Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 164–181

УДК 517.9

О КОЭРЦИТИВНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

© 2016 г. **А. Р. ХАНАЛЫЕВ**

Аннотация. В произвольном банаховом пространстве E рассматривается задача Коши

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0$$

для дифференциального уравнения с линейным сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t, всюду плотную в E область определения $D = D(A(t))$, порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$. При естественных предположениях относительно $A(t)$ устанавливается коэрцитивная разрешимость задачи Коши в банаховом пространстве $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Доказана более сильная оценка решения по сравнению с известными ранее при меньших ограничениях на $f(t)$ и v_0.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Оценки и обозначения

Рассмотрим задачу Коши

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0 \tag{1.1}$$

в произвольном банаховом пространстве E. Здесь $v(t)$ и $f(t)$ — искомая и заданная функции, определенные на $[0,1]$ со значениями в E; $v'(t)$ — производная, понимаемая как предел по норме E соответствующего конечно-разностного отношения; $A(t)$ — действующий в E линейный неограниченный оператор, имеющий не зависящую от t, всюду плотную в E область определения D; $v_0 \in D$. К такой задаче сводятся различные краевые задачи для эволюционных уравнений в частных производных [3].

Будем предполагать, что

1. при любых $t \in [0,1]$ и λ с $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ оператор $A(t) + \lambda I$ имеет ограниченный обратный, причем
$$\left\| [A(t) + \lambda I]^{-1} \right\|_{E \to E} \leqslant M(1 + |\lambda|)^{-1}$$
(согласно [2], оператор $A(t)$ принято называть сильно позитивным);
2. для любых $t, s, \tau \in [0,1]$ справедливо неравенство
$$\left\| [A(t) - A(s)]A^{-1}(\tau) \right\|_{E \to E} \leqslant M|t-s|^{\varepsilon}, 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Функцию $v(t)$ назовем *решением* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0,1]$. Производная в концах отрезка понимается как соответствующая односторонняя производная;
2. элемент $v(t)$ принадлежит $D = D(A(t))$ при каждом $t \in [0,1]$ и $A(t)v(t)$ непрерывна на $[0,1]$;
3. функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению и начальному условию (1.1).

Задача (1.1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t)$ при определенных ограничениях на v_0 и достаточно гладких функциях $f(t)$, а для ее решения справедлива формула

$$v(t) = v(t,0)v_0 + \int_0^t v(t,s)f(s)ds,$$

где $v(t,s)$ — фундаментальное решение уравнения (1.1), называемое также *эволюционной оператор-функцией* [3, 10]. Оно определяется из соотношения

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(t)\} + \int_s^t \exp\{-(t-t_1)A(t)\}[A(t)-A(t_1)]v(t_1,s)dt_1$$

или

$$v(t,s) = \exp\{-(t-s)A(s)\} + \int_s^t v(t,t_1)[A(s)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-s)A(s)\}dt_1$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1. оператор $v(t,s)$ сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
2. $v(t,s) = v(t,\tau)v(\tau,s), v(t,t) = I$, $0 \leqslant s \leqslant \tau \leqslant t \leqslant 1$;
3. оператор $v(t,s)$ отображает область $D = D(A(t))$ в себя, оператор $u(t,s) = A(t)v(t,s)A^{-1}(s)$ ограничен, сильно непрерывен по t и s $(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1)$;
4. на области D оператор $v(t,s)$ сильно дифференцируем по t и s, причем

$$\frac{\partial v(t,s)}{\partial t} = -A(t)v(t,s), \qquad \frac{\partial v(t,s)}{\partial s} = v(t,s)A(s).$$

Определение. Говорят, что задача (1.1) *коэрцитивно разрешима* в некотором банаховом пространстве $F(E) = F([0,1],E)$ функций $f(t)$ со значениями в E на $[0,1]$, если для всякой $f(t) \in F(E)$ существует единственное решение задачи (1.1), причем v' и $A(t)v$ принадлежат тому же пространству $F(E)$ [4].

Введем банахово пространство $C_0^{\beta,\gamma}(E) = C_0^{\beta,\gamma}([0,1],E)$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \beta,\ 0 < \beta < 1)$, полученное замыканием множества всех гладких функций $f(t)$, определенных на отрезке $[0,1]$, со значениями из E в норме

$$\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1} \frac{(t+\tau)^\gamma \|f(t+\tau)-f(t)\|_E}{\tau^\beta}.$$

Здесь под $C(E) = C([0,1],E)$ понимается банахово пространство определенных на $[0,1]$ со значениями в E непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \|f(t)\|_E .$$

Таким образом, при $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$ пространство $C_0^{\alpha,0}(E) = C_0^{\alpha,0}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C^\alpha(E) = C^\alpha([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$. А если $\gamma = \beta = \alpha$, то тогда пространство $C_0^{\alpha,\alpha}(E) = C_0^{\alpha,\alpha}([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$ совпадает с пространством $C_0^\alpha(E) = C_0^\alpha([0,1],E)$ $(0 < \alpha < 1)$, причем нормы этих пространств равномерно по $\alpha \in (0,1)$ эквивалентны.

Обозначим через $E_\alpha^t = E_{\alpha,\infty}^t(A(t),E)$ $(0 < \alpha < 1)$ дробные пространства с нормой

$$\|u\|_{E_\alpha^t} = \sup_{z>0} z^{1-\alpha} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}u\|_E + \|u\|_E ,$$

состоящие из всех элементов $u \in E$, для которых эта норма конечна.

