Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 115–163

УДК 517.98

# ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ИЗМЕРИМЫХ И ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

© 2016 г. **М. А. МУРАТОВ, В. И. ЧИЛИН**

Аннотация. В работе дается обзор результатов по топологическим $*$-алгебрам $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ измеримых, $\tau$-измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Кроме того, рассматриваются взаимосвязи между этими алгебрами для различных классов алгебр фон Неймана, устанавливается непрерывность операторнозначных функций относительно сходимости локально по мере. Описываются также максимальные коммутативные $*$-подалгебры алгебры $LS(\mathcal{M})$.

## СОДЕРЖАНИЕ

## 1. Введение

Исследования по теории операторных алгебр были начаты в работах Дж. фон Неймана и Дж. Мюррея [32–34, 36], где изучались слабо замкнутые алгебры линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, которые впоследствии были названы алгебрами фон Неймана. Позднее был выделен класс $C^*$-алгебр и дана их характеризация как равномерно замкнутых $*$-алгебр операторов, действующих в гильбертовом пространстве (И.М. Гельфанд, М.А. Наймарк [4]).

Главными мотивировками этих исследований были, с одной стороны, применение полученных результатов к теории унитарных представлений групп, а с другой — анализ математических аспектов квантово-механического формализма.

Плодотворное взаимодействие математических и физических идей позволило построить содержательную структурную теорию операторных алгебр и получить важные приложения в квантовой статистической механике. Подробное изложение физических приложений приведено в известной монографии У. Брателли, Д. Робинсона [3]. Отметим, также, две обстоятельные монографии по алгебрам неограниченных операторов [17,42]. В настоящий момент теория операторных алгебр активно развивается и занимает центральное место в исследованиях по алгебре, функциональному анализу, теории представлений и их приложениям.

Пусть $H$ — гильбертово пространство, а $\mathcal{B}(H)$ — алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $H$. $*$-Подалгебра $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, содержащая тождественный оператор $I$, и замкнутая в слабой операторной топологии, называется *алгеброй фон Неймана*.

Заметим, что если $\mathcal{M}' = \{S \in \mathcal{B}(H)\colon\ TS = ST$ для любого $T \in \mathcal{M}\}$ — коммутант алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то она удовлетворяет следующему характеристическому равенству: $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$.

Алгебры фон Неймана являются естественными некоммутативными аналогами алгебр комплексных ограниченных в существенном измеримых функций $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, где $(\Omega, \Sigma, m)$ — измеримое пространство с полной локально конечной мерой $m$ (см., например, [23, 39]). Этот факт послужил толчком к построению естественных некоммутативных аналогов алгебры $S(\Omega, \Sigma, m)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на пространстве $(\Omega, \Sigma, m)$.

Один из первых подходов к введению некоммутативного варианта кольца измеримых функций был предложен И. Сигалом [43], который рассмотрел $*$-алгебру $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Впоследствии, для целей некоммутативного интегрирования, изучались $*$-подалгебры $S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$ всех $\tau$-измеримых операторов, ассоциированные с точным нормальным полуконечным следом $\tau$ на $\mathcal{M}$ (см., например, [25,35,48]). Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S(\mathcal{M})$ являются $*$-алгебрами замкнутых, плотно определенных линейных операторов, действующих в том же гильбертовом пространстве $H$, что и сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. При этом все эти операторы присоединены к $\mathcal{M}$, а алгебраические операции в этих $*$-алгебрах совпадают с операциями «сильной» суммы, «сильного» произведения, перехода к сопряженному оператору и обычного умножения на скаляры. Сама алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй как в $S(\mathcal{M}, \tau)$, так и в $S(\mathcal{M})$ и совпадает с множеством всех ограниченных операторов из $S(\mathcal{M}, \tau)$ и из $S(\mathcal{M})$. Особо следует отметить, что $*$-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ содержит в себе как линейные подпространства все некоммутативные версии функциональных банаховых пространств, таких как $L_p$-пространства, пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича и т. п.

Другой важный класс $*$-алгебр $\mathcal{A}$ замкнутых операторов, действующих в гильбертовом пространстве $H$ и присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, у которых $*$-подалгебра $\mathcal{A}_b$ ограниченных операторов удовлетворяет равенству:

$$\mathcal{A}_b = \{T \in \mathcal{A}\colon\ T \in \mathcal{B}(H)\} = \mathcal{M},$$

был введен П. Диксоном [24], который назвал их $EW^*$-алгебрами. Помимо указанных выше $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$, $EW^*$-алгебрами являются $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$ [40, 47]. В работах [5, 6] Б.С. Закирова, В.И. Чилина была приведена абстрактная характеризация $EW^*$-алгебр и было показано, что любая $EW^*$-алгебра $\mathcal{A}$, у которой $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$, является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, что объясняет уникальность $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в классе $EW^*$-алгебр.

Исследования алгебр $S(\mathcal{M}), S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ были связаны, в первую очередь, с построением некоммутативной теории меры и теории некоммутативного интегрирования для точных нормальных полуконечных следов, заданных на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В отмеченной выше работе И. Сигала [43] были впервые введены и изучены банаховы пространства интегрируемых и интегрируемых с квадратом операторов, рассмотрена сходимость почти всюду последовательностей измеримых операторов. Там же была неявно введена и сходимость по мере как звездная к сходимости почти всюду. В этой работе были установлены некоммутативные варианты таких основных результатов теории меры, как теоремы Фишера—Рисса, Радона—Никодима, теоремы Лебега о монотонной сходимости, теоремы Фубини, а также выдвинута идея изучения свойств операторов и последовательностей операторов, принадлежащих алгебре фон Неймана или присоединенных к ней, при помощи методов теории меры и теории вероятностей.

После появления работы И. Сигала в этом направлении был получен целый ряд новых результатов. В первую очередь следует отметить работы следующих авторов: W. F. Stinespring [44], F. J. Yeadon [47, 48], E. Nelson [35], S. Sankaran [40, 41], A. R. Padmanabhan [37] и др. Важное место в этих работах занимают исследования свойств топологий сходимости по мере и локально по мере, относительно которых $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$ становятся топологическими $*$-алгебрами.

В настоящей работе дается обзор основных результатов, относящихся к теории $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$. Кроме того, рассматриваются взаимосвязи между этими алгебрами для различных классов алгебр фон Неймана, устанавливается непрерывность операторнозначных функций относительно сходимости локально по мере. Также описываются максимальные коммутативные $*$-подалгебры алгебры $LS(\mathcal{M})$.

Используются обозначения и результаты теории алгебр фон Неймана из [23, 39, 45, 46] и теории измеримых и локально измеримых операторов из [9, 43, 47].

## 2. Предварительные сведения

В этом разделе приводятся необходимые сведения из теории алгебр фон Неймана и общей теории линейных неограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Подробное изложение теории алгебр фон Неймана можно найти, например, в монографиях [23, 39, 45, 46], а изложение теории замкнутых операторов в книгах [11, 13, 38, 45].

**2.1. Алгебры фон Неймана и их классификация.** Пусть $H$ — гильбертово пространство и $\mathcal{B}(H)$ — $C^*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $H$. Для произвольного подмножества $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(H)$ через $\mathcal{M}'$ обозначим его *коммутант* $\mathcal{M}$, т. е.

$$\mathcal{M}' = \{S\in\mathcal{B}(H)\colon TS = ST \text{ для каждого } T\in\mathcal{M}\}.$$

Ясно, что $\mathcal{M}'$ является унитальной подалгеброй в $\mathcal{B}(H)$ и что *бикоммутант* $\mathcal{M}'' = (\mathcal{M}')'$ содержит $\mathcal{M}$.

$*$-Подалгебра $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}(H)$ называется *алгеброй фон Неймана*, если $\mathcal{M}=\mathcal{M}''$. В этом случае говорят, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в $H$. Так как $\mathcal{M}''$ — замкнутое подмножество в $\mathcal{B}(H)$ в равномерной топологии, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(H)}$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ сама является $C^*$-алгеброй. Норма оператора $T$ из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ обозначается через $\|T\|_{\mathcal{M}}$.

Простейшими примерами алгебр фон Неймана являются алгебра $\mathcal{B}(H)$ и алгебра

$$\mathbb{C}_H = \{\lambda I\colon\ \lambda\in\mathbb{C}\}$$

всех скалярных кратных тождественного оператора $I$ в $\mathcal{B}(H)$.

Подмножество $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}(H)$ называется *самосопряженным*, если из $T\in\mathcal{A}$ следует $T^*\in\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ — самосопряженное подмножество, то $\mathcal{A}'=\mathcal{A}'''$, и поэтому $\mathcal{A}'$ есть алгебра фон Неймана.

Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, то множество

$$Z(\mathcal{M}) = \{T\in\mathcal{M}\colon\ TS = ST \text{ для любого } S\in\mathcal{M}\}$$

называется *центром* $\mathcal{M}$. Легко видеть, что

$$Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}\cap\mathcal{M}' = \mathcal{M}''\cap\mathcal{M}' = Z(\mathcal{M}');$$

в частности, $Z(\mathcal{M})$ — коммутативная алгебра фон Неймана, при этом, $\mathbb{C}_H\subset Z(\mathcal{M})\subset\mathcal{M}$.

Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, и потому $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Если $Z(\mathcal{M}) = \mathbb{C}_H$, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *фактором*.

Так как $(\mathcal{B}(H))' = \mathbb{C}_H$ [11, § 34], то $Z(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H) \cap \mathbb{C}_H = \mathbb{C}_H$, т. е. $\mathcal{B}(H)$ — фактор.

В дальнейшем через $\mathcal{M}_h$ обозначается множество всех самосопряженных операторов из $\mathcal{M}$. Оператор $T \in \mathcal{M}_h$ называется положительным, если он имеет вид $T = S^*S$ для некоторого $S \in \mathcal{M}$. Множество всех положительных операторов из $\mathcal{M}_h$ является выпуклым собственным конусом в $\mathcal{M}_h$ и обозначается через $\mathcal{M}_+$. С помощью $\mathcal{M}_+$ в $\mathcal{M}_h$ определятся частичный порядок по следующему правилу: $T \leqslant S$, если $(S - T) \in \mathcal{M}_+$.

Пусть $(\Omega, \Sigma, m)$ — пространство с полной локально конечной мерой $m$, для которой булева алгебра всех классов равных почти всюду измеримых множеств из $\Sigma$ является порядково полной (такие пространства с мерой в дальнейшем будем называть пространствами с локально конечной мерой). Для каждой функции $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ определим линейный оператор $T_f$ на $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ с помощью равенства $T_f(g) = fg, \quad g \in H$.

**Теорема 2.1** ([23, § 7]).

1. *Множество* $\mathcal{M} = \{T_f\colon\ f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$ *является коммутативной алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве* $L_2(\Omega, \Sigma, m)$; *при этом* $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$. *Более того, отображение*
$$\varphi\colon L_\infty(\Omega, \Sigma, m) \to \mathcal{M},$$
*задаваемое как* $\varphi(f) = T_f$, *является* $*$*-изоморфизмом из* $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ *на* $\mathcal{M}$.
2. *Для каждой коммутативной алгебры фон Неймана* $\mathcal{N}$ *существует пространство* $(\Omega, \Sigma, m)$ *с локально конечной мерой* $m$ *такое, что* $\mathcal{N}$ $*$*-изоморфна алгебре фон Неймана* $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, *т. е. можно считать, что* $\mathcal{N}$ *действует в* $L_2(\Omega, \Sigma, m)$ *и* $\mathcal{N} = \{T_f\colon f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$.

Пусть $\{\mathcal{A}_j\}_{j\in J}$ — семейство $C^*$-алгебр, где $J$ — некоторое множество индексов. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех наборов $\{x_j\}_{j\in J}$, где $x_j \in \mathcal{A}_j$, $j \in J$ и $\sup\limits_{j\in J} \|x_j\|_{\mathcal{A}_j} < \infty$. Тогда множество $\mathcal{A}$ является $C^*$-алгеброй относительно покоординатных алгебраических операций:

1. $\{x_j\}_{j\in J} + \{y_j\}_{j\in J} = \{x_j + y_j\}_{j\in J}$,
2. $\lambda\{x_j\}_{j\in J} = \{\lambda x_j\}_{j\in J}$,
3. $\{x_j\}_{j\in J}\{y_j\}_{j\in J} = \{x_j y_j\}_{j\in J}$,
4. $\{x_j\}^*_{j\in J} = \{x^*_j\}_{j\in J}$

и нормы, определяемой равенством
$$\|\{x_j\}_{j\in J}\|_{\mathcal{A}} = \sup_{j\in J} \|x_j\|_{\mathcal{A}_j}.$$

$C^*$-алгебра $\mathcal{A}$ называется *$C^*$-произведением* $C^*$-алгебр $\mathcal{A}_j$ и обозначается $\mathcal{A} = C^*\text{-}\prod\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$. Ясно, что $\mathcal{A}$ является $*$-подалгеброй в *прямом произведении* $\prod\limits_{j\in J} \mathcal{A}_j$ (определение алгебраических операций и инволюции в последней алгебре точно такое же, как и в $\mathcal{A}$). Более того,
$$C^*\text{-}\prod_{j\in J} \mathcal{A}_j = \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j$$
тогда и только тогда, когда $\operatorname{card}(J) < \infty$.

Для произвольного семейства гильбертовых пространств $\{H_j\}_{j\in J}$ определена *гильбертова сумма* $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$ как множество
$$\{\{\xi_j\}_{j\in I}\colon\ \xi_j \in H_j \text{ для любого } j \in J,\ \ \sum_{j\in J} \|\xi_j\|^2 < \infty\},$$
алгебраические операции в котором определяются покоординатно, а скалярное произведение задается равенством:
$$(\{\xi_j\}_{j\in J}, \{\eta_j\}_{j\in J}) = \sum_{j\in J} (\xi_j, \eta_j)_{H_j}.$$

Пусть $\mathcal{M}_j$ — алгебры фон Неймана, действующие в гильбертовых пространствах $H_j$, $j \in J$, соответственно. Для каждого элемента $\{T_j\}_{j\in J}$ из $C^*$-произведения $C^*\text{-}\prod\limits_{j\in J}\mathcal{M}_j$ определим оператор $T$ в $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$ следующим равенством:

$$T\left(\{\xi_j\}_{j\in J}\right) = \{T_j\xi_j\}_{j\in J}.$$

Множество всех таких операторов $T$, действующих в гильбертовой сумме $H = \sum\limits_{j\in J} H_j$, образует алгебру фон Неймана, которая называется $C^*$-произведением алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_j$, $j \in J$, и обозначается через

$$\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{j\in J}\mathcal{M}_J$$

(так же, как и для $C^*$-алгебр). В случае, когда множество индексов $J$ конечно, например, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $C^*$-произведение алгебр фон Неймана записывается в виде

$$\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{M}_n = \sum_{j=1}^{n}\mathcal{M}_j.$$

**2.2. Решетка ортопроекторов алгебры фон Неймана.** Обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ множество всех самосопряженных проекторов (ортопроекторов) из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, т. е.

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{M} \colon P = P^* = P^2\}.$$

Следующее предложение перечисляет наиболее важные свойства множества $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

**Предложение 2.1** ([45, § 3]).

1. *Множество $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ является полной решеткой с ортогональным дополнением относительно частичного порядка, индуцированного из $\mathcal{M}_h$, в которой нулем является нулевой проектор $0$, единицей — тождественный оператор $I$, а ортогональным дополнением проектора $P$ — проектор $P^\perp = I - P$.*
2. *Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то множество $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ является полной булевой алгеброй, в частности, $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ есть полная булева подалгебра в $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, и*
$$\sup|_{\mathcal{P}(\mathcal{M})}\{P\colon\ P \in F\} = \sup|_{\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))}\{P\colon\ P \in F\}$$
*для каждого подмножества $F$ в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$.*
3. *Если семейство $\{P_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ таково, что $P_iP_j = 0$ для $i \neq j$, то $\sup\limits_{j\in J} P_j = \sum\limits_{j\in J} P_j$, где сходимость ряда рассматривается в сильной операторной топологии ($(so)$-топологии).*

Из предложения 2.1 следует, что для каждого $T \in \mathcal{M}$ определен проектор

$$z(T) = \inf\{Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))\colon\ ZT = T\},$$

который называется *центральным носителем* оператора $T$.

Пусть $T$ — произвольный оператор из $\mathcal{B}(H)$. Обозначим через $n(T)$ проектор на ядро

$$\mathrm{Ker}(T) = \{\xi \in H\colon\ T\xi = 0\}$$

оператора $T$, а через $l(T)$ — проектор на замыкание

$$\mathrm{Ran}(T) = \{T\xi\colon\ \xi \in H\}$$

образа оператора $T$.

Проектор

$$r(T) = I - n(T)$$

называется *правым носителем* оператора $T$, а проектор $l(T)$ — его *левым носителем*. Если $T = T^*$, то проектор

$$s(T) = r(T) = l(T)$$

называют *носителем* оператора $T$. Легко видеть, что

1. $r(T) = l(T^*)$;
2. $r(T)$ есть наименьший из проекторов $E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(H))$, для которых $TE = T$;

3. $l(T)$ есть наименьший из проекторов $E \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(H))$, для которых $ET = T$;
4. $r(T) = s(|T|)$, $l(T) = s(|T^*|)$, где $|T| = \sqrt{T^*T}$ — модуль оператора $T$.

Проекторы $E$ и $F$ из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ называются *эквивалентными* (обозначение: $E \sim F$), если существует частично изометрический оператор $V \in \mathcal{M}$, для которого проектор $E$ является начальным, а проектор $F$ — конечным, т. е. $V^*V = E$ и $VV^* = F$. Очевидно, что $VE = V = FV$ и $EV^* = V^* = V^*F$.

Отношение «$\sim$» является отношением эквивалентности на решетке $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Говорят, что проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *мажорируется* проектором $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ (обозначение: $E \precsim F$), если существует такой проектор $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $Q \leqslant F$ и $Q \sim E$.

Приведем основные свойства указанного выше отношения эквивалентности «$\sim$».

**Предложение 2.2** ([45, §4]). *Пусть $\mathcal{M}$ алгебра фон Неймана.*

1. *Если $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $E \precsim F$ и $F \precsim E$, то $E \sim F$.*
2. *Если $E \sim F$, то $z(E) = z(F)$.*
3. *Если $E \sim F$, $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то $EZ \sim FZ$.*
4. *Если $\{E_j\}_{j\in J}$, $\{F_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такие, что $E_iE_j = 0$, $F_iF_j = 0$, как только $i \neq j$, $i, j \in J$, и $E_j \sim F_j$ для всех $j \in J$, то $\sup\limits_{j\in J} E_j \sim \sup\limits_{j\in J} F_j$.*
5. *Если $T \in \mathcal{M}$, то $l(T) \sim r(T)$.*
6. *Для любых $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой центральный проектор $Z \in Z(\mathcal{P}(\mathcal{M}))$, что $ZE \precsim ZF$ и $Z^\perp F \precsim Z^\perp E$.*
7. *Для любых $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ имеют место следующие соотношения*:
$$(E \vee F - F) \sim (E - E \wedge F), \quad E - E \wedge (I - F) \sim F - (I - E) \wedge F;$$
*в частности, если $E \wedge F = 0$, то $E \precsim F^\perp$ (через $E \vee F$ и $E \wedge F$ обозначаются супремум и инфимум проекторов $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$).*

Ненулевой проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется *минимальным* (или *атомом*), если из $0 \neq Q \leqslant E$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ следует, что $Q = E$. Проектор $E$ называется *абелевым*, если алгебра фон Неймана $E\mathcal{M}E$ является коммутативной. Проектор $E$ называется *конечным*, если из $F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $F \leqslant E$ и $F \sim E$ следует, что $E = F$. Ненулевой проектор $E$ называется *собственно бесконечным*, если из условий $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, $ZE$ — конечный проектор, следует, что $ZE = 0$. Проектор $E$ называется проектором *счетного типа*, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов из $\mathcal{P}(E\mathcal{M}E)$ не более чем счетно.

Если $I \in \mathcal{M}$ является проектором счетного типа, то алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется алгеброй *счетного типа*, или *$\sigma$-конечной* алгеброй фон Неймана.

**Предложение 2.3** ([45, §4]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана и $E, F \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.*

1. *Если проекторы $E$, $F$ — конечные, то проектор $E \vee F$ тоже конечен.*
2. *Ненулевой проектор $E$ является собственно бесконечным тогда и только тогда, когда существует такая последовательность попарно ортогональных проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E = \sup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ и $E_n \sim E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$*

Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется:

*атомической*, если для любого ненулевого проектора $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ существует такой минимальный проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P \leqslant E$;

*конечной*, если $I$ — конечный проектор;

*полуконечной*, если для любого ненулевого центрального проектора $Z \in Z(\mathcal{M})$ существует такой ненулевой конечный проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E \leqslant Z$;

*типа $I$*, если для любого ненулевого центрального проектора $Z \in Z(\mathcal{M})$ существует такой ненулевой абелев проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $E \leqslant Z$;

*типа $II$*, если $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра, не содержащая ненулевых абелевых проекторов;

*типа $III$*, если $\mathcal{M}$ не содержит ненулевых конечных проекторов;

*типа $I_{fin}$*, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра типа $I$;

*типа $I_\infty$*, если $\mathcal{M}$ — не конечная алгебра типа $I$;

*типа $II_1$*, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра типа $II$;

*типа* $II_\infty$, если $\mathcal{M}$ — не конечная алгебра типа $II$;
*собственно бесконечной*, если $I$ — собственно бесконечный проектор;
*чисто бесконечной*, если $\mathcal{M}$ — типа $III$.

**Теорема 2.2** ([45, § 4]). *Каждая алгебра фон Неймана* $\mathcal{M}$ *содержит такие однозначно определенные центральные проекторы* $Z_i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, *что*

1. $\sum\limits_{i=1}^{5} Z_i = I$;
2. $Z_1\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $I_{fin}$;
3. $Z_2\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $I_\infty$;
4. $Z_3\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $II_1$;
5. $Z_4\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $II_\infty$;
6. $Z_5\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $III$.

Как следует из теоремы 2.2, произвольная алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ представима в виде

$$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{5} \mathcal{M}_i,$$

где каждая из алгебр $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$, $\mathcal{M}_4$, $\mathcal{M}_5$ является алгеброй фон Неймана соответствующего типа $I_{fin}$, $I_\infty$, $II_1$, $II_\infty$, $III$ (некоторые слагаемые могут отсутствовать).

**Следствие 2.1** ([45, § 4]). *Если алгебра фон Неймана* $\mathcal{M}$ — *фактор, то она одного* (*и только одного*) *из следующих пяти типов*: $I_{fin}$, $I_\infty$, $II_1$, $II_\infty$, $III$.

Заметим, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$ является фактором типа $I$.

**2.3. Следы на алгебрах фон Неймана.** Функционал $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$ называется *следом* на $\mathcal{M}_+$, если

1. $\tau(T + S) = \tau(T) + \tau(S)$ для любых $T, S \in \mathcal{M}_+$;
2. $\tau(\lambda T) = \lambda\tau(T)$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$ и $\lambda \geqslant 0$ (считается, что $0 \cdot \infty = 0$);
3. $\tau(U^*TU) = \tau(T)$ для любого $T \in \mathcal{M}_+$ и любого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}$.

След $\tau$ называется:
*конечным*, если $\tau(T) < \infty$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$;
*полуконечным*, если $\tau(T) = \sup\{\tau(S)\colon\ 0 \leqslant S \leqslant T,\ \tau(S) < \infty\}$ для каждого $T \in \mathcal{M}_+$;
*точным*, если из $\tau(T) = 0$, $T \in \mathcal{M}_+$ следует, что $T = 0$.
*нормальным*, если из $T_\alpha \uparrow T$, $T, T_\alpha \in \mathcal{M}_+$ следует, что $\tau(T_\alpha) \uparrow \tau(T)$.

**Пример 2.1** (канонический след на $\mathcal{B}(H)$ [23, § 1.6]). Пусть $\{e_j\}_{j\in J}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства $H$. Для каждого $T \in \mathcal{B}(H)_+$ положим

$$tr(T) = \sum_{j\in J} (Te_j, e_j).$$

Функционал $tr$ является точным нормальным полуконечным следом на $\mathcal{B}(H)_+$, который не зависит от выбора базиса $\{e_j\}_{j\in J}$. Мы будем называть этот след *каноническим следом* на $\mathcal{B}(H)$.

**Пример 2.2** (коммутативная алгебра фон Неймана [23, § 1.7]). Пусть $(\Omega, \Sigma, m)$ — пространство с локально конечной мерой $m$ и $\mathcal{M} = \{T_f\colon\ f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, m)\}$ — коммутативная алгебра фон Неймана мультипликаторов (см. теорему 2.1). Линейный функционал $\tau\colon \mathcal{M}_+ \to [0, \infty]$, определяемый равенством

$$\tau(T_f) = \int\limits_{\Omega} f\,dm,$$

является точным нормальным полуконечным следом на $\mathcal{M}_+$.

Следующее предложение характеризует конечные и полуконечные алгебры фон Неймана в терминах следов.

**Предложение 2.4** ([23, § 1.7], [46, § 5.2]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана.*

1. *$\mathcal{M}$ является конечной тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого оператора $T \in \mathcal{M}_+$ существует конечный след $\tau$ такой, что $\tau(T) \neq 0$;*
2. *$\mathcal{M}$ является полуконечной тогда и только тогда, когда на $\mathcal{M}_+$ существует точный нормальный полуконечный след.*

**2.4. Центрозначный след. Размерностная функция.** В следующей теореме устанавливается существование центрозначного следа на конечной алгебре фон Неймана.

