Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 103–114

УДК 514.13+514.132

О ФОРМУЛЕ ОБЪЕМА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА С mm2-СИММЕТРИЕЙ

© 2016 г. **В. А. КРАСНОВ, Э. Ш. ХИСЯМЕТДИНОВА**

Аннотация. В настоящей работе получены явные интегральные формулы объема произвольных компактных гиперболических октаэдров, обладающих mm2-симметрией, в терминах двугранных углов, а также указан алгоритм вычисления объема таких октаэдров в сферическом пространстве.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

Вычисление объемов является очень старой и сложной проблемой, берущей свое начало во времена античной математики и не потерявшей актуальности по сей день. По-видимому, первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16-м веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер. В настоящее время результат Тартальи известен как детерминантная формула Кэли—Менгера. Заметим, что аналогичная формула имеет место и для симплексов произвольной размерности.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом случае был найден Л. Шлефли [20], а Н. И. Лобачевский [9] и Я. Бойяи [10] независимо друг от друга вычислили объем гиперболической ортосхемы. Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н. И. Лобачевским [9], а в 1982 году Дж. Милнор [15] представил этот результат в более компактном виде. В свою очередь, Э. Б. Винбергом [4] были получены формулы объема гиперболических идеальных пирамид, а также тетраэдров, имеющих одну, две и три вершины на бесконечности.

Что касается формулы объема произвольного неевклидова тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [11], Дж. Мураками и У. Яно [19], Дж. Мураками и А. Ушиджимы [17], Д. А. Деревнина и А. Д. Медных [12], а также Дж. Мураками [18]. Нельзя не упомянуть, что еще в 1906 году итальянский герцог Г. Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. К сожалению, выдающаяся работа Г. Сфорца [21] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

В 2002 году Я. Моханти [16] был вычислен объем симметричного идеального октаэдра, а в 2008 году Н. В. Абросимовым, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [3] были получены формулы объемов

Рукопись поступила в редакцию 26 января 2016 г. Работа первого автора выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание 1.1974.2014/К «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, mmm- и 2|m-октаэдров. В 2011 году Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [5] вычислили объем гиперболического mmm-октаэдра в простейшей геометрической ситуации. Наконец, в 2013 году в работах Н. В. Абросимова и Г. В. Байгонаковой [2], а также В. А. Краснова [8] параллельно и независимо были получены формулы объема произвольного гиперболического mmm-октаэдра. Кроме того, в работе [7] предложена интегральная формула объема произвольного гиперболического октаэдра с 2|m-симметрией.

В настоящей статье найдена явная интегральная формула объема произвольного компактного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, а также описан алгоритм вычисления объема mm2-октаэдров в сферическом пространстве. Стоит отметить, что полученный в работе результат является обобщением теоремы Р. В. Галиулина, С. Н. Михалева и И. Х. Сабитова [6] на случаи классических неевклидовых пространств.

2. Предварительные результаты

Будем рассматривать задачу вычисления объема многогранника на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ и в трехмерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$. Кроме того, для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с пространствами постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Одним из основных инструментов при вычислении объемов трехмерных неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [20] доказал эту формулу для сферического n-мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [13] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 2.1 (дифференциальная формула Шлефли). *Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве $\mathbb{S}^3$ или $\mathbb{H}^3$. Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом и его дифференциал выражается по формуле*

$$K\,dV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\,d\alpha_i, \tag{2.1}$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i-го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P. При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i-м ребре.

В дальнейшем нам также понадобится формула объема произвольного гиперболического тетраэдра, полученная в работе [12].

Теорема 2.2 (Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, 2004). *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противолежащие им двугранные углы* (рис. 2.1). *Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией*

$$\mathrm{V}(T) = -\frac{1}{4}\int\limits_{Z_2}^{Z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+A+B+D+E}{2}\sin\frac{\xi+A+C+D+F}{2}\sin\frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos\frac{\xi+A+B+C}{2}\cos\frac{\xi+A+E+F}{2}\cos\frac{\xi+B+D+F}{2}\cos\frac{\xi+C+D+E}{2}}\right| d\xi, \tag{2.2}$$

где

$$Z_1 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$
$$Z_2 = \operatorname{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

а вещественные числа k_1, k_2, k_3 и k_4 имеют вид

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) +$$
$$+ \cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)),$$