Из результатов работы [7] следует, что пространство E_α^t не зависит от t в силу предположения $D(A(t)) = D$, т. е., что норма $\|u\|_{E_\alpha^t}$ эквивалентна $\|u\|_{E_\alpha^s}$ при любых $t,s \in [0,1]$. В дальнейшем пространство E_α^t обозначается просто E_α.

Известно, что в случае произвольного неограниченного сильно позитивного оператора $A(t)$ и любого банахова пространства E коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) отсутствует в $C(E)$. В условиях настоящей работы коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространстве Гельдера

$C_0^\alpha(E)$ с весом t^α установлена в [6], и в пространстве $C(E_\alpha) = C([0,1], E_\alpha)$ установлена в [8] при $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$.

Известно, что для аналитической полугруппы справедливы оценки [5, 10]:

$$\|\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E\to E} \leqslant M\exp\{-\delta(t-s)\},\ t > s,\ M > 0,\ \delta > 0, \tag{1.3}$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)\exp\{-(t-s)A(t)\}\right\|_{E\to E} \leqslant \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}},\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \tag{1.4}$$

$$\left\|z^{1-\alpha}A^{1-\alpha}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E} \leqslant M,\ z > 0,\ 0 < \alpha < 1, \tag{1.5}$$

$$\|\exp\{-(t+\tau-s)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau-s)A(t)\}\|_{E\to E} \leqslant M\tau^\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.6}$$

Как показано в [5, 10], для $v(t,s)$ справедливы следующие леммы:

Лемма 1.1. *Для любых $0 \leqslant s < t \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ верны оценки*

$$\|v(t,s)\|_{E\to E} \leqslant M,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \leqslant \frac{M}{(t-s)^\alpha}, \tag{1.7}$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)v(t,s)\right\|_{E\to E} \leqslant \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha}}, \tag{1.8}$$

$$\|v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E\to E} \leqslant M(t-s)^\varepsilon,$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}]\right\|_{E\to E} \leqslant \frac{M}{(t-s)^{1+\alpha-\varepsilon}},$$

$$\left\|A^{1+\alpha}(t)[v(t,s) - \exp\{-(t-s)A(t)\}]A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \leqslant M(t-s)^{\varepsilon-\alpha}, \tag{1.9}$$

где M не зависит от t, s, α и ε.

Лемма 1.2. *Для любых $0 \leqslant s < t < t+\tau \leqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|v(t+\tau,s) - v(t,s)\|_{E\to E} \leqslant M\varphi,$$

$$\|A(t+\tau)v(t+\tau,s) - A(t)v(t,s)\|_{E\to E} \leqslant \frac{M\varphi}{t-s}, \tag{1.10}$$

$$\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)A^{-1}(s) - A(t)v(t,s)A^{-1}(s)\right\|_{E\to E} \leqslant M\varphi, \tag{1.11}$$

где $\varphi = \tau^\varepsilon + \dfrac{\tau^\alpha}{(t-s)^\alpha}$ и M не зависит от t, s, τ, α и ε.

Приведем одно тождество для $v'(t)$:

$$v'(t) = \int\limits_0^t A(t)v(t,s)(f(t)-f(s))ds + \int\limits_0^t A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds+$$
$$+A(t)v(t,0)A^{-1}(0)(f(t)-f(0)) + A(t)v(t,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)+$$
$$+A(t)v(t,0)A^{-1}(0)v_0' = W_1(t)+W_2(t)+W_3(t)+W_4(t)+W_5(t),$$

где

$$W_1(t) = \int\limits_0^t A(t)v(t,s)(f(t)-f(s))ds,$$

$$W_2(t) = \int\limits_0^t A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds,$$

$$W_3(t) = A(t)v(t,0)A^{-1}(0)(f(t)-f(0)),$$
$$W_4(t) = A(t)v(t,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t),$$
$$W_5(t) = A(t)v(t,0)A^{-1}(0)v_0' \quad (v_0' = f(0) - A(0)v_0).$$

2. Формулировка и доказательство основной теоремы

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_{\beta-\gamma}$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma < \beta < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|v'\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|v'\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\|v_0'\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right] \qquad (2.1)$$

с постоянной M, *не зависящей от* β, γ, v_0' *и* $f(t)$.

Доказательство. Для доказательства нужно получить оценки функций $W_1(t), W_2(t), W_3(t), W_4(t)$, $W_5(t)$ в нормах $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Сначала оценим $W_1(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_1(t)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \left\|A^2(t)\exp\{-zA(t)\}v(t,s)\right\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\, ds \leqslant$$

$$\leqslant Mz^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \min\left[\frac{1}{z^2}, \frac{1}{(t-s)^2}\right](t-s)^\beta t^{-\gamma} ds\, \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M_1 z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^\beta ds}{(z+t-s)^2 t^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть сначала $z \leqslant t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^\beta ds}{(z+t-s)^2 t^\gamma} \leqslant z^{1-\beta}\int_0^t \frac{ds}{(z+t-s)^{2-\beta}} \leqslant \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть теперь $z > t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^\beta ds}{(z+t-s)^2 t^\gamma} \leqslant \frac{1}{z^{\beta-\gamma}t^\gamma}\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\beta}} = \frac{t^{\beta-\gamma}}{\beta z^{\beta-\gamma}} < \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$

$$z^{1-\beta+\gamma}\int_0^t \frac{(t-s)^\beta ds}{(z+t-s)^2 t^\gamma} \leqslant \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак, установили оценку

$$\|W_1(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда имеем

$$\|W_1\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \qquad (2.2)$$

Теперь оценим $W_1(t)$ в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Для этого установим оценки

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \frac{M}{\beta}||f||_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (2.3)$$

$$\|W_1(t+\tau) - W_1(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \qquad (2.4)$$