**Теорема 2.3** ([46, § 5.2]). *Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана. Следующие условия эквивалентны*:

1. *$\mathcal{M}$ — конечная*;
2. *Существует линейное отображение $\Phi\colon \mathcal{M} \to Z(\mathcal{M})$, обладающее следующими свойствами*:
   2.1. $\Phi(T^*T) = \Phi(TT^*) \geqslant 0$;
   2.2. $\Phi(ZT) = Z\Phi(T)$ *для всех* $Z \in Z(\mathcal{M})$ *и* $T \in \mathcal{M}$;
   2.3. $\Phi(I) = I$;
   2.4. *Если* $T \in \mathcal{M}$, $T \neq 0$, *то* $\Phi(T^*T) \neq 0$.

Линейное отображение, определенное в теореме 2.3, называется (*каноническим*) *центрозначным следом*. Как следует из этой теоремы, для не конечной алгебры фон Неймана центрозначного следа не существует. С другой стороны, для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ на структуре $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ всех проекторов можно определить отображение со значениями во множестве измеримых функций подходящего пространства с мерой, свойства которого аналогичны свойствам центрозначного следа (см. ниже теорему 2.4).

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана. Тогда ее центр $Z(\mathcal{M})$ является коммутативной алгеброй фон Неймана, и потому по теореме 2.1, существует $*$-изоморфизм $\varphi$ между $Z(\mathcal{M})$ и алгеброй $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — некоторое пространство с локально конечной мерой $\mu$. Обозначим через $L_+$ множество всех измеримых функций

$$f\colon (\Omega, \Sigma, \mu) \to [0, \infty]$$

(равные почти всюду функции отождествляются).

**Теорема 2.4** ([43, § 1]). *Существует отображение $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+$, обладающее следующими свойствами*:

1. $d(E)$ *конечна тогда и только тогда, когда проектор* $E$ *конечен*;
2. $d(E+Q) = d(E) + d(Q)$, *если* $EQ = 0$;
3. $d(U^*U) = d(UU^*)$ *для каждой частичной изометрии* $U \in \mathcal{M}$;
4. $d(ZE) = \varphi(Z)d(E)$ *для любых* $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ *и* $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$;
5. *Если* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}, E \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *и* $E_\alpha \uparrow E$, *то* $d(E) = \sup\limits_{\alpha \in J} d(E_\alpha)$.

Отображение $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+$, обладающее свойствами 1–5, называется *размерностной функцией* на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

**2.5. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов.** Линейный оператор $T$ в $H$ называется *положительным*, если его область определения $\mathfrak{D}(T)$ плотна в $H$ и $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(T)$.

Согласно [38, теорема VII.3], положительный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran}(T \pm iI) = H$. Кроме того, положительный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ran}(T \pm I) = H$.

Если $T$ — положительный оператор, то для каждого $\xi \in \mathfrak{D}(T)$ имеем, что

$$\|(T+I)\xi\|_H^2 = \|T\xi\|_H^2 + 2(T\xi, \xi) + \|\xi\|_H^2 \geqslant \|\xi\|_H^2.$$

Отсюда следует, что линейное отображение $T + I$ инъективно, и поэтому на $\operatorname{Ran}(T+I)$ определен обратный оператор $(T+I)^{-1}$. Более того,

$$\|(T+I)^{-1}\xi\|_H \leqslant \|\xi\|_H$$

для каждого $\xi \in \mathrm{Ran}(T+I)$.

Если $T$ — положительный самосопряженный оператор, то $\mathrm{Ran}(T+I) = H$, и поэтому,

$$(T+I)^{-1} \in \mathcal{B}(H),\ 0 \leqslant (T+I)^{-1} \leqslant I \text{ и } s((T+I)^{-1}) = I.$$

Обозначим через

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\{(T+I)^{-1}\})$$

коммутативную подалгебру фон Неймана в $\mathcal{B}(H)$, порожденную оператором $(T+I)^{-1}$. Проекторы

$$E_n = \chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T+I)^{-1}),\ n = 1,2,\dots$$

принадлежат алгебре $\mathfrak{R}$, где $\chi_{(\cdot)}$ — характеристическая функция соответствующего интервала (см. [45, § 9.9]). Тогда для каждого $n = 1,2,\dots$ существует такой однозначно определенный оператор $T_n \in \mathfrak{R}$, что

$$E_n \leqslant T_n \leqslant (n+1)E_n,\ E_n = (T+I)^{-1}T_n.$$

Так как

$$(T+I)^{-1}(H) = \mathfrak{D}(T),$$

то $E_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, и поэтому $\mathfrak{D}(TE_n) = H$.

Кроме того,

$$T_n - E_n = (I - (T+I)^{-1})T_n = T(T+I)^{-1}T_n = TE_n.$$

Следовательно, $TE_n \in \mathfrak{R}$ и $0 \leqslant TE_n \leqslant nE_n$.

Для каждого компактного подмножества $K \subset (-\infty,+\infty)$ через $\mathcal{B}(K)$ обозначим $C^*$-алгебру всех ограниченных борелевских комплексных функций на $K$, а через $\mathcal{B}([0,\infty))$ (соответственно, $\mathcal{B}(-\infty,+\infty)$) $C^*$-алгебру всех борелевских комплексных функций на $[0,+\infty)$ (соответственно, на $(-\infty,+\infty)$), ограниченных на компактных подмножествах.

Сужение каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ на спектр $\sigma(TE_n)$ оператора $TE_n$ является функцией из $\mathcal{B}(\sigma(TE_n))$. Поэтому $f(TE_n) \in \mathcal{B}(H)$ (см. [45, § 9.9]).

Определим множество

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \{\xi \in H \colon \{f(TE_n)\xi\}_{n=1}^{\infty} \text{ сходится в } H\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{D}(f(T))$ является линейным подпространством в $H$. Определим линейный оператор $f(T)$ в $H$ следующим образом:

$$f(T)\xi = \lim_{n\to\infty} f(TE_n)\xi$$

для каждого $\xi \in \mathfrak{D}(f(T))$.

**Теорема 2.5** ([45, §§ 9.11, 9.12]). *Пусть $T$ — положительный линейный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H$. Тогда*

1. *Если $f_0(\lambda) \equiv c$, $c \in \mathbb{C}$, для любого $\lambda \in [0,+\infty)$, то*

$$f_0(T) = cI.$$

*Если $f_1(\lambda) \equiv \lambda$ для любого $\lambda \in [0,+\infty)$, то*

$$f_1(T) = T.$$

2. *Для каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ линейный оператор $f(T)$ является замкнутым и*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n(H) \subset \{\xi \in H \colon \sup_{n\geqslant 1} \|f(TE_n)\xi\|_H < \infty\} = \mathfrak{D}(f(T)).$$

*Более того, оператор $f(T)$ является замыканием сужения $f(T)$ на $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n(H)$.*

3. *Для каждой функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ верно равенство*

$$f(T)^* = \overline{f}(T).$$

4. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0,+\infty))$, то линейный оператор $f(T)+g(T)$ является предзамкнутым,*
$$\mathfrak{D}(f(T)+f(S)) = \mathfrak{D}(f(T)) \cap \mathfrak{D}(f(S))$$
*и*
$$\overline{f(T)+g(T)} = (f+g)(T).$$
5. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0,+\infty))$, то линейный оператор $f(T)g(T)$ является предзамкнутым,*
$$\mathfrak{D}(f(T)g(T)) = \mathfrak{D}((fg)(T)) \cap \mathfrak{D}(g(T))$$
*и*
$$\overline{f(T)g(T)} = (fg)(T).$$
6. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0,+\infty))$, $|f| \leqslant |g|$, то*
$$\mathfrak{D}(g(T)) \subset \mathfrak{D}(f(T))$$
*и*
$$\|f(T)\xi\|_H \leqslant \|g(T)\xi\|_H$$
*для всех $\xi \in \mathfrak{D}(g(T))$. В частности, если функция $f$ ограничена, то $f(T) \in \mathcal{B}(H)$ и*
$$\|f(T)\| \leqslant \sup\{|f(\lambda)|:\ \lambda \in [0,+\infty)\}.$$
7. *Если $f, g \in \mathcal{B}([0,+\infty))$ и одна из функций $f, g$ является ограниченной, то*
$$(f+g)(T) = f(T)+g(T),\ (fg)(T) = f(T)g(T).$$

Из теоремы 2.5 непосредственно вытекает следующее

**Следствие 2.2** ([45, §§ 9.13, 9.14])**.** *Пусть $T$ — положительный самосопряженный оператор в $H$. Тогда*:

1. *$f(T)$ является самосопряженным* (*положительным самосопряженным*) *оператором для каждой действительной* (*неотрицательной*) *функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$;*
2. *$f(T)$ является проектором для каждой характеристической функции $f \in \mathcal{B}([0,+\infty))$;*
3. *Существует такой однозначно определенный положительный самосопряженный оператор $S$ в $H$, что $S^2 = T$* (*оператор $S$ называется* квадратным корнем *из оператора $T$ и обозначается через $\sqrt{T}$*).

В следующей теореме приводится важное свойство положительных самосопряженных операторов.

**Теорема 2.6** ([45, § 9.28])**.** *Если $T$ — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве $H$, то оператор $T^*T$ является положительным самосопряженным оператором, причем $T$ совпадает с замыканием сужения $T$ на $\mathfrak{D}(T^*T)$.*

Из теоремы 2.6 и следствия 2.2 вытекает, что для каждого замкнутого линейного оператора $T$ однозначно определен положительный самосопряженный оператор $(T^*T)^{1/2}$. Этот оператор называется *абсолютной величиной* (или *модулем*) оператора $T$ и обозначается через $|T|$.

Для замкнутого оператора $T$ в $H$, как и для ограниченного линейного оператора, обозначим через $n(T)$ ортогональный проектор на $\mathrm{Ker}(T)$, а через $l(T)$ — ортогональный проектор на $\overline{\mathrm{Ran}(T)}$. Проектор $r(T) = I - n(T)$ называется *правым носителем* оператора $T$, а проектор $l(T))$ — *левым носителем* оператора $T$. Если $T = T^*$, то проектор $s(T) = r(T) = l(T)$ называется *носителем* оператора $T$.

**Теорема 2.7** (полярное разложение неограниченного оператора [45, § 9.29])**.** *Для каждого замкнутого линейного оператора $T$ в $H$ существуют положительный самосопряженный оператор $A$ в $H$ и частичная изометрия $V \in \mathcal{B}(H)$, такие что $T = VA$ и $V^*V = s(A)$. Операторы $A$ и $V$ этими условиями определяются однозначно. Более того, $A = |T|$, $V^*V = r(T)$ и $VV^* = l(T)$.*

Представление замкнутого линейного оператора в виде $T = V|T|$, где $V^*V = s(|T|)$, называется *полярным разложением* оператора $T$. Так как линейный оператор $V|T|V^*$ является положительным и самосопряженным, то из соотношений $T^* = V^*(V|T|V^*)$ и $VV^* = s(V|T|V^*)$ получается полярное разложение оператора $T^*$. В частности, $|T^*| = V|T|V^*$, $T = |T^*|V$, $VV^* = s(|T^*|)$ (см. [45, § 9.30]).

**Следствие 2.3** ([45, § 9.31]). *Для каждого линейного самосопряженного оператора $T$ в $H$ существуют такие положительный самосопряженные операторы $T_+$, $T_-$ в $H$, что*

$$T = T_+ - T_-, \ s(T_+)s(T_-) = 0.$$

*Эти соотношения определяют операторы $T_+$, $T_-$ однозначно и $|T| = T_+ + T_-$.*

С помощью следствия 2.3 функциональное счисление для положительных линейных самосопряженных операторов расширяется на класс произвольных самосопряженных линейных операторов [45, § 9.32].

Пусть $T$ — линейный самосопряженный оператор в $H$ и $T = T_+ - T_-$. Для каждой функции $f \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ определим функцию $\hat{f} \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ соотношением

$$\hat{f}(\lambda) = f(-\lambda), \lambda \in (-\infty, +\infty).$$

Положим

$$f(T) = (f\chi_{(0,+\infty)})(T_+) + (\hat{f}\chi_{(0,+\infty)})(T_-) + f(0)(I - s(T)).$$

Так как

$$H = s(T_+)(H) \oplus s(T_-)(H) \oplus (I - s(T))(H),$$

и для положительных самосопряженных операторов верны равенства

$$T_+ = T_+s(T_+), \quad T_- = T_-s(T_-),$$

причем первый из них действует в пространстве $s(T_+(H))$, а второй — в пространстве $s(T_-(H))$, то для $T$ сохраняется вариант теоремы 2.5. Следовательно $f(T)$ — замкнутый линейный оператор в $H$ и для $f(T)$ выполняются все утверждения теоремы 2.5 с соответствующей заменой проекторов $E_n$ на проекторы

$$\chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T_+ + I)^{-1}) + \chi_{(\frac{1}{n+1},+\infty)}((T_- + I)^{-1}), \ n = 1, 2, \ldots$$

Пусть $T$ — произвольный линейный самосопряженный оператор в $H$, $\chi_\lambda$ — характеристическая функция множества $(-\infty, \lambda)$ и

$$E_\lambda = \chi_\lambda(T), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Согласно следствию 2.2, все $E_\lambda$ являются проекторами в $H$ и имеет место следующее предложение.

**Предложение 2.5.**

1. $E_\lambda \leqslant E_\mu$, *если* $\lambda \leqslant \mu$;
2. $\inf\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = 0$, $\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} E_\lambda = I$;
3. $E_\mu = \sup\limits_{\lambda < \mu} E_\lambda$;
4. $T(E_\mu - E_\lambda) \in \mathcal{B}_h(H)$ *для всех* $\lambda \leqslant \mu$ *и*
$$\lambda(E_\mu - E_\lambda) \leqslant T(E_\mu - E_\lambda) \leqslant \mu(E_\mu - E_\lambda);$$
5. $E_\lambda S = SE_\lambda$ *для каждого оператора* $S \in \mathcal{B}(H)$ *такого, что* $S$ *коммутирует с* $T$ (*т. е.* $ST \subset TS$).

Семейство проекторов $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ называется *спектральным семейством* для линейного самосопряженного оператора $T$. Как и в случае ограниченного линейного оператора, функция

$$E_{\xi,\eta}(\lambda) = (E_\lambda \xi, \eta), \ \lambda \in \mathbb{R},$$

определяет комплекснозначную борелевскую меру на $\mathbb{R}$ для всех $\xi, \eta \in H$.

**Теорема 2.8** ([13]). *Пусть $T$ — линейный самосопряженный оператор в $H$ и $E_\lambda = \chi_\lambda(T)$. Тогда для каждой функции $f \in \mathcal{B}(-\infty, +\infty)$ имеет место следующее равенство*:

$$(f(T)\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) dE_{\xi,\eta}(\lambda),\ \xi \in \mathfrak{D}(f(T)),\ \eta \in H,$$

*и*

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \left\{ \xi \in H\colon\ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty \right\}.$$

*В частности, если $f(\lambda) = \lambda$, то*

$$(T\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\eta}(\lambda),\ \xi \in \mathfrak{D}(T),\ \eta \in H, \quad и \quad \mathfrak{D}(T) = \left\{ \xi \in H\colon\ \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty \right\}.$$

## 3. $*$-Алгебры локально измеримых операторов

В этом разделе описываются $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M})$ замкнутых измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. В случае, когда на $\mathcal{M}$ существует точный нормальный полуконечный след $\tau$, рассматриваются также $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ $\tau$-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$.

$*$-Алгебры $S(\mathcal{M})$ впервые были введены И. Сигалом [43], $*$-алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ — Е. Нельсоном [35] и Ф. Йедоном [48], а $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ — С. Санкараном [40] и Ф. Йедоном [47].

**3.1. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ измеримых операторов.** Пусть $H$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов, действующих в $H$, и $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ — полная решетка всех проекторов из $\mathcal{M}$.

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в $H$ называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$), если $U(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$ для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$.

Если $\mathfrak{D}$ — замкнутое линейное подпространство в $H$ и $P_\mathfrak{D}$ — проектор на $\mathfrak{D}$, то $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда $P_\mathfrak{D} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Линейное подпространство $\mathfrak{D} \subset H$ называется *сильно плотным* в $H$ относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ и существует последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ такая, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и $P_n^\perp$ — конечный проектор для каждого $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае говорят, что сильно плотное линейное подпространство $\mathfrak{D}$ *определено* последовательностью проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty$.

Из условия $P_n \uparrow I$ непосредственно следует, что каждое сильно плотное линейное подпространство является плотным в $H$.

Линейный оператор $T$ с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *присоединенным* к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ (обозначение: $T\ \eta\ \mathcal{M}$), если $UT \subset TU$ для каждого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$, т. е. $\mathfrak{D}(T)\ \eta\ \mathcal{M}$ и $UT\xi = TU\xi$ для любого $\xi \in \mathfrak{D}(T)$.

Легко видеть, что ограниченный линейный оператор $T \in \mathcal{B}(H)$ присоединен к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathcal{M}$.

**Предложение 3.1** ([9, § 2.1], [11, § 35.1]).

1. *Если $T\ \eta\ \mathcal{M}$, $S\ \eta\ \mathcal{M}$, то $(T + S)\ \eta\ \mathcal{M}$, $(TS)\ \eta\ \mathcal{M}$ и $(\lambda T)\ \eta\ \mathcal{M}$ для любого комплексного числа $\lambda \in \mathbb{C}$.*
2. *Если $T$ — предзамкнутый линейный оператор и $T\ \eta\ \mathcal{M}$, то $\overline{T}\ \eta\ \mathcal{M}$ и $T^*\ \eta\ \mathcal{M}$.*
3. *Если $T$ — замкнутый линейный оператор и $T = W|T|$ — его полярное разложение, то $T\ \eta\ \mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|\ \eta\ \mathcal{M}$. В этом случае правый носитель $r(T)$ и левый носитель $l(T)$ оператора $T$ принадлежат $\mathcal{M}$ и $l(T) \sim r(T)$ в $\mathcal{M}$.*
4. *Если $T$ — самосопряженный линейный оператор, $T\ \eta\ \mathcal{M}$, и $T = T_+ - T_-$, то $T_+ \eta\ \mathcal{M}$ и $T_- \eta\ \mathcal{M}$.*
5. *Если $T$ — самосопряженный линейный оператор и $T\ \eta\ \mathcal{M}$, то*
   5.1. *$f(T)\ \eta\ \mathcal{M}$ для каждой борелевской функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;*

5.2. *$f(T) \in \mathcal{M}$ для каждой ограниченной борелевской функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$;*
5.3. *$E_A(T) = \chi_A(T) \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ для каждого борелевского подмножества $A \subset \mathbb{R}$.*

Замкнутый линейный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ сильно плотна в $H$.

Пусть оператор $T$ измерим и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность проекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, определяющая его область определения $\mathfrak{D}(T)$. Так как $T$ замкнут и $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то $TP_n$ — замкнутый оператор, отображающий $P_n(H)$ в $H$. При этом $\mathfrak{D}(TP_n) = P_n(H)$. Поэтому в силу теоремы о замкнутом графике (см., например, [13, п. 2.15]) получим $TP_n \in \mathcal{B}(H)$. Кроме того, если $U$ — унитарный оператор из $\mathcal{M}'$ и $\xi \in H$, то $UTP_n\xi = TUP_n\xi = TP_nU\xi$, $n = 1, 2, \ldots$, т. е., $U(TP_n) = (TP_n)U$. Это означает, что $TP_n \in \mathcal{M}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$

**Предложение 3.2** ([43]). *Если $T$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ его полярное разложение, то оператор $T$ измерим относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|$ измерим относительно $\mathcal{M}$.*

**Предложение 3.3** ([47]). *Пусть $T$ — замкнутый линейный оператор в $H$, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, с плотной областью определения $\mathfrak{D}(T)$, и $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Если $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Q(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то $TQ \in \mathcal{B}(H)$ и $E_\lambda^\perp \precsim Q^\perp$ для любого $\lambda$ с $\|TQ\|_{\mathcal{B}(H)} < \lambda$.*

В следующем предложении дается критерий измеримости замкнутого линейного оператора $T$, присоединенного к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, в терминах спектрального семейства проекторов оператора $|T|$.

**Предложение 3.4** ([47]). *Пусть $T$ — замкнутый линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ и пусть $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов оператора $|T|$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *Оператор $T$ измерим относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Область определения $\mathfrak{D}(T)$ оператора $T$ плотна в $H$ и $E_\lambda^\perp$ является конечным проектором для некоторого $\lambda > 0$.*

**Следствие 3.1.** *Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то любой замкнутый линейный оператор $T$, действующий в $H$ и присоединенный к $\mathcal{M}$, измерим относительно $\mathcal{M}$.*

**Предложение 3.5** ([9, утверждение 2.2.6]). *Пусть $T$ — симметрический линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, и пусть его область определения $\mathfrak{D}(T)$ сильно плотна в $H$. Тогда самосопряженный линейный оператор $\overline{T}$ измерим относительно $\mathcal{M}$.*

**Следствие 3.2.** *Пусть $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — семейство проекторов из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, обладающее следующими свойствами:*

1. *$E_\lambda E_\mu = E_\lambda$, если $\lambda \leqslant \mu$;*
2. *$\inf\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda = 0$, $\sup\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} E_\lambda = I$;*
3. *$\sup\limits_{\lambda<\mu} E_\lambda = E_\mu$.*

*Тогда существует самосопряженный оператор $T$, измеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, такой, что*

$$(T\xi, \zeta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda)$$

*для любых $\xi \in \mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n E_{-n}^\perp(H)$ и $\zeta \in H$.*

Предзамкнутый линейный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $H$ с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, называется *предызмеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ и существует такая последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset$

$\mathfrak{D}(T)$, $TP_n \in \mathcal{B}(H)$ и $P_n^{\perp}$ — конечный проектор для каждого $n = 1, 2, \ldots$ (в этом случае говорят, что оператор $T$ *сильно определен* на последовательности $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Ясно, что любой измеримый оператор является предызмеримым. Обратно, если оператор $T$ предызмерим относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то его замыкание $\overline{T}$ является измеримым оператором относительно $\mathcal{M}$. При этом $TP_n = \overline{T}P_n \in \mathcal{M}$, где $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность из $\mathcal{P}(\mathcal{M})$, на которой сильно определен оператор $T$.

В следующем предложении приведены наиболее важные свойства предызмеримых операторов.

**Предложение 3.6** ([43]).

1. *Если $T$ — предызмеримый оператор, то оператор $T^*$ является измеримым.*
2. *Если $T$ и $S$ — предызмеримые операторы, совпадающие на сильно плотном подпространстве $\mathfrak{D}$, то $\overline{T} = \overline{S}$.*
3. *Если измеримый оператор $T$ сильно определен на последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, то $T$ совпадает с замыканием сужения $T$ на подпространство $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*

Обозначим через $S(\mathcal{M})$ множество всех операторов, измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Ясно, что $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M})$.

Следующее предложение позволяет определить алгебраические операции в $S(\mathcal{M})$.

**Предложение 3.7** ([43]). *Если операторы $T$ и $S$ предызмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то операторы $T + S$ и $TS$ тоже предызмеримы относительно $\mathcal{M}$.*

Пусть $T$ и $S$ — операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Согласно предложению 3.7, замыкания $\overline{T+S}$ и $\overline{TS}$ операторов $T+S$ и $TS$ являются измеримыми относительно $\mathcal{M}$ операторами. Эти замыкания называются *сильной суммой и сильным произведением* операторов $T$ и $S$ соответственно, и обозначаются

$$\overline{T+S} = T \dotplus S, \quad \overline{TS} = T \cdot S.$$

В [43] показано, что если $T \in S(\mathcal{M})$ и $S \in \mathcal{M}$, то

$$T \dotplus S = T + S, \ T \cdot S = TS.$$

**Теорема 3.1** ([43]). *Множество $S(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с единичным элементом $I$ относительно операций сильной суммы, сильного произведения и операции перехода к сопряженному оператору* (*умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что* $0 \cdot T = 0$).

Отметим, что из определения алгебраических операций в $S(\mathcal{M})$ следует, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M})$. В дальнейшем, если не возникает необходимость, операции сильной суммы и сильного произведения измеримых операторов мы будем обозначать обычным образом.

В случае коммутативной алгебры фон Неймана понятие измеримого оператора, по существу, эквивалентно понятию измеримой функции (см., например, [43]).

**Пример 3.1** ([31, § 4.4]). Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. Согласно предложению 2.1 алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ отождествляется с алгеброй фон Неймана $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ всех измеримых ограниченных комплекснозначных функций, заданных на пространстве $(\Omega, \Sigma, m)$ с локально конечной мерой $m$. Считаем, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Omega, \Sigma, m)$ по правилу: $T(f)(\omega) = T(\omega)f(\omega)$, где $T \in \mathcal{M} \cong L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, $f \in H, \ \omega \in \Omega$.

Обозначим через $S(\Omega, \Sigma, m)$ $*$-алгебру всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на пространстве $(\Omega, \Sigma, m)$ (как обычно, равные почти всюду функции отождествляются). Для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ положим $\mathfrak{D}(f) = \{g \in H\colon \ fg \in H\}$. Ясно, что $\mathfrak{D}(f)$ — всюду плотное линейное подпространство в $H$. Определим линейный оператор $T_f\colon \mathfrak{D}(f) \to H$, полагая $T_f(g) = fg$. В следующем предложении дается описание $*$-алгебры $S(\mathcal{M})$ с помощью операторов $T_f$.