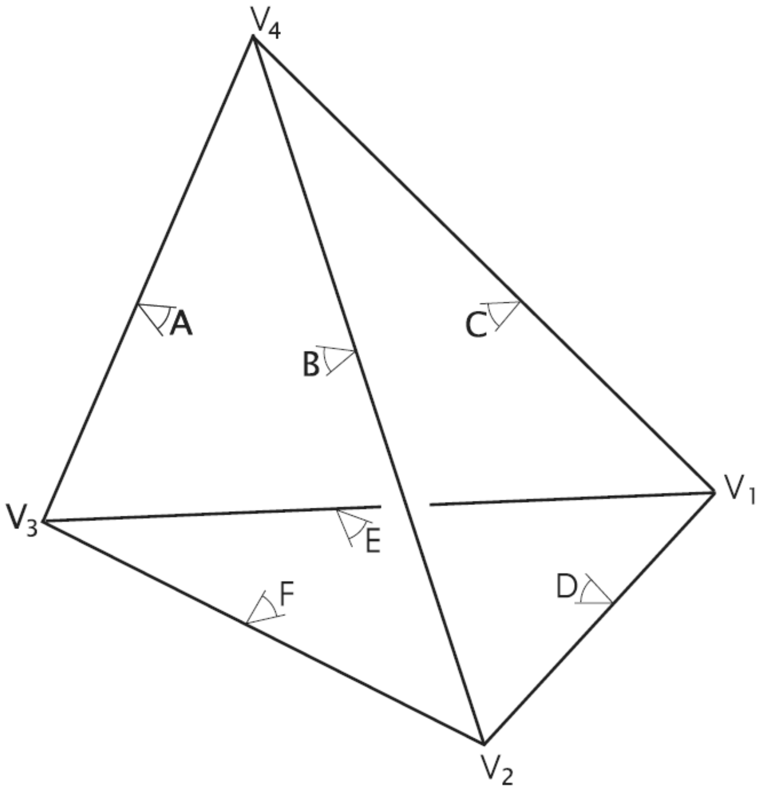

Рис. 2.1

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) +$$
$$+ \sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F)),$$
$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$
$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Заметим, что доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов—тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли (2.1). В работе [12] также было сказано, что из формулы Деревнина—Медных вытекает формула Мураками—Яно [19]. Однако формулу (2.2) можно легко получить и из формулы Мураками—Яно [19]. Так, в работе [7] приведен ее обратный вывод и, как следствие, получена интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах длин ребер.

Далее, пусть по-прежнему T — неевклидов тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F (рис. 2.1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos\alpha_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра T. Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij}\rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij-й минор матрицы G.

В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического и сферического тетраэдра.

Теорема 2.3. *Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический (сферический) тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противолежащие*

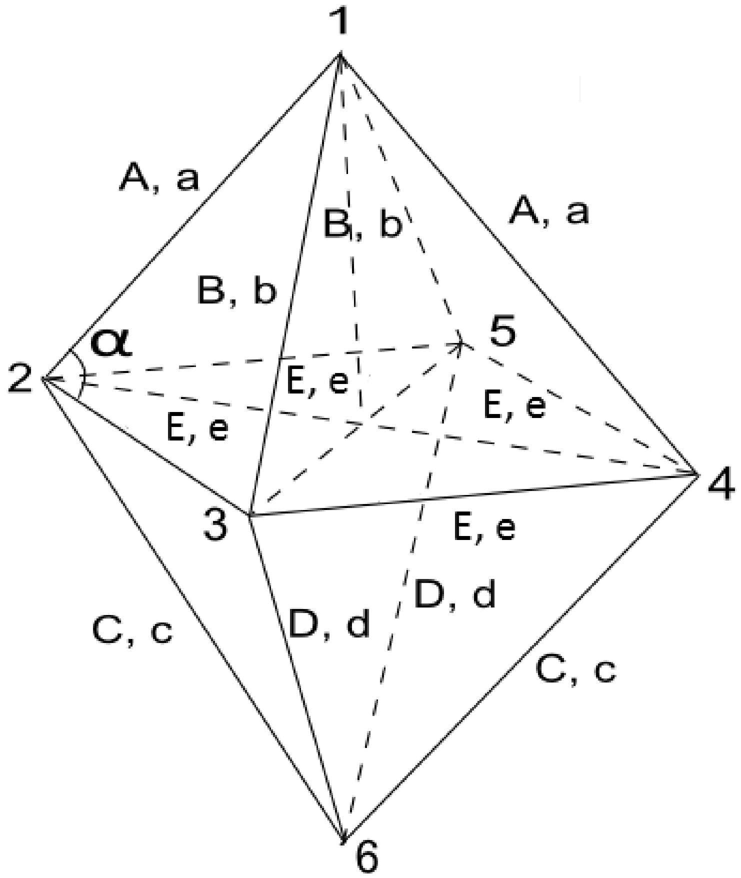

Рис. 3.1

им двугранные углы (*см. рис.* 2.1). *Кроме того, пусть* l_{ij} — *длина ребра, соединяющего вершины* v_i *и* v_j. *Тогда*:

$$\det G < 0 \quad (\det G > 0); \tag{2.3}$$

$$c_{ii} > 0; \tag{2.4}$$

$$\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}} \quad (\cos l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}), \tag{2.5}$$