В силу (1.8) при $\alpha = 0$ получаем

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \int_0^t \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\, ds \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\beta} t^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M t^{\beta-\gamma}}{\beta} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Итак, для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ получена оценка

$$\|W_1(t)\|_E \leqslant \frac{M t^{\beta-\gamma}}{\beta} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.5}$$

Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.3), во-вторых, (2.4) при $t \leqslant \tau$. Действительно, в силу (2.5) и неравенства треугольника имеем

$$\|W_1(t+\tau) - W_1(t)\|_E \leqslant \|W_1(t+\tau)\|_E + \|W_1(t)\|_E \leqslant M\beta^{-1}[(t+\tau)^{\beta-\gamma} + t^{\beta-\gamma}] \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M\beta^{-1}(t+\tau)^{\beta-\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M 2^{1+\beta} \tau^{\beta}}{\beta (t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1 \tau^{\beta}}{\beta (t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$. Разобьем $W_1(t+\tau) - W_1(t)$ в сумму следующих интегралов:

$$W_1(t+\tau) - W_1(t) = \int_0^{t-\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s) ds (f(t+\tau) - f(t)) +$$

$$+ \int_0^{t-\tau} [A(t+\tau) v(t+\tau, s) - A(t) v(t, s)](f(t) - f(s)) ds +$$

$$+ \int_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s)(f(t+\tau) - f(s) ds -$$

$$- \int_{t-\tau}^{t} A(t) v(t, s)(f(t) - f(s) ds = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_0^{t-\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s) ds (f(t+\tau) - f(t)),$$

$$I_2 = \int_0^{t-\tau} [A(t+\tau) v(t+\tau, s) - A(t) v(t, s)](f(t) - f(s)) ds,$$

$$I_3 = \int_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s)(f(t+\tau) - f(s) ds,$$

$$I_4 = - \int_{t-\tau}^{t} A(t) v(t, s)(f(t) - f(s) ds.$$

Оценим I_1, I_2, I_3 и I_4 в отдельности. Сначала оценим I_1. Воспользовавшись тождеством

$$\int_0^{t-\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s) ds = A(t+\tau)[v(t+\tau, t-\tau) - v(t+\tau, 0)] A^{-1}(t) +$$

$$+ \int_0^{t-\tau} A(t+\tau) v(t+\tau, s)[A(t) - A(s)] A^{-1}(t) ds, \tag{2.6}$$

оценками (1.2) и (1.7), (1.8) при $\alpha = 0$, получим

$$\|I_1\|_E \leqslant [\|A(t+\tau) v(t+\tau, t-\tau) A^{-1}(t)\|_{E \to E} \|A(t+\tau) v(t+\tau, 0) A^{-1}(t)\|_{E \to E} +$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds]\,\|f(t+\tau)-f(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant\left[M+M_1+M_2\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^{\varepsilon}ds}{t+\tau-s}\right]\frac{\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^{\beta}ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^{\beta}(t+\tau)^{\varepsilon}}{\varepsilon(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Оценим теперь I_2. В силу (1.10) при $\alpha=1$ имеем

$$\|I_2\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^{\varepsilon}ds}{(t-s)^{1-\beta}}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\beta}}\right]\frac{1}{t^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M_1\tau^{\beta}}{\beta(1-\beta)t^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_2\tau^{\beta}}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (1.8) при $\alpha=0$, получаем оценку для I_3,

$$\|I_3\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\|f(t+\tau)-f(s)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\frac{ds}{(t+\tau-s)^{1-\beta}(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_1\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же получаем оценку для I_4,

$$\|I_4\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t}\|A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\|f(t)-f(s)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{ds}{(t-s)^{1-\beta}t^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_1\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_1,I_2,I_3 и I_4, получим (2.4). Из (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\|W_1\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.7}$$

Теперь аналогичные оценки установим для $W_2(t)$. Сначала оценим $W_2(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_2(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^{t}\left\|A^2(t)\exp\{-zA(t)\}v(t,s)\right\|_{E\to E}\left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^{t}\min\left[\frac{1}{z^2},\frac{1}{(t-s)^2}\right](t-s)^{\varepsilon}ds\,\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M_1z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^{t}\frac{(t-s)^{\varepsilon}ds}{(z+t-s)^2}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть $z \leqslant t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\varepsilon}ds}{(z+t-s)^2} \leqslant z^{1-\beta}t^{\gamma}\int\limits_0^t \frac{ds}{(z+t-s)^{2-\beta}} \leqslant \frac{t^{\gamma}}{1-\beta} \leqslant \frac{1}{1-\beta}.$$

Пусть теперь $z > t$, тогда

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\varepsilon}ds}{(z+t-s)^2} \leqslant \frac{1}{z^{\beta-\gamma}}\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}} = \frac{t^{\varepsilon}}{\varepsilon z^{\beta-\gamma}} < \frac{t^{\varepsilon}}{\varepsilon t^{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Поэтому для любого $z > 0$ получим

$$z^{1-\beta+\gamma}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\varepsilon}ds}{(z+t-s)^2} \leqslant \frac{1}{\beta(1-\beta)}.$$

Итак, установили, что

$$\|W_2(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда получаем

$$\|W_2\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant \frac{M_1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.8}$$

Теперь оценим $W_2(t)$ в $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Установим оценку

$$\|W_2\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.9}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \frac{M}{\beta}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.10}$$

$$\|W_2(t+\tau) - W_2(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.11}$$

Сначала установим (2.10). Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.8) при $\alpha = 0$, получаем