**Предложение 3.8.**
1. *Оператор $T_f$ принадлежит $*$-алгебре $S(\mathcal{M})$ для каждой функции $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$.*
2. *Для каждого оператора $T \in S(\mathcal{M})$ существует единственная функция $f \in S(\Omega, \Sigma, m)$ такая, что $T = T_f$.*

**Следствие 3.3.** *$*$-Алгебры $S(\Omega, \Sigma, m)$ и $S(\mathcal{M})$ $*$-изоморфны.*

Отметим следующее полезное свойство измеримых операторов.

**Предложение 3.9** ([14, глава V, § 1])**.** *Пусть $T \in S(\mathcal{M})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и*

$$P_T = I - r(P^\perp T),$$

*где $r(P^\perp T)$ — правый носитель оператора $P^\perp T$. Тогда $TP_T = PTP_T$ и $P_T^\perp \precsim P^\perp$.*

Более подробное изложение свойств измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, можно найти, например, в [9, 14, 43].

**3.2. $*$-Алгебра $LS(\mathcal{M})$ локально измеримых операторов.** Замкнутый линейный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, если $T \, \eta \, \mathcal{M}$ и существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и $TZ_n \in S(\mathcal{M})$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Предзамкнутый линейный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $H$, называется *локально предызмеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(H)$, если $T \, \eta \, \mathcal{M}$ и существует такая последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n \uparrow I$ и операторы $TZ_n$ предызмеримы относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Очевидно, что любой локально измеримый оператор является локально предызмеримым. Обратно, если $T$ — локально предызмеримый линейный оператор, то оператор $\overline{T}$ — локально измерим.

Обозначим множество всех линейных операторов, локально измеримых относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, через $LS(\mathcal{M})$. Ясно, что $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$, если $\mathcal{M}$ — фактор.

**Предложение 3.10** ([9, утверждение 2.3.3])**.** *Если $T$ — замкнутый оператор с плотной областью определения и $T = W|T|$ — его полярное разложение, то оператор $T$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда $W \in \mathcal{M}$ и $|T|$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$.*

В следующем предложении даются необходимые и достаточные условия локальной измеримости линейного оператора.

**Предложение 3.11** ([9, утверждение 2.3.4])**.** *Пусть $T$ — замкнутый оператор с областью определения $\mathfrak{D}(T)$, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны*:
1. *Оператор $T$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Существует возрастающая сеть $\{Z_\alpha\}_{\alpha \in J}$ центральных проекторов из $Z(\mathcal{M})$, для которых $\sup\limits_\alpha Z_\alpha = I$ и $TZ_\alpha \in S(\mathcal{M})$ для всех $\alpha \in J$.*
3. *Существует возрастающая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^\infty$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, для которых $\sup\limits_{n \geqslant 1} Z_n = I$ и $Z_n E_n^\perp$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для $|T|$.*
4. *Существуют такие последовательность проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Q_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $Q_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $Z_n Q_n^\perp$ — конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$.*

Из предложения 3.11 непосредственно вытекает следующее следствие.

**Следствие 3.4.** *Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.*

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в гильбертовом пространстве $H$ называется *локально измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $\mathfrak{D} \, \eta \, \mathcal{M}$ и существуют такие последовательности проекторов $\{P_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и $Z_n P_n^\perp$ —

конечные проекторы для всех $n = 1, 2, \ldots$ В этом случае говорят, что линейное подпространство $\mathfrak{D}$ *определено последовательностями* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Из предложения 3.11 следует, что замкнутый линейный оператор $T$, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ локально измерим относительно $\mathcal{M}$ в том и только в том случае, когда его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$.

**Предложение 3.12** ([9, утверждение 2.3.7]). *Пусть $T$ — предзамкнутый линейный оператор, присоединенный к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Следующие условия эквивалентны*:

1. *Оператор $T$ локально предызмерим относительно $\mathcal{M}$*;
2. *Существуют такие последовательность проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и последовательность центральных проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $P_n \uparrow I$, $Z_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, $Z_nP_n^{\perp}$ — конечные проекторы, $n = 1, 2, \ldots$, и $TZ_nP_m \in \mathcal{B}(H)$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$*

Если $T$ — линейный оператор, локально предызмеримый относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, и $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательности проекторов из утверждения 3.12, то говорят, что оператор $T$ определен последовательностями $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В следующем предложении приведены основные свойства локально предызмеримых операторов (см., например, [9, 14, 40, 47]).

**Предложение 3.13.**

1. *Если $T$ — симметрический оператор, присоединенный к $\mathcal{M}$, и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ локально измерима относительно $\mathcal{M}$, то его замыкание $\overline{T}$ является самосопряженным оператором, локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.*
2. *Если $T$ — линейный оператор, локально предызмеримый относительно $\mathcal{M}$, то оператор $T^*$ является локально измеримым относительно $\mathcal{M}$.*
3. *Если локально предызмеримые операторы $T$ и $S$ совпадают на локально измеримом подпространстве $\mathfrak{D}$, то $\overline{T} = \overline{S}$.*
4. *Если оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ и его область определения $\mathfrak{D}(T)$ определена последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то оператор $T$ совпадает с замыканием сужения $T$ на $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(H)$.*
5. *Если $T$ и $S$ — операторы, локально предызмеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то операторы $T + S$ и $TS$ также локально предызмеримы относительно $\mathcal{M}$.*

Так же как и для измеримых операторов, будем обозначать сильную сумму и сильное произведение операторов $T, S \in LS(\mathcal{M})$ через $T \dotplus S$ и $T \cdot S$ соответственно. Согласно предложению 3.13 имеем, что

$$T \dotplus S,\ T \cdot S,\ T^* \in LS(\mathcal{M}).$$

Отметим, что если $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in \mathcal{M}$, то $T \dotplus S = T + S$ и $T \cdot S = TS$. Кроме того, если $T \in LS(\mathcal{M})$, $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $P(H) \subset \mathfrak{D}(T)$, то $TP \in \mathcal{M}$.

**Теорема 3.2** ([47]). *Множество $LS(\mathcal{M})$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел с единицей $I$ относительно сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору* (*умножение на скаляры определяется обычным образом, причем считается, что* $0 \cdot T = 0$). *При этом алгебра $S(\mathcal{M})$ есть $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.*

**3.3. Частичный порядок на $LS_h(\mathcal{M})$.** Обозначим множество всех самосопряженных операторов из $LS(\mathcal{M})$ через $LS_h(\mathcal{M})$ и определим частичный порядок на $LS_h(\mathcal{M})$, полагая $T \leqslant S$, если $(S - T)$ — положительно определенный оператор. Ясно, что $T^*T \geqslant 0$ для любого $T \in LS(\mathcal{M})$.

Множество всех положительных операторов из $LS(\mathcal{M})$ обозначим через $LS_+(\mathcal{M})$. Для каждого оператора $T \in LS_+(\mathcal{M})$ оператор $\sqrt{T}$ тоже принадлежит $LS_+(\mathcal{M})$ (см. ниже предложение 5.1). В следующем предложении приведены основные свойства введенного на $LS_h(\mathcal{M})$ отношения частичного порядка.

**Предложение 3.14.**

1. *Для любого неотрицательного числа $\lambda$ и для любых операторов $T, S, R \in LS_h(\mathcal{M})$, $A \in LS(\mathcal{M})$ верны следующие соотношения*:

1.1. *Если* $T \leqslant S$, *то* $T + R \leqslant S + R$ *и* $\lambda T \leqslant \lambda S$;
1.2. *Если* $T \geqslant 0$, $S \geqslant 0$, $TS = ST$, *то* $TS \geqslant 0$;
1.3. *Если* $T \leqslant S$, *то* $A^*TA \leqslant A^*SA$.

2. *Если* $T \in LS_+(\mathcal{M})$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существует обратный оператор* $T^{-1}$, *то* $T^{-1} \geqslant 0$.
3. *Если* $T \in LS_+(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant I$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существует обратный оператор* $T^{-1}$, *то* $T^{-1} \geqslant I$.
4. *Если* $T, S \in LS_+(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant S$ *и в* $LS(\mathcal{M})$ *существуют обратные операторы* $T^{-1}$ *и* $S^{-1}$, *то* $0 \leqslant S^{-1} \leqslant T^{-1}$.
5. *Если* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in J}$ — *возрастающая сеть операторов из* $LS_h(\mathcal{M})$ *и* $T_\alpha \leqslant S \in LS(\mathcal{M})$ *для каждого* $\alpha \in J$, *то существует точная верхняя грань* $\sup\limits_{\alpha \in J} T_\alpha$ *в* $LS_h(\mathcal{M})$.

Отметим еще одно важное свойство частичного порядка в $LS_h(\mathcal{M})$.

**Теорема 3.3** ([9, 15, теорема 2.4.5]). *Для любых операторов* $T, S \in LS(\mathcal{M})$ *существуют такие частично изометрические операторы* $U, V \in \mathcal{M}$, *что верно неравенство*:

$$|T + S| \leqslant U|T|U^* + V|S|V^*.$$

**3.4. $*$-Алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ $\tau$-измеримых операторов.** Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве $H$.

Линейное подпространство $\mathfrak{D}$ в $H$ называется *$\tau$-плотным*, если $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P(H) \subset \mathfrak{D}$ и $\tau(I - P) \leqslant \varepsilon$.

**Предложение 3.15.** *Если* $\mathfrak{D}$ — *$\tau$-плотное подпространство в* $H$, *то существует такая последовательность проекторов* $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, *что* $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\tau(P_n^\perp) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Из предложения 3.15 следует, что каждое $\tau$-плотное подпространство $\mathfrak{D}$ в $H$ является сильно плотным.

Замкнутый линейный оператор $T$, действующий в $H$, называется *$\tau$-измеримым* относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, если $T\ \eta\ \mathcal{M}$ и $\mathfrak{D}(T)$ $\tau$-плотно в $H$.

Обозначим через $S(\mathcal{M}, \tau)$ множество всех $\tau$-измеримых операторов. Очевидно, что

$$\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}),$$

при этом $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ в том и только в том случае, когда $T \in S(\mathcal{M})$ и $\mathfrak{D}(T)$ $\tau$-плотно в $H$.

**Предложение 3.16** ([9, утверждение 2.6.5]). *Пусть* $T$ — *замкнутый оператор с плотной областью определения* $\mathfrak{D}(T)$ *такой, что* $T\ \eta\ \mathcal{M}$, *и пусть* $T = U|T|$ — *полярное разложение оператора* $T$, *а* $\{E_\lambda\}_{\lambda > 0}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T|$. *Следующие условия эквивалентны*:

1. $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$;
2. $U \in \mathcal{M}$ *и* $|T| \in S(\mathcal{M}, \tau)$;
3. $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ *для некоторого* $\lambda > 0$;
4. $\tau(E_\lambda^\perp) \to 0$ *при* $\lambda \to +\infty$;
5. *существует такой проектор* $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, *что* $Q(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ *и* $\tau(Q^\perp) < \infty$.

**Замечание 3.1.**

1. Если $\mathcal{M}$ — фактор типа $I$ и $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$.
2. Пусть $\mathcal{M}$ — фактор типа $II_\infty$, $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда $\tau(P) < \infty$ в том и только в том случае, когда $P$ — конечный проектор. Поэтому из утверждений 3.4 и 3.16 следует, что $\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M})$.

## 4. Соотношения между $*$-алгебрами $S(\mathcal{M})$, $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $H$. Как уже отмечалось выше, $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$. Рассмотрим условия на алгебру фон Неймана $\mathcal{M}$, при выполнении которых эти алгебры попарно совпадают, или соответствующие вложения строгие (см. [7–9, 30]).

**4.1. Соотношения между $*$-алгебрами $\mathcal{M}$ и $S(\mathcal{M})$.** В следующем примере приведены условия, при выполнении которых существуют неограниченные операторы, измеримые относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, т. е. вложение $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M})$ — строгое.

**Пример 4.1.** Пусть в алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ существует возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ такая, что $E = \sup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ — конечный проектор, и $E_n \neq E$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Покажем, что тогда $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.

Положим

$$P_n = E^{\perp} + E_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда $P_n \uparrow I$ и $P_n^{\perp} = E - E_n$ — конечные проекторы в $\mathcal{M}$.

Рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ всюду плотное линейное подпространство

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H)$$

и определим линейный оператор $T$ на $\mathfrak{D}$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi \in (P_n - P_{n-1})(H), n = 1, 2, \ldots$, где $P_0 = 0$.

Покажем, что оператор $T$ допускает замыкание.

Если $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathfrak{D}$, $\|\xi_k\|_H \to 0$ и $\|T\xi_k - \eta\|_H \to 0$ при $k \to \infty$, $\eta \in H$, то для каждого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$ имеем, что $\|P_n\xi_k\|_H \to 0$ и $\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H \to 0$ при $k \to \infty$. Полагая $Q_m = P_m - P_{m-1}$, получим, что

$$\left\| \sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k \right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m\xi_k\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|P_m\xi_k - P_{m-1}\xi_k\|_H^2 \to 0$$

при $k \to \infty$ и

$$\|TP_n\xi_k - P_n\eta\|_H^2 = \left\| T\sum_{m=1}^{n} Q_m\xi_k - \sum_{m=1}^{n} Q_m\eta \right\|_H^2 =$$

$$= \left\| \sum_{m=1}^{n} mQ_m\xi_k - \sum_{m=1}^{n} Q_m\eta \right\|_H^2 = \sum_{m=1}^{n} \|Q_m(m\xi_k - \eta)\|_H^2 \to 0.$$

Отсюда следует, что $Q_m\eta = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $P_n\eta = 0$ для любых $n = 1, 2, \ldots$. Так как $P_n \uparrow I$, то это означает, что $\eta = 0$, и потому оператор $T$ допускает замыкание $\overline{T}$, которое в силу определения $T$ является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$.

Обозначим через $\{E_\lambda\}_{\lambda\geqslant 0}$ спектральное семейство проекторов для оператора $\overline{T} = |\overline{T}|$. Поскольку

$$\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}(H)} = \|TP_n\|_{\mathcal{B}(H)} \leqslant n < n+1,$$

то в силу предложения 3.3 $E_{n+1}^{\perp} \precsim P_n^{\perp}$,

Действительно, допустим, что $P = P_n \wedge E_{n+1}^{\perp} \neq 0$ и рассмотрим ненулевой вектор $\xi \in P(H)$. Тогда $\xi \in \mathfrak{D}(\overline{T})$ и $E_\mu\xi = 0$ для всех $\mu \in [0, n+1]$. Следовательно,

$$\|\overline{T}\xi\|_H^2 = (|\overline{T}|^2\xi, \xi) = \int\limits_0^{\infty} \mu^2 d(E_\mu\xi, \xi) = \int\limits_0^{\infty} \mu^2 d\|E_\mu\xi\|_H^2 = \int\limits_{n+1}^{\infty} \mu^2 d\|E_\mu\xi\|_H^2 \geqslant (n+1)^2\|\xi\|_H^2.$$

Отсюда $\|\overline{T}\xi\|_H \geqslant (n+1)\|\xi\|_H$, что противоречит неравенству $\|\overline{T}P_n\|_{\mathcal{B}((H)} < n+1$. Это означает, что $P = 0$, и поэтому $E_{n+1}^{\perp} \precsim Q^{\perp}$ (см. предложение 2.2). Следовательно, $E_{n+1}^{\perp}$ — конечный проектор. Отсюда согласно предложению 3.4 получим, что $\overline{T} \in S(\mathcal{M})$.

Так как $E_n \neq E$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$, то найдутся такие номера $n_1 < n_2 < \ldots$, что $P_{n_{k+1}} - P_{n_k} \neq 0$, в частности, $\|\overline{T}\xi_k\|_H \geqslant n_k$ для некоторых $\xi_k \in (P_{n_{k+1}} - P_{n_k})(H)$ с нормой $\|\xi_k\|_H = 1$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что $\overline{T} \notin \mathcal{M}$, и потому $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.

**Предложение 4.1.** *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа $II$, то $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$.*

*Доказательство.* Возьмем произвольный ненулевой конечный проектор $E \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Так как $\mathcal{M}$ имеет тип $II$, то в $P(\mathcal{M})$ нет атомов. В частности, найдется такая последовательность ненулевых проекторов $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $Q_n \leqslant E$, $Q_n Q_m = 0$ при $n \neq m$, где $n, m = 1, 2, \ldots$, и

$$E = \sup_{n \geqslant 1} Q_n.$$

Положим $E_n = \sup\limits_{1 \leqslant m \leqslant n} Q_m = \sum\limits_{m=1}^{n} Q_m$. Тогда $E_n \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $E_n \uparrow E$ и $E_n \neq E$ при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Из примера 4.1 непосредственно следует, что $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$. □

В следующей теореме даются необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $S(\mathcal{M})$ и $\mathcal{M}$.

**Теорема 4.1.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.
2. $\mathcal{M}$ *представима в виде прямой суммы* $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, *где* $\mathcal{M}_0$ — *алгебра фон Неймана типа* $III$, *а* $\mathcal{M}_n$ — *факторы типа* $I$, $n = 1, 2, \ldots, m$, $m$ — *некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

*Доказательство.* $1 \Rightarrow 2$. Пусть $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. Используя предложение 4.1 и представление алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ в виде прямой суммы алгебр фон Неймана типов $I$, $II$ и $III$ (см. предложение 2.2), получим, что $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \oplus \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа $III$, а $\mathcal{N}$ — алгебра фон Неймана типа $I$. Существует такой центральный проектор $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, что $Z\mathcal{N}$ — атомическая алгебра фон Неймана, а в решетке $\mathcal{P}((I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N})$ нет атомов, где $I_{\mathcal{N}}$ — единица алгебры фон Неймана $\mathcal{N}$.

Допустим, что $Z \neq I_{\mathcal{N}}$. Так как $(I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N}$ имеет тип $I$, то в $\mathcal{P}((I_{\mathcal{N}} - Z)\mathcal{N})$ существует ненулевой конечный проектор. Повторяя рассуждения примера 4.1, получим, что в этом случае $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$, что не так. Следовательно, $Z = I_{\mathcal{N}}$, т. е. $\mathcal{N}$ — атомическая алгебра фон Неймана типа $I$.

Пусть $\{Q_i\}_{i \in J}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, где $J$ — некоторое множество индексов. Обозначим: $\mathcal{M}_i = Q_i \mathcal{N}$, $i \in J$. Тогда из равенства $Z(\mathcal{M}_i) = Q_i Z(\mathcal{N}) = Q_i \mathbb{C}$ получим, что $\mathcal{M}_i$ — факторы типа $I$.

Предположим, что $J$ — бесконечное множество.

Выберем ненулевые конечные проекторы $E_i \in \mathcal{M}_i$ и положим $E = \sup\limits_{i \in J} E_i$. Поскольку $E_i = E_i Q_i$, $Q_i Q_j = 0$ при $i \neq j$, $Q_i \in Z(\mathcal{M})$, то $E$ — конечный проектор. Поэтому, как и в примере 4.1, получим, что $S(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}$, что не так. Следовательно, $J$ — конечное множество, т. е. $\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа $III$, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа $I$, $n = 1, 2, \ldots, m$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — алгебра фон Неймана типа $III$, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа $I$, $n = 1, 2, \ldots, m$. Если $T \in S(\mathcal{M})$, то найдется такая последовательность $\{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $P_n \uparrow I$, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ и $P_n^{\perp}$ — конечные проекторы, $n = 1, 2, \ldots$.

Поскольку $P_n^{\perp} \downarrow 0$ и в каждом факторе $\mathcal{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, может быть только конечная последовательность конечных проекторов, убывающая к нулю, то $P_n^{\perp} = 0$, начиная с некоторого номера. Это означает, что $\mathfrak{D}(T) = H$ и $T \in \mathcal{M}$, т. е., $S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$. □

**Следствие 4.1.** *Если* $\mathcal{M}$ — *алгебра фон Неймана типа* $III$ *или фактор типа* $I$, *то* $\mathcal{M} = S(\mathcal{M})$, *в частности,* $S(\mathcal{B}(H)) = \mathcal{B}(H)$.

**4.2. Соотношения между $*$-алгебрами $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$.** В следующем предложении приводятся условия для алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, при выполнении которых алгебры $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$ не совпадают, т. е. вложение $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M})$ является строгим.

**Предложение 4.2.** *Если в алгебре фон Неймана* $\mathcal{M}$ *существует такая последовательность центральных проекторов* $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что* $Z_n \uparrow I$ *и* $(I - Z_n)$ — *не конечный проектор,* $n = 1, 2, \ldots$, *то* $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$.

*Доказательство.* Положим

$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n(H),\ P_n = Z_n,\ n = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что $\mathfrak{D}$ — локально измеримое подпространство относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, определяемое последовательностями проекторов $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Линейный оператор $T$ с областью определения $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{D}$, определяемый равенством $T\xi = n\xi$ для $\xi \in (Z_n - Z_{n-1})(H)$, $Z_0 = 0$, $n = 1, 2, \ldots$, является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$. Согласно предложению 3.13, имеем: $\overline{T} = \overline{T}^* \in LS(\mathcal{M})$. Так как

$$\overline{T}Z_n = \sum_{k=1}^{n} k(Z_k - Z_{k-1}),$$

то спектральный проектор для $\overline{T}$, соответствующий множеству $(-\infty, n)$, совпадает с $Z_{n-1}$, и поэтому, в силу предложения 3.4, оператор $\overline{T}$ не принадлежит $S(\mathcal{M})$. □

**Следствие 4.2.** *Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{j\in J} \mathcal{M}_j$ является $C^*$-произведением не конечных алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_j$, где $J$ — бесконечное множество индексов, то $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$.*

В следующей теореме приводятся необходимые и достаточные условия для совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M})$.

**Теорема 4.2.** *Следующие утверждения эквивалентны*:

1. $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$.
2. *$\mathcal{M}$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а $\mathcal{M}_n$ — факторы типа $I_\infty$, $II_\infty$, $III$, $n = 1, 2, \ldots, m$, и $m$ — некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

*Доказательство.* $1 \Rightarrow 2$. Пусть $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$. Выберем центральный проектор $Z_0$ из $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ так, чтобы

$$\mathcal{M} = Z_0\mathcal{M} + (I - Z_0)\mathcal{M},$$

где $Z_0\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а в алгебре фон Неймана $(I - Z_0)\mathcal{M} = \mathcal{N}$ нет ненулевых конечных центральных проекторов. Если булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ содержит бесконечное число элементов, то найдется такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых проекторов из $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$ и $\sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = I - Z_0$.

Положим $P_n = \sum_{m=0}^{n} Z_m$. Тогда $P_n \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, $P_n \uparrow I$ и $(I - P_n)$ — ненулевой центральный проектор из $\mathcal{N}$, т. е. $(I - P_n)$ — не конечный проектор в $\mathcal{M}$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, в силу предложения 4.2 выполнено $LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M})$, что противоречит предположению.

Таким образом, булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ содержит только конечное число элементов. Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^{m}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{N}))$ и

$$\mathcal{M}_n = Q_n\mathcal{N} = Q_n\mathcal{M}.$$

Тогда $\mathcal{M}_n$ — не конечный фактор, т. е. $\mathcal{M}_n$ имеет один из типов $I_\infty$, $II_\infty$ или $III$, $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathcal{M} = \sum_{n=0}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_0$ — конечная алгебра фон Неймана, а $\mathcal{M}_n$ — факторы одного из типов $I_\infty$, $II_\infty$ или $III$, $n = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через $Q_n$ единицу в алгебре $\mathcal{M}_n$, $n = 0, 1, \ldots, m$.

Предположим, что $T \in LS(\mathcal{M})$ и $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ — такая последовательность центральных проекторов, что $Z_k \uparrow I$ и $TZ_k \in S(\mathcal{M})$, $k = 1, 2, \ldots$. Так как $\mathcal{M}_n$ — факторы, $n = 1, 2, \ldots, m$, то найдется такой номер $k_0$, что $Q_n Z_k = Q_n$ при всех $k \geqslant k_0$, $n = 1, 2, \ldots, m$. В частности,

$$T(I - Q_0) = \sum_{n=1}^{m} TQ_n = \sum_{n=1}^{m} TZ_{k_0} Q_n \in S(\mathcal{M}).$$

Так как $Q_0$ — конечный центральный проектор, то $LS(Q_0\mathcal{M}) = S(Q_0\mathcal{M})$, и поэтому $TQ_0$ принадлежит $S(\mathcal{M})$. Следовательно,

$$T = TQ_0 + T(I - Q_0) \in S(\mathcal{M}).$$

Это означает, что $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$. □

**4.3. Прямое произведение алгебр локально измеримых операторов.** Пусть $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in J}$ — семейство алгебр фон Неймана, действующих в гильбертовых пространствах $H_i$, $i \in J$, соответственно, где $J$ — некоторое множество индексов. $C^*$-произведение $\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod\limits_{i\in J} \mathcal{M}_i$ является алгеброй фон Неймана, действующей в гильбертовом пространстве $H = \sum\limits_{i\in J} H_i$.