В свою очередь, критерий существования гиперболического тетраэдра с наперед заданным набором двугранных углов дается теоремой, доказательство которой приведено в работе [22].

Теорема 2.4 (А. Ушиджима, 2013). *Для существования гиперболического тетраэдра* $T = T(A, B, C, D, E, F)$ *необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий*:

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} G = (3,1) \\ c_{ij} > 0, \end{cases}$$

где $i \neq j$, *при этом* $\operatorname{sgn} G$ *есть сигнатура матрица* G.

Наконец, для существования сферического тетраэдра с заданным набором двугранных углов необходимо и достаточно, чтобы его матрица Грама G была положительно определена [4].

3. Объем гиперболического октаэдра с mm2-симметрией

3.1. Гиперболический октаэдр с mmm**-симметрией.** Рассмотрим октаэдр O, обладающий mm2-симметрией, т. е. октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от двух взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам (рис. 3.1). Обозначим через A, B, C, D, E величины его двугранных углов.

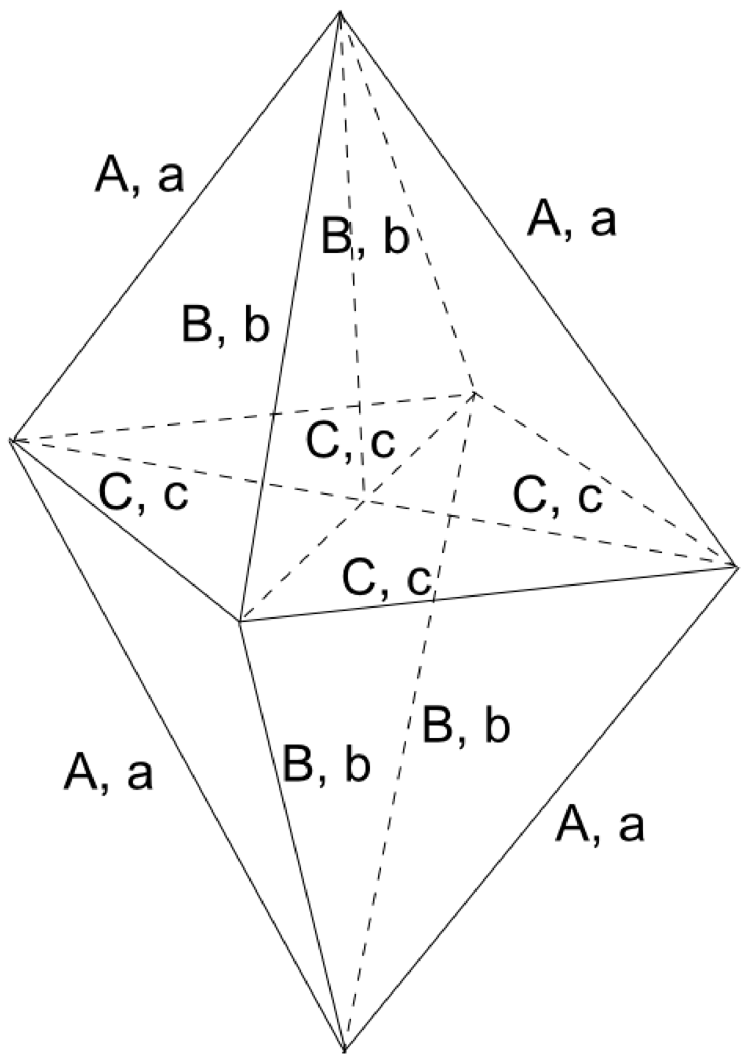

Рис. 3.2

Очевидно, что mmm-октаэдр (рис. 3.2), т. е. октаэдр $O = O(A, B, C)$, остающийся инвариантным при отражениях относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих его по реберным циклам, является частным случаем октаэдра с mm2-симметрией.

Как было сказано во введении, объем гиперболического mmm-октаэдра параллельно и независимо был вычислен в работах [2, 8].