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \int\limits_0^t \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\,ds \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^t \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}t^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{Mt^{\varepsilon}}{\varepsilon}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|W_2(t)\|_E \leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{\beta}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.12}$$

Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.10), во-вторых, (2.11) при $t \leqslant \tau$. Действительно, в силу (2.12) и неравенства треугольника получим

$$\|W_2(t+\tau) - W_2(t)\|_E \leqslant \|W_2(t+\tau)\|_E + \|W_2(t)\|_E \leqslant M\beta^{-1}[(t+\tau)^{\beta-\gamma} + t^{\beta-\gamma}]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M\beta^{-1}(t+\tau)^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$. Тогда представим разность $W_2(t+\tau) - W_2(t)$ в виде суммы следующих интегралов:

$$W_2(t+\tau) - W_2(t) = \int\limits_0^{t-\tau}\{A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau) -$$

$$-A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)\}ds+$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds+$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds = I_5+I_6+I_7,$$

где

$$I_5=\int\limits_0^{t-\tau}\{A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)-$$

$$-A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)\}ds,$$

$$I_6=\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds,$$

$$I_7=\int\limits_{t-\tau}^{t} A(t)v(t,s)[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)ds.$$

Сначала оценим I_5. Для этого преобразуем I_5 в виде

$$I_5=\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)][A(t)-A(s)]A^{-1}(t)f(t)ds-$$

$$-\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)(f(t+\tau)-f(t))ds+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds=$$

$$=Q_1+Q_2+Q_3+Q_4,$$

где

$$Q_1=\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds,$$

$$Q_2=-\int\limits_0^{t-\tau}[A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)][A(t)-A(s)]A^{-1}(t)f(t)ds,$$

$$Q_3=-\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)(f(t+\tau)-f(t))ds,$$

$$Q_4=\int\limits_0^{t-\tau} A(t+\tau)v(t+\tau,s)[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)f(t+\tau)ds.$$

Оценим Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 в отдельности. Оценим сначала Q_1. Воспользовавшись тождеством (2.6), оценками (1.2) и (1.7), (1.8) при $\alpha=0$, получаем

$$\|Q_1\|_E \leqslant \{\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,t-\tau)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}+\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}+$$

$$+\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds\}\times$$

$$\times\left\|[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\leqslant\left[M+M_1+M_2\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon ds}{t+\tau-s}\right]\tau^\varepsilon\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M_3\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же получаем оценки для Q_3 и Q_4:

$$\|Q_3\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)-f(t)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon\tau^\beta ds}{(t+\tau-s)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\beta ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\beta}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$

$$\|Q_4\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}ds\times$$

$$\times\left\|[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{(t-s)^\varepsilon\tau^\varepsilon ds}{t+\tau-s}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\varepsilon}{\varepsilon}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Наконец, оценим Q_2. В силу (1.2) и (1.10) при $\alpha=1$ имеем

$$\|Q_2\|_E\leqslant\int\limits_0^{t-\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)-A(t)v(t,s)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(s)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau^\varepsilon ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\varepsilon}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\left[\frac{\tau^\varepsilon t^\varepsilon}{\varepsilon}+\int\limits_0^{t-\tau}\frac{\tau ds}{(t-s)^{2-\beta}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$

$$\leqslant M\left[\frac{\tau^\beta t^\varepsilon}{\beta}+\frac{\tau}{(1-\beta)\tau^{1-\beta}}\right]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для Q_1,Q_2,Q_3 и Q_4 получим, что

$$\|I_5\|_E\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(1-\beta)(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.8) при $\alpha=0$, получим оценку для I_6,

$$\|I_6\|_E\leqslant\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\|A(t+\tau)v(t+\tau,s)\|_{E\to E}\left\|[A(s)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E}\|f(t+\tau)\|_E\,ds\leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_{t-\tau}^{t+\tau}\frac{ds}{(t+\tau-s)^{1-\varepsilon}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M(t+\tau)^\varepsilon\tau^\varepsilon}{\varepsilon(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M\tau^\beta}{\beta(t+\tau)^\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же оцениваем I_7:

$$\|I_7\|_E \leqslant \int\limits_{t-\tau}^{t} \|A(t)v(t,s)\|_{E\to E} \left\|[A(s)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \, ds \leqslant$$

$$\leqslant M \int\limits_{t-\tau}^{t} \frac{ds}{(t-s)^{1-\varepsilon}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M(t+\tau)^{\gamma}\tau^{\varepsilon}}{\varepsilon(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{\beta(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4, получаем (2.11).

Оценим теперь $W_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Сначала оценим $W_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Воспользовавшись оценками (1.5) и (1.7), получаем

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_3(t)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \left\|z^{1-(\beta-\gamma)}A^{1-(\beta-\gamma)}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E} \left\|A^{1+\beta-\gamma}(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t)-f(0)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mt^{\beta-\gamma}}{t^{\beta-\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|W_3(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_3\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.13}$$

Теперь оценим $W_3(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. В силу (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant \left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t)-f(0)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$

т. е.

