\beta(|v|^2) = 0$. Следовательно, $\mathring{f}^\beta(x,v) = 0$ для $|v| > \rho_1/4$. Пусть $B_{\delta_0}(g)$ — круг наибольшего радиуса такой, что $B_{\delta_0}(g) \subset G_{2\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g = 0$. Если $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leqslant \rho_1/4$, то из условия 2.1 и неравенства $\delta_0/\delta > 1$ вытекает, что

$$\left|\frac{eh}{m_\beta c}x' + \beta z'\right| \geqslant \frac{eh}{m_\beta c}|x'| - |z'| > \frac{16c\rho}{e\delta}\,\frac{m_\beta e\delta_0}{m_\beta c} - \rho > \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

где $z' = (v_2, -v_1)$. Отсюда, используя очевидное неравенство

$$a^{2m} + b^{2m} \geqslant \frac{1}{2^{m-1}}(a^2+b^2)^m,$$

имеем

$$\Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\Big)^{2m} + \Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\Big)^{2m} \geqslant \frac{1}{2^{m-1}}\Big(\Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_1 + \beta v_2\Big)^2 + \Big(\frac{eh}{cm_\beta}x_2 - \beta v_1\Big)^2\Big)^m > \frac{1}{2^{m-1}}\rho_0^m.$$

Следовательно,

$$\mathring{f}^{\beta}_m(x,v)=\psi_2^{\beta}\Big(\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_1+\beta v_2\Big)^{2m}+\Big(\frac{\beta eh}{cm_\beta}x_2-\beta v_1\Big)^{2m}\Big)=0.$$

Таким образом, $\mathring{f}^{\beta}(x,v)=0$ для $|x'|>\delta_0/2,\ |v|\leqslant\rho/4$.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и ряд ценных советов, а также В. П. Бурскому и А. Е. Шишкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А. А.* Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1975. — *15*, № 1. — С. 136–147.
2. *Веденяпин В. В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова// Докл. АН СССР. — 1986. — *290*, № 4. — С. 777–780.
3. *Веденяпин В. В.* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача// Докл. РАН. — 1992. — *323*, № 6. — С. 1004–1006.
4. *Власов А. А.* О вибрационных свойствах электронного газа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1938. — *8*, № 3. — С. 291–318.
5. *Добрушин Р. Л.* Уравнения Власова// Функц. анализ и его прилож. — 1979. — *13*, № 2. — С. 48–58.
6. *Козлов В. В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, № 4. — С. 93–130.
7. *Маслов В. П.* Уравнения самосогласованного поля// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1978. — *11*. — С. 153–234.
8. *Похожаев С. И.* О стационарных решениях уравнений Власова—Пуассона// Дифф. уравн. — 2010. — *46*, № 4. — С. 527–534.
9. *Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Докл. АН СССР. — 2012. — *443*, № 4. — С. 431–434.
10. *Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Тр. МИАН. — 2013. — *283*. — С. 204–232.
11. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двукомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// Усп. мат. наук. — 2014. — *69*, № 2. — С. 107–148.
12. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics// J. Differ. Equ. — 1977. — *25*, № 3. — С. 342–364.
13. *Batt J., Fabian K.* Stationary solutions of the relativistic Vlasov—Maxwell system of plasma physics// Chinese Ann. Math. Ser. B. — 1993. — *14*, № 3. — С. 253–278.
14. *Batt J., Faltenbacher W., Horst E.* Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1986. — *93*, № 2. — С. 159–183.
15. *Braasch P.* Semilineare elliptische Differentialgleichungen und das Vlasov-Maxwell-System. — PhD. Thesis, München, 1997.
16. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Global weak solutions of Vlasov—Maxwell systems// Commun. Pure Appl. Math. — 1989. — *42*, № 6. — С. 729–757.
17. *Greengard C., Raviart P.-A.* A boundary value problem for the stationary Vlasov—Poisson equations: the plane diode// Commun. Pure Appl. Math. — 1990. — *43*, № 4. — С. 473–507.
18. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations in a half space// Indiana Univ. Math. J. — 1994. — *43*, № 1. — С. 255–320.
19. *Pfaffelmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov—Poisson system in three dimensions for general initial data// J. Differ. Equ. — 1992. — *95*, № 2. — С. 281–303.
20. *Rein G.* Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains// Math. Methods Appl. Sci. — 1992. — *15*, № 5. — С. 365–374.
21. *Schaffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov—Poisson system in three dimensions// Commun. Part. Differ. Equ. — 1991. — *16*, № 8-9. — С. 1313–1335.
22. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — *9*, № 3. — С. 847–868.
23. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov—Poisson system: existence of weak solutions and stability// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1995. — *130*, № 2. — С. 145–161.