Теорема 3.1 (В. А. Краснов, 2013). *Пусть $O = O(A, B, C)$ — гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = -2\int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\cos\frac{2\xi+A+B}{4}\cos\frac{2\xi+A+C}{4}\cos\frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos\frac{2\xi+A+B+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+A+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+B+C+\pi}{4}\cos\frac{2\xi+3\pi}{4}}\right| d\xi, \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + \operatorname{arctg}\frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

$$\tilde{k_1} = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B+\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C+\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4}\right)\right),$$

$$\tilde{k_2} = -\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{2A-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2B-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2C-\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4}\right)\right),$$
$$\tilde{k_3} = 2\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right),$$
$$\tilde{k_4} = \sqrt{\tilde{k_1}^2 + \tilde{k_2}^2 - \tilde{k_3}^2}.$$

Теорема 3.2 (Абросимов, Байгонакова, 2013)**.** *Пусть $O = O(A,B,C)$ — гиперболический октаэдр с* mmm*-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ отыскивается по формулам*:

1. *если $0 \leqslant T \leqslant 1$, то*
$$V = -\int\limits_0^\tau \ln\left|\frac{(1-\cos A)(\cos A - \cos t)(\cos B - \cos t)(\cos C - \cos t)}{(1+\cos A)(\cos A + \cos t)(\cos B + \cos t)(\cos C + \cos t)}\right| dt, \tag{3.2$'$}$$
где острый угол $0 < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ находится из уравнения $\sin\tau = T$;
2. *если $T > 1$, то*
$$V = 2\int\limits_\theta^{\frac{\pi}{2}} \left(\mathrm{arctg}\frac{1}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos A}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos B}{\mathrm{tg}\eta} + \mathrm{arctg}\frac{\cos C}{\mathrm{tg}\eta}\right)\frac{d\eta}{\cos\eta}, \tag{3.2$''$}$$
где величина $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ находится из уравнения $\dfrac{1}{\cos\theta} = T$;
3. *если $T = 1$, то*
$$V = 2\left(\int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin A)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x} + \int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin B)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x} - \int\limits_0^{\mathrm{arth}(\sin C)} \frac{xdx}{\mathrm{ch}x}\right), \tag{3.2$'''$}$$

при этом
$$T = \sqrt{\frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C}}.$$

Замечание 3.1. Идея доказательства формулы (3.1) основана на выборе подходящей триангуляции mmm-октаэдра, последующим исключении возникающих вспомогательных параметров (двугранных углов) и вычислении объемов тетраэдров триангуляции по формуле Деревнина—Медных (2.2). В свою очередь, для доказательства справедливости формул (3.2$'$)–(3.2$'''$) в работе [2] проверяется, что соответствующие функции объема удовлетворяют дифференциальной формуле Шлефли (2.1) и некоторым начальным условиям (т. е. функции объема октаэдров с mmm-симметриями есть единственные решения некоторых задач Коши). Несмотря на то, что формулы (3.1) и (3.2$'$)–(3.2$''$) существенно отличаются по своей записи, на конкретных примерах они приводят к одинаковым результатам.

Пример 3.1. Рассмотрим гиперболический mmm-октаэдр $O = O(A,B,C)$, где
$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{2}{5}.$$
Тогда по формулам (3.1) и (3.2$'$) $V(O) \approx 0{,}948$.

Пример 3.2. Пусть $O = O(A,B,C)$ — гиперболический октаэдр с mmm-симметрией, при этом пусть
$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{3}.$$
Согласно формулам (3.1) и (3.2$''$), $V(O) \approx 0{,}661$.

Пример 3.3. Рассмотрим гиперболический mmm-октаэдр $O = O(A,B,C)$. Пусть
$$A = B = \frac{2\pi}{3}, \quad C = \arccos\frac{1}{4}.$$
Тогда в силу (3.1) и (3.2$'''$) $V(O) \approx 0{,}394$.

Замечание 3.2. Заметим, что метод, основанный на применении формулы Шлефли (2.1), может быть использован и при доказательстве формулы (3.1). А именно, используя метрические соотношения между длинами ребер и двугранными углами гиперболического тетраэдра (теорема 2.3, формула (2.5)), элементарными вычислениями можно легко установить, что длины ребер двугранных углов $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ тетраэдра $\tilde{T}$ равны длинам ребер двугранных углов A, B, C октаэдра O соответственно [5]. Значит, если подходящим образом склеить 8 одинаковых экземпляров $\tilde{T}$, то получится в точности гиперболический mmm-октаэдр $O(A,B,C)$.