Рассмотрим прямое произведение

$$\mathcal{A} = \prod_{i\in J} LS(\mathcal{M}_i) = \{\{T_i\}_{i\in J}\colon\ T_i \in LS(\mathcal{M}_i),\ i \in J\}$$

$*$-алгебр $LS(\mathcal{M}_i)$ операторов, локально измеримых относительно алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_i$, $i \in J$. Множество $\mathcal{A}$ является $*$-алгеброй над полем комплексных чисел относительно покоординатных операций умножения на скаляр, сложения, умножения и инволюции. Обозначим через $Z_j = \{P_i\}_{i\in J}$ центральный проектор из $\mathcal{M}$, где $P_i = 0$ для $i \neq j$ и $P_j = I_{\mathcal{M}_j}$. Ясно, что $TZ_i \in LS(\mathcal{M}_i)$ для каждого $T \in LS(\mathcal{M})$. Зададим отображение

$$\varphi\colon LS(\mathcal{M}) \mapsto \mathcal{A},$$

полагая

$$\varphi(T) = \{TZ_i\}_{i\in J}.$$

**Предложение 4.3.** *Отображение $\varphi$ является $*$-изоморфизмом между $*$-алгебрами $LS(\mathcal{M})$ и $\mathcal{A}$.*

*Доказательство.* Очевидно, что отображение $\varphi$ является $*$-гомоморфизмом из $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$ в $*$-алгебру $\mathcal{A}$. Если $\varphi(T) = 0$, то $TZ_i = 0$ для каждого $i \in J$, и поскольку $\sup\limits_{i\in J} Z_i = I_{\mathcal{M}}$, то $T = 0$. Следовательно, $\varphi$ — инъективное отображение.

Возьмем произвольный элемент $\{T_i\}_{i\in J} \in \mathcal{A}$ и рассмотрим в гильбертовом пространстве $H$ линейное подпространство $\mathfrak{D}$, полагая

$$\mathfrak{D} = \Big\{\{\xi_i\}_{i\in J} \in \sum_{i\in J} H_i\colon\ \xi_i \in \mathfrak{D}(T_i)\Big\}.$$

Если $U$ — унитарный оператор из $\mathcal{M}'$, то $UZ_i \in (\mathcal{M}_i)'$ (мы отождествляем $LS(\mathcal{M}_i)$ с $*$-подалгеброй $\mathcal{A}_i$ в $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}_i = \{\{T_j\}_{j\in J} \in \mathcal{A}\colon\ T_j = 0 \text{ при } j \neq i\}$). Следовательно,

$$UZ_i(\mathfrak{D}(T_i)) \subset \mathfrak{D}(T_i),$$

и поэтому $U(\{\xi_i\}_{i\in J}) = \{UZ_i\xi_i\}_{i\in J} \in \mathfrak{D}$ для любого $\{\xi_i\}_{i\in J} \in \mathfrak{D}$. Это означает, что $\mathfrak{D}\ \eta\ \mathcal{M}$.

Обозначим через $\{Q_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ и $\{Z_n^i\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}_i))$ последовательности проекторов, определяющие локально измеримые операторы $T_i$, $i \in J$. Тогда $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{Q_n^i\}_{i\in J}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\{Z_n^i\}_{i\in J}\}_{n=1}^{\infty}$ возрастающие последовательности проекторов из $\mathcal{M}$, такие, что $\sup\limits_{n\geqslant 1} Q_n = \sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = I_{\mathcal{M}}$, $Q_n(H) \subset \mathfrak{D}$ и проекторы $Z_n Q_n^{\perp}$ являются конечными для всех $n = 1, 2, \ldots$ Это означает, что линейное подпространство $\mathfrak{D}$ является локально измеримым относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Рассмотрим линейный оператор $T$ с областью определения $\mathfrak{D}$, задаваемый равенством

$$T(\{\xi_i\}_{i\in J}) = \{T_i(\xi_i)\}_{i\in J}.$$

Так как $T_i = \overline{T_i}$ для каждого $i \in J$, то $T = \overline{T}$ (последнее условие следует из поточечной сходимости в $\sum\limits_{i \in J} H_i$, и из определения оператора $T$). Это означает, что $T \in LS(\mathcal{M})$ и $\varphi(T) = \{T_i\}_{i \in J}$. Следовательно, $\varphi$ является $*$-изоморфизмом. $\square$

Согласно предложению 4.3, можно считать, что

$$LS\left(C^*\text{-}\prod_{i \in J} \mathcal{M}_i\right) = \prod_{i \in J} LS(\mathcal{M}_i).$$

Таким образом, конструкция алгебр локально измеримых операторов выдерживает операцию взятия прямого произведения. Для алгебр измеримых операторов, вообще говоря, это не так.

**Пример 4.2.** Пусть $\mathcal{M}_n$ — факторы типа $III$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть

$$\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n.$$

Так как в $\mathcal{M}$ не существует ни одного ненулевого конечного проектора, то по предложению 3.4

$$S(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Далее, так как $\mathcal{M}_n$ — факторы типа $III$, $n = 1, 2, \ldots$, то по предложению 3.13

$$LS(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n = S(\mathcal{M}_n).$$

В тоже время, согласно предложению 4.2

$$LS(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M} = S(\mathcal{M}).$$

Поэтому в силу предложения 4.3

$$\prod_{n=1}^{\infty} S(\mathcal{M}_n) = \prod_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n) = LS(\mathcal{M}) \neq S(\mathcal{M}).$$

В следующей теореме приводятся необходимые и достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $\mathcal{M}$.

**Теорема 4.3.** *Следующие условия эквивалентны*:

1. $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{M}$ *представима в виде прямой суммы* $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$, *где* $\mathcal{M}_n$ — *факторы типа* $I$ *или типа* $III$, $n = 1, 2, \ldots, m$ *и* $m$ — *некоторое натуральное число* (*некоторые из слагаемых могут отсутствовать*).

*Доказательство.* $1 \Rightarrow 2$. Предположим, что булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ всех проекторов из центра $Z(\mathcal{M})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ содержит бесконечное число элементов. Тогда существует такая последовательность проекторов $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_n Z_m = 0$ при $n \neq m$ и

$$\sup_{n \geqslant 1} Z_n = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n = I.$$

Положим $\mathcal{M}_n = Z_n \mathcal{M}$. $C^*$-произведение алгебр фон Неймана $\mathcal{M}_n$ совпадает с $\mathcal{M}$ и потому согласно предложению 4.3 имеем, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n) = LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}.$$

Однако элемент $T = \{nZ_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит $*$-алгебре $\prod\limits_{n=1}^{\infty} LS(\mathcal{M}_n)$, но не принадлежит $\mathcal{M}$.

Противоречие показывает, что булева алгебра $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ содержит только конечное число элементов.

Пусть $\{Q_n\}_{n=1}^m$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ и $\mathcal{M}_n = Q_n\mathcal{M}$, где $n = 1, 2, \ldots, m$. Так как $Q_n$ — атом в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, то из равенства

$$Z(\mathcal{M}_n) = Q_n Z(\mathcal{M}) = Q_n\mathbb{C}$$

следует, что $\mathcal{M}_n$ — фактор для каждого $n = 1, 2, \ldots, m$, при этом $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$.

Если для некоторого $n$ фактор $\mathcal{M}_n$ имеет тип $II$, то $LS(\mathcal{M}_n) = S(\mathcal{M}_n) \neq \mathcal{M}_n$ (см. предложение 4.1). Тогда в силу предложения 4.3 получим, что

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{n=1}^{m} LS(\mathcal{M}_n) \neq \sum_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n = \mathcal{M},$$

что неверно.

Следовательно, $\mathcal{M}_n$ — факторы либо типа $I$, либо типа $III$ для любого $n = 1, 2, \ldots, m$.

$2 \Rightarrow 1$. Пусть $\mathcal{M} = \sum\limits_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n$, где $\mathcal{M}_n$ — факторы либо типа $I$, либо типа $III$, $n = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда

$$LS(\mathcal{M}_n) = S(\mathcal{M}_n) = \mathcal{M}_n$$

для каждого $n = 1, 2, \ldots, m$ и потому

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{n=1}^{m} LS(\mathcal{M}_n) = \sum_{n=1}^{m} \mathcal{M}_n = \mathcal{M}.$$

$\square$

**4.4. $*$-Алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$, ассоциированные с различными следами.** Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, действующей в гильбертовом пространстве $H$, и $S(\mathcal{M}, \tau)$ — $*$-алгебра всех $\tau$-измеримых операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ — фактор типа $I$, то $\mathcal{M} = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Если же $\mathcal{M}$ — фактор типа $II_\infty$, то $\tau(P) < \infty$ тогда и только тогда, когда $P$ — конечный проектор. Поэтому в этом случае

$$\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}).$$

Следующий пример показывает, что, вообще говоря, $*$-алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ зависит от точного нормального полуконечного следа $\tau$.

**Пример 4.3.** Пусть $\mathcal{M} = l_\infty$ — коммутативная алгебра фон Неймана ограниченных последовательностей комплексных чисел с покоординатными алгебраическими операциями. В этом случае $\mathcal{M} = L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$, где $\Omega$ представляет собой множество $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел, $\Sigma$ — $\sigma$-алгебра всех подмножеств из $\mathbb{N}$, и $m$ — считающая мера на $\Sigma$.

Мера $m$ определяет точный нормальный полуконечный след $\tau$ на $\mathcal{M}_+$ формулой:

$$\tau(\{c_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \ c_n \geqslant 0, \ n = 1, 2, \ldots.$$

Элемент $P = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ является проектором тогда и только тогда, когда для каждого $n = 1, 2, \ldots$ либо $c_n = 0$, либо $c_n = 1$. Поэтому $\tau(P) < \infty$ тогда и только тогда, когда $c_n = 0$ для всех $n$, кроме конечного числа индексов. Согласно предложению 3.8 $*$-алгебру $S(l_\infty) = S(\Omega, \Sigma, m)$ можно отождествить с $*$-алгеброй $s$ всех комплексных последовательностей с покоординатными алгебраическими операциями.

Предположим, что $T \in S(l_\infty, \tau)$. Тогда по предложению 3.16 $\tau(E_\lambda^\perp) < \infty$ для некоторого $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda\}_{\lambda \geqslant 0}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Следовательно, $|T|E_\lambda^\perp \in l_\infty$. Так как

$$0 \leqslant |T|E_\lambda \leqslant \lambda E_\lambda \in l_\infty,$$

то

$$|T| = |T|E_\lambda + |T|E_\lambda^\perp \in l_\infty.$$

Поэтому $T \in l_\infty$ и, следовательно, $S(l_\infty, \tau) = l_\infty$.

Рассмотрим на $\mathcal{M}_+$ другой точный нормальный конечный след $\tau_1$, определяемый формулой:

$$\tau_1(\{c_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} c_n,\ c_n \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots .$$

Так как след $\tau_1$ конечен, то

$$S(l_\infty, \tau_1) = S(l_\infty) \neq l_\infty = S(l_\infty, \tau).$$

Обозначим через $Tr(\mathcal{M})$ множество всех точных нормальных полуконечных следов на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Так как $\mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$ для любого $\tau \in Tr(\mathcal{M})$, то

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset \bigcup_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M}).$$

Следующий пример показывает, что вложение

$$\mathcal{M} \subset \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau)$$

может быть строгим, т. е. существуют алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и присоединенные к ним неограниченные операторы, которые $\tau$-измеримы относительно любого точного полуконечного нормального следа на $\mathcal{M}$.

**Пример 4.4.** Пусть $\mathcal{M}$ — фактор типа $II_\infty$. Тогда

$$Tr(\mathcal{M}) = \{\alpha\mu \colon \alpha \in (0, +\infty)\},$$

где $\mu$ — некоторый фиксированный точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Поэтому

$$S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \mu)$$

для любого $\tau \in Tr(\mathcal{M})$, и в силу примера 4.1

$$\mathcal{M} \neq S(\mathcal{M}, \mu) = \bigcap_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau).$$

В следующем примере рассматривается алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$, для которой вложение

$$\bigcup_{\tau \in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M}, \tau) \subset S(\mathcal{M})$$

является строгим, т. е. существуют алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и присоединенные к ним неограниченные измеримые операторы, которые не являются $\tau$-измеримыми ни для какого точного нормального полуконечного следа $\tau$ на $\mathcal{M}$.

**Пример 4.5.** Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, являющаяся $C^*$-произведением континуального числа экземпляров алгебры фон Неймана $L_\infty([0,1], m)$ всех ограниченных измеримых комплекснозначных функций, заданных на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега $m$ (равные почти всюду функции отождествляются), т. е.

$$\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod_{j \in J} \mathcal{M}_j, \quad \mathcal{M}_j = L_\infty([0,1], m)$$

для всех $j \in J$, $\operatorname{card} J = \operatorname{card}[0,1]$. Для каждого

$$X = \{X_j\}_{j \in J} \in \mathcal{M},\ X \geqslant 0,$$

положим

$$\mu(X) = \sum_{j \in J} \int\limits_0^1 X_j \, dm.$$

Ясно, что $\mu$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Будем считать, что $\mathcal{M}$ действует в гильбертовом пространстве

$$H = L_2(\mathcal{M}, \mu) = \left\{ \{\xi_j\}_{j \in J} \colon \xi_j \in L_2([0,1], m), \sum_{j \in J} ||\xi_j||^2_{L_2([0,1],m)} < \infty \right\}$$

по правилу
$$\{X_j\}_{j\in J}(\{\xi_j\}_{j\in J}) = \{X_j\xi_j\}_{j\in J},\ \{\xi_j\}_{j\in J}\in H.$$
Разобьем множество $J$ на счетное число попарно непересекающихся континуальных подмножеств $J_n,\ n=1,2,\ldots,$ и положим
$$E_n = \{P_j\}_{j\in J}\in \mathcal{P}(\mathcal{M}),$$
где $P_j = 1$ при $j\in J_n$ и $P_j = 0$ при $j\in J\setminus J_n$. Ясно, что $E_nE_k = 0$ при $n\neq k$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} E_n = I$, и $E_n$ не является проектором счетного типа (напомним, что проектор $E$ имеет счетный тип, если любое семейство ненулевых попарно ортогональных проекторов в $\mathcal{P}(E\mathcal{M}E)$ не более чем счетно).

Положим
$$Z_n = \sup_{k\leqslant n} E_k.$$
Так же как и в доказательстве предложения 4.2, определим линейный оператор $T$ на всюду плотном линейном подпространстве $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Z_n(H)$, полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi\in E_n(H), n=1,2,\ldots.$ Тогда замыкание $\overline{T}$ оператора $T$ является положительно определенным оператором, присоединенным к $\mathcal{M}$, причем спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий $\lambda = n$, совпадает с $Z_n$. Поскольку $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{M}$ — конечна, и поэтому $\overline{T}\in S(\mathcal{M})$ (см. предложение 3.4). Предположим, что существует след $\tau\in Tr(\mathcal{M})$, для которого $\overline{T}\in S(\mathcal{M},\tau)$. Тогда, в силу предложения 3.16, найдется такое натуральное $n$, что $\tau(Z_n^\perp)<\infty$. Так как $Z_n^\perp = \sup\limits_{k>n} E_k$, то $\tau(E_{n+1}) < \tau(Z_n^\perp) < \infty$, что влечет счетность типа проектора $E_{n+1}$. Из полученного противоречия следует, что $\overline{T}$ не принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$, и потому
$$\bigcup_{\tau\in Tr(\mathcal{M})} S(\mathcal{M},\tau)\neq S(\mathcal{M}).$$

Рассмотрим теперь связь между алгебрами $S(\mathcal{M},\tau_1)$ и $S(\mathcal{M},\tau_2)$ для различных следов $\tau_1,\ \tau_2\in Tr(\mathcal{M})$.

Для каждого $\tau\in Tr(\mathcal{M})$ положим
$$\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau) = \{P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}):\ \tau(P)<\infty\}.$$

**Теорема 4.4.** *Для $\tau_1,\tau_2\in Tr(\mathcal{M})$ следующие условия эквивалентны.*
1. $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$;
2. $\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_2)\subset \mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_1)$.

*Доказательство.* $1\Rightarrow 2$. Пусть $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$. Предположим, что существует такой проектор $P\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $\tau_1(P)=\infty$ и $\tau_2(P)<\infty$. Поскольку след $\tau_1$ — полуконечный, то найдется такая возрастающая последовательность проекторов $\{E_n\}_{n=1}^\infty$, что
$$\tau_1(E_n)<\infty,\ \sup_{n\geqslant 1}E_n = E\leqslant P,\ \tau_1(E)=\infty,$$
в частности, $E_n\neq E$ для всех $n=1,2,\ldots.$ Так же как и в примере 4.1, определим линейный оператор $T$ на всюду плотном линейном подпространстве
$$\mathfrak{D} = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(H),$$
полагая $T\xi = n\xi$ для всех $\xi\in(P_n-P_{n-1})(H)$, где $P_n = E^\perp + E_n, n=1,2,\ldots,$ $P_0=0$. Как показано в примере 4.1, положительно определенный оператор $\overline{T}$ является измеримым оператором, при этом спектральный проектор для $\overline{T}$, отвечающий собственному значению $\lambda=n$, совпадает с $P_n$. Поскольку $\tau_1(P_n^\perp) = \tau_1(E-E_n)=\infty$ и $\tau_2(P_n^\perp)\leqslant\tau_2(P)<\infty,\ n=1,2,\ldots,$ то
$$\overline{T}\in S(\mathcal{M},\tau_2)\setminus S(\mathcal{M},\tau_1),$$
что противоречит вложению $S(\mathcal{M},\tau_2)\subset S(\mathcal{M},\tau_1)$. Следовательно,
$$\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_2)\subset\mathcal{P}(\mathcal{M},\tau_1).$$
Импликация $2\Rightarrow 1$ следует непосредственно из предложения 3.16. □

Из теоремы 4.4 вытекает, что для $\tau_1, \tau_2 \in Tr(\mathcal{M})$

$$S(\mathcal{M}, \tau_1) = S(\mathcal{M}, \tau_2) \Longleftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau_1) = \mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau_2).$$

Заменяя в доказательстве предложения 4.4 условие $\tau_2(P) < \infty$ на условие: $P$ — *конечный проектор*, и используя предложения 4.3 и 3.16, получим следующее предложение.

**Предложение 4.4.** *Для* $\tau \in Tr(\mathcal{M})$ *следующие условия эквивалентны*:
1. $S(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}, \tau)$;
2. $\mathcal{P}(\mathcal{M}, \tau) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})\colon\ P$— *конечный проектор*$\}$.

## 5. Заполненные $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$

$*$-Подалгебра $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ называется *заполненной*, если из соотношений $0 \leqslant T \leqslant S \in \mathcal{A}$, $T \in LS(\mathcal{M})$ следует, что $T \in \mathcal{A}$. Ясно, что $\mathcal{M}$ есть заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

**5.1. Заполненность $*$-подалгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$.** Для установления свойства заполненности у $*$-подалгебр $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M}, \tau)$ нам понадобится следующее предложение.

**Предложение 5.1.**
1. *Если операторы* $T, S \in LS(\mathcal{M})$ *и* $l(T)l(S) = 0$, *то* $T \dotplus S = T + S$.
2. *Если* $T$ — *самосопряженный оператор из* $S(\mathcal{M})$ (*соответственно, из* $LS(\mathcal{M})$) *и* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *то* $f(T) \in S(\mathcal{M})$ (*соответственно,* $f \in LS(\mathcal{M})$).

*Доказательство.* 1. Пусть $\xi_n \in \mathfrak{D}(T + S) = \mathfrak{D}(T) \cap \mathfrak{D}(S)$ и $\xi_n \to \xi$, $(T + S)\xi_n \to \eta$, где $\xi,\ \eta \in H$. Так как $l(T)l(S) = 0$, то

$$T\xi_n = l(T)(T + S)\xi_n \to l(T)\eta.$$

Оператор $T$ замкнут, поэтому $\xi \in \mathfrak{D}(T)$ и $T\xi = l(T)\eta$. Рассуждая аналогично, получим, что $\xi \in \mathfrak{D}(S)$ и $S\xi = l(S)\eta$. Следовательно, $\xi \in \mathfrak{D}(T + S)$ и $(T + S)\xi = (l(T) + l(S))\eta$. Осталось заметить, что из сходимости $(T + S)\xi_n \to \eta$ вытекает сходимость

$$(T + S)\xi_n = (l(T) + l(S))(T + S) \to (l(T) + l(S))\eta,$$

и поэтому $\eta = (l(T) + l(S))\eta = (T + S)\eta$. Следовательно, $T + S = \overline{T + S} = T \dotplus S$.

2. Пусть $T \in S_h(\mathcal{M})$. Согласно определению оператора $f(T)$ (см. пункт 2.5) имеем

$$f(T) = (f\chi(0, +\infty))(T_+) + (\hat{f}\chi(0, +\infty))(T_-) + f(0)(I - s(T)),$$

где $\hat{f}(\lambda) = f(-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу первой части предложения достаточно доказать, что $f(T) \in S(\mathcal{M})$ для $T \geqslant 0$.

Линейный оператор $f(T)$ является замкнутым и $f(T)\ \eta\ \mathcal{M}$. Так как $T \in S(\mathcal{M})$, то по предложению 3.4, мы получаем, что $E^{\perp}_{\lambda_0}$ является конечным проектором для некоторого $\lambda_0 > 0$, где $E_\lambda = \chi_{(-\infty, \lambda)}(T)$.

Пусть $P_n = E_{\lambda_0 + n}$. Тогда $P_n \uparrow I$ и, как уже было показано в доказательстве импликации $1 \Rightarrow 2$ предложения 3.4, $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(T)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Поэтому (см. пункт 2.5)

$$\mathfrak{D}(f(T)) = \left\{\xi \in H\colon \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty\right\},$$

где $E_{\xi,\xi}(\lambda) = (E_\lambda\xi, \xi)$. Если $\xi \in P_n(H)$, то $E_{\xi,\xi}(\lambda) = E_{\xi,\xi}(\lambda_0 + n)$ для всех $\lambda > \lambda_0 + n$ и, так как $T \geqslant 0$, то $E_{\xi,\xi}(\lambda) = 0$, если $\lambda < 0$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) = \int\limits_{0}^{\lambda_0 + n} |f(\lambda)|^2 dE_{\xi,\xi}(\lambda) \leqslant \sup_{\lambda \in [0, \lambda_0 + n]} |f(\lambda)|^2 \int\limits_{0}^{\lambda_0 + n} dE_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty.$$

Таким образом, $\xi \in \mathfrak{D}(f(T))$, что равносильно включению $P_n(H) \subset \mathfrak{D}(f(T))$. Так как проектор $P_n^{\perp}$ является конечным для любого $n = 1, 2 \ldots$, то $f(T) \in S(\mathcal{M})$.

Используя доказанное включение $f(T) \in S(\mathcal{M})$ и определение локально измеримого оператора, получаем, что для самосопряженного оператора $T$ из $LS(\mathcal{M})$ и $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ также верно включение $f(T) \in LS(\mathcal{M})$. $\square$

**Предложение 5.2.** *Если* $T \in S(\mathcal{M},\tau)$ — *самосопряженный оператор и* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, *то* $f(T) \in S(\mathcal{M},\tau)$.

*Доказательство.* Так же как и при доказательстве предложения 5.1, можно считать, что $T \geqslant 0$. Так как

$$T \in S(\mathcal{M},\tau) \subset S(\mathcal{M}),$$

то в силу предложения 5.1 $f(T) \in S(\mathcal{M})$. Далее, по предложению 3.16 существует такое $\lambda_0 > 0$, для которого $\tau(E_{\lambda_0}^{\perp}) < \infty$.

Положим $P_n = E_{\lambda_0+n}$. Тогда $P_n \uparrow I$, $\tau(P_n^{\perp}) \leqslant \tau(E_{\lambda_0}^{\perp}) < \infty$, и поскольку след $\tau$ нормален, то $\tau(P_n^{\perp}) \to 0$ при $n \to \infty$.

Далее, $P(H) \subset \mathfrak{D}(f(T))$ (см. доказательство предложения 5.1) и поэтому, согласно предложениям 3.15 и 3.16 получим, что $f(T) \in S(\mathcal{M},\tau)$. □

В следующем предложении приведены некоторые дополнительные свойства введенного на $LS_h(\mathcal{M})$ отношения частичного порядка.

**Предложение 5.3.**

1. *Если* $T_\alpha$, $T \in LS_h(\mathcal{M})$ *для всех* $\alpha \in J$, $T_\alpha \uparrow T$, *то для любого оператора* $A \in LS(\mathcal{M})$
$$A^*T_\alpha A \uparrow A^*TA.$$
2. *Если* $T \in LS_h(\mathcal{M})$, $\{P_\alpha\}_{\alpha\in J}, P \subset \mathcal{P}(M)$, $P_\alpha \uparrow P$ *и* $P_\alpha T P_\alpha = 0$ *для всех* $\alpha \in J$, *то* $PTP = 0$. *При этом если* $T \geqslant 0$, *то* $TP = 0$.

*Доказательство.* 1. Поскольку $T_\alpha \leqslant T$, то в силу предложения 3.14 имеем, что для любого оператора $A \in LS(\mathcal{M})$ сеть $\{A^*T_\alpha A\}_{\alpha\in J}$ возрастает и $A^*T_\alpha A \leqslant A^*TA$ для всех $\alpha \in J$.