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда, во-первых, следует оценка

$$\|W_3(t)\|_E \leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, \ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.14}$$

во-вторых,

$$\|W_3(t+\tau)-W_3(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}, 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1, \tag{2.15}$$

при $t \leqslant \tau$. Действительно,

$$\|W_3(t+\tau)-W_3(t)\|_E \leqslant \|W_3(t+\tau)\|_E + \|W_3(t)\|_E \leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant$$

$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} = \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t > \tau$, тогда преобразуем разность $W_3(t+\tau) - W_3(t)$ в виде

$$W_3(t+\tau) - W_3(t)_E = A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)(f(t+\tau)-f(t))+$$

$$+[A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)(f(t)-f(0)) = I_8 + I_9,$$

где

$$I_8 = A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)(f(t+\tau)-f(t)),$$

$$I_9 = [A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)(f(t)-f(0)).$$

Воспользовавшись формулой (1.7) при $\alpha = 0$, оценим I_8:

$$\|I_8\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t+\tau)-f(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Далее, воспользовавшись оценкой (1.11), оценим I_9:

$$\|I_9\|_E \leqslant \left\|[A(t+\tau)v(t+\tau,0) - A(t)v(t,0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \|f(t)-f(0)\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\left(\tau^{\varepsilon}+\frac{\tau^{\beta}}{t^{\beta}}\right)t^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\left(\frac{\tau^{\varepsilon}t^{\beta}}{t^{\gamma}}+\frac{\tau^{\beta}}{t^{\gamma}}\right)\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$
$$\leqslant M\left(\frac{2^{\gamma}\tau^{\beta}t^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}+\frac{2^{\gamma}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\right)\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M2^{1+\gamma}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}=\frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_8 и I_9, получаем (2.15). В силу (2.14) и (2.15) имеем

$$\|W_3\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.16}$$

Теперь аналогичные оценки установим и для $W_4(t)$. Сначала оценим $W_4(t)$ в норме $C(E_{\beta-\gamma})$. В силу (1.2), (1.5) и (1.7) имеем

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\|A(t)\exp\{-zA(t)\}W_4(t)\|_E\leqslant$$
$$\leqslant\left\|z^{1-(\beta-\gamma)}A^{1-(\beta-\gamma)}(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E}\left\|A^{1+\beta-\gamma}(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\times$$
$$\times\left\|[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\leqslant\frac{Mt^{\varepsilon}}{t^{\beta-\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Отсюда для любого $0\leqslant t\leqslant 1$ получаем

$$\|W_4(t)\|_{E_{\beta-\gamma}}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_4\|_{C(E_{\beta-\gamma})}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.17}$$

Оценим теперь $W_4(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е. установим оценку

$$\|W_4\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}. \tag{2.18}$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant M\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{2.19}$$

$$\|W_4(t+\tau)-W_4(t)\|_E\leqslant\frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},\ 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.20}$$

Сначала установим (2.19). Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.7), при $\alpha=0$ получаем

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant\left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|[A(0)-A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|f(t)\|_E\leqslant$$
$$\leqslant Mt^{\varepsilon}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Поэтому

$$\|W_4(t)\|_E\leqslant Mt^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \tag{2.21}$$

при любом $0\leqslant t\leqslant 1$. Из последнего неравенства, во-первых, следует (2.19), во-вторых, (2.20) при $t\leqslant\tau$. Действительно, в силу (2.21) и неравенства треугольника имеем

$$\|W_4(t+\tau)-W_4(t)\|_E\leqslant\|W_4(t+\tau)\|_E+\|W_4(t)\|_E\leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant$$
$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\leqslant\frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}=\frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Пусть теперь $t>\tau$, тогда представим разность $W_4(t+\tau)-W_4(t)$ в виде

$$W_4(t+\tau)-W_4(t)=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)(f(t+\tau)-f(t))+$$
$$+A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t)+$$
$$+A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t)f(t)+$$
$$+[A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)-A(t)v(t,0)A^{-1}(0)][A(0)-A(t)]A^{-1}(t)f(t)=$$
$$=I_{10}+I_{11}+I_{12}+I_{13},$$

где

$$I_{10}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)(f(t+\tau)-f(t)),$$
$$I_{11}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)f(t),$$
$$I_{12}=A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)[A(0)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)[A(t)-A(t+\tau)]A^{-1}(t)f(t),$$

$$I_{13} = [A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0) - A(t)v(t,0)A^{-1}(0)][A(0) - A(t)]A^{-1}(t)f(t).$$

Оценим I_{10}, I_{11}, I_{12} и I_{13} в отдельности. Сперва оценим I_{10}. В силу (1.2) и (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|I_{10}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \|f(t+\tau) - f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\tau^\beta (t+\tau)^\varepsilon}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Точно так же оцениваем I_{11} и I_{12}:

$$\|I_{11}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(t) - A(t+\tau)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M\tau^\varepsilon (t+\tau)^\gamma}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)},$$
$$\|I_{12}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t)]A^{-1}(t+\tau)\right\|_{E\to E} \times$$
$$\times \left\|[A(t) - A(t+\tau)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant Mt^\varepsilon \tau^\varepsilon \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Наконец, воспользовавшись оценками (1.2) и (1.11), оценим I_{13}:

$$\|I_{13}\|_E \leqslant \left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0) - A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|[A(0) - A(t)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E} \|f(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant M\left(\tau^\varepsilon + \frac{\tau^\beta}{t^\beta}\right) t^\varepsilon \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(t+\tau)^\gamma} \|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}.$$

Объединив оценки для I_{10}, I_{11}, I_{12} и I_{13}, получаем (2.20).