Заметим, что в работах [2,8] приведены разные доказательства критерия существования гиперболического октаэдра с mmm-симметрией. В заключение данного пункта мы докажем критерий существования сферического mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$ с заданным набором двугранных углов.

Лемма 3.1. *Для существования сферического* mmm-*октаэдра* $O = O(A,B,C)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} < 1, \\ \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{B}{2} - \cos^2\frac{C}{2} < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Из определения октаэдра с mmm-симметрией следует, что существование mmm-октаэдра $O = O(A,B,C)$ равносильно существованию сферического тетраэдра $\tilde{T} = \tilde{T}\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ с матрицей Грама

$$G(\tilde{T}) = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{A}{2} & -\cos\frac{B}{2} & -\cos\frac{C}{2} \\ -\cos\frac{A}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\cos\frac{B}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\cos\frac{C}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к G критерий Сильвестра (квадратичная форма с матрицей G должна быть положительно определена), получаем требуемую систему. □

3.2. Гиперболический октаэдр с mm2**-симметрией.** А теперь рассмотрим задачу вычисления объема произвольного компактного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией (рис. 3.1).

Для вычисления объема гиперболического октаэдра O, допускающего mm2-симметрию, рассмотрим его разбиение на тетраэдры T_1, T_2, T_3 и T_4 с вершинами (1234), (1245), (2346) и (2456) соответственно.

Так как плоскость (1264) является плоскостью симметрии нашего октаэдра, то тетраэдры T_1 и T_2, а также T_3 и T_4 попарно конгруэнтны. Следовательно, вычисление объема октаэдра $V = V(O)$ в нашем случае сводится к вычислению объемов тетраэдров T_1 и T_3:

$$V(O) = 2 \cdot V(T_1) + 2 \cdot V(T_3). \tag{3.3}$$

В свою очередь, для вычисления объемов тетраэдров триангуляции нам достаточно найти двугранный угол x при основании четырехугольной гиперболической пирамиды (12345). Для нахождения x мы, как и в случае октаэдров с mmm- и 2|m-симметриями (см. [2,5,8]), будем использовать технику, заключающуюся в описании сферы бесконечно малого радиуса, центр которой совпадает с некоторой вершиной многогранника, и последующим применением сферической теоремы косинусов [9].

Вначале опишем сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2 и найдем ее пересечение с тетраэдром (1234). Далее, обозначим плоский угол грани (123) при вершине 2 через α. Не нарушая общности, предположим, что ее пересечение с тетраэдром триангуляции (1234) есть сферический прямоугольный треугольник с внутренними углами x, $\frac{A}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ и гипотенузой α [9]. Запишем сферическую теорему Пифагора для этого треугольника:

$$\cos\alpha = \mathrm{ctg} x \cdot \mathrm{ctg}\frac{A}{2},$$

откуда

$$x = \mathrm{arctg}\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\frac{A}{2}}. \tag{3.4}$$

Найдем плоский угол α, предварительно рассмотрев четырехугольную пирамиду (12643) и описав сферу бесконечного малого радиуса с центром в вершине 2. Как и ранее, предположим, что полученное пересечение сферы и многогранника представляет собой сферический треугольник с углами E, $\frac{A}{2}$ и $\frac{C}{2}$ и стороной α, лежащей против угла $\frac{C}{2}$ [9].

Применим теперь к полученному треугольнику вторую теорему косинусов и выразим $\cos\alpha$. Окончательно имеем:

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\sin\frac{A}{2}\sin E}. \tag{3.5}$$

Наконец, подставив (3.5) в (3.4), получим выражение неизвестного двугранного угла x через двугранные углы исходного октаэдра:

$$x = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\cos\frac{A}{2}\sin E}. \tag{3.6}$$

Таким образом, гиперболический октаэдр, обладающий mm2-симметрией, однозначно с точностью до движения определяется своими двугранными углами A, B, C, D и E, т. е. $O = O(A, B, C, D, E)$.