Предположим сначала, что оператор $A \in LS(\mathcal{M})$ обратим. Согласно предложению 3.14, в $LS_h(\mathcal{M})$ существует точная верхняя грань

$$S = \sup_{\alpha\in J}(A^*T_\alpha T) \leqslant A^*TA.$$

Так как $A^*T_\alpha A \leqslant S$ для любого $\alpha \in J$, то $T_\alpha \leqslant (A^{-1})^*SA^{-1}$. Следовательно,

$$T = \sup_{\alpha\in J} T_\alpha \leqslant (A^{-1})^*SA^{-1}.$$

Поэтому $A^*TA \leqslant S$, что влечет равенство $\sup\limits_{\alpha\in J}(A^*T_\alpha T) = A^*TA$.

Пусть теперь $T_\alpha$, $T$, $A \in LS_+(\mathcal{M})$. Рассмотрим оператор $B = A + \dfrac{1}{n}I$. Тогда $B \geqslant \dfrac{1}{n}I$ и, следовательно, оператор $B$ обратим. Поэтому, по доказанному выше,

$$\sup_{\alpha\in J}(BT_\alpha B) = BTB.$$

Далее имеем

$$BT_\alpha B = (A+\frac{1}{n}I)T_\alpha(A+\frac{1}{n}I) = AT_\alpha A + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha.$$

Так как $T_\alpha \geqslant 0$, то

$$(A-I)T_\alpha(A-I) \geqslant 0.$$

Поэтому

$$AT_\alpha A - T_\alpha A - AT_\alpha + T_\alpha \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$AT_\alpha A + T_\alpha \geqslant T_\alpha A + AT_\alpha.$$

Аналогично, рассматривая неравенство

$$(I-A)T(I-A) \geqslant 0,$$

получим, что

$$TA + AT \geqslant -ATA - T.$$

Поэтому

$$BT_\alpha B \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha + T_\alpha A) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(AT_\alpha A + T_\alpha) + \frac{1}{n^2}T_\alpha \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T$$

для всех $\alpha \in J$. Следовательно,

$$\sup_{\alpha\in J}(BT_\alpha B) = BTB \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Кроме того,

$$BTB = (A + \frac{1}{n}I)T(A + \frac{1}{n}I) = ATA + \frac{1}{n}(AT + TA) + \frac{1}{n^2}T \geqslant$$
$$\geqslant ATA - \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Поэтому

$$ATA - \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T \leqslant BTB \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{1}{n}(ATA + T) + \frac{1}{n^2}T.$$

Следовательно,

$$ATA \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) + \frac{2}{n}(ATA + T).$$

Так как $ATA + T \geqslant 0$ и $n$ — произвольное натуральное число, то

$$ATA \leqslant \sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A).$$

С другой стороны, из $T_\alpha \leqslant T$ следует, что $AT_\alpha A \leqslant ATA$ для любого $\alpha \in J$. Поэтому

$$\sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) \leqslant ATA,$$

что влечет равенство

$$\sup_{\alpha\in J}(AT_\alpha A) = ATA.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда оператор $A \in LS(\mathcal{M})$ — произвольный. Зафиксируем $\alpha_0 \in J$ и положим

$$S_\alpha = T_\alpha - T_{\alpha_0}.$$

Так как $T_\alpha \uparrow T$, то сеть $\{S_\alpha\}_{\alpha\in J}$ возрастает и $S_\alpha \geqslant 0$ при $\alpha \geqslant \alpha_0$.

Рассмотрим оператор $B = AA^* \geqslant 0$. По доказанному, $\sup\limits_{\alpha\in J}(BS_\alpha B) = BSB$, где $S = \sup\limits_{\alpha\in J} S_\alpha$. Из неравенства $S_\alpha \leqslant S$ следует, что $A^*S_\alpha A \leqslant A^*SA$ для любого $\alpha \in J$. Поэтому

$$\sup_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) \leqslant A^*SA.$$

Обозначим $\sup\limits_{\alpha\in J}(A^*S_\alpha A) = Z$ и предположим, что $Z \neq A^*SA$.

Рассмотрим оператор

$$H = A^*SA - Z.$$

Тогда $H \geqslant 0$ и, по нашему предположению, $H \neq 0$. Так как для любого $\alpha \in J$

$$A^*S_\alpha A + H \leqslant Z + H = A^*SA,$$

то умножая это неравенство слева на $A$, а справа — на $A^*$, получим:

$$AA^*S_\alpha AA^* + AHA^* \leqslant AA^*SAA^*,$$

т. е. $BS_\alpha B + AHA^* \leqslant BSB$ для любого $\alpha \in J$. Следовательно,

$$B(T_\alpha - T_{\alpha_0})B + AHA^* \leqslant B(T_\alpha - T_{\alpha_0})B,$$

откуда

$$BT_\alpha B + AHA^* \leqslant BTB$$

и, значит,
$$BT_\alpha B \leqslant BTB - AHA^*.$$
Следовательно,
$$BTB = \sup_{\alpha \in J}(BT_\alpha B) \leqslant BTB - AHA^*.$$
Поэтому $AHA^* = 0$. Так как, с другой стороны, $H \geqslant 0$, то существует оператор
$$W = \sqrt{H} \in LS_+(\mathcal{M}).$$
Тогда
$$(AW)(AW)^* = AW^2A^* = AHA^* = 0.$$
т. е. $AW = 0$. Кроме того, так как $Z \geqslant 0$, то
$$H = A^*SA - Z \leqslant A^*SA.$$
Следовательно,
$$H^2 = WHW \leqslant WA^*SAW = 0,$$
что влечет равенство $H = 0$, и потому
$$\sup_{\alpha \in J}(A^*S_\alpha A) = A^*SA.$$
Но $S_\alpha = T_\alpha - T_{\alpha_0}$ и, следовательно,
$$S = \sup_{\alpha \in J} S_\alpha = T - T_{\alpha_0}.$$
Поэтому
$$A^*S_\alpha A = A^*T_\alpha A - A^*T_{\alpha_0}A$$
и
$$\sup_{\alpha \in J}(A^*S_\alpha A) = \sup_{\in J}(A^*T_\alpha A) - A^*T_{\alpha_0}A.$$
Но
$$\sup_{\alpha \in J}(A^*S_\alpha A) = A^*SA = A^*TA - A^*T_{\alpha_0}A.$$
Следовательно,
$$\sup_{\alpha \in J}(A^*T_\alpha A) = A^*TA.$$

2. Так как $P_\alpha TP_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in J$, то $P_\alpha TP_\beta = P_\alpha P_\beta TP_\beta = 0$ для всех $\beta \geqslant \alpha$. Поэтому $I - r(P_\alpha T) \geqslant \sup_\beta P_\beta = P$. В частности, $P_\alpha TP = 0$, откуда $PTP_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in J$. Следовательно,
$$I - r(PT) \geqslant \sup_\alpha P_\alpha = P,$$
т. е. $PTP = 0$.

Если $T \geqslant 0$, то
$$(\sqrt{T}P)^*(\sqrt{T}P) = PTP = 0,$$
и потому $\sqrt{T}P = 0$, откуда следует, что $TP = 0$. □

**Предложение 5.4.** *Если $T, S \in LS(\mathcal{M})$ и $0 \leqslant T \leqslant S$, то*
$$\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S}.$$

*Доказательство.* Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $0 \leqslant T \leqslant S$, то
$$\varepsilon I \leqslant T + \varepsilon I \leqslant S + \varepsilon I.$$
Отсюда в силу предложения 3.14 следует, что операторы $T + \varepsilon I$ и $S + \varepsilon I$ обратимы в $LS(\mathcal{M})$ и
$$0 \leqslant (S + \varepsilon I)^{-1} \leqslant (T + \varepsilon I)^{-1} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} I.$$
Это означает, что $(S + \varepsilon I)^{-1}$, $(T + \varepsilon I)^{-1} \in \mathcal{M}_+$ и в силу [31, теорема 2.2.6] имеем, что
$$\left(\sqrt{S + \varepsilon I}\right)^{-1} = \sqrt{(S + \varepsilon I)^{-1}} \leqslant \sqrt{(T + \varepsilon I)^{-1}} = \left(\sqrt{T + \varepsilon I}\right)^{-1}.$$

Отсюда в силу предложения 3.14 получим, что

$$\sqrt{T} \leqslant \sqrt{T+\varepsilon I} \leqslant \sqrt{S+\varepsilon I}.$$

Для последовательности чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$ имеем $S_n = (S+\varepsilon_n I) \downarrow S$ в $LS(\mathcal{M})$ (см. предложение 3.14) и $S_n S_k = S_k S_n$, $n,k = 1,2,\ldots$.

Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, содержащая операторы $S$, $S_n$, $n = 1,2,\ldots$. Отождествим $\mathcal{A}$ с $*$-подалгеброй в $S(\Omega,\Sigma,m)$ для некоторого пространства $(\Omega,\Sigma,m)$ с локально конечной мерой $m$. Ясно, что $S_n(\omega) \downarrow S(\omega)$ при $n \to \infty$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, $\sqrt{S_n(\omega)} \downarrow \sqrt{S(\omega)}$ при $n \to \infty$. Поэтому $\sqrt{S_n} \downarrow \sqrt{S}$ в $\mathcal{A}$ и, следовательно, $\sqrt{S_n} \downarrow \sqrt{S}$ в $LS(\mathcal{M})$. Наконец, так как $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S_n}$, то $\sqrt{T} \leqslant \sqrt{S}$. $\square$

**Предложение 5.5** ([18, предложение 6.1]). *Если $T,S \in LS_h(\mathcal{M})$, $0 \leqslant T \leqslant S$, то существует оператор $A \in \mathcal{M}$ такой, что $\|A\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1$ и*

$$\sqrt{T} = A \cdot \sqrt{S}.$$

**Предложение 5.6.** *$*$-Алгебра $S(\mathcal{M})$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.*

*Доказательство.* Пусть $0 \leqslant T \leqslant S$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in S(\mathcal{M})$. В силу предложения 5.5 существует такой оператор $A \in \mathcal{M}$, что

$$\sqrt{T} = A\sqrt{S}.$$

Согласно предложению 5.1 $\sqrt{S} \in S(\mathcal{M})$, откуда $\sqrt{T} \in S(\mathcal{M})$, и поэтому $T \in S(\mathcal{M})$.

$\square$

Аналогично устанавливается следующее предложение.

**Предложение 5.7.** *$*$-Алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.*

**5.2. $*$-Алгебры $\tau$-локально измеримых операторов.** Если алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ коммутативна, то, как уже отмечалось выше, $\mathcal{M}$ можно отождествить с $*$-алгеброй $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех ограниченных в существенном измеримых комплекснозначных функций, заданных на пространстве $(\Omega,\Sigma,\mu)$ с локально конечной мерой $\mu$. В этом случае $*$-алгебра $S(\mathcal{M})$ отождествляется с $*$-алгеброй $S(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, заданных на пространстве $(\Omega,\Sigma,\mu)$ (см. следствие 3.3).

Если $Z(\mathcal{M})$ — центр алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, то $S(Z(\mathcal{M}))$, вообще говоря, не содержится в $S(\mathcal{M})$. В связи с этим естественно возникает вопрос о выделении тех заполненных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ с ограниченной частью $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$, для которых $S(Z(\mathcal{M})) \subset \mathcal{A}$. Можно было бы предположить, что среди всех заполненных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ с $\mathcal{A}_b = \mathcal{M}$ только $*$-алгебра $LS(\mathcal{M})$ содержит $S(Z(\mathcal{M}))$. Оказалось, что это не так. Ниже вводятся $*$-алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$ $\tau$-локально измеримых операторов, для которых

$$S(Z(\mathcal{M})) \subset LS(\mathcal{M},\tau),$$

при этом $LS(\mathcal{M},\tau)$ являются заполненными $*$-подалгебрами в $LS(\mathcal{M})$, вообще говоря, не совпадающими с $LS(\mathcal{M})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Обозначим через $E(\mathcal{A})$ множество всех тех операторов $T \in LS(\mathcal{M})$, для которых существует разбиение единицы $\{Z_j\}_{j\in J}$ и набор операторов $\{T_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{A}$ такие, что $TZ_j = T_j Z_j$ для всех $j \in J$. Ясно, что $E(\mathcal{A})$ — $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, $\mathcal{A} \subset E(\mathcal{A})$ и $E(E(\mathcal{A})) = E(\mathcal{A})$. $*$-Алгебру $E(\mathcal{A})$ называют центральным расширением $*$-алгебры $\mathcal{A}$ (см. [10]).

Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана и $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ называется *$\tau$-локально измеримым*, если существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из $\mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n T \in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n = 1,2,\ldots$.

Множество всех $\tau$-локально измеримых операторов обозначим через $LS(\mathcal{M},\tau)$. Ясно, что

$$S(\mathcal{M},\tau) \subset LS(\mathcal{M},\tau) \subset E(S(\mathcal{M},\tau)) \subset LS(\mathcal{M})$$

и $S(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M},\tau)$ в случае, когда след $\tau$ конечен или когда $\mathcal{M}$ — фактор.

**Теорема 5.1.** *$LS(\mathcal{M},\tau)$ является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, причем $S(Z(\mathcal{M}))$ совпадает с центром $Z(LS(\mathcal{M},\tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$.*

*Доказательство.* Пусть $T,\ S\in LS(\mathcal{M},\tau)$ и $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Z''_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такие последовательности центральных проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n\uparrow I$, $Z''_n\uparrow I$ и $Z'_nT,\ Z''_nS\in S(\mathcal{M},\tau)$, $n=1,2,\dots$. Положим $Z_n=Z'_nZ''_n$. Тогда $Z_n\in P(Z(\mathcal{M}))$, $Z_n\uparrow I$ и $Z_nT,\ Z_nS\in S(\mathcal{M},\tau)$, $n=1,2,\dots$. Следовательно,

$$Z_n(T+S)=Z_nT+Z_nS\in S(\mathcal{M},\tau),$$
$$Z_n(TS)=(Z_nT)(Z_nS)\in S(\mathcal{M},\tau),$$
$$Z_nT^*=(Z_nT)^*\in S(\mathcal{M},\tau).$$

Это означает, что $T+S,\ T\cdot S,\ T^*\in LS(\mathcal{M},\tau)$. Таким образом, $LS(\mathcal{M},\tau)$ является $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$.

Поскольку $Z_n|T|=|Z_nT|$, то $|T|\in LS(\mathcal{M},\tau)$.

Возьмем произвольный оператор $L\in LS(\mathcal{M})$, для которого $|L|\leqslant|T|$. Тогда

$$|Z_nL|=Z_n|L|\leqslant Z_n|T|=|Z_nT|\in S(\mathcal{M},\tau).$$

Так как $*$-алгебра $S(\mathcal{M},\tau)$ — заполненная в $LS(\mathcal{M})$, то $Z_nL\in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $n=1,2,\dots$, т. е. $L\in LS(\mathcal{M},\tau)$. Следовательно, $LS(\mathcal{M},\tau)$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $T\in S(Z(\mathcal{M}))$ и $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность проекторов из $P(Z(\mathcal{M}))$, для которой $Z_n\uparrow I$ и $Z_n|T|\in\mathcal{M}$ для всех $n=1,2,\dots$ Поскольку $\mathcal{M}\subset S(\mathcal{M},\tau)$, то $|T|\in LS(\mathcal{M},\tau)$, и потому $T\in LS(\mathcal{M},\tau)$, т. е. $S(Z(\mathcal{M}))\subset LS(\mathcal{M},\tau)$.

Обратно, пусть $T$ — центральный оператор из $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $T=U|T|$ — его полярное разложение. Если $V$ — унитарный оператор из $\mathcal{M}$, то $VT=TV$ и потому

$$T=VTV^*=(VUV^*)(V|T|V^*);$$

при этом

$$(VUV^*)^*(VUV^*)=Vr(T)V^*=r(T).$$

В силу единственности полярного разложения, получим, что $VUV^*=U$ и $V|T|V^*=|T|$, т. е. $VU=UV$ и $V|T|=|T|V$. Отсюда следует, что $U\in Z(\mathcal{M})$. Поэтому $|T|=U^*T$ принадлежит центру $Z(LS(\mathcal{M},\tau))$ алгебры $LS(\mathcal{M},\tau)$. Следовательно, спектральное семейство проекторов $\{E_\lambda\}$ для оператора $|T|$ лежит в $Z(\mathcal{M})$, что влечет включение $|T|\in S(Z(\mathcal{M}))$. Таким образом, $S(Z(\mathcal{M}))=Z(S(\mathcal{M},\tau))$. □

Если центр $Z(\mathcal{M})$ есть $\sigma$-конечная алгебра фон Неймана, то для любого оператора $T\in E(S(\mathcal{M},\tau))$ существует такое счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $TZ_n\in S(\mathcal{M},\tau)$ при $n=1,2,\dots$. Следовательно, $T\in LS(\mathcal{M},\tau)$, т. е. в этом случае $LS(\mathcal{M},\tau)=E(S(\mathcal{M},\tau))$. На самом деле, $\sigma$-конечность центра $Z(\mathcal{M})$ обеспечивает совпадение $*$-алгебр $LS(\mathcal{M},\tau)$ и $LS(\mathcal{M})$.

**Теорема 5.2.** *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Тогда*

1. *Если центр $Z(\mathcal{M})$ $\sigma$-конечен, то $LS(\mathcal{M},\tau)=LS(\mathcal{M})$.*
2. *Если $\mathcal{M}$ имеет тип II и $LS(\mathcal{M},\tau)=E(S(\mathcal{M},\tau))$, то центр $Z(\mathcal{M})$ $\sigma$-конечен и $E(S(\mathcal{M},\tau))=LS(\mathcal{M})$.*

*Доказательство.* 1. *Случай* 1. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет конечный тип. Рассмотрим центрозначный след $\Phi:\mathcal{M}\mapsto Z(\mathcal{M})$ (см. теорему 2.3). Для каждого оператора $T\in\mathcal{M}$ значение следа $\Phi(T)$ принадлежит замыканию по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ выпуклой оболочки элементов вида $UTU^*$, где $U$ — унитарный оператор из $\mathcal{M}$ [45, 7.11]. Поэтому $\tau(\Phi(T))=\tau(T)$. Если $0\neq Z\in P(Z(\mathcal{M}))$, $0\neq Q\leqslant Z$, $Q\in P(\mathcal{M})$, $\tau(Q)<\infty$, то $\tau(\Phi(Q))<\infty$, и потому существует такой проектор $Z_0\in P(Z(\mathcal{M}))$, что $0\neq Z_0\leqslant Z$ и $\tau(Z_0)<\infty$. Поскольку алгебра $Z(\mathcal{M})$ $\sigma$-конечна, то найдется счетное разбиение единицы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которого $\tau(Z_n)<\infty$, $n=1,2,\dots$, в частности, $TZ_n\in S(\mathcal{M},\tau)$ для всех $T\in LS(\mathcal{M})$. Это означает, что $LS(\mathcal{M},\tau)=LS(\mathcal{M})$.

*Случай* 2. Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана. Рассмотрим $0\leqslant T\in S(\mathcal{M})$ и $\lambda_0>0$ такие, что $\{T>\lambda_0\}=E^{\perp}_{\lambda_0}(T)\in\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$. Тогда алгебра фон Неймана $\mathcal{N}=E^{\perp}_{\lambda_0}(T)\mathcal{M}E^{\perp}_{\lambda_0}(T)$ конечна и сужение $\tau_{\mathcal{N}}$ следа $\tau$ на $\mathcal{N}$ является полуконечным следом. Согласно первой части доказательства (случай 1), найдутся такие проекторы $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z_nZ_m = 0$ при $n \neq m$, $\sup\limits_{n\geqslant 1} Z_n = z(E_{\lambda_0}^{\perp}(T))$ — центральный носитель проектора $E_{\lambda_0}^{\perp}(T)$, и

$$TZ_n \in S(\mathcal{N}, \tau_{\mathcal{N}}) \subset S(\mathcal{M}, \tau).$$

Поскольку $TE_{\lambda_0}(T) \in \mathcal{M}$, то $T(I - z(E_{\lambda_0}^{\perp}(T))) \in \mathcal{M}$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$. Таким образом, $S(\mathcal{M}) \subset LS(\mathcal{M}, \tau)$, и потому $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

2. Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ имеет тип $II$ и центр $Z(\mathcal{M})$ не является $\sigma$-конечным. Поскольку след $\tau$ полуконечен, то существуют такое несчетное разбиение единицы $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ и проекторы $P_q \in \mathcal{P}(\mathcal{M}Z_q)$, что $\tau(P_q) < \infty$ и $z(P_q) = Z_q$, $q \in \Delta$. Строим теперь такие операторы $T_q \in S(\mathcal{M}Z_q, \tau)$, что

$$\{T_q \geqslant n+1\} \cdot Z \neq 0$$

для всех $0 \neq Z \in P(Z(\mathcal{M}Z_q))$ и рассмотрим оператор $T_0 \in E(S(\mathcal{M}, \tau))$, для которого $T_0Z_q = T_q$ для всех $q \in \Delta$. Поскольку $E(S(\mathcal{M}, \tau)) = LS(\mathcal{M}, \tau)$, то существует такая последовательность $\{Z'_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(Z(\mathcal{M}))$, что $Z'_n \uparrow I$ и $T_0Z'_n \in S(\mathcal{M}, \tau)$, в частности, $\tau(E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)) < \infty$ при некотором натуральном $m_0 \geqslant 2$. Так как множество $\Delta$ несчетно, то найдется номер $n_0$, для которого $Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех $q$ из некоторого несчетного подмножества $\Delta' \subset \Delta$. Следовательно, $\{T_q \geqslant m_0\}Z'_{n_0}Z_q \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$. Поэтому проектор $E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)$ не является $\sigma$-конечным, что противоречит неравенству $\tau(E_{m_0}^{\perp}(T_0Z'_n)) < \infty$. □

**Следствие 5.1.**

1. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа $II$, у которой центр $Z(\mathcal{M})$ не $\sigma$-конечен, то $LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$.*
2. *$LS(\mathcal{M}, \tau) \neq LS(\mathcal{M})$ в том и только в том случае, когда существует такой центральный проектор $Z$ из $\mathcal{M}$, что алгебра фон Неймана $\mathcal{M}Z$ имеет тип $II$ и не имеет $\sigma$-конечный центр.*
3. *Если $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана типа $I$, то $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.*

Напомним, что ненулевой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ называется *атомом*, если из $Q \leqslant P$, $Q \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ следует, что $Q = 0$ или $Q = P$. Алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ называется *атомической*, если каждый ее ненулевой проектор мажорирует атом. В следующей теореме приводятся достаточные условия совпадения $*$-алгебр $LS(\mathcal{M})$ и $LS(\mathcal{M}, \tau)$.

**Теорема 5.3.** *Пусть $\mathcal{M}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$, и $\mathcal{M}$ удовлетворяет одному из следующих условий*:

1. *$\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра*;
2. *$\mathcal{M}$ — атомическая алгебра.*

*Тогда $LS(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M}, \tau)$.*

*Доказательство.* 1. Если $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то $Z(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M})$, и поэтому для каждого $T \in LS(\mathcal{M})$ существует такая последовательность $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$. Следовательно, $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$, что влечет равенство $LS(\mathcal{M}, \tau) = LS(\mathcal{M})$.

2. Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная атомическая алгебра фон Неймана. В этом случае $\mathcal{M}$ отождествляется с $C^*$-произведением $C^*\text{-}\prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = Z_q\mathcal{M} = \mathcal{B}(H_q)$ — факторы типа $I$, $\{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — множество всех атомов в $\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$. Согласно предложению 4.3, имеем

$$LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = \prod_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q.$$

Пусть

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}),\ Z_n = \sup\{Z_q : \|T_q\|_{\mathcal{M}_q} \leqslant n\}.$$

Тогда

$$Z_n \in Z(\mathcal{M}),\ Z_n \uparrow I,\ Z_nT \in \mathcal{M} \subset S(\mathcal{M}, \tau),$$

т. е. $T \in LS(\mathcal{M}, \tau)$.

□

Приведем теперь пример алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ и точного нормального полуконечного следа $\tau$ на $\mathcal{M}$, для которых $LS(\mathcal{M},\tau) \neq LS(\mathcal{M})$.

**Пример 5.1.** Пусть $\mathcal{M}_0$ — фактор типа $II_1$ или $II_\infty$, $\tau_0$ — канонический след на $\mathcal{M}_0$. Тогда

$$\tau_0(P) < \infty,\ P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \Longleftrightarrow P \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}).$$

Пусть $\Delta$ — несчетное множество индексов. Положим $\mathcal{M} = C^*\text{-}\prod\limits_{q\in\Delta} \mathcal{M}_q$, где $\mathcal{M}_q = \mathcal{M}_0$ для каждого $q \in \Delta$. Ясно, что

$$\tau(\{T_q\}_{q\in\Delta}) = \sum_{q\in\Delta} \tau_0(T_q)$$

есть точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$.

Выберем положительный неограниченный оператор $T_0$ из $S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = S(\mathcal{M}_0) = LS(\mathcal{M}_0)$, и рассмотрим оператор

$$T = \{T_q\}_{q\in\Delta} \in LS(\mathcal{M}) = \prod_{q\in\Delta} S(\mathcal{M}_0,\tau_0),$$

для которого $T_q = T$ для всех $q \in \Delta$.

Пусть $Z = \{Z_q\}_{q\in\Delta}$ — не $\sigma$-конечный центральный проектор из $Z(\mathcal{M})$, т. е. $Z_q = I_{\mathcal{M}_q}$ для всех $q$ из некоторого несчетного множества $\Delta' \subset \Delta$ и $Z_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$.