Ю. О. Беляева
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: yilia-b@yandex.ru

UDC 517.9

Stationary Solutions of Vlasov Equations for High-temperature Two-component Plasma

 Yu. O. Belyaeva

Abstract. We consider the first mixed problem for the Vlasov–Poisson equations in infinite cylinder. This problem describes evolution of density of distribution for ions and electrons in a high-temperature plasma in the presence of an outer magnetic field. We construct stationary solutions of the Vlasov–Poisson system of equations with the trivial potential of the self-consistent electric field describing two-component plasma in infinite cylinder such that their supports are located in a distance from the boundary of the domain.

REFERENCES

1. A. A. Arsen'ev, "Sushchestvovanie v tselom slabogo resheniya sistemy uravneniy Vlasova" [Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1975, **15**, No. 1, 136–147.
2. V. V. Vedenyapin, "Kraevaya zadacha dlya statsionarnykh uravneniy Vlasova" [Boundary value problems for a stationary Vlasov equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1986, **290**, No. 4, 777–780.
3. V. V. Vedenyapin, "O klassifikatsii statsionarnykh resheniy uravneniya Vlasova na tore i granichnaya zadacha" [Classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and a boundary value problem], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1992, **323**, No. 6, 1004–1006.
4. A. A. Vlasov, "O vibratsionnykh svoystvakh elektronnogo gaza" [On vibrational properties of electronic gas], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1938, **8**, No. 3, 291–318.
5. R. L. Dobrushin, "Uravneniya Vlasova" [Vlasov equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1979, **13**, No. 2, 48–58.
6. V. V. Kozlov, "Obobshchennoe kineticheskoe uravnenie Vlasova" [The generalized Vlasov kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 4, 93–130.
7. V. P. Maslov, "Uravneniya samosoglasovannogo polya" [Equations of the self-consistent field], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1978, **11**, 153–234.
8. S. I. Pokhozhaev, "O statsionarnykh resheniyakh uravneniy Vlasova—Puassona" [On stationary solutions of the Vlasov—Poisson equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 4, 527–534.
9. A. L. Skubachevskii, "Ob odnoznachnoy razreshimosti smeshannykh zadach dlya sistemy uravneniy Vlasova—Puassona v poluprostranstve" [On unique solvability of mixed problems for the Vlasov—Poisson system of equations in a half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2012, **443**, No. 4, 431–434.
10. A. L. Skubachevskii, "Smeshannye zadachi dlya uravneniy Vlasova—Puassona v poluprostranstve" [Mixed problems for the Vlasov—Poisson system of equations in a half-space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 204–232.
11. A. L. Skubachevskii, "Uravneniya Vlasova—Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole" [The Vlasov—Poisson equations for two-component plasma in homogeneous magnetic field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148.
12. J. Batt, "Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics," *J. Differ. Equ.*, 1977, **25**, No. 3, 342–364.
13. J. Batt and K. Fabian, "Stationary solutions of the relativistic Vlasov—Maxwell system of plasma physics," *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 1993, **14**, No. 3, 253–278.
14. J. Batt, W. Faltenbacher, and E. Horst, "Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1986, **93**, No. 2, 159–183.

15. P. Braasch, *Semilineare elliptische Differentialgleichungen und das Vlasov–Maxwell-System*, PhD. Thesis, München, 1997.
16. R. J. DiPerna and P. L. Lions, "Global weak solutions of Vlasov—Maxwell systems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1989, **42**, No. 6, 729–757.
17. C. Greengard and P.-A. Raviart, "A boundary value problem for the stationary Vlasov—Poisson equations: the plane diode," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1990, **43**, No. 4, 473–507.
18. Y. Guo, "Regularity for the Vlasov equations in a half space," *Indiana Univ. Math. J.*, 1994, **43**, No. 1, 255–320.
19. K. Pfaffelmoser, "Global classical solutions of the Vlasov—Poisson system in three dimensions for general initial data," *J. Differ. Equ.*, 1992, **95**, No. 2, 281–303.
20. G. Rein, "Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains," *Math. Methods Appl. Sci.*, 1992, **15**, No. 5, 365–374.
21. J. Schaffer, "Global existence of smooth solutions to the Vlasov—Poisson system in three dimensions," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1991, **16**, No. 8-9, 1313–1335.
22. A. L. Skubachevskii, "Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, No. 3, 847–868.
23. J. Weckler, "On the initial-boundary-value problem for the Vlasov—Poisson system: existence of weak solutions and stability," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1995, **130**, No. 2, 145–161.

Yu. O. Belyaeva
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: yilia-b@yandex.ru