В конце доказательства оценим $W_5(t)$ в нормах $C(E_{\beta-\gamma})$ и $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. Вначале оценим $W_5(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Преобразуем $W_5(t)$ в виде

$$W_5(t) = \exp\{-tA(t)\}v_0' + \exp\{-tA(t)\}[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)v_0' +$$
$$+ A(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0' = F_1(t) + F_2(t) + F_3(t), \tag{2.22}$$

где

$$F_1(t) = \exp\{-tA(t)\}v_0',$$
$$F_2(t) = \exp\{-tA(t)\}[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)v_0',$$
$$F_3(t) = A(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'.$$

Сначала оценим $F_1(t)$. В силу (1.3) имеем

$$\|F_1(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_1\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.23}$$

Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.4) при $\alpha = 0$, получаем оценку для $F_2(t)$:

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_2(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-(z+t)A(t)\}\|_{E\to E} \left\|[A(t) - A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \frac{Mz^{1-(\beta-\gamma)}t^\varepsilon}{z+t} \left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Итак, для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|F_2(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_2\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.24}$$

Наконец, оцениваем $F_3(t)$ в $C(E_{\beta-\gamma})$. Пусть сначала $z \leqslant t$, тогда в силу (1.3) и (1.9) при $\alpha = 1$ имеем

$$z^{1-(\beta-\gamma)} \|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_3(t)\|_E \leqslant$$
$$\leqslant z^{1-(\beta-\gamma)} \|\exp\{-zA(t)\}\|_{E\to E} \left\|A^2(t)[v(t,0) - \exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E} \left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{1-(\beta-\gamma)}t^{\varepsilon-1}\left\|v_0'\right\|_E = Mt^{\varepsilon-\beta+\gamma}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.25}$$

Пусть теперь $z > t$, тогда воспользовавшись оценками (1.4) и (1.9) при $\alpha = 0$, получим

$$z^{1-(\beta-\gamma)}\left\|A(t)\exp\{-zA(t)\}F_3(t)\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{z}{t^{\beta-\gamma}}\left\|A(t)\exp\{-zA(t)\}\right\|_{E\to E}\left\|A(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mt^{\varepsilon}}{t^{\beta-\gamma}}\|v_0'\|_E = Mt^{\varepsilon-\beta+\gamma}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.26}$$

Из (2.25) и (2.26) следует, что при любом $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\|F_3(t)\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда

$$\|F_3\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.27}$$

Используя оценки (2.23), (2.24) и (2.27), получаем для $W_5(t)$ неравенство

$$\|W_5\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.28}$$

Теперь оценим $W_5(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е. докажем оценку

$$\|W_5\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.29}$$

Для этого достаточно установить, что

$$\|W_5(t)\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2.30}$$

$$\|W_5(t+\tau) - W_5(t)\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.31}$$

Сначала установим неравенство (2.30). В силу (1.7) при $\alpha = 0$ имеем

$$\|W_5(t)\|_E \leqslant \left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Далее, установим (2.31). Пусть $t \leqslant \tau$, тогда воспользовавшись тождеством (2.22), оценим сначала разность $F_1(t+\tau) - F_1(t)$. Преобразуем разность $F_1(t+\tau) - F_1(t)$ в виде

$$F_1(t+\tau) - F_1(t) = [\exp\{-(t+\tau)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau)A(t)\}]v_0' +$$

$$+[\exp\{-(t+\tau)A(t)\} - \exp\{-tA(t)\}]v_0' = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Вначале оценим Δ_1. В силу (1.6) имеем

$$\|\Delta_1\|_E \leqslant \|\exp\{-(t+\tau)A(t+\tau)\} - \exp\{-(t+\tau)A(t)\}\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\tau^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.32}$$

Теперь оценим Δ_2:

$$\|\Delta_2\|_E \leqslant \left\|[\exp\{-(t+\tau)A(t)\} - \exp\{-tA(t)\}]v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{\tau}\left\|A(t)\exp\{-(t+s)A(t)\}v_0'\right\|_E ds \leqslant M\int_0^{\tau}\frac{ds}{(t+s)^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.33}$$

Из (2.32) и (2.33) следует, что

$$\|F_1(t+\tau) - F_1(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0 \leqslant t < t+\tau \leqslant 1. \tag{2.34}$$

Теперь оценим разность $F_2(t+\tau) - F_2(t)$ при $t \leqslant \tau$. Сначала воспользовавшись оценками (1.2) и (1.3), оценим $F_2(t)$ в норме E:

$$\|F_2(t)\|_E \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Итак,

$$\|F_2(t)\|_E \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}. \tag{2.35}$$

Отсюда следует оценка

$$\|F_2(t+\tau)-F_2(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}},\ 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.36}$$

Действительно, в силу (2.35) и неравенства треугольника имеем

$$\|F_2(t+\tau)-F_2(t)\|_E \leqslant \|F_2(t+\tau)\|_E+\|F_2(t)\|_E \leqslant M[(t+\tau)^{\beta-\gamma}+t^{\beta-\gamma}]\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant 2M(t+\tau)^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M2^{1+\beta}\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, оценим разность $F_3(t+\tau)-F_3(t)$. Для этого сначала $F_3(t)$ оценим в E:

$$\|F_3(t)\|_E \leqslant \|\exp\{-tA(t)\}\|_{E\to E}\left\|A(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant Mt^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant Mt^{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Отсюда в силу неравенства треугольника получаем оценку

$$\|F_3(t+\tau)-F_3(t)\|_E \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}, 0\leqslant t<t+\tau\leqslant 1. \tag{2.37}$$

Используя оценки (2.34), (2.36) и (2.37), получим (2.31).