Если $ZT \in S(\mathcal{M},\tau)$, то существует такое $\lambda_0 > 0$, что $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$, где $\{E_\lambda(ZT)\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $ZT$. Поскольку

$$E^\perp_{\lambda_0}(ZT) = ZE^\perp_{\lambda_0}(T) = \{E_q\}_{q\in\Delta},$$

где $E_q = E^\perp_{\lambda_0}(T_0) \neq 0$ для всех $q \in \Delta'$ и $E_q = 0$ для $q \in \Delta \setminus \Delta'$, то $E^\perp_{\lambda_0}$ — не $\sigma$-конечный проектор в $\mathcal{M}$, что противоречит неравенству $\tau(E^\perp_{\lambda_0}(ZT)) < \infty$.

Следовательно, $ZT$ не принадлежит $S(\mathcal{M},\tau)$ для любого не $\sigma$-конечного проектора $Z \in P(Z(\mathcal{M}))$. Осталось заметить, что из сходимости $Z_n \uparrow I_\mathcal{M}$, $Z_n \in P(Z(\mathcal{M}))$ и не $\sigma$-конечности $I_\mathcal{M}$ в $Z(\mathcal{M})$ следует не $\sigma$-конечность $Z_n$ в $Z(\mathcal{M})$ начиная с некоторого номера. Следовательно, оператор $T$ не является $\tau$-локально измеримым.

**Замечание 5.1.**

1. Если в примере 5.1 $\mathcal{M}_0$ есть фактор типа $II_1$, то $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана и $S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$. Таким образом, в этом случае в примере 5.1 имеем, что $LS(\mathcal{M},\tau) \not\subset S(\mathcal{M})$.
2. Если в примере 5.1 множество $\Delta$ счетное, то $Z(\mathcal{M})$ — $\sigma$-конечная атомическая алгебра фон Неймана, и в этом случае $LS(\mathcal{M},\tau) = LS(\mathcal{M})$ (см. теорему 5.2).
3. Поскольку
$$LS(\mathcal{M}_q) = S(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_0,\tau_0) = LS(\mathcal{M}_q,\tau_q),$$
где $\tau_q$ — сужение следа $\tau$ на $\mathcal{M}_q$, то
$$\prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q,\tau_q) = \prod_{q\in\Delta} LS(\mathcal{M}_q) = LS(\mathcal{M}) \neq LS(\mathcal{M},\tau),$$
т. е. в отличии от конструкции $*$-алгебр локально измеримых операторов, прямое произведение $*$-алгебр $\tau$-локально измеримых операторов $\prod\limits_{i\in J} LS(\mathcal{M}_i,\tau_i)$ не совпадает с $*$-алгеброй $\tau$-локально измеримых операторов, присоединенных к $C^*$-произведению алгебр фон Неймана $(\mathcal{M}_i,\tau_i)$.

**5.3. $*$-Алгебры компактных локально измеримых операторов.** Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана. Оператор $T \in LS(\mathcal{M})$ называется *компактным* относительно $\mathcal{M}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, что $TP^\perp \in \mathcal{M}$ и $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon$.

Обозначим множество всех компактных относительно $\mathcal{M}$ операторов из $LS(\mathcal{M})$ через $S_0(\mathcal{M})$. Если $T = U|T|$ — полярное разложение оператора $T \in LS(\mathcal{M})$, то $|T| = U^*T$, и поэтому $T \in S_0(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $|T| \in S_0(\mathcal{M})$.

**Предложение 5.8.** *Для оператора $T \in LS(\mathcal{M})$ следующие условия эквивалентны*:

1. $T \in S_0(\mathcal{M})$;

2. *$E_\lambda^\perp \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ для всех $\lambda > 0$, где $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$.*

*Доказательство.* 1 $\Rightarrow$ 2. Пусть $T \in S_0(\mathcal{M})$ и $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство проекторов для оператора $|T|$. Фиксируем $\lambda > 0$ и выбираем проектор $P \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \lambda$. Тогда $E_\lambda^\perp \precsim P$ (см. предложение 3.3), и потому $E_\lambda^\perp \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$.

Импликация $2 \Rightarrow 1$ следует из неравенства

$$\|TE_\lambda\|_\mathcal{M} = \|U|T|E_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \||T|E_\lambda\|_\mathcal{M} \leqslant \lambda$$

для всех $\lambda > 0$, где $T = U|T|$ — полярное разложение оператора $T$. □

**Следствие 5.2.** $S_0(\mathcal{M}) \subset S(\mathcal{M})$.

**Теорема 5.4.** *$S_0(\mathcal{M})$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, причем*

$$\mathcal{M}S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M}).$$

*Доказательство.* Пусть $T, S \in S_0(\mathcal{M})$ и $\varepsilon > 0$. Ясно, что $\alpha T \in S_0(\mathcal{M})$ для всех $\alpha \in \mathbb{C}$.

Выберем проекторы $P, Q \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы

$$\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|SQ^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Проектор $L = P \vee Q$ тоже конечен. При этом $L^\perp = P^\perp \wedge Q^\perp$, и потому

$$\|(T+S)L^\perp\|_\mathcal{M} \leqslant \|TP^\perp L^\perp\|_\mathcal{M} + \|SQ^\perp L^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon.$$

Таким образом, $(T+S) \in S_0(\mathcal{M})$.

Далее, положим $G = I - r(PS)$, где $r(PS)$ — правый носитель оператора $PS$. Тогда $SG = P^\perp SG$ и $G^\perp \precsim P$ (предложение 3.9). Следовательно, проектор $F = Q \vee G^\perp$ конечен, при этом

$$TSF^\perp = TSGF^\perp = T(P^\perp SG)F^\perp = (TP^\perp)(SQ^\perp)F^\perp,$$

в частности,

$$\|TSF^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Следовательно, $TS \in S_0(\mathcal{M})$.

Пусть $T = U|T|$ — полярное разложение оператора $T$. Положим $G_1 = I - r(PU)$. В силу предложения 3.9 $G_1^\perp \precsim P$, откуда следует, что проектор $G_1^\perp$ конечен. При этом

$$T^*G_1 = U^*TUG_1 = U^*(TP^\perp)UG_1 \in \mathcal{M}$$

и

$$\|T^*G_1\|_\mathcal{M} \leqslant \|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $T^* \in S_0(\mathcal{M})$. Таким образом, $S_0(\mathcal{M})$ — $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$.

Покажем теперь, что $S_0(\mathcal{M})$ — заполненная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Для этого достаточно показать, что из соотношений $O \leqslant T \leqslant S$, $T \in LS(\mathcal{M})$, $S \in S_0(\mathcal{M})$ следует, что $T \in S_0(\mathcal{M})$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и, используя предложение 5.8, выберем спектральный проектор $E$ так, чтобы проектор $E^\perp \in P_{fin}(\mathcal{M})$ и

$$ES = SE \leqslant \varepsilon E.$$

Поскольку $\sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$, то $\sqrt{T}E \in LS(\mathcal{M})$, при этом

$$0 \leqslant (\sqrt{T}E)^*(\sqrt{T}E) = ETE \leqslant ESE \leqslant \varepsilon E.$$

Следовательно, $\sqrt{T}E \in \mathcal{M}$ и $\|\sqrt{T}E\|_\mathcal{M}^2 \leqslant \varepsilon$. Это означает, что $\sqrt{T} \in S_0(\mathcal{M})$ и, следовательно, $T = \sqrt{T}\sqrt{T} \in S_0(\mathcal{M})$.

Пусть теперь $0 \neq A \in \mathcal{M}$, $T \in S_0(\mathcal{M})$, $\varepsilon > 0$. Выберем проектор $P \in P_{fin}(\mathcal{M})$ так, чтобы $\|TP^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon\|A\|_\mathcal{M}^{-1}$. Тогда $AT \in LS(\mathcal{M})$, $(AT)P^\perp \in \mathcal{M}$ и $\|(AT)P^\perp\|_\mathcal{M} < \varepsilon$. Следовательно, $AT \in S_0(\mathcal{M})$, т. е. $\mathcal{M}S_0(\mathcal{M}) \subset S_0(\mathcal{M})$. Отсюда

$$S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} = (\mathcal{M}S_0(\mathcal{M}))^* \subset (S_0(\mathcal{M}))^* = S_0(\mathcal{M}).$$

Таким образом, $\mathcal{M}S_0(\mathcal{M})\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M})$.

□

**Предложение 5.9.** *$S(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана.*

*Доказательство.* Если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $S(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M})$ (см. предложение 5.8). Если же $I \notin P_{fin}(\mathcal{M})$, то $I \notin S_0(\mathcal{M})$, и в этом случае $S(\mathcal{M}) \neq S_0(\mathcal{M})$.

□

**5.4. $*$-Алгебры $\tau$-компактных операторов.** Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Оператор $T \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *$\tau$-компактным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in \mathcal{M}$ и $\|TP\|_\mathcal{M} < \varepsilon$.

Множество $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ всех $\tau$-компактных операторов является $*$-подалгеброй в $S(\mathcal{M}, \tau)$, при этом

$$\mathcal{M} \subset S_0(\mathcal{M}, \tau) \Longleftrightarrow \tau(I) < \infty \Longleftrightarrow S_0(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \tau).$$

Если $T$ — замкнутый линейный оператор с плотной областью определения в $H$ и $T = U|T|$ — полярное разложение оператора $T$, то $T \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$ в том и только в том случае, когда $U \in \mathcal{M}$ и $|T| \in S_0(\mathcal{M}, \tau))$ [9, § 2.6].

**Замечание 5.2.**

1. Если $\tau(I) < \infty$, то из предложений 3.16, 5.8 и следствия 3.4 вытекает, что
$$S_0(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}, \tau) = S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M}).$$
2. Если $\tau(I) = \infty$, то $I \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$, в частности, $S_0(\mathcal{M}, \tau) \neq S(\mathcal{M}, \tau)$.
3. Если $T \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, $A \in \mathcal{M}$, то $TA, AT \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in P(\mathcal{M})$, что $\tau(P^\perp) < \infty$, $TP \in \mathcal{M}$ и $\|TP\|_\mathcal{M} < \varepsilon\|A\|_\mathcal{M}^{-1}$ (считаем, что $A \neq 0$). Положим $Q = I - r(P^\perp A)$. Тогда $AQ = PAQ$ и $Q^\perp \precsim P^\perp$. Отсюда
$$\tau(Q^\perp) < \infty,\ TAQ = (TP)(AQ) \in \mathcal{M}$$
и
$$\|TAQ\|_\mathcal{M} < \varepsilon\|A\|_\mathcal{M}^{-1}\|AQ\|_\mathcal{M} < \varepsilon,$$
т. е.
$$TA \in S_0(\mathcal{M}, \tau).$$
Аналогично, из неравенства
$$\|ATP\|_\mathcal{M} < \|A\|_\mathcal{M}\ \varepsilon\ \|A\|_\mathcal{M}^{-1} = \varepsilon$$
следует, что $AT \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.
4. Если $\tau(s(T)) = \infty$, $T = T^* \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$, $f_0(\lambda) = 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то $f_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, но $f_0(T) = s(T)$ не принадлежит $S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

В следующем предложении устанавливается связь между $*$-алгебрами $S_0(\mathcal{M})$ и $S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

**Предложение 5.10.** *Пусть $\tau$ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Тогда $S_0(\mathcal{M}, \tau) \subset S_0(\mathcal{M})$ и равенство $S_0(\mathcal{M}, \tau) = S_0(\mathcal{M})$ достигается в том и только в том случае, когда*
$$\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}.$$

*Доказательство.* Очевидно, что равенство $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}$ влечет равенство $S_0(\mathcal{M}) = S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

Всякий проектор $P \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, для которого $\tau(P) < \infty$, является конечным проектором. Поэтому $S_0(\mathcal{M}, \tau) \subset S_0(\mathcal{M})$, и неравенство $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}) \neq \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) : \tau(P) < \infty\}$ влечет существование такого проектора $P_0 \in \mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, для которого $\tau(P_0) = \infty$. Это означает, что $P_0 \in S_0(\mathcal{M})$ и $P_0 \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. $S_0(\mathcal{M}) \neq S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

□

## 6. Непрерывность операторнозначных функций в $*$-алгебрах локально измеримых операторов

Если на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ существует точный нормальный конечный след $\tau$, $*$-алгебры $LS(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M})$ и $S(\mathcal{M},\tau)$ совпадают, и естественной топологией, наделяющая эти $*$-алгебры структурой топологической $*$-алгебры, является топология сходимости по мере $t_\tau$, порожденная следом $\tau$ [35]. Если след $\tau$ является полуконечным, но не конечным, топология $t_\tau$ рассматривается лишь в $*$-алгебре $S(\mathcal{M},\tau)$ и относительно этой топологии $S(\mathcal{M},\tau)$ является полной метризуемой $*$-алгеброй [35]. Для полуконечных следов в работах [1, 2] А. М. Бикчентаева рассматривались и исследовались также свойства топологии $\tau$-локальной сходимости по мере и топологии слабо $\tau$-локальной сходимости по мере. Однако, для алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$, не имеющих конечного типа, умножение не является непрерывным по совокупности переменных в этих топологиях. В связи с этим, в $*$-алгебре $LS(\mathcal{M})$ рассматривается топология локальной сходимости по мере $t(\mathcal{M})$, которая определяется для произвольной алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ [47]. Эта топология наделяет $LS(\mathcal{M})$ структурой полной топологической $*$-алгебры (см. [47], [9, § 3.5]).

Для каждого оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$ и для каждой функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ корректно определен локально измеримый оператор $f(T) \in LS(\mathcal{M})$ (см. пункт 2.5). Поэтому естественно рассматривать операторнозначную функцию $T \mapsto f(T)$ из $LS_h(\mathcal{M})$ в $LS(\mathcal{M})$ и исследовать условия ее непрерывности в топологии $t(\mathcal{M})$ локальной сходимости по мере. Для случая $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H) = LS(\mathcal{M})$ и сильной операторной топологии эта задача была исследована И. Капланским [28], Р. Кадисоном [26] и Е. Девисом [21]. Случай $*$-алгебры $S(\mathcal{M},\tau)$ и топологии $t_\tau$ сходимости по мере этот вопрос был исследован О. Е. Тихоновым [16].

Ниже мы доказываем, что для $\{T_\alpha\} \subset LS_h(\mathcal{M})$, $T \in LS_h(\mathcal{M})$ и борелевской функции $f$, непрерывной на спектре $\sigma(T)$ оператора $T$, из сходимости $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ следует сходимость $f(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

**6.1. Топология сходимости локально по мере.** Пусть $\mathcal{M}$ — коммутативная алгебра фон Неймана. В силу теоремы 2.1 $\mathcal{M}$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$, где $(\Omega,\Sigma,\mu)$ — пространство с локально конечной мерой $\mu$. Рассмотрим $*$-алгебру $LS(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}) = L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ всех измеримых почти всюду конечных комплекснозначных функций, определенных на $(\Omega,\Sigma,\mu)$ (функции, равные почти всюду, отождествляются). На $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$ определим топологию локальной сходимости по мере $t(\mathcal{M})$ как хаусдорфову векторную топологию, базис окрестностей нуля которой образуют множества

$$W(B,\varepsilon,\delta) = \{f \in L_0(\Omega,\, \Sigma,\, \mu)\colon \text{ существует множество } E \in \Sigma \text{ такое что}$$
$$E \subset B,\ \mu(B \setminus E) \leqslant \delta,\ f\chi_E \in L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu),\ \|f\chi_E\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)} \leqslant \varepsilon\},$$

где $\varepsilon,\ \delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$.

Сходимость сети $\{f_\alpha\}$ к $f$ в топологии $t(\mathcal{M})$ (запись: $f_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f$) означает, что $f_\alpha\chi_B \longrightarrow f\chi_B$ по мере $\mu$ для каждого $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$. Ясно, что топология $t(\mathcal{M})$ не изменится, если заменить меру $\mu$ на эквивалентную ей меру.

Пусть теперь $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, $\varphi$ — $*$-изоморфизм из ее центра $Z(\mathcal{M})$ на $*$-алгебру $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$ и $L_+(\Omega,\,\Sigma,\,m)$ — множество всех измеримых функций, определенных на $(\Omega,\Sigma,\mu)$, значения которых лежат в полупрямой $[0,+\infty]$ (функции, равные почти всюду, отождествляются).

Пусть $d\colon \mathcal{P}(\mathcal{M}) \to L_+(\Omega,\Sigma,\mu)$ — размерностная функция на $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Для произвольных чисел $\varepsilon,\delta > 0$ и произвольного множества $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$ положим

$$V(B,\varepsilon,\delta) = \{T \in LS(\mathcal{M})\colon \text{ существуют такие } P \in \mathcal{P}(\mathcal{M}),\ Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M})),$$
$$\text{что } TP \in \mathcal{M}, \|TP\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,\ \varphi(Z^\perp) \in W(B,\varepsilon,\delta),\ d(ZP^\perp) \leqslant \varepsilon\varphi(Z)\}.$$

В [47] установлено, что система множеств

$$\{\{T + V(B,\,\varepsilon,\,\delta)\}\colon\ T \in LS(\mathcal{M}),\ \varepsilon,\ \delta > 0,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) < \infty\} \tag{6.1}$$

определяет в $LS(\mathcal{M})$ хаусдорфову векторную топологию $t(\mathcal{M})$, в которой множества (6.1) образуют базу окрестностей оператора $T \in LS(\mathcal{M})$. Топология $t(\mathcal{M})$ называется *топологией сходимости локально по мере*. Как уже отмечалось выше, $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является полной топологической

$*$-алгеброй, при этом топология $t(\mathcal{M})$ не зависит от выбора размерностной функции $d$ и от выбора $*$-изоморфизма $\varphi$ (см. [47], [9, § 3.5]).

Приведем критерий сходимости сетей в топологии $t(\mathcal{M})$.

**Предложение 6.1** ([9, § 3.5]).

1. *Сеть* $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *сходится к нулю в топологии* $t(\mathcal{M})$ *тогда и только тогда, когда существует сеть* $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ *такая, что* $Z_\alpha P_\alpha\in\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$ *для любого* $\alpha\in A$, $\varphi(Z_\alpha^\perp)\xrightarrow{t(L_0(\Omega))}0$, *и* $d(Z_\alpha P_\alpha)\xrightarrow{t(L_0(\Omega))}0$, *где* $t(L_0(\Omega))$ — *топология локальной сходимости по мере на* $L_0(\Omega,\Sigma,\mu)$, $\varphi$ — $*$*-изоморфизм из* $Z(\mathcal{M})$ *на* $L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)$.
2. *Сеть* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset LS(\mathcal{M})$ *сходится к нулю в топологии* $t(\mathcal{M})$ *тогда и только тогда, когда* $E_\lambda^\perp(|T_\alpha|)\xrightarrow{t(\mathcal{M})}0$ *для любого* $\lambda>0$, *где* $\{E_\lambda^\perp(|T_\alpha|)\}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T_\alpha|$.

Как следует из предложения 6.1, топология $t(\mathcal{M})$ индуцирует топологию $t(Z(\mathcal{M}))$ на $LS(Z(\mathcal{M}))$; следовательно, $S(Z(\mathcal{M}))$ является замкнутой $*$-подалгеброй в $(LS(\mathcal{M}),t(\mathcal{M}))$.

Ясно, что

$$X\cdot V(B,\varepsilon,\delta)\subset V(B,\varepsilon,\delta)$$

для каждого $X\in\mathcal{M}$ с $\|X\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1$. Поскольку $V^*(B,\varepsilon,\delta)\subset V(B,2\varepsilon,\delta)$ [9, § 3.5], то

$$V(B,\varepsilon,\delta)\cdot Y\subset V(B,4\varepsilon,\delta)$$

для каждого $Y\in\mathcal{M}$, удовлетворяющего условию $\|Y\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1$. Следовательно,

$$X\cdot V(B,\varepsilon,\delta)\cdot Y\subset V(B,4\varepsilon,\delta)\tag{6.2}$$

для любых $\varepsilon,\delta>0$, $B\in\Sigma$, $\mu(B)<\infty$, $X,Y\in\mathcal{M}$, таких что $\|X\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1$, $\|Y\|_{\mathcal{M}}\leqslant 1$.

Инволюция непрерывна в топологии $t(\mathcal{M})$, и поэтому множество $LS_h(\mathcal{M})$ замкнуто в $(LS(\mathcal{M}),t(\mathcal{M}))$. Конус $LS_+(\mathcal{M})$ положительных элементов также является замкнутым в $(LS(\mathcal{M}),t(\mathcal{M}))$ [47].

Как следует из определения, сходимость сети $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ к оператору $T$ в топологии $t(\mathcal{M})$ означает, что для любых $\varepsilon,\delta>0$, $B\in\Sigma$, $\mu(B)<\infty$, существует $\alpha_0=\alpha(B,\varepsilon,\delta)$ такое, что для любого $\alpha\geqslant\alpha_0$ найдутся такие проекторы $P(\alpha)\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, $Z(\alpha)\in\mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, $Z(\alpha)P^\perp(\alpha)\in\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M})$, что

$$\|(T_\alpha-T)P(\alpha)\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon\tag{6.3}$$

и

$$\varphi(Z^\perp(\alpha))\in W(B,\varepsilon,\delta),\quad d(Z(\alpha)P^\perp(\alpha))\leqslant\varepsilon\varphi(Z(\alpha)).$$

Если вместо неравенства (6.3) имеет место неравенство

$$\|P(\alpha)(T_\alpha-T)P(\alpha)\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon,\tag{6.3$'$}$$

то говорят, что сеть $\{T_\alpha\}_{\alpha\in J}$ сходится к $T$ *двусторонне локально по мере*.

Двусторонняя сходимость локально по мере равносильна сходимости в векторной топологии $LS(\mathcal{M})$, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(B,\,\varepsilon,\delta)=\{T\in LS(\mathcal{M}):\ \text{существуют такие } P\in\mathcal{P}(\mathcal{M}),Z\in\mathcal{P}(\mathcal{Z}(\mathcal{M})),ZP^\perp\in\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{M}),$$

$$\text{такие что } PTP\in\mathcal{M},\ \|PTP\|_{\mathcal{M}}\leqslant\varepsilon,\varphi(Z^\perp)\in W(B,\varepsilon,\delta),\quad d(ZP^\perp)\leqslant\varepsilon\varphi(Z)\},$$

где $\varepsilon,\delta>0$, $B\in\Sigma$, $\mu(B)<\infty$. Из соотношения

$$V(B,\varepsilon,\delta)\subset U(B,\varepsilon,\delta)\subset V(A,2\varepsilon,\delta),\ \varepsilon,\delta>0,\ B\in\Sigma,\mu(B)<\infty$$

следует, что эта векторная топология совпадает с топологией $t(\mathcal{M})$.

Приведем критерий метризуемости топологии $t(\mathcal{M})$ на $LS(\mathcal{M})$.

**Предложение 6.2** ([9, теорема 3.5.2]). *Топология сходимости локально по мере* $t(\mathcal{M})$ *на* $LS(\mathcal{M})$ *метризуема тогда и только тогда, когда центр* $Z(\mathcal{M})$ *является* $\sigma$*-конечным.*

Отметим также следующее полезное свойство топологии сходимости локально по мере.

**Предложение 6.3** ([19, предложение 8]). *Пусть* $\{Z_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ — *семейство ненулевых попарно ортогональных центральных проекторов такое, что* $\sup\limits_{j\in J} Z_j = I$. *Для* $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS(\mathcal{M})$, $T \in LS(\mathcal{M})$ *следующие условия эквивалентны*:

1. $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$;
2. $Z_jT_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} Z_jT$ *для всех* $j \in J$;
3. $Z_jT_\alpha \xrightarrow{t(Z_j\mathcal{M})} Z_jT$ *для всех* $j \in J$.

**6.2. Непрерывность операторнозначных функций.** В этом пункте устанавливается непрерывность операторнозначной функции $T \mapsto f(T)$ из $LS_h(\mathcal{M})$ в $LS(\mathcal{M})$ относительно топологии сходимости локально по мере (см. [20]).

**Теорема 6.1.** *Пусть* $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — *функция, непрерывная на спектре* $\sigma(T)$ *оператора* $T \in LS_h(\mathcal{M})$. *Если сеть операторов* $\{T_\alpha\} \subset LS_h(\mathcal{M})$ *сходится к оператору* $T$ *в топологии* $t(\mathcal{M})$, *то* $f(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

Для доказательства теоремы 6.1 нам понадобятся несколько лемм. Прежде всего заметим, что из определения оператора $f(T)$ (см. пункт 2.5) следует, что $Zf(T) = f(ZT)$ для любых $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$ и $T \in LS_h(\mathcal{M})$. Поэтому согласно предложению 6.3 для доказательства теоремы 6.1 достаточно рассмотреть только случай $\sigma$-конечности центра $Z(\mathcal{M})$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$. Следовательно, в силу предложения 6.2, нам нужно только проверить импликацию

$$(T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T) \Rightarrow (f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)).$$

**Лемма 6.1.** *Пусть* $T_k, T \in LS_h(\mathcal{M})$ *и* $f, f_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *таковы, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 0$ *и* $f_n(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f_n(T)$ *при* $k \to \infty$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $f(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$ *при* $k \to \infty$.

