Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 67–102

УДК 517.95+517.98

АБСТРАКТНЫЕ СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© 2016 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ, К. А. РАДОМИРСКАЯ**

Аннотация. На базе абстрактной формулы Грина рассмотрен общий подход к абстрактным краевым задачам сопряжения. Разобраны примеры некоторых конфигураций пристыкованных областей для задач сопряжения на основе обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа. Рассмотрены также спектральные задачи, содержащие в постановке два комплексных параметра, один из которых можно считать фиксированным, а другой спектральным. Эти задачи с использованием предложенного общего подхода сведены к изучению спектральной проблемы для операторного пучка с самосопряженными операторными коэффициентами, действующего в гильбертовом пространстве и зависящего от двух параметров.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Данная работа является изложением доклада авторов на международной конференции в Ростове-на-Дону [17], а также соответствующей лекции, прочитанной в Крымской осенней математической школе (Ласпи—Батилиман) [18]. Исходным толчком для авторов заняться исследованием краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения, стали работы М. С. Аграновича (см. [2, 3, 28]) и его лекции в ежегодной Крымской осенней математической школе. С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался первый из авторов статьи (см. [4,5,16,30–32]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Наконец, общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Сначала первый автор данной статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии [16, с. 119], и этот вывод принадлежит С. Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. [22, гл. 6], а также [29]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [35] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [22] или [29]. Дальнейшее исследование в этом направлении, а также применение этой теории в приложениях, отражено, в частности, в работах [6–8, 11–13, 23–25, 36, 37].

Данная статья посвящена разработке общего подхода к изучению абстрактных смешанных краевых и спектральных задач сопряжения, а также применению этого подхода к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения с использованием обобщенной формулы Грина в основном для оператора Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т. д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме.

В первом разделе излагаются без доказательств теоремы о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, а также аналогичные факты для абстрактных смешанных краевых задач. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа.

Во втором разделе приводится общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют «дважды разрезанный банан» (см. рис. 2.1).

В третьем разделе эта схема реализуется для этой конфигурации и оператора Лапласа. Далее рассматривается другой пример трех областей, когда две области вложены в третью и расстояние между частями этих границ положительно (рис. 3.1). Здесь общие рассмотрения, связанные с оснащением гильбертовых пространств на границах, упрощаются. Наконец, изучается еще один пример, когда имеется лишь одна область, граница которой гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками, а на границах разреза задаются условия сопряжения.

Четвертый раздел посвящен изучению спектральных проблем для смешанных краевых задач в одной области, а также аналогичных спектральных задач сопряжения. Здесь установлено, что как для одной области, граница которой разбита на четыре липшицевых куска с различными условиями на этих кусках, так и для двух пристыкованных областей, границы которых в общей сложности разбиты на 15 липшицевых кусков, исходные спектральные проблемы математической физики приводятся к исследованию одного и того же операторного пучка (см. (4.17), (4.18), а также (4.31), (4.32)) с самосопряженными операторными коэффициентами, являющегося оператор-функцией двух комплексных параметров, один из которых считают фиксированным, а другой — спектральным. Частными случаями такой задачи являются спектральные проблемы, возникающие при исследовании нормальных колебаний вязкой жидкости (пучок Крейна), задач конвекции (см. [32]), задач дифракции (см. [28]) и других.

Авторы благодарят М. С. Аграновича за многочисленные обсуждения данного круга проблем и полезные советы.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

1. Предварительные сведения

1.1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Приведем сначала необходимые сведения, которые будут далее использоваться в работе. Доказательства соответствующих утверждений можно найти в [14].

Пусть $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$ и $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1°. Пространство F плотно вложено в E (обозначение $F \hookrightarrow E$), т. е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ a > 0,\ \forall u \in F.$$

Иными словами, пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

2°. На F задан оператор γ, называемый (абстрактным) *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$:

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G,\ \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F,\ b > 0,\ \forall u \in F.$$

3°. Ядро оператора γ, т. е. $\ker\gamma =: N$, плотно вложено в E:

$$N \hookrightarrow E,\ \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F,\ c > 0,\ \forall u \in N.$$

Теорема 1.1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия 1°–3°. Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.1}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяются однозначно.

Замечание 1.1. При доказательстве этой теоремы (см. [14]) дифференциальное выражение Lu и производная ∂u строятся неоднозначно. Именно, их сужения на подпространство $M = F \ominus N$ определяются однозначно, а сужения на N связаны линейной связью. Однако в приложениях, в частности, в задачах математической физики, конкретный вид дифференциального выражения Lu определяется однозначно, исходя из исследуемого физического процесса. Поэтому далее будем считать, что выражение для $Lu \in F^*$ в формуле Грина (1.1) задано, а потому однозначно определено и $\partial u \in (G_+)^*$. В связи с этим все дальнейшие построения будут проводиться на базе выбранной формулы Грина. Отметим еще, что уже в классической работе [21] указывалось, что краевые задачи Дирихле, Неймана и др. следует изучать относительно выбранной формула Грина, а неоднозначность выбора дифференциального выражения Lu подробно обсуждалось в [33], а также в [1].

Замечание 1.2. Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega),\ F = H^1(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \Gamma := \partial\Omega,\ \Omega \subset \mathbb{R}^m$, с введенными на них стандартными нормами и обычным оператором следа:

$$\gamma u := u|_\Gamma,\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

При этом область Ω имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. В этом случае имеем три пары гильбертовых пространств

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega),\ H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma),\ N := H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega), \tag{1.3}$$

причем вложения в (1.3) компактные. Отметим еще, что в этом примере имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.4}$$

см., например, [33, с. 98], [26, с. 149].

Теорема 1.2. *Для тройки пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа γ (см. (1.2)) имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$\int\limits_\Omega (\nabla\eta\cdot\nabla u + \eta u)d\Omega =: (\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

(*Здесь, как и в* (1.1), *символом $\langle \eta, v\rangle_E$ обозначается значение функционала $v \in F^*$ на элементе $\eta \in F$, аналогичный смысл имеют другие выражения с косыми скобками.*)

Другие примеры обобщенных формул Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения, для систем линейных эллиптических уравнений, для уравнений линейной теории упругости приведены в работе [14, п. 1.3].