Вычислив теперь объемы тетраэдров триангуляции T_1 и T_3 по формуле Деревнина—Медных (2.2) и воспользовавшись формулой (3.3), мы получим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть $O = O(A, B, C, D, E)$ — гиперболический октаэдр, обладающий* mm2-*симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой*

$$V(O) = 2V(\frac{A}{2}, B, \frac{A}{2}, \lambda, \frac{\pi}{2}, \lambda) + 2V(\frac{C}{2}, D, \frac{C}{2}, E-\lambda, \frac{\pi}{2}, E-\lambda), \tag{3.7}$$

где

$$\lambda = \mathrm{arcctg}\frac{\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{A}{2}\cos E}{\cos\frac{A}{2}\sin E},$$

$$V(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon,\zeta) = -\frac{1}{4}\int\limits_{z_2}^{z_1} \ln\left|\frac{\sin\frac{\xi}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\beta+\delta+\epsilon}{2}\sin\frac{\xi+\alpha+\gamma+\delta+\zeta}{2}\sin\frac{\xi+\beta+\gamma+\epsilon+\zeta}{2}}{\cos\frac{\xi+\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\xi+\alpha+\epsilon+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\beta+\delta+\zeta}{2}\cos\frac{\xi+\gamma+\delta+\epsilon}{2}}\right| d\xi,$$

$$z_1 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} - \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$z_2 = \mathrm{arctg}\frac{k_2}{k_1} + \mathrm{arctg}\frac{k_4}{k_3},$$

$$k_1 = -(\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\alpha+\delta) + \cos(\beta+\epsilon) + \cos(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \cos(\delta+\epsilon+\zeta) + \cos(\delta+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\epsilon+\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_2 = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\alpha+\delta) + \sin(\beta+\epsilon) + \sin(\gamma+\zeta) +$$
$$+ \sin(\delta+\epsilon+\zeta) + \sin(\delta+\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\epsilon+\gamma) + \sin(\alpha+\beta+\zeta)),$$

$$k_3 = 2(\sin\alpha\sin\delta + \sin\beta\sin\epsilon + \sin\gamma\sin\zeta),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Таким образом, формула (3.7) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, через величины двугранных углов.

Что касается сферического октаэдра, обладающего mm2-симметрией, то здесь вместо формулы Деревнина—Медных [12] для вычислении объема тетраэдра триангуляции можно использовать формулу Мураками [18] объема произвольного сферического тетраэдра в терминах двугранных углов, а вспомогательный параметр λ будет выражаться через двугранные углы A, C и E исходного октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ точно так же, как и в гиперболическом случае [9].

Нетрудно заметить, что существование неевклидова октаэдра $O = O(A, B, C, D, E)$ с mm2-симметрией равносильно существованию тетраэдров $T_1 = T_1\Big(\dfrac{A}{2}, \dfrac{B}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \lambda\Big)$ и $T_1 = T_1\Big(\dfrac{C}{2}, \dfrac{D}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, E-\lambda\Big)$ $(E > \lambda)$ с равными ребрами (23), (34) и (24) (см. рис. 3.1).

Таким образом, используя теоремы 2.3, 2.4, а также условие положительной определенности матрицы Грама сферического тетраэдра (см. раздел 2), можно сформулировать критерии существования гиперболического и сферического октаэдра с mm2-симметрией с наперед заданными наборами двугранных углов $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E})$.

Лемма 3.2. *Для существования компактного гиперболического* mm2-*октаэдра* $O = O(A, B, C, D, E)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \mathrm{sign} G_1 = (3,1), \\ \mathrm{sign} G_2 = (3,1), \\ c^1_{ij} > 0, i \neq j, \\ c^2_{ij} > 0, i \neq j, \\ \dfrac{c^1_{23}}{\sqrt{c^1_{22}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{23}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{12}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{22}}} = \dfrac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}}, \end{cases}$$

где матрицы G_1 *и* G_2 *имеют вид*:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & -\cos B & -\cos\lambda \\ -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\lambda \\ -\cos\lambda & 0 & -\cos\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos(E-\lambda) & 0 & -\cos(E-\lambda) & 1 \end{pmatrix},$$

а c^1_{ij} *и* c^2_{ij} *— суть алгебраические дополнения к* ij*-м элементам матриц* G_1 *и* G_2 *соответственно.*

Замечание 3.3. В условиях теоремы 3.3 и леммы 3.2 мы предполагаем, что среди вершин октаэдра O нет бесконечно удаленных. Заметим, что если идеальными являются вершины (2.1) и (или) (3.4), то лемма 3.1 также справедлива. В случае, если среди бесконечно удаленных вершин находятся вершины гиперболического ромба (2345), то вычисление объема $O = O(A, B, C, D, E)$ легко сводится к проблеме вычисления объемов тетраэдров с идеальными вершинами, полностью решенной в работе [4].