*Доказательство.* Так как топология сходимости локально по мере $t(\mathcal{M})$ и топология двусторонней сходимости локально по мере совпадают, достаточно показать, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$, существует такое $K = K(B, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$, что для любого $k \geqslant K$ существуют проекторы $P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Z_k \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, такие, что

$$P_k(f(T_k) - f(T))P_k \in \mathcal{M}, \quad \|P_k(f(T_k) - f(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,$$
$$\varphi(Z_k^\perp) \in W(B, \varepsilon, \delta), \; d(Z_kP_k^\perp) \leqslant \varepsilon\varphi(Z_k).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| = 0$, то существует номер $n_0$ такой, что

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_{n_0}(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Это означает, что $(f_{n_0}(T) - f(T)) \in \mathcal{M}$, $(f_{n_0}(T_k) - f(T_k)) \in \mathcal{M}$, и

$$\|f_{n_0}(T) - f(T)\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \;\text{ и }\; \|f_{n_0}(T_k) - f(T_k)\|_{\mathcal{M}} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}.$$

Так как $f_{n_0}(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f_{n_0}(T)$, то существует $K = K(B, \varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $k \geqslant K$ существуют проекторы $P_k \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ и $Z_k \in \mathcal{P}(Z(\mathcal{M}))$, для которых

$$P_k(f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T))P_k \in \mathcal{M}, \quad \|P_k(f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$
$$\varphi(Z_k^\perp) \in W(B, \frac{\varepsilon}{3}, \delta), \; d(Z_kP_k^\perp) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\varphi(Z_k).$$

Так как

$$f(T_k) - f(T) = [f(T_k) - f_{n_0}(T_k)] + [f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T)] + [f_{n_0}(T) - f(T)],$$

то в силу теоремы 3.3 существуют такие частично изометрические операторы $U, V$ и $W$ из алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$, что

$$P_k|f(T_k) - f(T)|P_k \leqslant UP_k|f(T_k) - f_{n_0}(T_k)|P_kU^* + VP_k|f_{n_0}(T_k) - f_{n_0}(T)|P_kV^* +$$
$$+ WP_k|f_{n_0}(T) - f(T)|P_kW^*.$$

Таким образом, имеют место включение $P_k(f(T_k) - f(T))P_k \in \mathcal{M}$ и условия

$$\|P_k(f(T_k) - f(T))P_k\|_{\mathcal{M}} \leqslant \varepsilon,\ \varphi(Z_k^{\perp}) \in W(B, \frac{\varepsilon}{3}, \delta) \subset W(B, \varepsilon, \delta),$$

$$d(Z_k P_k^{\perp}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\varphi(Z_k) \leqslant \varepsilon\varphi(Z_k)$$

для каждого $k \geqslant K$. Это означает, что

$$f(T_k) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T), \quad k \to \infty.$$

□

**Лемма 6.2.** *Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $(T_n - \lambda I)^{-1} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} (T - \lambda I)^{-1}$.*

*Доказательство.* Операторы $T_n$ и $T$ — самосопряженные, и поэтому $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, $\sigma(T_n) \subset \mathbb{R}$, и для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ существуют $(T_n - \lambda I)^{-1}$ и $(T - \lambda I)^{-1}$. Эти операторы являются значениями непрерывной операторнозначной функции $f(t) = (t - \lambda)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, от операторов $T_n$ и $T$ соответственно. К тому же в силу предложения 5.1 имеем $(T_n - \lambda I)^{-1}, (T - \lambda I)^{-1} \in LS(\mathcal{M})$. Так как

$$|f(t)| = \frac{1}{|t - \mathrm{Re}\lambda - i\mathrm{Im}\lambda|} = \frac{1}{\sqrt{(t - \mathrm{Re}\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\lambda)^2}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|},$$

получим, что $(T_n - \lambda I)^{-1}, (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{M}$ и

$$\|(T_n - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}, \quad \|(T - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{M}} \leqslant \frac{1}{|\mathrm{Im}\lambda|}.$$

Равенства

$$(T_n - \lambda I)^{-1} - (T - \lambda I)^{-1} = (T - \lambda I)^{-1}[(T - \lambda I) - (T_n - \lambda I)](T_n - \lambda I)^{-1} =$$
$$= (T - \lambda I)^{-1}[T - T_n](T_n - \lambda I)^{-1}.$$

и сходимость $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ обеспечивают сходимость

$$(T_n - \lambda I)^{-1} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} (T - \lambda I)^{-1}, \quad n \to \infty.$$

□

**Лемма 6.3.** *Пусть $f$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $f(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$. Если $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.*

*Доказательство.* Если функция $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ — рациональная, где $q(z)$ не имеет вещественных корней, то $f(z)$ представима в виде суммы полинома $r(z)$ и конечного числа слагаемых вида

$$\varphi(z) = \frac{b}{(z - \lambda)^k},\ b \in \mathbb{C},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Так как $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ и $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ является топологической $*$-алгеброй, то имеет место сходимость $r(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} r(T)$. Непрерывность произведения относительно топологии $t(\mathcal{M})$ и лемма 6.2 обеспечивают сходимость $\varphi(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T)$. Следовательно,

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

Если $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — произвольная непрерывная функция, такая что $f(z) \to 0$ при $|z| \to +\infty$, то существует последовательность рациональных функций $f_n(z) = \dfrac{p_n(z)}{q_n(z)}$, для которых $q_n(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{R}$, и $f_n$ сходится равномерно к $f$ на $\mathbb{R}$. Тогда по лемме 6.1 мы получаем, что

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

□

**Лемма 6.4.** *Если* $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M})$ *и* $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, *то* $E_\lambda^\perp(|T_n|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ *при* $\lambda \to +\infty$ *равномерно по* $n$, *где* $\{E_\lambda(|T_n|)\}_{\lambda \geqslant 0}$ — *спектральное семейство проекторов для оператора* $|T_n|$.

*Доказательство.* Обозначим $S = T^2$, $S_n = T_n^2$ и зафиксируем произвольную окрестность нуля $V(B, \varepsilon, \delta)$ в топологии $t(\mathcal{M})$. Так как $S \in LS(\mathcal{M})$, то в силу предложения 6.1 и предложения 3.11 имеем, что $E_\lambda^\perp(S) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ при $\lambda \to +\infty$. Следовательно, существует такое $\lambda_\varepsilon > 1$, что $E^\perp_{\frac{\lambda_\varepsilon}{2}}(S) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\delta}{2}\right)$.

Из $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$ следует, что $S_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} S$. Поэтому из предложения 6.1 имеем, что

$$E_\lambda^\perp(|S_n - S|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$$

при $n \to \infty$ для любого $\lambda > 0$. Следовательно, существует такое $n_\varepsilon$, что $E^\perp_{\frac{\lambda_\varepsilon}{2}}(|S_n - S|) \in V(B, \dfrac{\varepsilon}{2}, \dfrac{\delta}{2})$ для всех $n \geqslant n_\varepsilon$.

Обозначим $Q_\lambda = E_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|) \wedge E_{\frac{\lambda}{2}}(S)$. Из неравенств

$$-\frac{\lambda}{2} Q_\lambda \leqslant Q_\lambda (S_n - S) Q_\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2} Q_\lambda, \quad 0 \leqslant Q_\lambda S Q_\lambda \leqslant \frac{\lambda}{2} Q_\lambda$$

получим, что

$$-\lambda Q_\lambda \leqslant Q_\lambda (S_n - S) Q_\lambda + Q_\lambda S Q_\lambda = Q_\lambda S_n Q_\lambda = Q_\lambda (S_n - S) Q_\lambda + Q_\lambda S Q_\lambda \leqslant \lambda Q_\lambda.$$

Следовательно, $Q_\lambda S_n Q_\lambda \in \mathcal{M}$ и $\|Q_\lambda S_n Q_\lambda\|_{\mathcal{M}} \leqslant \lambda$. Это значит, что $T_n Q_\lambda \in \mathcal{M}$ и $\|T_n Q_\lambda\|_{\mathcal{M}} \leqslant \lambda^{\frac{1}{2}} < \lambda$ при $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$. Таким образом, в силу предложения 3.3 имеем

$$E_\lambda^\perp(|T_n|) \precsim Q_\lambda^\perp = E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|) \vee E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(S) \leqslant E_{\frac{\lambda}{2}}(|S_n - S|)^\perp + E^\perp_{\frac{\lambda}{2}}(S) \in V(B, \varepsilon, \delta).$$

для всех $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ и $n \geqslant n_\varepsilon$. Используя свойство размерностной функции $d$, мы получим $d(E_\lambda^\perp(|T_n|)) \leqslant d(Q_\lambda^\perp)$, откуда следует включение

$$E_\lambda^\perp(|T_n|) \in V(B, \varepsilon, \delta)$$

для $\lambda \geqslant \lambda_\varepsilon$ и $n \geqslant n_\varepsilon$.

□

*Доказательство теоремы* 6.1. Пусть $T_n, T \in LS_h(\mathcal{M}), n \in \mathbb{N}$, и $T_n \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$. Покажем сначала, что если $f$ — действительная непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то

$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$

Зафиксируем произвольную окрестность нуля $V(B, \varepsilon, \delta)$ топологии $t(\mathcal{M})$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда по лемме 6.4 существует $\lambda_V > 0$ такое, что $E_\lambda^\perp(|T_n|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для любых $\lambda \geqslant \lambda_V$ и $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, в силу сходимости $E_\lambda^\perp(|T|) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ при $\lambda \to +\infty$ можно выбрать число $\lambda_V$ так, что $E_\lambda^\perp(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для всех $\lambda \geqslant \lambda_V$.

Пусть $g(t)$ — непрерывная действительная функция на $\mathbb{R}$ такая, что $g(t) = f(t)$ при $t \in [-\lambda_V, \lambda_V]$ и $g(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$. Пусть $\varphi(t) = f(t) - g(t)$. Так как

$$f(T_n) - f(T) = g(T_n) - g(T) + \varphi(T_n) - \varphi(T),$$

то в силу теоремы 3.3 существуют частичные изометрии $U, V, W \in \mathcal{M}$ такие, что

$$|f(T_n) - f(T)| \leqslant U|g(T_n) - g(T)|U^* + V|\varphi(T_n)|V^* + W|\varphi(T)|W^*. \tag{6.4}$$

В силу леммы 6.3 имеем, что $g(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} g(T)$. Следовательно, в силу включения (6.2) существует число $n_V$ такое, что

$$U|g(T_n) - g(T)|U^* \in V\left(B, \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\delta}{3}\right)$$

для всех $n \geqslant n_V$.

Так как $\varphi(t) = 0$ при $t \in [-\lambda_V, \lambda_V]$, то
$$\varphi(|T|) = \varphi(|T|(E_{\lambda_V}(|T|) + E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|)) = \varphi(|T|E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|)) = (\varphi(|T|))E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|).$$
Из определения окрестности $V(B, \varepsilon, \delta)$ следует, что включение
$$Q \in V(B, \varepsilon, \delta) \cap \mathcal{P}(\mathcal{M})$$
для $0 < \varepsilon < 1$ влечет включение $TQ \in V(B, \varepsilon, \delta)$ для всех $T \in LS(\mathcal{M})$. Отсюда, из включения $E^{\perp}_{\lambda_V}(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ следует, что $\varphi(|T|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$. Аналогично, $\varphi(|T_n|) \in V\left(B, \dfrac{\varepsilon}{3}, \dfrac{\delta}{3}\right)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Наконец, из неравенства (6.4), предложения 6.1 и включения (6.2) получаем, что $|f(T_n) - f(T)| \in V(B, \varepsilon, \delta)$ для всех $n \geqslant n_V$. Это означает, что $f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T)$.

Пусть теперь $f$ — произвольная непрерывная функция на $\sigma(T)$ из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Покажем, что и в этом случае
$$f(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$
Так как алгебраические операции в $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ непрерывны и
$$f(S) = (\mathrm{Re} f)(S) \dot{+} (\mathrm{i}\ \mathrm{Im} f)(S)$$
для всех $S \in LS_h(\mathcal{M})$, без ограничения общности можно предположить, что $f$ — действительная функция из $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Допустим сначала, что $|f(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как спектр $\sigma(T)$ оператора $T$ замкнут в $\mathbb{R}$, по теореме Титце—Урысона о продолжении (см., например, [22, теорема 4.5.1]), существует непрерывная функция $g : \mathbb{R} \to [-1, +1]$ такая, что $g(t) = f(t)$ для всех $t \in \sigma(T)$. Пусть
$$\sigma_n = \left\{ t \in \mathbb{R} : |f(t) - g(t)| \geqslant \frac{1}{2^n} \right\}.$$
Ясно, что $\sigma(T) \cap \sigma_n = \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как функция $g$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а функция $f$ непрерывна на $\sigma(T)$, то $\sigma(T) \cap \overline{\sigma_n} = \varnothing$.

Для $t \in \mathbb{R}$ и $A \subset \mathbb{R}$ обозначим через $\rho(t, A) = \inf\limits_{a \in A} |t - a|$ расстояние от точки $t$ до множества $A$. Рассмотрим следующую функцию:
$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}\rho(t, \sigma(T))}{\rho(t, \sigma(T)) + \rho(t, \overline{\sigma_n})}.$$
Так как расстояние $\rho(t, A)$ есть непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то функция $h(t)$ тоже непрерывна на $\mathbb{R}$. Более того,
$$0 \leqslant h(t) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2, \ \ h(t) = 0 \ \text{ для всех } \ t \in \sigma(T)$$
и
$$g - h \leqslant f \leqslant g + h.$$
Так как функции $g(t)$ и $h(t)$ непрерывны на $\mathbb{R}$, по доказанному выше имеем, что
$$h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} h(T) = 0,$$
$$g(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} g(T) = f(T).$$
Используя неравенство $0 \leqslant f - g + h \leqslant 2h$, получим
$$0 \leqslant (f - g + h)(T_n) \leqslant 2h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0.$$
Следовательно, $(f - g + h)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} 0$ и
$$f(T_n) = (f - g + h)(T_n) + g(T_n) - h(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} f(T).$$
Таким образом, теорема 6.1 доказана в случае, когда $|f(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$.

Пусть теперь условие $|f(t)| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$, не выполняется. Так как
$$\sup_{t \in [n, n+1]} |f(t)| < \infty \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N},$$

можно выбрать кусочно-линейную непрерывную функцию $\varphi(t)$ на $\mathbb{R}$ так, чтобы

$$\varphi(t) \geqslant |f(t)| + 1 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Как было доказано выше, для функции $\dfrac{f(t)}{\varphi(t)}$ получим сходимость

$$\left(\frac{f}{\varphi}\right)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \left(\frac{f}{\varphi}\right)(T).$$

С другой стороны, из непрерывности функции $\varphi$ следует, что

$$\varphi(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T).$$

Так как $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, получаем

$$f(T_n) = \left(\varphi \cdot \frac{f}{\varphi}\right)(T_n) = \varphi(T_n)\left(\frac{f}{\varphi}\right)(T_n) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} \varphi(T) \cdot \left(\frac{f}{\varphi}\right)(T) = f(T).$$

Таким образом, теорема 6.1 полностью доказана.

□

Из теоремы 6.1 непосредственно вытекают два полезных следствия.

**Следствие 6.1.** *Если $\{T_\alpha\}$ — сеть операторов из $LS(\mathcal{M})$, $T \in LS(\mathcal{M})$ и $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то*

$$|T_\alpha|^p \xrightarrow{t(\mathcal{M})} |T|^p$$

*для всех $p > 0$.*

*Доказательство.* Так как $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, то

$$|T_\alpha|^2 = T_\alpha^* T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T^* T = |T|^2.$$

Используя теорему 6.1 для непрерывной функции $f(t) = |t|^{p/2}$, получим, что $|T_\alpha|^p \xrightarrow{t(\mathcal{M})} |T|^p$ для всех $p > 0$. □

Обозначим через $\{E_\lambda(T)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ спектральное семейство проекторов оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$. Так как $E_\lambda(T) = \varphi_\lambda(T)$, где $\varphi_\lambda(t) = 1$ при $t \leqslant \lambda$ и $\varphi_\lambda(t) = 0$ при $t > \lambda$, то из теоремы 6.1 получаем следующее

**Следствие 6.2.** *Если $\lambda$ не принадлежит спектру оператора $T \in LS_h(\mathcal{M})$, $\{T_\alpha\}$ — сеть таких операторов из $LS_h(\mathcal{M})$, что $T_\alpha \xrightarrow{t(\mathcal{M})} T$, то $E_\lambda(T_\alpha) \xrightarrow{t(\mathcal{M})} E_\lambda(T)$.*

## 7. Максимальные коммутативные $*$-подалгебры в алгебрах локально измеримых операторов

Пусть $\mathcal{M}$ — произвольная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $H$. Для каждого подмножества $\mathcal{A} \subset LS(\mathcal{M})$ обозначим через $\mathcal{A}'$ коммутант подмножества $\mathcal{A}$ в алгебре $LS(\mathcal{M})$:

$$\mathcal{A}' = \{T \in LS(\mathcal{M}) : TS = ST \text{ для любого } \ S \in \mathcal{A}\}.$$

Поскольку $(LS(\mathcal{M}), t(\mathcal{M}))$ — топологическая $*$-алгебра, то коммутант $\mathcal{A}'$ произвольного подмножества $\mathcal{A}$ всегда замкнут в топологии сходимости локально по мере $t(\mathcal{M})$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(H)$, то $LS(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ и топология $t(\mathcal{M})$ совпадает с равномерной топологией на $\mathcal{B}(H)$. Поэтому в этой ситуации существуют замкнутые в топологии $t(\mathcal{M})$ коммутативные $*$-подалгебры $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$, самосопряженные части которых $\mathcal{A}_h = \{T \in \mathcal{A} : T^* = T\}$ не являются векторными решетками относительно частичного порядка, индуцированного из $LS(\mathcal{M})_h$. Ниже будет показано, что для максимальных коммутативных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ линейное пространство $\mathcal{A}_h$ всегда является условно полной векторной решеткой относительно частичного порядка, индуцированного из $LS_h(\mathcal{M})$.

Следующее предложение устанавливает совпадение максимальной коммутативной $*$-подалгебры в $LS(\mathcal{M})$ со своим коммутантом.

**Предложение 7.1.** *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, в частности, $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Если $T \in \mathcal{A}'$, $T = \mathrm{Re}T + i\mathrm{Im}T$, где $\mathrm{Re}T,\ \mathrm{Im}T \in LS(\mathcal{M})_h$, то из $TS = ST$, $S \in \mathcal{A}$, следует, что $S^*T^* = T^*S^*$. Так как $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, то $S \in \mathcal{A} \Leftrightarrow S^* \in \mathcal{A}$. Поэтому $T^*S = ST^*$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е. $T^* \in \mathcal{A}'$. Следовательно,

$$\mathrm{Re}T = \frac{T+T^*}{2} \in \mathcal{A}' \text{ и } \mathrm{Im}T = \frac{T-T^*}{2i} \in \mathcal{A}'.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из $T \in \mathcal{A}'$, $T = T^*$, следует, что $T \in \mathcal{A}$.

Если $T^* = T \in \mathcal{A}'$, то множество

$$\mathcal{B} = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k S_k T^k \colon \alpha_k \in \mathbb{C}, S_k \in \mathcal{A}, k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

является коммутативной $*$-подалгеброй в $LS(\mathcal{M})$, которая содержит $\mathcal{A}$ и $T$. В силу максимальности коммутативной $*$-подалгебры $\mathcal{A}$, получим, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, т. е. $T \in \mathcal{A}$ и значит, $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$. Таким образом, $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$, и потому $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$. $\square$

Пусть $T = T^* \in LS(\mathcal{M})$. Рассмотрим борелевскую функцию $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, задаваемую равенством $f(\lambda) = \dfrac{\lambda - i}{\lambda + i}$, и положим

$$U_T = f(T) = (T - iI)(T + iI)^{-1}.$$

Оператор $U_T$ называется *преобразованием Кэли* оператора $T$ (см. [12, глава VIII, § 3.123]). Так как $|f(\lambda)| = 1$, то $U_T$ — унитарный оператор из $\mathcal{M}$.

**Предложение 7.2.** *Если $T = T^* \in LS(\mathcal{M})$, $S \in LS(\mathcal{M})$, то*

$$TS = ST \Longleftrightarrow U_T S = S U_T.$$

*Если при этом $S = S^*$, то*

$$TS = ST \Longleftrightarrow U_T U_S = U_S U_T.$$

*Доказательство.* Функция $g(\lambda) = (\lambda + i)^{-1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, принадлежит $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Поэтому согласно предложению 5.1 имеем $X = g(T) \in LS(\mathcal{M})$ и в силу теоремы 2.5

$$(T + iI)X = (T + iI)(T + iI)^{-1} = I \quad \text{и} \quad X(T + iI) = (T + iI)^{-1}(T + iI) = I,$$

т. е. $X = (T + iI)^{-1}$ — обратный элемент к $(T + iI)$ в алгебре $LS(\mathcal{M})$.

Если $TS = ST$, то $(T + iI)S = S(T + iI)$ и поэтому $(T + iI)^{-1}S = XS = SX = S(T + iI)^{-1}$. Отсюда получаем, что

$$U_T S = (T - iI)(T + iI)^{-1} S = S(T - iI)(T + iI)^{-1} = S U_T.$$

Отсюда, в частности, следует, что если $S = S^*$, то $U_T U_S = U_S U_T$.

Докажем противоположную импликацию. Пусть $U_T S = S U_T$. Так как

$$\lambda = i \left( 1 + \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right) \left( 1 - \frac{\lambda - i}{\lambda + i} \right)^{-1},$$

то, в силу теоремы 2.5, имеем, что

$$T = i(I + U_T)(I - U_T)^{-1}.$$

Поскольку $(I - U_T)^{-1} S = S(I - U_T)^{-1}$, то $TS = ST$.

Наконец, если $U_T U_S = U_S U_T$ и при этом $S = S^*$, то в силу доказанного выше, $U_T S = S U_T$, и, следовательно, $TS = ST$. $\square$

**Теорема 7.1.** *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}_b = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ является коммутативной подалгеброй фон Неймана в $\mathcal{M}$.*

*Доказательство.* Очевидно, что $\mathcal{A}_b$ есть $*$-подалгебра в $\mathcal{M}$. Если $T = T^* \in \mathcal{A}$, то $TS = ST$ для всех $S \in \mathcal{A}$, и поэтому, согласно утверждению 7.2, $U_T S = S U_T$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е., в силу предложения 7.1, $U_T \in \mathcal{A}' \cap \mathcal{M} = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$, откуда $U_T \in \mathcal{A}_b$.

Пусть $A \in \mathcal{M}$ и $AD = DA$ для всех $D \in \mathcal{A}$. Тогда $AU_T = U_T A$ для всех $T = T^* \in \mathcal{A}$ и потому $AT = TA$ (предложение 7.2). Так как $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, то каждый элемент $X \in \mathcal{M}$ имеет вид $X = \mathrm{Re}X + i\mathrm{Im}T$, где $\mathrm{Re}X \in \mathcal{A}_h$, $\mathrm{Im}T \in \mathcal{A}_h$. Следовательно, $AX = XA$ для всех $X \in \mathcal{A}$, т. е. $A \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$ (предложение 7.1). Таким образом, $A \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M} = \mathcal{A}_b$. Так как $\mathcal{A}_b \subset \mathcal{M}$, то

$$(\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)} = \{D \in \mathcal{B}(H) \colon AD = DA \ \text{ для всех } \ A \in \mathcal{A}_b\} \supseteq (\mathcal{M})'_{\mathcal{B}(H)}.$$

Отсюда

$$\mathcal{M} = ((\mathcal{M})'_{\mathcal{B}(H)})'_{\mathcal{B}(H)} \supseteq ((\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)})'_{\mathcal{B}(H)} = (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}.$$

Поэтому, если $A \in (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}$, то $A \in \mathcal{M}$ и $AD = DA$ для всех $D \in (\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)}$. Но алгебра $\mathcal{A}_b$ — коммутативная. Следовательно, $\mathcal{A}_b \subset (\mathcal{A}_b)'_{\mathcal{B}(H)}$ и в силу доказанного выше, получим, что $A \in \mathcal{A}_b$. Следовательно, $\mathcal{A}_b = (\mathcal{A}_b)''_{\mathcal{B}(H)}$, т. е. $\mathcal{A}_b$ — коммутативная подалгебра фон Неймана в $\mathcal{M}$. □

Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, $\mathcal{A}_b = \mathcal{A} \cap \mathcal{M}$. В силу теоремы 7.1, $\mathcal{A}_b$ — коммутативная алгебра фон Неймана, действующая в том же гильбертовом пространстве $H$, что и алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$. В частности, $\mathcal{A}_b$ — конечная алгебра фон Неймана, и потому $LS(\mathcal{A}_b) = S(\mathcal{A}_b)$ (см. следствие 3.4).

Пусть $T \in \mathcal{A}_h$, $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Согласно предложению 2.5, если $A \in \mathcal{M}$ и $TA = AT$, то $E_\lambda A = AE_\lambda$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. В силу предложения 7.2 получим, что если $S^* = S \in \mathcal{A}'$, то $E_\lambda U_S = U_S E_\lambda$, откуда следует, что $E_\lambda S = SE_\lambda$ для любого $S \in \mathcal{A}'$, т. е. $E_\lambda \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Таким образом, получено следующее предложение.

**Предложение 7.3.** *Если $T \in \mathcal{A}_h$, где $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T) \in \mathcal{A}_b$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**Теорема 7.2.** *Пусть $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$. Тогда $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$.*

*Доказательство.* Пусть $T \in \mathcal{A}_h$, $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(T)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для каждого $\xi \in H$ положим $T_n\xi = \int\limits_{-n}^{n+0} \lambda dE_\lambda \xi$. Операторы $T_n$, $n = 1, 2, \ldots$ принадлежат $\mathcal{A}_b$ и являются самосопряженными. Обозначим $Q_n = E_n E_{-n}^{\perp}$. Тогда для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $m > n$

$$T_n Q_n = Q_n T_n = T_n \ \text{ и } \ T_m Q_n = T_n Q_n = T_n.$$

Так как $Q_n \uparrow I$, то $\mathfrak{D} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n(H)$ плотно в $H$. Для каждого $\xi \in \mathfrak{D}$ положим $T_0\xi = T_n\xi$, где $n$ — такой номер, что $\xi \in Q_n(H)$. Оператор $T_0$ определен корректно, является линейным и удовлетворяет условию

$$(T_0\xi,\ \xi) = (T_n\xi,\ \xi) = (\xi,\ T_n\xi) = (\xi,\ T_0\xi)$$

для каждого $\xi \in Q_n(H)$, т. е. оператор $T_0$ является симметрическим.

Если $U$ — унитарный оператор из $\mathcal{A}_b'$ и $\xi \in Q_n(H)$, то

$$U\xi = UQ_n\xi = Q_n U\xi \in Q_n(H) \subset \mathfrak{D}(T_0) = \mathfrak{D}$$

и

$$UT_0\xi = UT_n\xi = T_n U\xi = T_0 U\xi.$$

Это означает, что $T_0 \ \eta \ \mathcal{A}_b$ и, согласно предложению 3.1, оператор $\widehat{T} = \overline{T_0} \ \eta \ \mathcal{A}_b$. Так как $\mathcal{A}_b$ — конечная алгебра фон Неймана и $Q_n \uparrow I$, то линейное подпространство $\mathfrak{D}$ сильно плотно в $H$. Поэтому, в силу следствия 3.1 и утверждения 3.5, оператор $\widehat{T} \in S_h(\mathcal{A}_b)$.

Если $\xi \in \mathfrak{D}$, $\zeta \in H$, и $n$ — такой номер, что $\xi \in Q_n(H)$, то $(E_\lambda\xi, \zeta) = 0$ для $\lambda \leqslant -n$ и $(E_\lambda\xi, \zeta) = (E_n\xi, \zeta)$ для $\lambda \geqslant n$. Поэтому

$$(\widehat{T}\xi, \zeta) = (T_0\xi, \zeta) = (T_n\xi, \zeta) = \int\limits_{-n}^{n+0} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\xi,\zeta}(\lambda).$$

Из представления $T = T_+ - T_-$, $T_+, T_- \in LS_+(\mathcal{M})$ и предложения 3.11 следует, что существует такая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n Q_n^\perp$ — конечный проектор. Это означает, что $\mathfrak{D}$ — локально измеримо относительно $\mathcal{M}$. Заметим, что для любого унитарного оператора $U \in \mathcal{M}'$ имеем, что $E_\lambda U = U E_\lambda$, и поэтому $U(\mathfrak{D}) \subset \mathfrak{D}$, т. е. $\mathfrak{D} \eta \mathcal{M}$. Из предложения 3.13 вытекает, что

$$T = \overline{T|_{\mathfrak{D}}} = \overline{T_0} = \widehat{T}.$$

Это означает, что $T \in S(\mathcal{A}_b)$.

Таким образом, для любого оператора $T \in \mathcal{A}_h$ существует локально измеримое относительно $\mathcal{M}$ подпространство $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}(T)$ такое, что $T = \overline{T|_{\mathfrak{D}}}$ и $\mathfrak{D}$ сильно плотно относительно алгебры фон Неймана $\mathcal{A}_b$.

Если $T \in \mathcal{A}$ — произвольный, то $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$, $\operatorname{Re} T$, $\operatorname{Im} T \in \mathcal{A}_h \subset S_h(\mathcal{A}_b)$. Пусть $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ — локально измеримые относительно $\mathcal{M}$ подпространства такие, что

$$\operatorname{Re} T = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}}},\ \operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}}},$$

и $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ сильно плотны относительно $\mathcal{A}_b$.

Тогда $\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2$ локально измеримо относительно $\mathcal{M}$ и сильно плотно относительно $\mathcal{A}_b$. Из предложений 3.6 и 3.13 имеем, что

$$\operatorname{Re} T = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}},\ \operatorname{Im} T = \overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} \in S(\mathcal{A}_b),$$

и

$$T = \overline{T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} = \overline{\operatorname{Re} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} + i\, \overline{\operatorname{Im} T|_{\mathfrak{D}_1 \cap \mathfrak{D}_2}} \in S(\mathcal{A}_b).$$

Аналогично показывается, что если $T, S \in \mathcal{A}$, то сумма $T \dotplus S$ в $\mathcal{A}$ совпадает с суммой $T \dotplus S$ в $S(\mathcal{A}_b)$. Так как инволюция определяется независимо от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}_b$, то $T^* \in S(\mathcal{A})$ есть сопряженный оператор к $T$ в $S(\mathcal{A}_b)$.

С помощью предложения 3.6 и 3.13 аналогично показывается, что если $T, S \in \mathcal{A}$, то произведение $T \cdot S$ в $\mathcal{A}$ есть произведение $T \cdot S$ в $S(\mathcal{A}_b)$. Таким образом, $\mathcal{A}$ — $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$.

Покажем теперь, что $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$. Если $0 \leqslant T \leqslant S \in \mathcal{A}_b$, $T \in S(\mathcal{A}_b)$, то $\|T\|_{\mathcal{A}_b} \leqslant \|S\|_{\mathcal{A}_b} < \infty$, т. е. $T \in \mathcal{A}_b$. Пусть теперь $S \in \mathcal{A}$ и $E_\lambda = \chi_{(-\infty,\lambda)}(S)$. Согласно предложению 3.11, существует такая последовательность центральных проекторов $Z_n \in \mathcal{M}$, что $Z_n \uparrow I$ и $Z_n E_n^\perp$ — конечный проектор относительно $\mathcal{M}$ для всех $n$. Так как $\mathcal{A}$ — максимальная в $LS(\mathcal{M})$, то $Z(\mathcal{M}) \subset \mathcal{A}_b$, в частности, $\{Z_n\} \subset \mathcal{A}_b$. Из предложения 3.14 следует, что

$$0 \leqslant Z_n E_{n+m} T E_{n+m} \leqslant Z_n E_{n+m} S E_{n+m} \leqslant (n+m) Z_n E_{n+m},$$

т. е.

$$\|\sqrt{T} Z_n E_{n+m}\|_{\mathcal{A}_b} \leqslant \sqrt{n+m} < n+m.$$

Из предложения 3.3 следует, что $G_{n+m}^\perp \preceq E_{n+m}^\perp$, где $G_m = \chi_{(\infty,m)}(\sqrt{T} Z_n)$. В частности, $Z_n G_{n+m}^\perp \preceq Z_n E_{n+m}^\perp$, и поэтому $Z_n G_{n+m}^\perp$ — конечный проектор для любого $m$. Так как $Z_n G_{m+m} \uparrow Z_n$ при $m \to \infty$, то $\sqrt{T} Z_n$ — измеримый относительно $\mathcal{M}$ оператор для любого $n = 1, 2, \ldots$. Из предложения 3.11 следует, что $\sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$. Поэтому $T = \sqrt{T} \cdot \sqrt{T} \in LS(\mathcal{M})$. Следовательно, $\mathcal{A}$ — заполненная $*$-подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$. □

Так как $\mathcal{A}_b$ — коммутативная алгебра фон Неймана, то в силу следствия 3.3 $S(\mathcal{A}_b)$ отождествляется с $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ для соответствующего пространства с локально конечной мерой. Следовательно, если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}$ отождествляется с заполненной $*$-подалгеброй в $S(\Omega, \Sigma, \mu)$. Отсюда, в частности, вытекает

**Теорема 7.3.** *Если $\mathcal{A}$ — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(\mathcal{M})$, то $\mathcal{A}_h$ — условно полная векторная решетка относительно частичного порядка, индуцированного из $LS_h(\mathcal{M})$. При этом, если $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то $\mathcal{A}_h$ — расширенная условно полная векторная решетка.*

*Доказательство.* Если $T \in \mathcal{A}$ и $T \geqslant 0$, то $(T\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in \mathfrak{D}(T)$. Это определение не зависит от $\mathcal{M}$ и $\mathcal{A}_b$. Следовательно,

$$T \in \mathcal{A}_+ \Longleftrightarrow T \in S(\mathcal{A}_b) \text{ и } T \geqslant 0 \text{ в } S(\mathcal{A}_b).$$

таким образом, частичный порядок из $S_h(\mathcal{A}_b)$ индуцирует исходный частичный порядок в $\mathcal{A}_h$.

Пусть $T, S \in \mathcal{A}_h \subset S_h(\mathcal{A}_b) = S_h(\Omega, \Sigma, \mu)$. Тогда

$$T_+ = T \cdot (\chi_{(-\infty,0)}(T))^\perp \in \mathcal{A}_h \quad \text{и} \quad T_+ = T \vee 0 \text{ в } S_h(\Omega, \Sigma, \mu),$$

т. е. $T \vee 0 \in \mathcal{A}_h$. Аналогично, $T_- = (-T) \vee 0 \in \mathcal{A}_h$ и $|T| = T_+ - T_- \in \mathcal{A}_h$. Отсюда

$$T \vee S = ((T - S) \vee 0) + S \in \mathcal{A}_h \quad \text{и} \quad T \wedge S = (T + S) - T \vee S \in \mathcal{A}_h.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_h$ — векторная решетка.

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}_h$ и $S \leqslant T \in \mathcal{A}_h$ для любого $S \in \mathcal{B}$. Тогда в $S(\mathcal{A}_b)$ существует точная верхняя грань $\sup \mathcal{B} \leqslant T$. Поскольку $\mathcal{A}$ — заполненная подалгебра в $S(\mathcal{A}_b)$ (теорема 7.2), то $\sup \mathcal{B} \in \mathcal{A}_h$. Это означает, что $\mathcal{A}_h$ — условно полная векторная решетка.

Покажем теперь, что $\mathcal{A}_h$ — расширенная условно полная векторная решетка, т. е. любое семейство $\{T_j\}_{j \in J}$ положительных попарно дизъюнктных элементов из $\mathcal{A}_h$ имеет точную верхнюю грань в $\mathcal{A}_h$. Поскольку проекторы $\{s(T_j)\}_{j \in J}$ попарно ортогональны и $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана, то существует такой измеримый оператор $T \in S(\mathcal{M}) = LS(\mathcal{M})$, что $Ts(T_j) = T_j$ для всех $j \in J$ и $s(T) = \sup\limits_{j \in J} s(T_j)$, в частности, $T_j \leqslant T$ для всех $j \in J$. Так как $\{T_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{A}_h$, то $TS = ST$ для всех $S \in \mathcal{A}$, т. е. $T \in \mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Если $S \in \mathcal{A}_h$ и $T_j \leqslant S$ для всех $j \in J$, то $T \leqslant S$, что влечет равенство $T = \sup\limits_{j \in J} T_j$. □

Следует отметить, что в случае не конечных алгебр фон Неймана свойство расширенности векторных решеток $\mathcal{A}_h$ для максимальных коммутативных $*$-подалгебр $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$, вообще говоря, не выполняется. Более точно, верна следующая

**Теорема 7.4.** *Если для любой максимальной коммутативной $*$-подалгебры $\mathcal{A}$ в $LS(\mathcal{M})$ векторная решетка $\mathcal{A}_h$ является расширенной, то $\mathcal{M}$ — конечная алгебра фон Неймана.*

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана// Тр. МИАН. — 2006. — *255*. — С. 41–54.
2. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана. II// Мат. заметки. — 2007. — *82*, № 5. — С. 703–707.
3. *Брателли У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
4. *Гельфанд И. М., Наймарк М. А.* О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве// Мат. сб. — 1943. — *12*. — С. 197–213.
5. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Абстрактная характеризация $EW^*$-алгебр// Функц. анализ и его прилож. — 1991. — *25*, № 1. — С. 76–78.
6. *Закиров Б. С., Чилин В. И.* Описание $GB^*$-алгебр, ограниченная часть которых есть $W^*$ алгебра// Узбек. мат. ж. — 1991. — № 2. — С. 24–29.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* $*$-Алгебры измеримых и локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана// Доповід. НАН Укр. — 2005. — *9*. — С. 28–30.
8. *Муратов М. А., Чилин В. И.* $*$-Алгебры неограниченных операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2005. — *326*. — С. 183–197.
9. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. — Київ: Праці Ін-т. Матем. НАН України, 2007.
10. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Центральные расширения $*$-алгебры измеримых операторов// Доповід. НАН Укр. — 2009. — *7*. — С. 24–28.
11. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.
12. *Рисс Ф., Секевальфи-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
13. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
14. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. — Ташкент: ФАН, 1983.
15. *Сукочев Ф. А., Чилин В. И.* Неравенство треугольника для измеримых операторов относительно порядка Харди—Литлвуда// Изв. АН Уз. ССР. Сер. физ.-мат. наук. — 1988. — *4*. — С. 44–50.
16. *Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологиях, связанных со следом на алгебре Неймана// Изв. вузов. Сер. мат. — 1987. — *1*. — С. 77–79.

17. *Antoine J. P., Inoue A., Trapani C.* Partial $*$-algebras and their operator realizations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.
18. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Continuous derivations on algebras of locally measurable operators are inner// Proc. Lond. Math. Soc. — 2014. — *109*, № 3. — С. 65–89.
19. *Chilin V. I., Muratov M. A.* Comparison of topologies on $*$-algebras of locally measurable operators// Positivity. — 2013. — *17*, № 1. — С. 111–132.
20. *Chilin V. I., Muratov M. A.* Continuity of operator-valued functions in the $*$-algebra of locally measurable operators// Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — *20*, № 2. — С. 124–134.
21. *Davies E. B.* A generalization of Kaplansky's theory// J. Lond. Math. Soc. — 1972. — *4*. — С. 435-436.
22. *Dieudonne J.* Foundations of modern analysis. — New York—London: Acad. Press, 1960.
23. *Dixmier J.* Les Algebres d'operateurs dans l'espace Hilbertien (Algebres de von Neumann). — Paris: Gauthier-Villars, 1969.
24. *Dixon P. G.* Unboubded operator algebras// Proc. Lond. Math. Soc. — 1973. — *23*, № 3. — С. 53–59.
25. *Fack T., Kosaki H.* Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators// Pacific J. Math. — 1986. — *123*. — С. 269–300.
26. *Kadison R. V.* Strong continuity of operator functions// Pacific J. Math. — 1968. — *26*. — С. 121–129.
27. *Kaplansky I.* Projections in Banach algebras// Ann. Math. — 1951. — *53*. — С. 235–249.
28. *Kaplansky I.* A theorem on rings operators// Pacific J. Math. — 1951. — *1*. — С. 227–232.
29. *Kunce R. A.* $L^p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1958. — *89*. — С. 519–540.
30. *Muratov M. A., Chilin V. I.* $*$-Algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2007. — *140*, № 3. — С. 445–451.
31. *Murphy G. J.* $C^\star$-algebras and operator theory. — New York—London: Academic Press, Inc. , 1990.
32. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators// Ann. Math. — 1936. — *37*. — С. 116–229.
33. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1937. — *41*. — С. 208–248.
34. *Murrey F. J., von Neumann J.* On ring of operators. IV// Ann. Math. — 1943. — *44*. — С. 716–808.
35. *Nelson E.* Notes on noncommutative integration// J. Funct. Anal. — 1974. — *15*. — С. 103–116.
36. *von Neumann J.* On ring of operators. III// Ann. Math. — 1940. — *41*. — С. 94–161.
37. *Padmanabhan A. R.* Convergence in measure and related results in finite rings of operators// Trans. Am. Math. Soc. — 1967. — *128*. — С. 359–388.
38. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. I. Functional Analysis. — New York: Academic Press, 1980.
39. *Sakai S.* $C^\star$-algebras and $W^\star$-algebras. — New York: Springer, 1971.
40. *Sankaran S.* The $*$-algebra of unbounded operators// J. Lond. Math. Soc. — 1959. — *343*. — С. 337–344.
41. *Sankaran S.* Stochastic convergence for operators// Quart. J. Math. — 1964. — *2*, № 15. — С. 97–102.
42. *Schmudgen K.* Unbounded operator algebras an representation theory. — Basel: Birkhauser, 1990.
43. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration// Ann. Math. — 1953. — *57*. — С. 401–457.
44. *Stinespring W. E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — *90*. — С. 15–56.
45. *Strătilă S., Zsidó L.* Lectures on von Neumann algebras. — Bucharest: Abacus Press, 1979.
46. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. — New York: Springer, 1979.
47. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators// Proc. Camb. Philos. Soc. — 1973. — *74*. — С. 257–268.
48. *Yeadon F. J.* Non-commutative $L^p$-spaces// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77*. — С. 91–102.

М. А. Муратов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: mamuratov@gmail.com

В. И. Чилин
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека,
Узбекистан, 700174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: chilin@usd.uz

UDC 517.98

## Topological Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators

© 2016 **M. A. Muratov, V. I. Chilin**

**Abstract**. In this paper, we review the results on topological $*$-algebras $S(\mathcal{M})$, $S(\mathcal{M},\tau)$, and $LS(\mathcal{M})$ of measurable, $\tau$-measurable, and locally measurable operators affiliated with the von Neumann algebra $\mathcal{M}$. Also we consider relations between these algebras for different classes of von Neumann algebras and establish the continuity of operator-valued functions with respect to local convergence in measure. We describe maximal commutative $*$-subalgebras of the algebra $LS(\mathcal{M})$ as well.

### REFERENCES

1. A. M. Bikchentaev, "Lokal'naya skhodimost' po mere na polukonechnykh algebrakh fon Neymana" [Local convergence in measure on semifinite von Neumann algebras], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2006, **255**, 41–54 (in Russian).
2. A. M. Bikchentaev, "Lokal'naya skhodimost' po mere na polukonechnykh algebrakh fon Neymana. II" [Local convergence in measure on semifinite von Neumann algebras. II], *Mat. zametki.*, 2007, **82**, No. 5, 703–707 (in Russian).
3. U. Bratelli and D. Robinson, *Operatornye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (in Russian).
4. I. M. Gel'fand and M. A. Naymark, "O vklyuchenii normirovannogo kol'tsa v kol'tso operatorov v gil'bertovom prostranstve" [On the inclusion of the normed ring into the ring of operators in a Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1943, **12**, 197–213 (in Russian).
5. B. S. Zakirov and V. I. Chilin, "Abstraktnaya kharakterizatsiya $EW^*$-algebr" [Abstract characterization of $EW^*$-algebras], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1991, **25**, No. 1, 76–78 (in Russian).
6. B. S. Zakirov and V. I. Chilin, "Opisanie $GB^*$-algebr, ogranichennaya chast' kotorykh est' $W^*$ algebra" [Description of $GB^*$-algebras that have a $W^*$ algebra as a bounded part], *Uzbek. mat. zh.* [Uzbek Math. J.], 1991, No. 2, 24–29 (in Russian).
7. M. A. Muratov and V. I. Chilin, "$*$-Algebry izmerimykh i lokal'no izmerimykh operatorov, prisoedinennykh k algebre fon Neymana" [$*$-Algebras of measurable and locally measurable operators affiliated with the von Neumann algebra], *Dopovid. NAN Ukr.* [], 2005, **9**, 28–30 (in Russian).
8. M. A. Muratov and B. I. Chilin, "$*$-Algebry neogranichennykh operatorov, prisoedinennykh k algebre fon Neymana" [$*$-Algebras of unbounded operators affiliated with the von Neumann algebra], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. Saint-Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **326**, 183–197 (in Russian).
9. M. A. Muratov and V. I. Chilin, *Algebry izmerimykh i lokal'no izmerimykh operatorov* [Algebras of Measurable and Locally Measurable Operators], Pratsi In-t. Matem. NAN Ukraïni, Kiïv, 2007 (in Russian).
10. M. A. Muratov and V. I. Chilin, "Tsentral'nye rasshireniya $*$-algebry izmerimykh operatorov" [Central extensions of $*$-algebra of bounded operators] *Dopovid. NAN Ukr.* [Rep. Ukrainian Nat. Acad. Sci.], 2009, **7**, 24–28 (in Russian).
11. M. A. Naymark, *Normirovannye kol'tsa* [Normed Rings], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
12. F. Riess and B. Szokefalvi-Nagy, *Lektsii po funktsional'nomu analizu* [Lectures in Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (in Russian).
13. W. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (in Russian).
14. T. A. Sarymsakov, Sh. A. Ayupov, D. Khadzhiev, and V. I. Chilin, *Uporyadochennye algebry* [Ordered Algebras], FAN, Tashkent, 1983 (in Russian).
15. F. A. Sukochev and V. I. Chilin, "Neravenstvo treugol'nika dlya izmerimykh operatorov otnositel'no poryadka Khardi—Litlvuda" [The triangle inequality for measurable operators with respect to the Hardy–Littlewood ordering] *Izv. AN Uz. SSR Ser. fiz.-mat. nauk* [Bull. Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. Phys. Math. Sci.], 1988, **4**, 44–50 (in Russian).
16. O. E. Tikhonov, "Nepreryvnost' operatornykh funktsiy v topologiyakh, svyazannykh so sledom na algebre Neymana" [Continuity of operator functions in topologies connected to the trace on the Neumann algebra] *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1987, **1**, 77–79 (in Russian).

17. J. P. Antoine, A. Inoue, and C. Trapani, *Partial $*$-Algebras and Their Operator Realizations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
18. A. F. Ber, V. I. Chilin, and F. A. Sukochev, "Continuous derivations on algebras of locally measurable operators are inner," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2014, **109**, No. 3, 65–89.
19. V. I. Chilin and M. A. Muratov, "Comparison of topologies on $*$-algebras of locally measurable operators," *Positivity*, 2013, **17**, No. 1, 111–132.
20. V. I. Chilin and M. A. Muratov, "Continuity of operator-valued functions in the $*$-algebra of locally measurable operators," *Methods Funct. Anal. Topology*, 2014, **20**, No. 2, 124–134.
21. E. B. Davies, "A generalization of Kaplansky's theory," *J. Lond. Math. Soc.*, 1972, **4**, 435-436.
22. J. Dieudonne, *Foundations of Modern Analysis*, Acad. Press, New York–London, 1960.
23. J. Dixmier, *Les Algebres d'Operateurs dans l'Espace Hilbertien (Algebres de von Neumann)*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
24. P. G. Dixon, "Unboubded operator algebras," *Proc. Lond. Math. Soc.*, 1973, **23**, No. 3, 53–59.
25. T. Fack and H. Kosaki, "Generalized $s$-numbers of $\tau$-measurable operators," *Pacific J. Math.*, 1986, **123**, 269–300.
26. R. V. Kadison, "Strong continuity of operator functions," *Pacific J. Math.*, 1968, **26**, 121–129.
27. I. Kaplansky, "Projections in Banach algebras," *Ann. Math.*, 1951, **53**, 235–249.
28. I. Kaplansky, "A theorem on rings operators," *Pacific J. Math.*, 1951, **1**, 227–232.
29. R. A. Kunce, "$L^p$ Fourier transforms on locally compact unimodular groups," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1958, **89**, 519–540.
30. M. A. Muratov and V. I. Chilin, "$*$-Algebras of unbounded operators affiliated with a von Neumann algebra," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2007, **140**, No. 3, 445–451.
31. G. J. Murphy, *$C^\star$-Algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., New York–London, 1990.
32. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators," *Ann. Math.*, 1936, **37**, 116–229.
33. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators. II," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1937, **41**, 208–248.
34. F. J. Murrey and J. von Neumann, "On ring of operators. IV," *Ann. Math.*, 1943, **44**, 716–808.
35. E. Nelson, "Notes on noncommutative integration," *J. Funct. Anal.*, 1974, **15**, 103–116.
36. J. von Neumann, "On ring of operators. III," *Ann. Math.*, 1940, **41**, 94–161.
37. A. R. Padmanabhan, "Convergence in measure and related results in finite rings of operators," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **128**, 359–388.
38. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, New York, 1980.
39. S. Sakai, *$C^\star$-Algebras and $W^\star$-Algebras*, Springer, New York, 1971.
40. S. Sankaran, "The $*$-algebra of unbounded operators," *J. Lond. Math. Soc.*, 1959, **343**, 337–344.
41. S. Sankaran, "Stochastic convergence for operators," *Quart. J. Math.*, 1964, **2**, No. 15, 97–102.
42. K. Schmudgen, *Unbounded Operator Algebras an Representation Theory*, Birkhauser, Basel, 1990.
43. I. E. Segal, "A non-commutative extension of abstract integration," *Ann. Math.*, 1953, **57**, 401–457.
44. W. E. Stinespring, "Integration theorems for gages and duality for unimodular groups," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1959, **90**, 15–56.
45. S. Strătilă and L. Zsidó, *Lectures on von Neumann Algebras*, Abacus Press, Bucharest, 1979.
46. M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer, New York, 1979.
47. F. J. Yeadon, "Convergence of measurable operators," *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1973, **74**, 257–268.
48. F. J. Yeadon, "Non-commutative $L^p$-spaces," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 91–102.



M. A. Muratov
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: mamuratov@gmail.com

V. I. Chilin
M. Ulugbek National University of Uzbekistan,
VUZ Gorodok, 700174 Tashkent, Uzbekistan
E-mail: chilin@usd.uz