Пусть теперь $t>\tau$. Преобразуем разность $W_5(t+\tau)-W_5(t)$ в виде

$$W_5(t+\tau)-W_5(t)=[A(t+\tau)-A(t)]v(t+\tau,0)A^{-1}(0)v_0'+A(t)[v(t+\tau,0)-v(t,0)]A^{-1}(0)v_0'=$$

$$=I_{14}+I_{15},$$

где

$$I_{14}=[A(t+\tau)-A(t)]v(t+\tau,0)A^{-1}(0)v_0',$$

$$I_{15}=A(t)[v(t+\tau,0)-v(t,0)]A^{-1}(0)v_0'.$$

Оценим I_{14} и I_{15} в отдельности. Воспользовавшись оценками (1.2) и (1.7), для I_{14} получим

$$\|I_{14}\|_E \leqslant \left\|[A(t+\tau)-A(t)]A^{-1}(t+\tau)\ \right\|_{E\to E}\left\|A(t+\tau)v(t+\tau,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant$$

$$\leqslant M\tau^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Далее, оценим I_{15}. Воспользовавшись тождеством

$$v(t+\tau,0)-v(t,0)=[v(t+\tau,t)-I]v(t,0),$$

где

$$v(t+\tau,t)-I=\exp\{-\tau A(t)\}-I+\int\limits_t^{t+\tau}v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}dt_1=$$

$$=-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-t_1A(t)\}dt_1+\int\limits_t^{t+\tau}v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}dt_1,$$

преобразуем I_{15} в виде

$$I_{15}=-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'dt_1-\int\limits_0^{\tau}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)v_0'dt_1-$$

$$-\int\limits_0^{\tau}\exp\{-t_1A(t)\}A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'dt_1+$$

$$+\int\limits_t^{t+\tau} A(t)v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}v(t,0)A^{-1}(0)v_0'dt_1 = \Delta_3+\Delta_4+\Delta_5+\Delta_6,$$

где

$$\Delta_3 = -\int\limits_0^{\tau} A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'dt_1,$$

$$\Delta_4 = -\int\limits_0^{\tau} A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)v_0'dt_1,$$

$$\Delta_5 = -\int\limits_0^{\tau} \exp\{-t_1A(t)\}A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)v_0'dt_1,$$

$$\Delta_6 = \int\limits_t^{t+\tau} A(t)v(t+\tau,t_1)[A(t)-A(t_1)]\exp\{-(t_1-t)A(t)\}v(t,0)A^{-1}(0)v_0'dt_1.$$

Сначала оценим Δ_3:

$$\|\Delta_3\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \left\|(t+t_1)^{1-\beta+\gamma}A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}v_0'\right\|_E (t+t_1)^{\beta-\gamma-1}dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau} \frac{dt_1}{(t+t_1)^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{\tau}{t^{1-\beta+\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{2^{\gamma}\tau^{1-\beta}\tau^{\beta}}{t^{1-\beta}(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M_1\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Теперь воспользовавшись оценками (1.2) и (1.4) при $\alpha=0$, оценим Δ_4:

$$\|\Delta_4\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \|A(t)\exp\{-(t+t_1)A(t)\}\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(0)]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\tau} \frac{t^{\varepsilon}dt_1}{t+t_1}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau t^{\varepsilon}}{t}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{1-\beta}\tau^{\beta}}{t^{1-\beta}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Для Δ_5 имеем

$$\|\Delta_5\|_E \leqslant \int\limits_0^{\tau} \|\exp\{-t_1A(t)\}\|_{E\to E}\left\|A^2(t)[v(t,0)-\exp\{-tA(t)\}]A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M\tau}{t^{1-\varepsilon}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{1-\beta}\tau^{\beta}}{t^{1-\beta}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, оценим Δ_6. В силу (1.2), (1.3) и (1.7), (1.8) при $\alpha=0$ получаем

$$\|\Delta_6\|_E \leqslant \int\limits_t^{t+\tau} \|A(t)v(t+\tau,t_1)\|_{E\to E}\left\|[A(t)-A(t_1)]A^{-1}(t)\right\|_{E\to E}\|\exp\{-(t_1-t)A(t)\}\|_{E\to E}dt_1\times$$

$$\times\left\|A(t)v(t,0)A^{-1}(0)\right\|_{E\to E}\left\|v_0'\right\|_E \leqslant M\int\limits_t^{t+\tau}\frac{|t-t_1|^{\varepsilon}dt_1}{t+\tau-t_1}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant$$

$$\leqslant M\int\limits_t^{t+\tau}\frac{dt_1}{(t+\tau-t_1)^{1-\varepsilon}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant M\varepsilon^{-1}\tau^{\varepsilon}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} \leqslant \frac{M\tau^{\beta}}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^{\gamma}}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Объединив оценки для $\Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$ и Δ_6 получаем, что

$$\|I_{15}\|_E \leqslant \frac{M\tau^\beta}{(\beta-\gamma)\,(t+\tau)^\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}}.$$

Наконец, объединив оценки для I_{14} и I_{15}, получаем (2.31).

Используя оценки (2.2), (2.8), (2.13), (2.17) и (2.28), получим оценку для $v'(t)$ в норме $C(E_{\beta-\gamma})$, т. е.

$$\left\|v'\right\|_{C(E_{\beta-\gamma})} \leqslant M\left[\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right], \tag{2.38}$$

а используя оценки (2.7), (2.9), (2.16), (2.18) и (2.29), получим оценку для $v'(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$, т. е.

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]. \tag{2.39}$$

Оценку для $A(t)v(t)$ в норме $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ получаем в силу неравенства треугольника из уравнений (1.1):

$$\|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[\frac{1}{\beta-\gamma}\left\|v_0'\right\|_{E_{\beta-\gamma}} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]. \tag{2.40}$$

Остается, используя оценки (2.38), (2.39) и (2.40), получить неравенство коэрцитивности (2.1). Теорема доказана. □

3. Следствие

Теорема 3.1. *Пусть* $A(0)v_0 = f(0)$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \beta < 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant \frac{M}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}$$

с постоянной M, *не зависящей от* β, γ *и* $f(t)$.