Лемма 3.3. *Для существования сферического* $\mathrm{mm2}$*-октаэдра* $O = O(A, B, C, D, E)$ (*рис.* 3.1) *необходимо и достаточно выполнения следующей системы условий*:

$$\begin{cases} \dfrac{c^1_{23}}{\sqrt{c^1_{22}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{23}}{\sqrt{c^2_{22}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{13}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{33}}} = \dfrac{c^2_{13}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{33}}}, \\ \dfrac{c^1_{12}}{\sqrt{c^1_{11}c^1_{22}}} = \dfrac{c^2_{12}}{\sqrt{c^2_{11}c^2_{22}}}, \\ \det G_1 > 0, \\ \det G_1 > 0, \\ \sin^2 B - 2\cos^2\dfrac{A}{2}(1+\cos B) > 0, \\ \sin^2 D - 2\cos^2\dfrac{C}{2}(1+\cos D) > 0, \end{cases}$$

где c^1_{ij} *и* c^2_{ij} — *алгебраические дополнения к* ij*-м элементам матриц* G_1 *и* G_2 *соответственно, при этом*:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & -\cos B & -\cos\lambda \\ -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\dfrac{A}{2} & 0 \\ -\cos B & -\cos\dfrac{A}{2} & 1 & -\cos\lambda \\ -\cos\lambda & 0 & -\cos\lambda & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & -\cos D & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos\dfrac{C}{2} & 0 \\ -\cos D & -\cos\dfrac{C}{2} & 1 & -\cos(E-\lambda) \\ -\cos(E-\lambda) & 0 & -\cos(E-\lambda) & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Проверка формулы (3.7)**.** Как было сказано выше, mmm-симметрия является частным случаем $\mathrm{mm2}$-симметрии. Поэтому с помощью формулы (3.7) можно считать объемы произвольных гиперболических mmm-октаэдров. Вычисляя объемы октаэдров из примеров 3.1–3.3 с помощью программы MathCad по формуле (3.7), можно убедиться, что формулы из теорем 3.1, 3.2 и 3.3 приводят нас к одинаковым результатам.

Авторы благодарят В. П. Лексина и А. Л. Скубачевского за полезные советы и ценные замечания при написании статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов Н. В.* Об объемах многогранников в пространстве постоянной кривизны// Вестн. Кемеровского гос. ун-та. — 2011. — *3/1*. — С. 7–13.
2. *Абросимов Н. В., Байгонакова Г. А.* Гиперболический октаэдр с mmm-симметрией// Сиб. электрон. мат. изв. — 2013. — *10*. — С. 123–140.
3. *Абросимов Н. В., Годой-Молина М., Медных А. Д.* Об объеме сферического октаэдра с симметриями// Соврем. мат. и ее прилож. — 2008. — *60*. — С. 3–12.
4. *Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С.* Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *29*. — С. 1–146.
5. *Байгонакова Г. А., Годой-Молина М., Медных А. Д.* О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией// Вестн. Кемеровского гос. ун-та. — 2011. — *3/1*. — С. 13–18.
6. *Галиулин Р. В., Михалев С. Н., Сабитов И. Х.* Некоторые приложения формулы для объема октаэдра// Мат. заметки. — 2004. — *1*. — С. 27–43.
7. *Краснов В. А.* Об интегральных формулах объема гиперболических тетраэдров// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 89–99.
8. *Краснов В. А.* Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *51*. — С. 74–87.

9. *Лобачевский Н. И.* Воображаемая геометрия// Полное собр. соч. Т. 3. — М.—Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1949.
10. *Bolyai J.* Appendix. The theory of space// В сб.: «Janos Bolyai». — Budapest, 1987.
11. *Cho Yu., Kim H.* On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — *22*. — С. 347–366.
12. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// Rus. Math. Surv. — 2005. — *60*, № 346.
13. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// Deutsche Math. — 1936. — *1*. — С. 337–340.
14. *Leibon G.* The symmetries of hyperbolic volume// Preprint. — 2002.
15. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// Bull. Am. Math. Soc. — 1982. — *6*, № 1. — С. 307–332.
16. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space// Algebr. Geom. Topol. — 2003. — *3*. — С. 1–31.
17. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// J. Geom. — 2005. — *83*, № 1-2. — С. 153–163.
18. *Murakami J.* The volume formulas for a spherical tetrahedron// Arxiv: 1011.2584v4. — 2011.
19. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// Commun. Anal. Geom. — 2005. — *13*. — С. 379–400.
20. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität// В сб.: «Gesammelte mathematische Abhandlungen». — Basel: Birkhäuser, 1950.
21. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// Ric. Esten. Differ. Ser. — 1906. — *8*, № 3. — С. 3–66.
22. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// Non-Euclid. Geom. — 2006. — *581*. — С. 249–265.

В. А. Краснов
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com

Э. Ш. Хисяметдинова
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: elmira-lector@yandex.ru

UDC 514.13+514.132

On the volume formula for a hyperbolic octahedron with mm2-symmetry

© 2016 **V. A. Krasnov, E. Sh. Khisyametdinova**

Abstract. In this paper, explicit integral volume formulas for arbitrary compact hyperbolic octahedra with mm2-symmetry are obtained in terms of dihedral angles. Also we give an algorithm for calculation of volume of such octahedra in spherical space.

REFERENCES

1. N. V. Abrosimov, “Ob ob"emakh mnogogrannikov v prostranstve postoyannoy krivizny” [On volumes of polyhedra in a space of constant curvature], *Vestn. Kemerovskogo gos. un-ta* [Bull. Kemerovo State Univ.], 2011, **3/1**, 7–13.
2. N. V. Abrosimov and G. A. Baygonakova, “Giperbolicheskiy oktaedr s *mmm*-simmetriey” [Hyperbolic octahedron with *mmm*-symmetry], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2013, **10**, 123–140.
3. N. V. Abrosimov, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, “Ob ob"eme sfericheskogo oktaedra s simmetriyami” [On the volume of a spherical octahedron with symmetries], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2008, **60**, 3–12.

4. D. V. Alekseevskiy, E. B. Vinberg, and A. S. Solodovnikov, “Geometriya prostranstv postoyannoy krivizny” [Geometry of spaces of constant curvature], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **29**, 1–146.
5. G. A. Baygonakova, M. Godoy-Molina, and A. D. Mednykh, “O geometricheskikh svoystvakh giperbolicheskogo oktaedra, obladayushchego mmm-simmetriey” [On geometric properties of hyperbolic octahedron with mmm-symmetry], *Vestn. Kemerovskogo gos. un-ta* [Bull. Kemerovo State Univ.], 2011, **3/1**, 13–18.
6. R. V. Galiulin, S. N. Mikhalev, and I. Kh. Sabitov, “Nekotorye prilozheniya formuly dlya ob"ema oktaedra” [Some applications of the volume formula for an octahedron], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2004, **1**, 27–43.
7. V. A. Krasnov, “Ob integral’nykh formulakh ob"ema giperbolicheskikh tetraedrov” [On integral expressions for volumes of hyperbolic tetrahedra], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 89–99.
8. V. A. Krasnov, “Ob ob"eme giperbolicheskogo oktaedra s netrivial’nymi simmetriyami” [On the volume of hyperbolic octahedra with nontrivial symmetry], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **51**, 74–87.
9. N. I. Lobachevskiy, “Voobrazhaemaya geometriya” [Imaginary geometry] In: *Polnoe sobr. soch. T. 3* [Complete Set of Works. Vol. 3], OGIZ-GITTL, Moscow–Leningrad, 1949.
10. J. Bolyai, “Appendix. The theory of space,” In: *Janos Bolyai*, Budapest, 1987.
11. Yu. Cho and H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra,” *Discrete Comput. Geom.*, 1999, **22**, 347–366.
12. D. A. Derevnin and A. D. Mednykh, “A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron,” *Rus. Math. Surv.*, 2005, **60**, No. 346.
13. H. Kneser, “Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie,” *Deutsche Math.*, 1936, **1**, 337–340.
14. G. Leibon, “The symmetries of hyperbolic volume”, Preprint, 2002.
15. J. Milnor, “Hyperbolic geometry: the first 150 years,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1982, **6**, No. 1, 307–332.
16. Y. Mohanty, “The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space,” *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, **3**, 1–31.
17. J. Murakami and A. Ushijima, “A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths,” *J. Geom.*, 2005, **83**, No. 1-2, 153–163.
18. J. Murakami, “The volume formulas for a spherical tetrahedron”, *Arxiv*: 1011.2584v4, 2011.
19. J. Murakami and M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron,” *Commun. Anal. Geom.*, 2005, **13**, 379–400.
20. L. Schläfli, “Theorie der vielfachen Kontinuität,” In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Birkhäuser, Basel, 1950.
21. G. Sforza, “Spazi metrico-proiettivi,” *Ric. Esten. Differ. Ser.*, 1906, **8**, No. 3, 3–66.
22. A. Ushijima, “A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra,” *Non-Euclid. Geom.*, 2006, **581**, 249–265.

V. A. Krasnov
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com

E. Sh. Khisyametdinova
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia
E-mail: elmira-lector@yandex.ru