1.2. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач. В математической физике часто рассматривают такие краевые задачи, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с $\Gamma = \partial\Omega$ и фигурирующий в формуле Грина (1.5), естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Переходя к рассмотрению этой проблемы в абстрактной форме, приходим к выводу, что в формуле (1.1) желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить при определенных дополнительных условиях на выражение $\sum\limits_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Предположим, что для тройки пространств E, F, G и оператора γ выполнены условия 1°–3° пункта 1.1, а также следующие условия.

4°. Имеет место ортогональное разложение и оснащения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k, \ \exists (G_+)_k, \ (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \ k = \overline{1, l}.$$

5°. В пространстве G_+ действуют прямые ограниченные проекторы

$$p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k, \ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.6}$$

причем

$$p_k = \omega_k \rho_k, \ k = \overline{1, l},$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — абстрактный оператор продолжения нулем из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k \omega_k = (I_+)_k, \ k = \overline{1, l}. \tag{1.7}$$

Требуется также, чтобы ρ_k и ω_k были ограниченными операторами, а потому и $p_k = \omega_k \rho_k$ — ограничены.

Теорема 1.3. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия 1°–3° пункта 1.1, а также условия 4° и 5°. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде*:

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k} \ \ \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta \in (G_+)_k, \ \ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \ k = \overline{1, l}.$$

Здесь γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Для иллюстрации свойств 4° и 5° вернемся к рассмотрению примера из замечания 1.2, т. е. тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа (1.2). Будем считать, что липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ неодносвязна и состоит из трех частей: внешней границы Γ_1 и двух внутренних границ Γ_2 и Γ_3, причем все Γ_k, $k = \overline{1, 3}$, находятся на положительном расстоянии друг от друга.

Тогда, очевидно,

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Gamma_k), \ H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{3} H^{1/2}(\Gamma_k),$$

и так же, как и для односвязной области (см. (1.4)), имеют место соотношения

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.$$

Отсюда следует, что для этого примера имеют место свойства 4°.

Переходя к рассмотрению свойств 5°, введем для любого $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3) \in H^{1/2}(\Gamma)$ операторы

$$\rho_k\varphi := \varphi_k := \varphi|_{\Gamma_k},\ k = \overline{1,3}.$$

Введем также операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_k\varphi_k := (\varphi_k; 0; 0),\ k = \overline{1,3}.$$

Исходя из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$, можно проверить (см. [14, с. 92–94]), что $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор с нормой, не превышающей единицы, а $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — при условии $\operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0$ — также ограничен. Кроме того, очевидно, что для ω_k и ρ_k выполнено свойство (1.7), т. е. $\rho_k\omega_k$ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma_k)$. Отсюда следует, что $p_k = \omega_k\rho_k,\ k = \overline{1,3}$, является ограниченным проектором: $p_k : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H^{1/2}}(\Gamma_k)$, где $\widehat{H^{1/2}}(\Gamma_k)$ — подпространство в $H^{1/2}(\Gamma)$, у которого ненулевые элементы имеются лишь на $\Gamma_k,\ k = \overline{1,3}$. Эти факты показывают, что в разбираемом примере выполнены также свойства 5°, сформулированные выше (см. (1.6)-(1.7)).

Опираясь на разобранный пример, а также теорему 1.3, сформулируем следующий вывод.

Теорема 1.4. *Пусть для тройки пространств* $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega,\ \Omega \in \mathbb{R}^m$ *и оператора следа* γ (*см.* (1.2)), *липшицева граница* Γ *неодносвязна и разбита на части* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *находящиеся на положительном расстоянии друг от друга, т. е.* $\operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0$, $k, j = \overline{1,l},\ k \neq j$. *Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}\ \ \forall\, \eta,\ u \in H^1(\Omega), \tag{1.8}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.9}$$

1.3. Случай примыкающих друг к другу областей. Будем теперь считать, в отличие от примера, рассмотренного в п. 1.2, что липшицева граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ односвязна. Разобьем ее на односвязные открытые части $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Такое разбиение называют разбиением на липшицевы куски.

Как известно, функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ не всегда продолжимы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [21, с. 78], а также [9, с. 116-117]). Введем важные понятия, связанные с этим обстоятельством. Пусть $r(x),\ x \in \Gamma_k$, — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки $x \in \Gamma_k$ до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, множество (линеал), состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [1, с. 76], $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулем вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Лемма 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}\varphi \in L_2(\Gamma_k)\}.$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (*которая наследуется из* $H^{1/2}(\Gamma)$) *на классе* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_k)}.$$

Лемма 1.2. *При любом* $s \in \mathbb{R},\ |s| \leqslant 1$, *пространства* $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ *и* $H^{-s}(\Gamma_k)$ *дуальны относительно спаривания в* $L_2(\Gamma_k)$. *В частности,*

$$(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.10}$$

Как хорошо известно, пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой (см. (1.5)) имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{1.11}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H_h^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}. \tag{1.12}$$

Для простоты $H_h^1(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

При исследовании линейных смешанных краевых задач, содержащих заданные функции как в уравнениях, так и в краевых условиях на разных частях границы, естественно решения таких задач разыскивать в виде суперпозиции решений вспомогательных краевых задач, в которых заданные функции (неоднородности) содержатся лишь в одном месте, т. е. в уравнении либо в одном из краевых условий. В связи с этим при использовании обобщенных формул Грина вида (1.8) следует выделять такие множества (подпространства) из $H^1(\Omega)$, для которых указанное свойство суперпозиции имеет место.