Если в доказанной теореме $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$, тогда получаем (см. [1]):

Теорема 3.2. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} + \left\|v'\right\|_{C(E_\alpha)} \leqslant M\left[\frac{1}{\alpha}\left\|v_0'\right\|_{E_\alpha} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)}\right],$$

где M *не зависит от* α, v_0' *и* $f(t)$.

Теорема 3.3. *Пусть* $A(0)v_0 = f(0)$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ *при некоторых* $0 < \alpha < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C^\alpha(E)$ *и справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\left\|v'\right\|_{C^\alpha(E)} + \|A(.)v\|_{C^\alpha(E)} \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)}\|f\|_{C^\alpha(E)},$$

где M *не зависит от* α *и* $f(t)$.

Теперь введем банахово пространство $E_0^{\beta,\gamma}$, состоящее из элементов $w \in E$, для которых конечна норма

$$|w|_0^{\beta,\gamma} = \max_{0\leqslant z\leqslant 1}\left\|e^{-zA(t)}w\right\|_E + \sup_{0\leqslant z<z+\tau\leqslant 1}\tau^{-\beta}(z+\tau)^\gamma\left\|(e^{-(z+\tau)A(t)} - e^{-zA(t)})w\right\|_E.$$

Тогда справедлива следующая теорема [10]:

Теорема 3.4. *Пусть* $v_0' = f(0) - A(0)v_0 \in E_0^{\beta,\gamma}$, $f(t) \in C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *при некоторых* $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta$, $0 < \beta < \varepsilon \leqslant 1$. *Тогда задача* (1.1) *коэрцитивно разрешима в* $C_0^{\beta,\gamma}(E)$ *и для ее единственного решения* $v(t)$ *справедливо неравенство коэрцитивности*

$$\|v'\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} + \|A(.)v\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)} \leqslant M\left[|v_0'|_0^{\beta,\gamma} + \frac{1}{\beta(1-\beta)}\|f\|_{C_0^{\beta,\gamma}(E)}\right]$$

с M, *не зависящей от* β, γ, v_0' *и* $f(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашыралыев А., Ханалыев А.* Коэрцитивная оценка в гельдеровых нормах для параболических уравнений с переменным оператором// В сб.: «Моделирование процессов разработки газовых месторождений и прикладные задачи теоретической газогидродинамики». — Ашгабат: Ылым, 1998. — С. 154–162.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
3. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве// Итоги науки и техн. Сер. мат. анал. — 1983. — *21*. — С. 130–264.
5. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Труды Моск. мат. об-ва. — 1961. — *10*. — С. 297–350.
6. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 1. — С. 52–55.
7. *Соболевский П. Е.* О дробных нормах в банаховом пространстве, порожденных неограниченным оператором// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 6. — С. 219–222.
8. *Рудецкий В. А.* Коэрцитивная разрешимость параболических уравнений в интерполяционных пространствах// ВИНИТИ № 34-85 Деп. — ВГУ, 1984. — Ржмат 751102, 1985.
9. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — *6*, № 1. — С. 53–61.
10. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.

А. Р. Ханалыев
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru

UDC 517.9

On Coercive Solvability of Parabolic Equations with Variable Operator

© 2016 **A. R. Hanalyev**

Abstract. In a Banach space E, the Cauchy problem

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),\ v(0) = v_0$$

is considered for a differential equation with linear strongly positive operator $A(t)$ such that its domain $D = D(A(t))$ is everywhere dense in E independently off t and $A(t)$ generates an analytic semigroup $\exp\{-sA(t)\}$ $(s \geqslant 0)$. Under some natural assumptions on $A(t)$, we establish coercive solvability of the Cauchy problem in the Banach space $C_0^{\beta,\gamma}(E)$. We prove a stronger estimate of the solution compared to estimates known earlier, using weaker restrictions on $f(t)$ and v_0.

REFERENCES

1. A. Ashyralyev and A. Khanalyev, "Koertsitivnaya otsenka v gel'derovykh normakh dlya parabolicheskikh uravneniy s peremennym operatorom" [Coercive estimate in Hölder norms for parabolic equations with variable operator], In: *Modelirovanie protsessov razrabotki gazovykh mestorozhdeniy i prikladnye zadachi teoreticheskoy gazogidrodinamiki* [Modelling of mining processes for gas deposits and applied problems of theoretical gas-hydrodynamics], Ylym, Ashgabat, 1998, 154–162 (in Russian).
2. M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
3. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. S. G. Kreyn and M. I. Khazan, "Differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve" [Differential equations in Banach space], *Itogi nauki i tekhn. Ser. mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1983, **21**, 130–264 (in Russian).
5. P. E. Sobolevskiy, "Ob uravneniyakh parabolicheskogo tipa v banakhovom prostranstve" [On equations of parabolic type in a Banach space], *Trudy Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1961, **10**, 297–350 (in Russian).
6. P. E. Sobolevskiy, "Neravenstva koertsitivnosti dlya abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy" [Coercivity inequalities for abstract parabolic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **157**, No. 1, 52–55 (in Russian).
7. P. E. Sobolevskiy, "O drobnykh normakh v banakhovom prostranstve, porozhdennykh neogranichennym operatorom" [On fractional norms generated by an unbounded operator in Banach space], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 6, 219–222 (in Russian).
8. V. A. Rudetskiy, "Koertsitivnaya razreshimost' parabolicheskikh uravneniy v interpolyatsionnykh prostranstvakh" [Coercive solvability of parabolic equations in interpolation spaces], VINITI No. 34-85 Dep., VGU, 1984, Rzhmat 751102, 1985 (in Russian).
9. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, "Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations," *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 1, 53–61.
10. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.

A. R. Hanalyev
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru