Современная математика. Фундаментальные направления. Том 62 (2016). С. 5–18

УДК 517.925

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГЕМОДИНАМИКИ НА ГРАФАХ

© 2016 г. **В. И. БЕЗЯЕВ, Н. Х. САДЕКОВ**

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах. Получены точные или аналитические решения рассматриваемых задач.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Задача математического моделирования внутреннего движения жидкости по системе эластичных трубок, в том числе и моделирования течения крови по сердечно-сосудистой системе, является актуальной и имеет широкую область применения. Для математического описания течения крови в сосудах наиболее простыми и распространенными являются квазиодномерные модели. Применение квазиодномерного приближения позволяет исследовать широкий круг задач гемодинамики на геометрических графах. Примерами таких исследований могут служить работы [1–4] и многие другие (подробные обзоры и библиографии имеются в [3, 4]). Дифференциальные уравнения на графах и других разветвленных многообразиях являются математическими моделями многих процессов в физике и биологии. Основы теории дифференциальных уравнений на графах изложены в монографии [6]. В последнее время значительно усилился интерес к различным задачам математической физики на графах, сингулярных и разветвленных многообразиях (см., например, [5, 8, 9, 11, 12]). В [11, 12] исследован спектр оператора Шредингера на графе и асимптотические свойства в квантовых задачах на сингулярных пространствах. В [5, 8, 9] исследуются самосопряженные расширения оператора Шредингера на разветвленных многообразиях, а также полугруппы, задаваемые определенными самосопряженными расширениями.

При исследовании математических моделей гемодинамики важное значение имеют как точные, так и приближенные решения модельных задач. В данной работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах. Для задач на графах с одной вершиной и конечным множеством ребер методом распространяющихся волн (см. [10]) получены явные формулы (хотя и достаточно сложные) точных решений. Эти результаты, в частности, дополняют исследования в [1] и ряде других работ. Существование решения в классе C^1 начально-краевой задачи гемодинамики на графе с двумя вершинами (на одном сосуде) доказано с помощью метода Фурье. Известные результаты, позволяющие использовать этот метод для гиперболических систем, в данном случае неприменимы из-за неконсервативности рассматриваемой задачи.

Уравнения гемодинамики в квазиодномерном приближении представляют собой гиперболическую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных и одного алгебраического соотношения. В качестве пространственной переменной x выбирается длина дуги, проходящей через центры круговых поперечных сечений сосуда. Скорость движения крови считается направленной вдоль оси сосуда и одинаковой во всем круговом сечении сосуда. Обозначим через $U(x,t)$ скорость кровотока (см/с), $P(x,t)$ — давление (мм рт. ст.), $S(P)$ — площадь поперечного сечения сосуда (см^2), ρ — плотность крови (г/см^3). Тогда неоднородные уравнения гемодинамики для одного сосуда в квазиодномерном приближении имеют вид (см., например, [1])

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}q_f,\\ \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{\partial US}{\partial x}=0,\\ S=S(P),\end{gathered}\tag{1.1}$$

где первое уравнение описывает закон сохранения импульса, второе — закон сохранения массы крови, а третье — это уравнение состояния, которое отражает упруго-механические свойства сосуда. В первом уравнении $q_f(x,t)$ — объемная плотность внешней среды.

Из физиологических исследований известно, что пульсационное отклонение давления от среднего значения в норме невелико. Это позволяет провести линеаризацию исходной нелинейной системы уравнений (1.1) относительно средних, фоновых значений всех величин, входящих в уравнения (см. [1]).

Линейные уравнения, описывающие эволюцию малых отклонений от стационарных решений уравнений гемодинамики (1.1), получаются следующим образом. Давление, скорость и площадь поперечного сечения, входящие в систему уравнений (1.1), представим в виде $\bar p+p(x,t)$, $\bar u+u(x,t)$, $\bar s+\theta p(x,t)$ соответственно. Здесь постоянные величины $\bar u$, $\bar p$, $\bar s=S(\bar p)$, $\theta=S'(\bar p)>0$ соответствуют некоторому стационарному решению уравнений (1.1), а функции $u(x,t)$ и $p(x,t)$ — малые отклонения от данного стационарного решения. Подставляя указанные выше представления давления, скорости и площади поперечного сечения в систему уравнений (1.1) и оставляя в ней только слагаемые, линейные относительно p и u, получим линейную систему уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases}u_t+\bar u u_x+\dfrac{1}{\rho}p_x=\dfrac{1}{\rho}q_f,\\ p_t+\rho c^2 u_x+\bar u p_x=0,\end{cases}\tag{1.2}$$

где $c=\sqrt{\dfrac{\bar s}{\rho\theta}}$ — скорость распространения пульсовой волны. Уравнения (1.2) представляют собой линеаризованные гемодинамические уравнения для одного сосуда.

Важно отметить, что скорость кровотока значительно ниже скорости пульсовой волны, поэтому всюду далее будем придерживаться условия $\bar u<c$.

2. Задача Коши для линеаризованных уравнений гемодинамики

Рассмотрим задачу Коши для системы однородных линеаризованных уравнений гемодинамики

$$\begin{cases}u_t+\bar u u_x+\dfrac{1}{\rho}p_x=0 \qquad (-\infty<x<+\infty,\ t>0),\\ p_t+\rho c^2u_x+\bar u p_x=0,\\ u(x,0)=\phi(x),\\ p(x,0)=\psi(x),\end{cases}\tag{2.1}$$

где $\phi\in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi\in C^1(\mathbb{R})$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $p(x,t)$ — искомые функции. Пусть $\Pi=\{(x,t):-\infty<x<+\infty,\ t>0\}$. *Классическим решением* задачи (2.1) будем называть пару функций (u,p) из $C^1(\Pi)\cap C(\bar\Pi)$, которые поточечно удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Используя инварианты Римана (см., например, [7]), получим представление общего решения системы (1.2) в виде

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x-\lambda^+t)+g(x-\lambda^-t)),\\
p(x,t) &= \frac{\rho c}{2}(f(x-\lambda^+t)-g(x-\lambda^-t)),
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

где функции f и g из $C^1(\mathbb{R})$, $\lambda^+ = \bar{u}+c>0$, $\lambda^- = \bar{u}-c<0$. Как видно из (2.2), общим решением уравнений (1.2) является суперпозиция двух бегущих волн f и g произвольной формы, одна из которых распространяется по направлению движения крови в сосуде, а вторая — в противоположном направлении.

Теорема 2.1. *Классическое решение задачи Коши* (2.1) *существует, единственно и выражается формулами*

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}(\phi(x-\lambda^+t)+\phi(x-\lambda^-t))+\frac{1}{2\rho c}(\psi(x-\lambda^+t)-\psi(x-\lambda^-t)),\\
p(x,t) &= \frac{\rho c}{2}(\phi(x-\lambda^+t)-\phi(x-\lambda^-t))+\frac{1}{2}(\psi(x-\lambda^+t)+\psi(x-\lambda^-t)).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Доказательство. Подставляя общее решение (2.2) в начальные условия задачи (2.1), получим

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)+g(x)}{2} &= \phi(x),\\
\rho c\frac{f(x)-g(x)}{2} &= \psi(x).
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
f(x)=\phi(x)+\frac{\psi(x)}{\rho c},\ \ g(x)=\phi(x)-\frac{\psi(x)}{\rho c},
$$

а значит, решение задачи Коши (2.1) имеет вид (2.3). □

Рассмотрим теперь задачу Коши для системы неоднородных линеаризованных уравнений гемодинамики. Представим эту задачу в векторной форме

$$
\begin{cases}
Y_t + AY_x = F(x,t) \quad (-\infty < x < +\infty,\ t>0),\\
Y|_{t=0} = \Phi(x),
\end{cases}
\tag{2.4}
$$

где $Y = \begin{pmatrix} u(x,t)\\ p(x,t)\end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \bar{u} & \frac{1}{\rho}\\ \rho c^2 & \bar{u}\end{pmatrix}$, $F(x,t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}q(x,t)\\ 0\end{pmatrix}$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix}\phi(x)\\ \psi(x)\end{pmatrix}$. Здесь $q(x,t)$ — плотность внешних сил.

Теорема 2.2. *Пусть* $q\in C^1(\bar{\Pi})$, $\phi\in C^1(\mathbb{R})$ *и* $\psi\in C^1(\mathbb{R})$. *Тогда классическое решение задачи Коши* (2.4) ($u\in C^1(\Pi)\cap C(\bar{\Pi})$ *и* $p\in C^1(\Pi)\cap C(\bar{\Pi})$) *существует, единственно и выражается формулами*

$$
Y = \begin{pmatrix}
\dfrac{\phi(x-\lambda^+t)+\phi(x-\lambda^-t)}{2}+\dfrac{\psi(x-\lambda^+t)-\psi(x-\lambda^-t)}{2\rho c}+\\
\qquad + \dfrac{1}{2\rho}\displaystyle\int_0^t [q(x-\lambda^+(t-\tau),\tau)+q(x-\lambda^-(t-\tau),\tau)]d\tau\\
\rho c\dfrac{\phi(x-\lambda^+t)-\phi(x-\lambda^-t)}{2}+\dfrac{\psi(x-\lambda^+t)+\psi(x-\lambda^-t)}{2}+\\
\qquad + \dfrac{c}{2}\displaystyle\int_0^t [q(x-\lambda^+(t-\tau),\tau)-q(x-\lambda^-(t-\tau),\tau)]d\tau
\end{pmatrix}.
\tag{2.5}
$$

Доказательство. Пусть $Y = V + W$, где V — решение задачи

$$\begin{cases} V_t + AV_x = 0, \\ V|_{t=0} = \Phi(x), \end{cases} \tag{2.6}$$

а W — решение задачи

$$\begin{cases} W_t + AW_x = F(x,t), \\ W|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Для получения решения задачи (2.6) достаточно воспользоваться теоремой 2.1, а задачи (2.7) — принципом Дюамеля.

Лемма 2.1 (принцип Дюамеля)**.** *Пусть $Z = Z(x,t;\tau)$ — решение задачи*

$$\begin{cases} Z_t + AZ_x = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty,\ 0 < \tau < t), \\ Z|_{t=\tau} = F(x,\tau). \end{cases}$$

Тогда функция

$$W(x,t) = \int_0^t Z(x,t;\tau)d\tau$$

является решением задачи (2.7).

Доказательство. Так как

$$W_t(x,t) = Z(x,t;t) + \int_0^t Z_t(x,t,\tau)d\tau,$$

$$W_x = \int_0^t Z_x(x,t,\tau)d\tau$$

и $Z(x,t;t) = F(x,t)$, то функция $W(x,t)$ является решением задачи (2.7). □

Окончание доказательства теоремы 2.2. Делая замену $\tilde{t} = t - \tau$, сведем задачу о нахождении функции $Z(x,t;\tau)$ к задаче

$$\begin{cases} \tilde{Z}_{\tilde{t}} + A\tilde{Z}_x = 0 \qquad (-\infty < x < +\infty,\ \tilde{t} > 0), \\ \tilde{Z}|_{\tilde{t}=0} = F(x,\tau), \end{cases}$$

где $Z(x,\tilde{t}+\tau;\tau) \equiv \tilde{Z}(x,\tilde{t};\tau)$. По теореме 2.1 имеем

$$\tilde{Z}(x,\tilde{t};\tau) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\rho}[q(x-\lambda^+\tilde{t},\tau) + q(x-\lambda^-\tilde{t},\tau)] \\ \dfrac{c}{2}[q(x-\lambda^+\tilde{t},\tau) - q(x-\lambda^-\tilde{t},\tau)] \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$Z(x,t;\tau) \equiv \tilde{Z}(x,t-\tau;\tau) \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\rho}[q(x-\lambda^+(t-\tau),\tau) + q(x-\lambda^-(t-\tau),\tau)] \\ \dfrac{c}{2}[q(x-\lambda^+(t-\tau),\tau) - q(x-\lambda^-(t-\tau),\tau)] \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 2.1

$$W(x,t) = \int_0^t Z(x,t;\tau)d\tau = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2\rho}\int_0^t [q(x-\lambda^+\tilde{t},\tau) + q(x-\lambda^-\tilde{t},\tau)]d\tau \\ \dfrac{c}{2}\int_0^t [q(x-\lambda^+\tilde{t},\tau) - q(x-\lambda^-\tilde{t},\tau)]d\tau \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Таким образом, используя формулы (2.3) и (2.8), получим решение задачи (2.4) в виде (2.5). □

Будем называть задачу Коши (2.4) C^1-*корректной*, если она имеет классическое решение для любых $q \in C^1(\bar{\Pi})$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, это решение единственно и непрерывно зависит от q, ϕ и ψ.

Теорема 2.3. *Задача Коши* (2.4) C^1-*корректна.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 2.2.

3. Начально-краевая задача на графе с одной вершиной и одним ребром

Рассмотрим один полуограниченный сосуд. Представим его ориентированным графом Γ_1, состоящим из одной вершины и выходящего из нее прямолинейного ребра бесконечной длины, направленного вдоль оси сосуда. Введем на ребре систему координат с началом в вершине и осью, направленной вдоль ребра.

Пусть на ребре графа заданы линеаризованные уравнения гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине определены краевые условия 1-го рода, согласованные с начальными данными. Тогда получим следующую начально-краевую задачу на графе Γ_1:

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \dfrac{1}{\rho}p_x = 0 & (0 < x < +\infty,\ t > 0), \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \\ u(x,0) = \phi(x),\ p(x,0) = \psi(x), \\ u(0,t) = \nu(t),\ p(0,t) = \mu(t), \end{cases} \tag{3.1}$$

где ϕ, ψ, ν, μ — заданные функции из $C^1(\bar{\mathbb{R}}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{x : x > 0\}$, причем $\phi(0) = \nu(0)$, $\psi(0) = \mu(0)$. Пусть $\Pi_2 = \{(x,t) : 0 < x < +\infty,\ t > 0\}$. *Классическим решением* задачи (3.1) будем называть пару функций (u,p), которые принадлежат классу $C^1(\Pi_2) \cap C(\bar{\Pi}_2)$ и поточечно удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Теорема 3.1. *Классическое решение начально-краевой задачи* (3.1) *существует, единственно и выражается формулами*

$$\begin{gathered} u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\phi(x-\lambda^+t) + \phi(x-\lambda^-t)}{2} + \dfrac{\psi(x-\lambda^+t) - \psi(x-\lambda^-t)}{2\rho c}, & x \geqslant \lambda^+ t, \\ \nu\Big(-\dfrac{x-\lambda^+t}{\lambda^+}\Big) - \dfrac{\phi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t) - \phi(x-\lambda^-t)}{2} + \dfrac{\psi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t) - \psi(x-\lambda^-t)}{2\rho c}, & x < \lambda^+ t, \end{cases} \\ p(x,t) = \begin{cases} \rho c\dfrac{\phi(x-\lambda^+t) - \phi(x-\lambda^-t)}{2} + \dfrac{\psi(x-\lambda^+t) + \psi(x-\lambda^-t)}{2}, & x \geqslant \lambda^+ t, \\ \mu\Big(-\dfrac{x-\lambda^+t}{\lambda^+}\Big) - \rho c\dfrac{\phi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t) + \phi(x-\lambda^-t)}{2} + \dfrac{\psi(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x-\lambda^-t) + \psi(x-\lambda^-t)}{2}, & x < \lambda^+ t. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.2}$$

Доказательство. В формулах (2.2) общего решения линеаризованных уравнений гемодинамики определим функции f и g так, чтобы они удовлетворяли начальным и граничным условиям системы (3.1). Областью определения функции $f(x-\lambda^+t)$ в данном случае является вся прямая $(-\infty,+\infty)$, а функции $g(x-\lambda^-t)$ — полуось $[0,+\infty)$.

Подстановка общего решения в начальные условия позволяет определить f и g на полуоси $[0,+\infty)$ следующим образом

$$f(z) = \phi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho c}, \quad g(z) = \phi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho c}, \quad z \geqslant 0. \tag{3.3}$$

Осталось определить функцию f на оставшейся части ее области определения, т. е. на интервале $(-\infty, 0)$. Для этого, используя краевое условие $u(0,t) = \nu(t)$ и первую формулу в (2.2), получим

$$f(z) = 2\nu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) - \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) + \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \quad z < 0, \tag{3.4}$$

а используя условие $p(0,t) = \mu(t)$, получим

$$f(z) = \frac{2}{\rho c}\mu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) + \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) - \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \quad z < 0. \tag{3.5}$$

Таким образом, из формул (3.3)–(3.5) и (2.2) получим решение смешанной задачи (3.1) на графе Γ_1 в виде (3.2). □

4. Задача трансмиссии на графе с одной вершиной и двумя ребрами

Рассмотрим два стыкованных полуограниченных сосуда. Представим их ориентированным графом Γ_2, состоящим из одной вершины и двух полупрямых, одна из которых направлена к вершине, а другая — из нее. Введем систему координат с началом в этой вершине, а оси направим вдоль ребер так, что отрицательные координаты будут соответствовать входящему в вершину ребру, а положительные — выходящему из нее.

Пусть на каждом ребре i $(i = 1, 2)$ графа Γ_2 заданы линеаризованные уравнения гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине выполняются линеаризованные условия сопряжения, первое из которых выражает закон сохранения массы крови (т. е. поток крови в первом сосуде равен потоку крови во втором), а второе — равенство давлений на стыке сосудов (см. [1]).

Таким образом получаем задачу трансмиссии для системы линейных уравнений с кусочно-постоянными на графе Γ_2 коэффициентами вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_i}{\partial x} = 0 \quad (-\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty,\ t > 0),\\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \rho c_i^2 \dfrac{\partial u_i}{\partial x} + \bar{u}_i \dfrac{\partial p_i}{\partial x} = 0,\\ u_i(x,0) = \phi_i(x), \quad p_i(x,0) = \psi_i(x),\\ \bar{s}_1 u_1(0,t) + \theta_1 \bar{u}_1 p_1(0,t) = \bar{s}_2 u_2(0,t) + \theta_2 \bar{u}_2 p_2(0,t),\\ p_1(0,t) = p_2(0,t), \end{cases} \tag{4.1}$$

где $i = 1$, если $x < 0$, и $i = 2$, если $x > 0$. Здесь $\phi_i \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_i)$, $\psi_i \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_i)$, $\mathbb{R}_1 = \{x : x < 0\}$, $\mathbb{R}_2 = \{x : x > 0\}$, причем функции $\phi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ удовлетворяют условиям согласования, следующим из трех последних равенств в задаче (4.1).

Пусть $\Pi_1 = \{(x,t) : -\infty < x < 0,\ t > 0\}$ и $\Pi_2 = \{(x,t) : 0 < x < +\infty,\ t > 0\}$. *Классическим решением* задачи (4.1) будем называть пару функций (u,p), где $u = u_i \in C^1(\Pi_i) \cap C(\bar{\Pi}_i)$ и $p = p_i \in C^1(\Pi_i) \cap C(\bar{\Pi}_i)$ $(i = 1, 2)$, которые в классическом смысле удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Общие решения линеаризованных уравнений гемодинамики на каждом ребре определяются по формулам (2.2). Области определения функций f_i и g_i находятся из того, что эти функции удовлетворяют начальным условиям и условиям сопряжения. Таким образом получаем, что областью определения функции f_1 является полуось $(-\infty, 0]$, функций g_1 и f_2 — вся прямая $(-\infty, +\infty)$, а функции g_2 — полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка общих решений в начальные условия позволяет определить f_1 и g_1 на полуоси $(-\infty, 0]$, а f_2 и g_2 — на полуоси $[0, +\infty)$:

$$f_i(z) = \phi_i(z) + \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \quad g_i(z) = \phi_i(z) - \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \tag{4.2}$$

где $z \leqslant 0$, если $i = 1$, и $z \geqslant 0$, если $i = 2$.

Функции g_1 и f_2 на оставшихся частях их областей определения найдем, подставляя общие решения (2.2) в условия сопряжения. Переобозначая их соответственно G_1 и F_2, получим

$$\begin{aligned} G_1(z) &= k_{1\to 1}\, f_1\left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^-} z\right) + k_{2\to 1}\, g_2\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1^-} z\right), \quad z > 0,\\ F_2(z) &= k_{1\to 2}\, f_1\left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2^+} z\right) + k_{2\to 2}\, g_2\left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2^+} z\right), \quad z < 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $\lambda_i^+ = \bar{u}_i + c_i$, $\lambda_i^- = \bar{u}_i - c_i$, а $k_{1\to 1}, k_{2\to 1}, k_{1\to 2}, k_{2\to 2}$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$k_{i\to i} = 1 - \frac{2\bar{s}_i}{\rho c_i \left(\frac{\bar{s}_1(c_1-\bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2+\bar{u}_2)}{\rho c_2^2}\right)}, \quad k_{i\to j} = -\frac{2\bar{s}_i}{\rho c_j \left(\frac{\bar{s}_1(c_1-\bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2+\bar{u}_2)}{\rho c_2^2}\right)}, \qquad i \neq j.$$

Из формул (4.3) видно, что волны G_1 и F_2, распространяющиеся по ребрам графа Γ_2 по направлению от его вершины, представляют собой суперпозиции волн f_1 и g_2, распространяющихся по ребрам графа по направлению к вершине. При этом коэффициент $k_{i\to j}$ показывает, во сколько раз изменится амплитуда соответствующей волны при ее прохождении через вершину графа из i-го ребра в j-ое, а коэффициент $k_{i\to i}$ характеризует изменение амплитуды волны, распространяющейся по i-му ребру после ее отражения от вершины графа.

Подставляя полученные функции из (4.2)-(4.3) в формулы (2.2) на каждом ребре, окончательно получим единственное решение задачи трансмиссии на графе Γ_2 в следующем виде ($t \geqslant 0$):

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{f_1(x-\lambda_1^+ t) + g_1(x-\lambda_1^- t)}{2}, & x \leqslant \lambda_1^- t,\ x<0,\\ \dfrac{f_1(x-\lambda_1^+ t) + G_1(x-\lambda_1^- t)}{2}, & x > \lambda_1^- t,\ x<0,\\ \dfrac{f_2(x-\lambda_2^+ t) + g_2(x-\lambda_2^- t)}{2}, & x \geqslant \lambda_2^+ t,\ x>0,\\ \dfrac{F_2(x-\lambda_2^+ t) + g_2(x-\lambda_2^- t)}{2}, & x < \lambda_2^+ t,\ x>0, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$p(x,t) = \begin{cases} \rho c\dfrac{f_1(x-\lambda_1^+ t) - g_1(x-\lambda_1^- t)}{2}, & x \leqslant \lambda_1^- t,\ x<0,\\ \rho c\dfrac{f_1(x-\lambda_1^+ t) - G_1(x-\lambda_1^- t)}{2}, & x > \lambda_1^- t,\ x<0,\\ \rho c\dfrac{f_2(x-\lambda_2^+ t) - g_2(x-\lambda_2^- t)}{2}, & x \geqslant \lambda_2^+ t,\ x>0,\\ \rho c\dfrac{F_2(x-\lambda_2^+ t) - g_2(x-\lambda_2^- t)}{2}, & x < \lambda_2^+ t,\ x>0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.1. *Классическое решение задачи трансмиссии* (4.1) *существует, единственно и выражается формулами* (4.4), (4.5).

5. Гемодинамика на графе типа «пучок»

Рассмотрим граф типа «пучок» — ориентированный граф Γ_n, состоящий из одной вершины и n направленных полуограниченных ребер, соединяющихся в ней. На каждом ребре введем систему координат с началом в этой вершине, ось которой направлена вдоль ребра.

Пусть на каждом ребре графа Γ_n заданы система уравнений гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине выполняются линеаризованные условия сопряжения. Таким образом определена задача трансмиссии с кусочно-постоянными на графе Γ_n коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \bar u_i \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 \quad (z_i x_i < 0,\ t>0),\\ \dfrac{\partial p_i}{\partial t} + \rho c_i^2 \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} + \bar u_i \dfrac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0,\\ u_i(x_i,0) = \phi_i(x_i), \quad p_i(x_i,0) = \psi_i(x_i),\\ \sum\limits_{i=1}^{n} z_i(\bar s_i u_i(0,t) + \theta_i \bar u_i p_i(0,t)) = 0,\\ p_i(0,t) = p_j(0,t), \quad i \neq j, \end{cases} \tag{5.1}$$

где $i = 1,2,\dots,n$ — номер ребра. Здесь $z_i = 1$, если i-ое ребро является входящим в вершину, и $z_i = -1$, если i-ое ребро является выходящим из вершины. Будем предполагать, что $\phi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leqslant 0)$ и $\psi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leqslant 0)$, а также выполнены условия согласования на функции $\phi_i(x_i)$ и $\psi_i(x_i)$, определяемые тремя последними формулами в задаче (5.1) ($i = 1,\dots,n$).

Под *классическим решением* задачи (5.1) будем понимать пару функций (u,p) на $\Gamma_n \times (t \geqslant 0)$, для которых $u(x_i,t) = u_i(x_i,t) \in C^1(z_i x_i < 0,\ t>0) \cap C(z_i x_i \leqslant 0,\ t \geqslant 0)$, $p(x_i,t) = p_i(x_i,t) \in C^1(z_i x_i < 0,\ t>0) \cap C(z_i x_i \leqslant 0,\ t\geqslant 0)$ для $i = 1,\dots,n$ и для которых поточечно выполнены все условия задачи (5.1).

Теорема 5.1. *Классическое решение задачи трансмиссии* (5.1) *существует, единственно и выражается формулами*

$$u_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}(\psi_i(v_i)-\psi_i(w_i))+\phi_i(v_i)+\phi_i(w_i)\right), & z_iw_i\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}\psi_i(v_i)+\phi_i(v_i)+\sum\limits_{j=1}^{n}k_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho c_j}\psi_j\Big(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\Big)+\phi_j\Big(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\Big)\right)\right), & z_iw_i>0,\end{cases}$$

$$p_i(x_i,t)=\begin{cases}\dfrac{z_i\rho c_i}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}(\psi_i(v_i)+\psi_i(w_i))+\phi_i(v_i)-\phi_i(w_i)\right), & z_iw_i\leqslant 0,\\ \dfrac{z_i\rho c_i}{2}\left(\dfrac{z_i}{\rho c_i}\psi_i(v_i)+\phi_i(v_i)-\sum\limits_{j=1}^{n}k_{j\to i}\left(\dfrac{z_j}{\rho c_j}\psi_j\Big(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\Big)+\phi_j\Big(\dfrac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\Big)\right)\right), & z_iw_i>0,\end{cases} \tag{5.2}$$

где $v_i=x_i-\lambda_i^{z_i}t$ *и* $w_i=x_i-\lambda_i^{-z_i}t$, $i=1,2,\ldots,n$, *а* $k_{j\to i}$ — *коэффициенты, вычисляемые по формулам*

$$\begin{aligned}k_{i\to i}&=1-\frac{2\bar{s}_i}{\rho c_i\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{\bar{s}_m(c_m-z_mu_m)}{\rho c_m^2}},\\ k_{i\to j}&=-\frac{2z_iz_j\bar{s}_i}{\rho c_j\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{\bar{s}_m(c_m-z_mu_m)}{\rho c_m^2}},\quad i\neq j.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Доказательство. Общим решением уравнений гемодинамики на каждом ребре являются формулы

$$\begin{aligned}u_i(x,t)&=\frac{f_i^{z_i}(x_i-\lambda_i^{z_i}t)+f_i^{-z_i}(x_i-\lambda_i^{-z_i}t)}{2},\\ p_i(x,t)&=z_i\rho c_i\frac{f_i^{z_i}(x_i-\lambda_i^{z_i}t)-f_i^{-z_i}(x_i-\lambda_i^{-z_i}t)}{2},\end{aligned} \tag{5.4}$$

где $\lambda_i^{z}=\bar{u}_i+z_ic_i$, $\lambda_i^{-z_i}=\bar{u}_i-z_ic_i$, $i=1,2,\ldots,n$.

Конкретный вид функций $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ на области определения каждой из них задается так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям и условиям сопряжения. Здесь аргумент функции $f_i^{z_i}$ может принимать значения, удовлетворяющие условию $z_i(x_i-\lambda_i^{z_i}t)\leqslant 0$, а областью определения функции $f_i^{-z_i}$ является вся прямая $(-\infty,+\infty)$.

Введем обозначения $v_i=x_i-\lambda_i^{z_i}t$ и $w_i=x_i-\lambda_i^{-z_i}t$. Подстановка общего решения в начальные условия позволяет определить $f_i^{z_i}$ при $z_iv_i\leqslant 0$ и $f_i^{-z_i}$ при $z_iw_i\leqslant 0$:

$$f_i^{z_i}(v_i)=\phi_i(v_i)+z_i\frac{\psi_i(v_i)}{\rho c_i},\quad f_i^{-z_i}(w_i)=\phi_i(w_i)-z_i\frac{\psi_i(w_i)}{\rho c_i}. \tag{5.5}$$

Функцию $f_i^{-z_i}$ на оставшейся части ее области определения найдем, подставляя общее решение в условия сопряжения

$$f_i^{-z_i}(w_i)=\sum_{j=1}^{n}k_{j\to i}f_j^{z_j}\left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}}w_i\right),\quad z_iw_i>0,\ i=1,2,\ldots,n, \tag{5.6}$$

где коэффициенты $k_{j\to i}$ определяются по формулам (5.3).

Используя теперь в формулах (5.4) найденные в (5.5)-(5.6) функции на всех ребрах, получим окончательное решение смешанной задачи на графе Γ_n в виде (5.2). □

Замечание 5.1. С помощью принципа Дюамеля и полученных в данной работе формул решений задач для однородных систем гемодинамики на графах с одной вершиной нетрудно найти решения аналогичных задач для неоднородных систем и доказать их C^1-корректность.

6. Смешанная задача на графе с двумя вершинами

В этом разделе с помощью метода Фурье будет построено решение смешанной задачи гемодинамики в одном ограниченном сосуде. Особенность применения метода Фурье к рассматриваемой задаче состоит в том, что суммами «стоячих волн» удобнее представить вначале не искомые функции $u(x,t)$ и $p(x,t)$, а соответствующие им инварианты Римана. Это позволяет затем достаточно просто обосновать применяемый метод, получить аналитические выражения для пары функций (u,p) и, тем самым, доказать существование классического решения исходной гемодинамической задачи.

Построим сначала формальное решение смешанной задачи гемодинамики, определенной ниже. Рассмотрим один изолированный сосуд, который представим ориентированным графом Γ, состоящим из двух вершин, соединенных ребром длины l, направленным вдоль оси сосуда, причем направление ребра соответствует направлению движения крови в сосуде. Введем на ребре систему координат с началом в той вершине, из которой выходит ребро. Пространственную ось направим вдоль ребра. Тогда той вершине, из которой выходит ребро, будет соответствовать значение $x=0$, а другой вершине — $x=l$.

Пусть на ребре справедлива система уравнений гемодинамики

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \dfrac{1}{\rho}p_x = 0 \qquad (0<x<l,\ t>0), \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

и заданы начальные данные

$$u(x,0)=\phi(x), \quad p(x,0)=\psi(x), \tag{6.2}$$

а в вершинах выполняются краевые условия

$$u(0,t)=0, \quad u(l,t)=0. \tag{6.3}$$

Введем инварианты Римана для системы уравнений (6.1) по формулам

$$r(x,t)=u(x,t)+\frac{1}{\rho c}p(x,t), \quad s(x,t)=u(x,t)-\frac{1}{\rho c}p(x,t). \tag{6.4}$$

Тогда смешанная задача (6.1)–(6.3) эквивалентна смешанной задаче

$$\begin{cases} r_t + \lambda^+ r_x = 0 \qquad (0<x<l,\ t>0), \\ s_t + \lambda^- s_x = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

$$r(x,0)=\phi(x)+\frac{1}{\rho c}\psi(x), \quad s(x,0)=\phi(x)-\frac{1}{\rho c}\psi(x), \tag{6.6}$$

$$r(0,t)+s(0,t)=0, \quad r(l,t)+s(l,t)=0 \tag{6.7}$$

$(\lambda^+=\bar{u}+c>0,\ \lambda^-=\bar{u}-c<0)$.

Найдем формальное решение смешанной задачи (6.5)–(6.7). Пусть $\tilde{r}(x,t)=T(t)R(x)$, $\tilde{s}(x,t)=T(t)S(x)$ — решения системы (6.5), удовлетворяющие краевым условиям (6.7). Тогда

$$\frac{T'}{T}=-\frac{\lambda^+R'}{R}=-\lambda,$$
$$\frac{T'}{T}=-\frac{\lambda^-S'}{S}=-\lambda,$$
$$R(0)+S(0)=0, \quad R(l)+S(l)=0, \tag{6.8}$$

где $\lambda=\mathrm{const}$. Отсюда,

$$R'=\frac{\lambda}{\lambda^+}R, \quad S'=\frac{\lambda}{\lambda^-}S,$$

т. е.

$$R(x)=Ae^{\frac{\lambda}{\lambda^+}x}, \quad S(x)=Be^{\frac{\lambda}{\lambda^-}x},$$

где A и B — постоянные. Краевые условия (6.8) приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ Ae^{\frac{\lambda}{\lambda^+}l}+Be^{\frac{\lambda}{\lambda^-}l}=0, \end{cases}$$

которая имеет ненулевые решения только при

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda}{\lambda^+}l} & e^{\frac{\lambda}{\lambda^-}l} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. при $\lambda = \lambda_k = i\omega_0 k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi\lambda^-\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l} > 0$ (i — мнимая единица).

Таким образом, «стоячие волны» для задачи (6.5)–(6.7) определяются формулами

$$\tilde{r}(x,t) = r_k(x,t) = A_k e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}(x-\lambda^+ t)},$$
$$\tilde{s}(x,t) = s_k(x,t) = -A_k e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}(x-\lambda^- t)},$$

где A_k — произвольные ненулевые постоянные, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно формальное по методу Фурье решение задачи (6.5)–(6.7) будет иметь вид

$$r(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}(x-\lambda^+ t)}, \quad s(x,t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}(x-\lambda^- t)}, \tag{6.9}$$

где

$$A_k^0 = \frac{\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l}\left(\int_0^l r_0(z)e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda^+}z}dz - \int_{\lambda^+ l/\lambda^-}^0 s_0\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right)e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda^+}z}dz\right), \tag{6.10}$$

$$r_0(z) = \phi(z) + \frac{1}{\rho c}\psi(z), \quad s_0(z) = \phi(z) - \frac{1}{\rho c}\psi(z).$$

Формулы (6.10) для коэффициентов A_k^0 ($k \in \mathbb{Z}$) будут обоснованы ниже.

Из (6.4) и (6.9) теперь получаем формальное решение задачи (6.1)–(6.3)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(r(x,t)+s(x,t)) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{-\lambda_k t}(e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}x} - e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}x}), \\ p(x,t) &= \frac{\rho c}{2}(r(x,t)-s(x,t)) = \frac{\rho c}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{-\lambda_k t}(e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}x} + e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}x}). \end{aligned} \tag{6.11}$$

Пусть $\bar{\Pi}_\infty = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$. Для обоснования сходимости в $C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ функциональных рядов в формулах (6.9) и (6.11) наложим на начальные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в (6.2) следующие условия. Пусть $\phi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^2([0,l])$ и выполнены условия согласования

$$\begin{gathered} \phi(0) = \phi(l) = 0, \\ \lambda^+\left(\phi'(0) + \frac{\psi'(0)}{\rho c}\right) + \lambda^-\left(\phi'(0) - \frac{\psi'(0)}{\rho c}\right) = 0, \\ \lambda^+\left(\phi'(l) + \frac{\psi'(l)}{\rho c}\right) + \lambda^-\left(\phi'(l) - \frac{\psi'(l)}{\rho c}\right) = 0, \\ (\lambda^+)^2\left(\phi''(0) + \frac{\psi''(0)}{\rho c}\right) + (\lambda^-)^2\left(\phi''(0) - \frac{\psi''(0)}{\rho c}\right) = 0, \\ (\lambda^+)^2\left(\phi''(l) + \frac{\psi''(l)}{\rho c}\right) + (\lambda^-)^2\left(\phi''(l) - \frac{\psi''(l)}{\rho c}\right) = 0. \end{gathered} \tag{6.12}$$

Как будет видно из дальнейшего, условия согласования (6.12) — вполне естественные условия сходимости в $C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ рядов Фурье (по x) в (6.9).

Теорема 6.1. *Пусть* $\phi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^2([0,l])$ *и выполнены условия согласования* (6.12). *Тогда ряды в* (6.11) *сходятся в* $C^1(K)$ *для любого компакта* $K \subset \bar{\Pi}_\infty$, *а определяемые ими функции* $u \in C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ *и* $p \in C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ *представляют собой классическое решение задачи* (6.1)–(6.3).

Доказательство. Общее решение системы уравнений (6.5) имеет вид

$$r(x,t) = f(x - \lambda^+ t), \quad s(x,t) = g(x - \lambda^- t), \tag{6.13}$$

где f и g — произвольные функции из $C^1(\mathbb{R})$. В силу начальных условий (6.6) функции f и g однозначно определяются на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ формулами

$$f(x) = \phi(x) + \frac{1}{\rho c}\psi(x), \quad g(x) = \phi(x) - \frac{1}{\rho c}\psi(x). \tag{6.14}$$

Таким образом, решение (r,s) задачи (6.5), (6.6) определяется формулами (6.13), (6.14) внутри характеристического треугольника $x - \lambda^+ t \geqslant 0$, $x - \lambda^- t \leqslant l$, $t \geqslant 0$.

Методом продолжения построим решение задачи (6.5)–(6.7) на всей полосе $\bar{\Pi}_\infty = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l,\ t > 0\}$. Для этого доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, задаваемые формулами (6.14) на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, до функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$. При этом на функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ наложим условия

$$\tilde{f}(x) = -\tilde{g}\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right), \quad \tilde{f}(l-x) = -\tilde{g}\left(l - \frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right) \tag{6.15}$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)$ — периодическая функция с периодом $\left(1 - \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$, а $\tilde{g}(x)$ — периодическая функция с периодом $\left(1 - \dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$. Построим требуемые функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ следующим образом. Пусть

$$\tilde{f}(x) = -g\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right) \text{ при } \frac{\lambda^+}{\lambda^-}l \leqslant x \leqslant 0 \text{ и } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l,$$

$$\tilde{g}(x) = -f\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}x\right) \text{ при } \frac{\lambda^-}{\lambda^+}l \leqslant x \leqslant 0 \text{ и } \tilde{g}(x) = g(x) \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Полученные таким образом функции $\tilde{f}(x)$ $\left(\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}l \leqslant x \leqslant l\right)$ и $\tilde{g}(x)$ $\left(\dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}l \leqslant x \leqslant l\right)$ продолжим периодически, соответственно, с периодами $\left(1 - \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$ и $\left(1 - \dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$. Нетрудно проверить, что условия согласования (6.12) обеспечивают принадлежность построенных функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ пространству $C^2(\mathbb{R})$, а также выполнение условий (6.15).

Формулы

$$r(x,t) = \tilde{f}(x - \lambda^+ t), \quad s(x,t) = \tilde{g}(x - \lambda^- t)$$

дают теперь решение задачи (6.5)–(6.7), так как из условий (6.15) следует выполнение краевых условий (6.7). Поскольку функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ принадлежат пространству $C^2(\mathbb{R})$ и являются периодическими с периодами, соответственно, $\left(1 - \dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$ и $\left(1 - \dfrac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$, то они разлагаются в соответствующие комплексные ряды Фурье. Эти ряды Фурье сходятся в норме пространства $C^1([a,b])$ для любого отрезка $[a,b]$ в силу принадлежности функций $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ пространству $C^2(\mathbb{R})$. Заменяя в указанных разложениях аргумент x на $x - \lambda^+ t$ и $x - \lambda^- t$, соответственно, получим разложения функций $\tilde{f}(x - \lambda^+ t)$ и $\tilde{g}(x - \lambda^- t)$, т. е. функций $r(x,t)$ и $s(x,t)$. Нетрудно проверить, что найденные разложения будут иметь вид (6.9), (6.10), причем ряды (6.9) будут сходиться в $C^1(K)$ для любого компакта $K \subset \bar{\Pi}_\infty$.

Так как функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ принадлежат $C^2(\mathbb{R})$, то коэффициенты A_k^0 и $-A_k^0$ их разложений в ряды Фурье имеют порядок $O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ при $k \to \infty$. Это гарантирует абсолютную (и равномерную) сходимость рядов в (6.9) при всех $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а значит, и возможность представления функций $u(x,t)$ и $p(x,t)$ рядами (6.11). $\square$

Замечание 6.1. Из формул (6.9)-(6.10) и (6.11), представляющих решения задач (6.5)–(6.7) и (6.1)–(6.3) в комплексной форме, нетрудно получить решения этих задач в вещественной форме.

Например, вещественная форма решения задачи (6.5)–(6.7) относительно инвариантов Римана $r(x,t)$ и $s(x,t)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
r(x,t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\omega_0 k}{\lambda^+}(x-\lambda^+ t) + b_k \sin\frac{\omega_0 k}{\lambda^+}(x-\lambda^+ t),\\
s(x,t) &= -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\omega_0 k}{\lambda^-}(x-\lambda^- t) + b_k \sin\frac{\omega_0 k}{\lambda^-}(x-\lambda^- t),
\end{aligned}
\tag{6.16}
$$

где

$$
a_k = \frac{2\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l}\int_0^l r_0(z)\cos\frac{\omega_0 k}{\lambda^+} z\,dz + \frac{2\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l}\int_0^l s_0(z)\cos\frac{\omega_0 k}{\lambda^-} z\,dz,
$$

$$
b_k = \frac{2\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l}\int_0^l r_0(z)\sin\frac{\omega_0 k}{\lambda^+} z\,dz + \frac{2\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l}\int_0^l s_0(z)\sin\frac{\omega_0 k}{\lambda^-} z\,dz.
$$

Из формул (6.16) видно, что инвариант $r(x,t)$ представляет собой ограничение на отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$ суперпозиции «элементарных» периодических волн, имеющих формы постоянной, а также косинусов и синусов с частотами $\omega_0 k/\lambda^+$, перемещающихся без искажения вправо со скоростями $\omega_0 k$, $k = 1, 2, \ldots$. Аналогично, инвариант $s(x,t)$ является ограничением на отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$ суперпозиции «элементарных» периодических волн того же вида, но с частотами $\omega_0 k/\lambda^-$ и перемещающихся без искажения влево со скоростями $\omega_0 k$, $k = 1, 2, \ldots$.

7. Примеры

Для двух простых примеров применения результатов, полученных в данной работе, будут использованы близкие к реальным данные, присущие вполне конкретным сосудам.

Пример 7.1. Рассмотрим линейную модель гемодинамики в сонной артерии, фоновые значения скорости, давления и площади поперечного сечения которой равны, соответственно, $\bar{u} = 20$, $\bar{p} = 90$, $\bar{s} = 0{,}5$. Пусть, далее, коэффициент эластичности $\theta = 0{,}025$, а плотность крови $\rho = 1{,}05$. Кроме того, выберем начальные возмущения скорости и давления: $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = 20\cos x$.

Поставим следующую задачу Коши:

$$
\begin{cases}
u_t + 20u_x + 0{,}95p_x = 0 \quad (-\infty < x < +\infty,\ t > 0),\\
p_t + 20u_x + 20p_x = 0,\\
u(x,0) = 0,\\
p(x,0) = 20\cos x.
\end{cases}
$$

Используя теорему 2.1, получим точное решение поставленной задачи в виде

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 2{,}18\cos(-x + 24{,}4t) - 2{,}18\cos(-x + 15{,}6t),\\
p(x,t) &= 10\cos(-x + 24{,}4t) + 10\cos(-x + 15{,}6t).
\end{aligned}
$$

Пример 7.2. Рассмотрим задачу гемодинамики в аорте, для которой будем использовать следующие данные: $\bar{u} = 50$, $\bar{p} = 100$, $\bar{s} = 5{,}5$, $\theta = 0{,}18$, $\rho = 1{,}05$. Зададим начальные возмущения скорости и давления: $\phi(x) = 0$ и $\psi(x) = 20\cos\left(\frac{1}{29}x - 3{,}6\right)$, а также граничные условия: $\nu(t) = 0$ и $\mu(t) = 80$.

Аорту представим графом Γ_1, определенным в разделе 3. Тогда смешанная задача будет иметь вид

$$
\begin{cases}
u_t + 50u_x + 0{,}95p_x = 0 \quad (0 < x < +\infty,\ t > 0),\\
p_t + 30{,}5u_x + 50p_x = 0,\\
u(x,0) = 0, \quad p(x,0) = 20\cos\left(\frac{1}{29}x - 3{,}6\right),\\
u(x,0) = 0, \quad p(x,0) = 80.
\end{cases}
$$

Воспользовавшись теоремой 2.2, получим точное решение данной задачи:

$$u(x,t) = \begin{cases} 1{,}8\cos(-0{,}034x + 1{,}9t + 3{,}6) - 1{,}8\cos(-0{,}034x + 1{,}6t + 3{,}6), & 0 \leqslant x - 55t, \\ 1{,}8\cos(-0{,}028x + 1{,}6t + 3{,}6) - 1{,}8\cos(-0{,}034x + 1{,}6t + 3{,}6), & x - 55t < 0, \end{cases}$$

$$p(x,t) = \begin{cases} 9{,}99\cos(-0{,}0345x+1{,}91t+3{,}6)+9{,}99\cos(-0{,}0345x+1{,}53t+3{,}6), & 0 \leqslant x-55{,}5t, \\ 79{,}8-9{,}99\cos(-0{,}0277x+1{,}53t+3{,}6)+9{,}99\cos(-0{,}0345x+1{,}53t+3{,}6), & x-55{,}5t < 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абакумов Н. В. и др.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы// Мат. модел. — 2000. — *12*, № 2. — С. 106–117.
2. *Буничева А. Я. и др.* Исследование влияния гравитационных перегрузок на параметры кровотока в сосудах большого круга кровообращения// Мат. модел. — 2012. — *24*, № 7. — С. 67–82.
3. *Кошелев В. Б. и др.* Математические модели квази-одномерной гемодинамики. — М.: МАКС Пресс, 2010.
4. *Мухин С. И.* Математическое моделирование гемодинамики. — Дисс. д.ф.-м.н., МГУ, 2008.
5. *Нуман Эльшейх М. Х., Сакбаев В. Ж.* Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах// Тр. МФТИ. — 2014. — *6*, № 2. — С. 61–67.
6. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
7. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
8. *Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г.* Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения// Докл. РАН. — 2010. — *433*, № 3. — С. 314–317.
9. *Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г.* Диффузия и квантовая динамика на графах// Докл. РАН. — 2013. — *451*, № 2. — С. 141–145.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Изд. МГУ, 2004.
11. *Толченников А. А., Чернышев В. Л., Шафаревич А. И.* Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах// Нелин. динамика. — 2010. — *6*, № 3. — С. 623–638.
12. *Чернышев В. Л., Шафаревич А. И.* Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 4. — С. 606–620.

В. И. Безяев
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

Н. Х. Садеков
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: nail.sadd@mail.ru

UDC 517.925

On Some Problems of Hemodynamics on Graphs

© 2016 **V. I. Bezyaev, N. Kh. Sadekov**

Abstract. In this paper, some problems for linearized equations of hemodynamics on simplest graphs are considered. Exact or analytic solutions of such problems are obtained.

REFERENCES

1. N. V. Abakumov, etc., “Metodika matematicheskogo modelirovaniya serdechno-sosudistoy sistemy” [Methods of mathematical modelling of the cardiovascular system], *Mat. model.* [Math. Model.], 2000, **12**, No. 2, 106–117.
2. A. Ya. Bunicheva, etc., “Issledovanie vliyaniya gravitatsionnykh peregruzok na parametry krovotoka v sosudakh bol’shogo kruga krovoobrashcheniya” [Investigation of gravitational acceleration effect on blood flow parameters in vessels of greater circulation], *Mat. model.* [Math. Model.], 2012, **24**, No. 7, 67–82.
3. V. B. Koshelev, etc., *Matematicheskie modeli kvazi-odnomernoy gemodinamiki* [Mathematical Models of Quasi-one-dimensional Hemodynamics], MAKS Press, Moscow, 2010.
4. S. I. Mukhin, *Matematicheskoe modelirovanie gemodinamiki* [Mathematical Modelling of Hemodynamics], Doctoral Thesis, MSU, Moscow, 2008.
5. M. Kh. Numan El’sheykh and V. Zh. Sakbaev, “Operatory Laplasa dlya uravneniya Shredingera na grafakh” [Laplace operators for the Schrödinger equation on graphs], *Tr. MFTI* [Proc. Moscow Inst. Phys. Tech.], 2014, **6**, No. 2, 61–67.
6. Yu. V. Pokornyy, etc., *Differentsial’nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004.
7. B. L. Rozhdestvenskiy and N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1978.
8. V. Zh. Sakbaev and O. G. Smolyanov, “Dinamika kvantovoy chastitsy s razryvnoy zavisimost’yu massy ot polozheniya” [Dynamic of a quantum particle with discontinuous dependence of mass on position], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **433**, No. 3, 314–317.
9. V. Zh. Sakbaev and O. G. Smolyanov, “Diffuziya i kvantovaya dinamika na grafakh” [Diffusion and quantum dynamics of graphs], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **451**, No. 2, 141–145.
10. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskiy, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physic], MSU, Moscow, 2004.
11. A. A. Tolchennikov, V. L. Chernyshev, and A. I. Shafarevich, “Asimptoticheskie svoystva i klassicheskie dinamicheskie sistemy v kvantovykh zadachakh na singulyarnykh prostranstvakh” [Asymptotical properties and classic dynamical systems in quantum problems on singular spaces] *Nelineynaya dinamika* [Nonlin. Dynamics], 2010, **6**, No. 3, 623–638.
12. V. L. Chernyshev and A. I. Shafarevich, “Kvaziklassicheskiy spektr operatora Shredingera na geometricheskom grafe” [Quasiclassic spectrum of the Schrödinger operator on geometric graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **82**, No. 4, 606–620.

V. I. Bezyaev
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: vbezyaev@mail.ru

N. Kh. Sadekov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: nail.sadd@mail.ru