Переходя к рассмотрению этого подхода, введем следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{1.13}$$

$$\widehat{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dotplus)_{k=1}^l H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.14}$$

$$H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega) := \{u \in H_h^1(\Omega) : \gamma u = 0 \text{ на } \Gamma\backslash\Gamma_k\} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.15}$$

Определение 1.1. Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа* по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$, если для любого k выполнено $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. элемент продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Нетрудно видеть, учитывая свойства (1.10), что регулярным следом первого типа обладают слабые решения $w \in H_h^1(\Omega)$ смешанной краевой задачи

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega),\ w = 0 \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k),\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что, согласно определениям (1.13)–(1.15), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ получаем представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^l u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j),\ j,k = \overline{1,l}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$ *и оператора следа* $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, *в области* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *с липшицевой границей* Γ, *разбитой на липшицевы куски* Γ_k, $k = \overline{1,l}$, *справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$\langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^l \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{1.16}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.17}$$

1.4. Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 1.3, не всегда соответствует тем классам смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений пунктов 1.2, 1.3, полезно использовать в случаях, когда односвязные куски Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы ставят краевые условия Дирихле с заданными функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы можно было использовать и краевые условия Неймана либо Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, будем считать, что выполнены свойства 4° пункта 1.2, т. е.

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k, \ (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \ k = \overline{1,l}, \tag{1.18}$$

а также следующие свойства.

$(5^\circ)'$. Для операторов $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ имеем соотношения

$$p_k = \omega_k \rho_k, \ k = \overline{1,l}, \ \rho_k \omega_k = (I_+)_k, \ k = \overline{1,l}, \ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.19}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*, \ \omega_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)_k^*, \ k = \overline{1,l}, \tag{1.20}$$

где ω_k^* — ограниченный оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^*$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — ограниченный оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 1.6. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия* 1°–3° *пункта* 1.1, *условие* 4° *пункта* 1.2 (*см.* (1.18)), *а также условие* $(5^\circ)'$ (*см.* (1.19)) *либо условие* (1.20). *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме*:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k} \ \ \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \ \ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (1.19), (1.20).

Вернемся снова к тройке пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Введем одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [34] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [26], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.3 (В. С. Рычков [34], М. С. Агранович [26])**.** *Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$. Тогда существует линейный оператор ω_k (оператор Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\omega_k \varphi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c_k \|\varphi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} \ \forall \varphi_k \in H^s(\Gamma_k), \ |s| \leqslant 1,$$

причем c_k не зависит от s.

Введем теперь операторы сужения и продолжения такие, что для них выполнены общие требования из теоремы 1.6. Пусть $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор сужения ($\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1$), а $\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженный ему ограниченный *оператор продолжения нулем:*

$$\rho_k^*\psi_k = \begin{cases} \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k), & \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \\ 0 \ (\text{на } \Gamma \backslash \Gamma_k). \end{cases}$$

Введем также ограниченный оператор продолжения (оператор Рычкова) $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$$

— ограниченный *оператор сужения.*

Введем еще пространство

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dotplus)_{k=1}^{l} \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.21}$$
$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l},$$

а потому в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2,\ p_k^* p_j^* = 0 \ (k \neq j),\ \sum_{k=1}^{l} p_k^* = (\check{I}_-),$$

где $(\check{I}_-)$ — единичный оператор в $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (1.18)–(1.20), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k),\ G_k = L_2(\Gamma_k),\ (G_+)_k^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Введем теперь по аналогии с (1.13)–(1.15) классы функций, связанных не с задачей Дирихле, а с задачей Неймана. Именно, введем пространство (1.21), а также пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dotplus)_{k=1}^{l} \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.22}$$

$$\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega), \tag{1.23}$$

$$H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\backslash\Gamma_k} = 0\}. \tag{1.24}$$

Определение 1.2. Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа*, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент

$$\partial_k u = \omega_k^*\partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Согласно определениям (1.22)–(1.24) элементы из $\check{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \check{H}^1(\Omega)$ имеет место представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$
$$\gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$
$$\partial_k u_j = 0 \ (k \neq j),\ k, j \in \overline{1,l}.$$

В качестве следствия из теоремы 1.6 и проведенных выше построений приходим к такому выводу.

Теорема 1.7. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\check{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta,\ u \in \check{H}^1(\Omega), \tag{1.25}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.26}$$

Рассмотрения этого раздела (см. теоремы 1.3–1.7) показывают, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач при исследовании классических проблем следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

2. Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения

2.1. К постановке задачи. Рассмотрим сначала простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет собой «дважды разрезанный банан» (см. рис. 2.1)

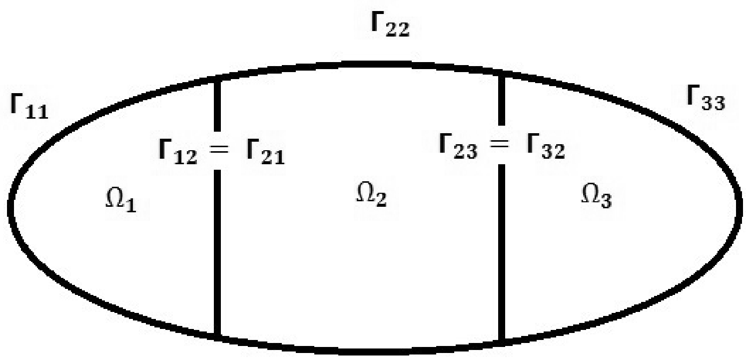

Рис. 2.1

Обозначим через Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} $(k \neq j)$ — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ — соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей Ω_j, $j = \overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j)$, $j = \overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$u_j - \Delta u_j = f_j \ (\text{в } \Omega_j),\ j = \overline{1,3}, \tag{2.1}$$

внешние граничные условия Дирихле

$$\gamma_{jj}u_j = \varphi_j \ (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j = \overline{1,3}, \tag{2.2}$$

а также условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \tag{2.3}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{2.4}$$

Здесь f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,3}, \varphi_j$ — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Приведем теперь формулировку абстрактной задачи сопряжения, частным случаем которой является проблема (2.1)–(2.4).

Пусть имеется набор пространств $E_j,\ F_j,\ G_j$ и операторов следа $\gamma_j,\ j=\overline{1,3}$, таких, что для них выполнены условия теоремы 1.1 и потому имеется три абстрактные формулы Грина:

$$\langle \eta_j, L_j u_j\rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j\eta_j, \partial_j u_j\rangle_{G_j} \ \ \forall \eta_j, u_j \in F_j.$$

Более того, будем считать, что для каждого $j=\overline{1,3}$ выполнены свойства (1.18)–(1.20) и потому справедливы утверждения теоремы 1.6. Тогда по аналогии с проблемой (2.1)–(2.4) (см. рис. 2.1) будем считать, что для граничных пространств $G_j,\ j=\overline{1,3}$, выполнены соотношения

$$G_1 = G_{11}\oplus G_{21},\ G_2 = G_{22}\oplus G_{12}\oplus G_{32},\ G_3 = G_{33}\oplus G_{23}, \tag{2.5}$$

причем каждое из этих подпространств имеет оснащение:

$$\begin{gathered} (G_+)_{jj} \hookrightarrow G_{jj} \hookrightarrow (G_+)^*_{jj},\ j=\overline{1,3},\\ (G_+)_{21} = (G_+)_{12} \hookrightarrow G_{21} = G_{12} \hookrightarrow (G_+)^*_{21} = (G_+)^*_{12},\\ (G_+)_{32} = (G_+)_{23} \hookrightarrow G_{32} = G_{23} \hookrightarrow (G_+)^*_{32} = (G_+)^*_{23}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

При этих предположениях по теореме 1.6 будем иметь следующие тождества (абстрактные формулы Грина для смешанных краевых задач):

$$(\eta_1, u_1)_{F_1} = \langle \eta_1, L_1u_1\rangle_{E_1} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{11}u_1\rangle_{G_{11}} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_1\rangle_{G_{21}} \ \ \forall \eta_1, u_1\in F_1, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}(\eta_2, u_2)_{F_2} = \langle \eta_2, L_2u_2\rangle_{E_2} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \partial_{22}u_2\rangle_{G_{22}} +\\ +\langle \gamma_{12}\eta_2, \partial_{12}u_2\rangle_{G_{12}} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_2\rangle_{G_{32}} \ \ \forall \eta_2, u_2\in F_2,\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$(\eta_3, u_3)_{F_3} = \langle \eta_3, L_3u_3\rangle_{E_3} + \langle \gamma_{33}\eta_3, \partial_{33}u_3\rangle_{G_{33}} + \langle \gamma_{23}\eta_3, \partial_{23}u_3\rangle_{G_{23}} \ \ \forall \eta_3, u_3\in F_3. \tag{2.9}$$

Формулировка абстрактной задачи сопряжения в рассматриваемом случае такова: требуется найти элементы $u_j\in F_j,\ j=\overline{1,3}$, для которых выполнены уравнения

$$L_j u_j = f_j\ (j=\overline{1,3}), \tag{2.10}$$

внешние граничные условия

$$\gamma_{jj}u_j = \varphi_j\ (j=\overline{1,3}), \tag{2.11}$$

а также условия сопряжения на стыковых граничных пространствах:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21}\ (\text{на } \Gamma_{21}=\Gamma_{12}), \tag{2.12}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32}\ (\text{на } \Gamma_{32}=\Gamma_{23}). \tag{2.13}$$

Элементы f_j и φ_{jj} заданы, $j=\overline{1,3}$, а $\varphi_{21},\ \varphi_{32},\ \psi_{21}$ и ψ_{32} задают разрывы следов элементов u_j и их производных по нормали.

Таким образом, абстрактная задача сопряжения, порожденная проблемой (2.1)–(2.4), состоит в решении проблемы (2.10)–(2.13) на основе использования абстрактных формул Грина (2.7)–(2.9).

2.2. Общая схема исследования абстрактных задач сопряжения. Целью дальнейших рассмотрений является получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (2.10)–(2.13), а также представление этого решения через операторы вспомогательных (абстрактных) краевых задач. При этом будет использован, как уже упоминалось, принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (2.10)–(2.13) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородности (заданные элементы) лишь в одном месте, т. е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Эта общая схема состоит из четырех этапов. Именно, слабое (вариационное) решение задачи (2.10)–(2.13), т. е.

$$u = (u_1,\ u_2,\ u_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k =: F, \tag{2.14}$$

будем разыскивать в виде суммы

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}), \tag{2.15}$$

где $u_j = (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}),\ j=\overline{1,4},$ — слабые решения формулируемых ниже вспомогательных задач.

2.2.1. Первая вспомогательная задача (задача Зарембы).

$$L_1u_{11} = 0,\ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1;\ \partial_{21}u_{11} = 0, \tag{2.16}$$

$$L_2u_{12} = 0,\ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2;\ \partial_{12}u_{12} = 0,\ \partial_{32}u_{12} = 0, \tag{2.17}$$

$$L_3u_{13} = 0,\ \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3;\ \partial_{23}u_{23} = 0. \tag{2.18}$$

Здесь уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные. При этом задача (2.16) распадается на три независимые задачи Зарембы для функций $u_{1k},\ k = \overline{1,3}$.

Переходя к рассмотрению задачи (2.16)–(2.18), заметим, что для ее решения $u_{11} \in F_1$ должно выполняться необходимое условие (см. (2.6))

$$\gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \in (G_+)_{11} \subset G_{11}. \tag{2.19}$$

Будем считать, что это условие выполнено, и воспользуемся оператором продолжения $\omega_{11} : (G_+)_{11} \to (G_+)_1$, который в условиях теоремы 1.6 существует и ограничен. Тогда элемент $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in (G_+)_1$. Будем разыскивать решение задачи (2.16) в виде суммы

$$u_{11} = v_{11} + w_{11},$$

где v_{11} и w_{11} — слабые решения задач

$$L_1v_{11} = 0,\ \gamma_1v_{11} = \widehat{\varphi}_1, \tag{2.20}$$

$$L_1w_{11} = 0,\ \gamma_{11}w_{11} = 0,\ \partial_{21}w_{11} = -\partial_{21}v_{11} =: \delta_{21}. \tag{2.21}$$

Напомним (см. [14]), что имеет место ортогональное разложение

$$F_1 = N_1 \oplus M_1,\ N_1 := \ker\gamma_1,\ M_1 = \ker L_1,$$

причем между элементами $v_{11} \in M_1$ и их следами γ_1v_{11} имеет место изоморфизм и даже изометрия при соответствующем выборе нормы в $(G_+)_1$. Отсюда следует, что при любом $\widehat{\varphi}_1 \in (G_+)_1$ задача (2.20) имеет единственное решение $v_{11} = \widetilde{\gamma}_1^{-1}\widehat{\varphi}_1 = \tilde{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 \in M_1 \subset F_1$, где $\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1|_{M_1}$. Тогда, как следует из рассмотрений первого раздела,

$$\delta_{21} := -\partial_{21}v_{11} \in (G_+)^*_{21}. \tag{2.22}$$

Назовем слабым решением задачи (2.21) такой элемент $w_{11} \in M_1$, для которого выполнено тождество

$$(\eta_1, w_{11})_{F_1} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \delta_{21}\rangle_{G_{21}}\ \forall\eta_1 \in F_{0,G_{11}}, \tag{2.23}$$

$$F_{0,G_{11}} := \{\eta_1 \in F_1 : \gamma_{11}\eta_1 = 0\}.$$

В (2.23) правая часть является линейным ограниченным функционалом в $(G_+)_{21}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.22). Поэтому задача (2.23) имеет единственное слабое решение

$$w_{11} \in F_{0,G_{11}} \cap M_1 =: M_{0,G_{11}} \subset F_1. \tag{2.24}$$

Эти рассмотрения, а также аналогичные рассмотрения задач (2.17), (2.18) приводят к следующему выводу.

Теорема 2.1. *Каждая из задач Зарембы* (2.16)–(2.18) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in M_k \subset F_k,\ k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_k \in (G_+)_{kk} \subset G_{kk},\ k = \overline{1,3}. \tag{2.25}$$

Отсюда следует, что решение задачи (2.16)–(2.18) имеет вид

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13}),\ u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ k = \overline{1,3}, \tag{2.26}$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} : (G_+)_{kk} \to M_k \subset F_k$ — ограниченные (и ограниченно обратимые) операторы, $\widetilde{\gamma}_{kk} := \gamma|_{G_{kk}}$.

2.2.2. Вторая вспомогательная задача (*задача Стеклова*). Найти набор элементов

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23}) \in F = \bigoplus_{k=1}^{3} F_k \tag{2.27}$$

из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{gathered} L_k u_{2k} = 0,\ \gamma_{kk} u_{2k} = 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, \\ \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0, \\ \gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, \\ \partial_{32} u_{22} + \partial_{23} u_{23} = 0. \end{gathered} \tag{2.28}$$

Здесь φ_{21} и φ_{32} — заданные элементы, а u_{11}, u_{12} и u_{13} — компоненты решения $u_{(1)}$ первой вспомогательной задачи (2.16)–(2.18).

Представим последнюю группу условий на стыках в виде

$$\partial_{21} u_{21} = -\partial_{12} u_{22} =: \chi_{21},\ \partial_{32} u_{22} = -\partial_{23} u_{23} =: \chi_{32}.$$

Если элементы χ_{21} и χ_{32} известны, то для нахождения u_{2k}, $k = \overline{1,3}$, возникают три задачи вида (2.21):

$$L_1 u_{21} = 0,\ \gamma_{11} u_{21} = 0;\ \partial_{21} u_{21} = \chi_{21}; \tag{2.29}$$

$$L_2 u_{22} = 0,\ \gamma_{22} u_{22} = 0;\ \partial_{12} u_{22} = -\chi_{21},\ \partial_{32} u_{22} = \chi_{32}; \tag{2.30}$$

$$L_3 u_{23} = 0,\ \gamma_{33} u_{23} = 0;\ \partial_{23} u_{23} = -\chi_{32}. \tag{2.31}$$

Определим, как и в (2.23), слабое решение задачи (2.29) посредством тождества

$$(\eta_1, u_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \chi_{21} \rangle_{G_{21}}\ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}. \tag{2.32}$$

Если $\chi_{21} \in (G_+)^*_{21}$, то существует единственное слабое решение

$$u_{21} =: V_{21} \chi_{21} \in M_{0,G_{11}} \subset M_1 \subset F_1, \tag{2.33}$$

где $V_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{11}})$, т. е. является линейным ограниченным оператором, действующим из $(G_+)^*_{21}$ в $M_{0,G_{11}}$. Заметим еще, что если $\chi_{21} \in G_{21}$ (см. (2.5), (2.6)), то задача (2.29) имеет единственное обобщенное решение.

Аналогичным образом, представляя решение задачи (2.30) в виде суммы двух слагаемых, которые определяются элементами $-\chi_{21}$ и χ_{32}, используя формулу Грина (2.8) и определяя для этих слагаемых слабые решения посредством тождеств вида (2.32), приходим к выводу, что при условиях

$$\chi_{21} \in (G_+)^*_{21},\ \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$$

задача (2.30) имеет единственное слабое решение, выражаемое формулой

$$u_{22} = V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}(\chi_{32}), \tag{2.34}$$

$$\begin{gathered} V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{22}}),\ V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{22}}), \\ M_{0,G_{22}} = F_{0,G_{22}} \cap M_2,\quad F_{0,G_{22}} = \{\eta_2 \in F_2 : \gamma_{22}\eta_2 = 0\}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Если $\chi_{21} \in G_{21}$, $\chi_{32} \in G_{32}$ (см. (2.5)), то задача (2.30) имеет единственное обобщенное решение, также выражаемое формулой (2.34).

Наконец, при условии $\chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$ задача (2.31), аналогично задаче (2.29), имеет единственное слабое решение

$$u_{23} = V_{23}(-\chi_{32}),\ V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{33}}), \tag{2.36}$$

а при $\chi_{32} \in G_{32}$ формула (2.36) дает ее обобщенное решение.

Имея представления (2.33), (2.34) и (2.36) для слабых решений вспомогательных задач (2.29)–(2.31) и опираясь на первую группу граничных условий на стыке в (2.28), получим следующие уравнения для нахождения неизвестных до сих пор элементов χ_{21} и χ_{32}:

$$\begin{gathered} \gamma_{21} V_{21} \chi_{21} - \gamma_{12}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{21}, \\ \gamma_{32}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) - \gamma_{23}(-V_{23}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{32}. \end{gathered} \tag{2.37}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{21} \\ \chi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{21} \\ \widetilde{\varphi}_{32} \end{pmatrix}, \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered} C_{11} := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{21}), \\ C_{12} := -\gamma_{12}V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{21}), \\ C_{21} := -\gamma_{32}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{32}), \\ C_{22} := \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{32}) \end{gathered} \tag{2.39}$$

и будем рассматривать (2.38) как отображение

$$C\chi = \widetilde{\varphi}, \quad C := (C_{jk})^2_{j,k=1}, \tag{2.40}$$

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi} := (\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau \in (G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32}; \\ \chi := (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau \in (G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32}. \end{gathered}$$

Назовем операторную матрицу C *матрицей Стеклова*; в задаче (2.28) она переводит данные Неймана в данные Дирихле.

Опираясь на свойства операторов $\gamma_{jk} = \rho_{jk}\gamma_k$, V_{jk}, а также слабых и обобщенных решений вспомогательных задач (2.29)–(2.31), изучим общие свойства оператора Стеклова из (2.40), (2.39).

Лемма 2.1. *Операторы $\gamma_{jk} : F_k \to G_{jk}$ и $V_{jk} : (G_{jk})^* \to M_{0,G_{kk}} \subset F_k$ взаимно сопряжены.*

Доказательство. Проверим сначала, что γ_{21} и V_{21} взаимно сопряжены. С этой целью подставим представление (2.33) для слабого решения вспомогательной задачи (2.29) в тождество (2.32); будем иметь соотношение

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} \ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}} \ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}. \tag{2.41}$$

Аналогично проверяется, исходя из тождества

$$(\eta_3, u_{23})_{F_3} = \langle \gamma_{23}\eta_3, (-\chi_{32}) \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta_3 \in F_{0,G_{33}} \ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{2.42}$$

а также представления (2.36) для u_{23}, что γ_{23} и V_{23} тоже взаимно сопряжены. Наконец, свойства взаимной сопряженности γ_{12} и V_{12}, а также γ_{32} и V_{32}, следуют из тождеств

$$(\eta_2, v_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{12}\eta_2, (-\chi_{21}) \rangle_{G_{21}} \ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}} \ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}, \tag{2.43}$$

$$(\eta_2, w_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}} \ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{2.44}$$

а также соотношений (см. (2.34))

$$v_{22} = V_{12}(-\chi_{21}), \ w_{22} = V_{32}\chi_{32}, \ u_{22} = v_{22} + w_{22}, \tag{2.45}$$

которые выполнены для слабых решений задачи (2.30). □

Лемма 2.2. *Оператор C из* (2.39), (2.40),

$$C : (G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32} \to (G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32},$$

является положительным оператором:

$$\langle C\chi, \chi \rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}, \tag{2.46}$$

где u_{2k}, $k = \overline{1,3}$, — слабые решения вспомогательных задач (2.29)–(2.31).

Доказательство. Оно основано на тождествах (2.32), (2.43), (2.44), представлениях (2.33), (2.36), (2.45) и свойствах взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{jk}. Имеем

$$\begin{gathered} \langle C\chi, \chi \rangle = \langle C_{11}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle C_{12}\chi_{32}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle C_{21}\chi_{21}, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} + \\ + \langle C_{22}\chi_{32}, \chi_{32} \rangle_{G_{32}} = \langle \gamma_{21}V_{21}\chi_{21}, \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \{ -\langle \gamma_{12}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{21} \rangle_{G_{21}} + \\ + \langle \gamma_{32}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{32} \rangle_{G_{32}} \} + \langle \gamma_{23}V_{23}(-\chi_{32}), (-\chi_{32}) \rangle_{G_{32}} = \\ = \|V_{21}\chi_{21}\|^2_{F_1} + \|V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})\|^2_{F_2} + \|V_{23}(-\chi_{32})\|^2_{F_3} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}. \end{gathered}$$

□

Из тождества (2.46), а также из (2.5), (2.6), получаем, что существует обратный оператор C^{-1}, действующий из $(G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32}$ на $(G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32}$, тогда этот оператор по теореме Банаха ограничен. Поэтому задача (2.40) имеет единственное решение

$$\chi = (\chi_{21};\chi_{32})^\tau = C^{-1}\widetilde{\varphi} = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21};\widetilde{\varphi}_{32})^\tau.$$

Итогом проведенных рассмотрений является такой вывод.

Теорема 2.2. *Задача Стеклова* (2.27) *имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21};u_{22};u_{23})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,\ k=\overline{1,3},$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.25)*, а также условия*

$$\varphi_{21} \in (G_+)_{21},\quad \varphi_{32} \in (G_+)_{32}. \tag{2.47}$$

При этом имеет место следующее представление для ее решения:

$$u_{(2)} = (u_{21};u_{22};u_{23})^\tau = (V_{21}\chi_{21};V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21};-V_{32}\chi_{32})^\tau, \tag{2.48}$$

$$\chi = (\chi_{21};\chi_{32})^\tau = C^{-1}(\varphi_{21} - \gamma_{21}\widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1 + \gamma_{12}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2;\ \varphi_{32} - \gamma_{32}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2 + \gamma_{23}\widetilde{\gamma}_{33}^{-1}\varphi_3)^\tau.$$

Здесь операторы V_{jk} введены в (2.33), (2.34), (2.36)*, операторы $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}$ — в* (2.26)*, операторная матрица C задана формулами* (2.40), (2.39)*, а γ_{jk} — оператор следа из F_k на $(G_+)_{jk}$* (*см.* (2.5)*,* (2.6)).

2.2.3. Первая вспомогательная задача Крейна. Такое название происходит от подхода, примененного С. Крейном при исследовании проблемы колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде (см. [19, 20], а также [16, гл. 6]).

Эта задача в исследуемой проблеме состоит в нахождении набора элементов

$$u_{(3)} = (u_{31};u_{32};u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,$$

которые являются решением следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{array}{ll} L_k u_{3k} = f_k, & \gamma_{kk}u_{3k} = 0,\ k=\overline{1,3}, \\ \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, & \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0, \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, & \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0. \end{array} \tag{2.49}$$

Здесь все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Для исследования проблемы (2.49) введем в рассмотрение подпространство, отвечающее «главным» краевым условиям:

$$W_{0,\gamma} := \{u = (u_1;u_2;u_3)^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k : \gamma_{kk}u_k = 0,\ k=\overline{1,3};$$

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0,\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0\} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k. \tag{2.50}$$

Для элементов $\eta = (\eta_1;\eta_2;\eta_3)^\tau$ и $u = (u_1;u_2;u_3)^\tau$ из $W_{0,\gamma}$ в силу тождеств (2.7)-(2.8) получаем следующую формулу Грина

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k,u_k)_{F_k} = \sum_{k=1}^{3}\langle\eta_k,L_ku_k\rangle_{E_k} + \langle\gamma_{21}\eta_1,\partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2\rangle_{G_{21}} + \langle\gamma_{32}\eta_2,\partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3\rangle_{G_{32}}. \tag{2.51}$$

На ее основе определим слабое решение задачи (2.51) как такой элемент $u_{(3)} = (u_{31};u_{32};u_{33})^\tau$ из $W_{0,\gamma}$, для которого имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k,u_{3k})_{F_k} = \sum_{k=1}^{3}\langle\eta_k,f_k\rangle_{E_k}\ \forall\eta = (\eta_1;\eta_2;\eta_3)^\tau \in W_{0,\gamma}. \tag{2.52}$$

Теорема 2.3. *Первая вспомогательная задача Крейна* (2.49) *имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (W_{0,\gamma})^*. \tag{2.53}$$

В этом случае решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f, \tag{2.54}$$

где A — *оператор гильбертовой пары* $(W_{0,\gamma}; E)$, $E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k$.

В частности, если

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k, \tag{2.55}$$

то задача (2.49) *имеет единственное обобщенное решение, выражаемое той же формулой* (2.54).

Доказательство. Перепишем коротко тождество (2.52) в виде

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, f \rangle_E \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}. \tag{2.56}$$

Заметим теперь, что $W_{0,\gamma}$ плотно вложено в $E := \bigoplus_{k=1}^3 E_k$, так как

$$N := \bigoplus_{k=1}^3 N_k \subset W_{0,\gamma} \subset F = \bigoplus_{k=1}^3 F_k,$$

а N_k и F_k плотно вложены в E_k (см. свойства 1° и 3° из пункта 1.1). Поэтому $W_{0,\gamma}$ и E образуют гильбертову пару пространств.

Отсюда следует, что правая часть в (2.56) является линейным ограниченным функционалом в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.53). Поэтому по теореме Рисса получаем, что существует единственный элемент $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество (2.56).

Пусть A — оператор гильбертовой пары $(W_{0,\gamma}; E)$. Тогда из (2.56) и определения оператора этой пары имеем

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, A u_{(3)} \rangle_E = \langle \eta, f \rangle_E \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}.$$

Отсюда и следует представление (2.54). Если же $f \in E$ (см. (2.55)), то можно считать, что оператор A задан на области определения $\mathcal{D}(A) \subset W_{0,\gamma} = \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset E$ и имеет область значений $\mathcal{R}(A) = E$. В этом случае $\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, f)_E$, и $u_{(3)} = A^{-1} f \in \mathcal{D}(A)$ — обобщенное решение задачи (2.49). □

2.2.4. Вторая вспомогательная задача Крейна. Эта проблема является аналогом неоднородной задачи Неймана для уравнения Лапласа, в то время как первая вспомогательная задача Крейна — аналог однородной задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Требуется найти такой набор элементов

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in W_{0,\gamma},$$

которые являются решением следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\begin{array}{rl} L_1 u_{41} = 0, & \gamma_{11} u_{41} = 0, \\ L_2 u_{42} = 0, & \gamma_{22} u_{42} = 0, \\ L_3 u_{43} = 0, & \gamma_{33} u_{43} = 0, \\ \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{21}, \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{32}. \end{array} \tag{2.57}$$

Здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана.

Из формулы Грина (2.51) получаем определение слабого решения задачи (2.57): это такой элемент $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество

$$(\eta, u_{(4)})_F = \sum_{k=1}^3 (\eta_k, u_{4k})_{F_k} = \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_{21} \rangle_{G_{21}} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \psi_{32} \rangle_{G_{32}} \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}. \tag{2.58}$$

Теорема 2.4. *Вторая вспомогательная задача Крейна* (2.57) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi_{21} \in (G_+)^*_{21},\ \psi_{32} \in (G_+)^*_{32}. \tag{2.59}$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{2.60}$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}; M_{0,\gamma}),\ B_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}; M_{0,\gamma}), \tag{2.61}$$

$$M_{0,\gamma} = W_{0,\gamma} \cap M_0,\ M_0 := \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}}.$$

(*Определение подпространств* $M_{0,G_{kk}}$ *см. в* (2.24), (2.35).)

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства существования слабого решения задачи (2.30) и основано на том, что правая часть в (2.58) является суммой линейных ограниченных функционалов в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (2.59). Поэтому слабое решение задачи (2.57) представляется в виде суммы двух слагаемых и имеет вид (2.60) со свойствами операторов из (2.61). □

Лемма 2.3. *Операторы* B_{21} *и* B_{32} *из* (2.60), (2.61) *обладают свойствами*

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*,\ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{2.62}$$

где $\rho_k : F \to F_k,\ k = \overline{1,3},$ *— операторы сужения.*

Доказательство. Свойства $\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$ и $\gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3$ следуют из определения (2.50) подпространства $W_{0,\gamma}$, а свойства $\gamma_{21}\rho_1 = (B_{21})^*$ и $\gamma_{32}\rho_2 = (B_{32})^*$ — из определения слабых решений двух слагаемых, сумма которых дает слабое решение задачи (2.57):

$$\begin{gathered} u_{(4)} = v_{(4)} + w_{(4)}, \\ (\eta, v_{(4)})_F = \langle \gamma_{21}\rho_1\eta, \psi_{21}\rangle_{G_{21}}, \quad (\eta, w_{(4)})_F = \langle \gamma_{32}\rho_2\eta, \psi_{32}\rangle_{G_{32}}\ \forall \eta \in W_{0,\gamma}, \\ v_{(4)} = B_{21}\psi_{21},\ w_{(4)} = B_{32}\psi_{32}. \end{gathered}$$

□

2.2.5. Итоговый результат. Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (2.10)–(2.13) является следующее утверждение.

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия* (*см. раздел* 1, *теорема* 1.6), *обеспечивающие существование абстрактных формул Грина* (2.7)–(2.9). *Тогда задача сопряжения* (2.10)–(2.13) *имеет единственное слабое решение в форме* (2.14), (2.15) *в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем* 2.1–2.4, *т. е. условия* (2.25), (2.47), (2.53), (2.59). *При этом*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$ *при* $j = \overline{1,4}$, *даются соответственно формулами* (2.26), (2.48), (2.54) *и* (2.60), *т. е. выражаются через исходные данные с помощью операторов введенных выше абстрактных краевых задач.*

Замечание 2.1. То, что сумма решений четырех вспомогательных краевых задач (Зарембы, Стеклова и двух задач Крейна) действительно дает решение исходной задачи (2.10)–(2.13), легко проверяется непосредственно. Кроме того, можно проверить, опираясь на формулы Грина (2.7)–(2.9), что однородная задача имеет лишь нулевое решение. Отсюда следует единственность представления решения исходной задачи в виде суммы решений упомянутых четырех вспомогательных задач, выражаемых приведенными итоговыми формулами.

3. Некоторые приложения общей схемы исследования краевых задач сопряжения

3.1. Скалярные искомые функции, оператор Лапласа, конфигурация «дважды разрезанный банан». Вернемся к задаче (2.1)–(2.4) (см. рис. 2.1) и применим к ее исследованию общую схему, изложенную во втором разделе. При этом будем использовать обобщенные формулы Грина в форме (1.16), (1.17) (теорема 1.5) либо в форме (1.25), (1.26) (теорема 1.7), а также уточним функциональные пространства, в которых будет происходить рассмотрение вспомогательных краевых задач.

Итак, в составной области, представленной на рис. 2.1, рассмотрим следующую задачу сопряжения:

$$\begin{gathered}
u_1 - \triangle u_1 = f_1 \;\; (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \;\; (\text{на } \Gamma_{11}), \\
u_2 - \triangle u_2 = f_2 \;\; (\text{в } \Omega_2), \qquad \gamma_{22} u_2 = \varphi_2 \;\; (\text{на } \Gamma_{22}), \\
u_3 - \triangle u_3 = f_3 \;\; (\text{в } \Omega_3), \qquad \gamma_{33} u_3 = \varphi_3 \;\; (\text{на } \Gamma_{33}); \\
\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21}, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\
\gamma_{32} u_2 - \gamma_{23} u_3 = \varphi_{32}, \quad \partial_{32} u_2 + \partial_{23} u_3 = \psi_{32} \; (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}).
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Ее решение ищем в виде набора $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau$, причем

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$, $j = \overline{1,4}$, — решения четырех вспомогательных задач, которые сейчас будут рассмотрены.

Для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на три независимые задачи:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \; (\text{в } \Omega_1), \; \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \; (\text{на } \Gamma_{11}), \; \partial_{21} u_{11} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}
u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \; (\text{в } \Omega_2), \; \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \; (\text{на } \Gamma_{22}), \\
\partial_{12} u_{12} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \; \partial_{32} u_{12} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23});
\end{gathered} \tag{3.3}$$

$$u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \; (\text{в } \Omega_3), \; \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 \; (\text{на } \Gamma_{33}), \; \partial_{23} u_{13} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{3.4}$$

Рассматривая первую из них, т. е. задачу (3.2), будем считать, что ее решение $u_{11}(x)$ есть функция из $H^1_h(\Omega_1)$ (см. (1.11), (1.12)). Тогда ее след $\gamma_1 u_{11}(x)$ на $\partial\Omega_1$ есть функция из $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, а на Γ_{11} — след является функцией из $H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (3.2) является условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{3.5}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (3.2).

Продолжим функцию φ_1, заданную на Γ_{11}, на всю границу $\partial\Omega_1$ липшицевой области Ω_1. Это можно сделать согласно лемме 1.3, так как по предположению $\partial\Gamma_{11}$ — липшицева граница липшицевой поверхности Γ_{11}. Тогда функция $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, где $\omega_{11} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ — ограниченный оператор продолжения Рычкова. Поскольку между элементами из $H^1_h(\Omega_1)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ имеет место взаимно однозначное соответствие (и даже изометрия при соответствующем выборе эквивалентной нормы в $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$), то существует единственный элемент

$$v_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1} \omega_{11} \varphi_1 \in H^1_h(\Omega_1), \tag{3.6}$$

который является решением задачи

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \; (\text{в } \Omega_1), \;\; \gamma_1 v_{11} = \omega_{11}\varphi_1 \; (\text{на } \partial\Omega_1). \tag{3.7}$$

Для функции $w_{11} := u_{11} - v_{11}$ из (3.2), (3.7) возникает задача Неймана

$$\begin{gathered}
w_{11} - \Delta w_{11} = 0 \; (\text{в } \Omega_1), \;\; \gamma_{11} w_{11} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{11}), \\
\partial_{21} w_{11} = -\partial_{21} v_{11} \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}).
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Ее слабое решение естественно рассматривать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : \gamma_{11} u_1 = 0 \; (\text{на } \Gamma_{11})\}. \tag{3.9}$$

Из условия на Γ_{11} в (3.8) следует, что $\gamma_{21}w_{11} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})$ (см. пункт 1.3), и тогда по лемме 1.2 получаем, что в задаче (3.8) должно быть выполнено необходимое условие

$$\partial_{21}v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{3.10}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (3.8), причем оно действительно имеет место.

Воспользуемся формулой Грина

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1,\ w_{11} - \triangle w_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1,\ \partial_{21}w_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \tag{3.11}$$

$$\gamma_{21}\eta_1 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \partial_{21}w_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21})\ \forall \eta_1,\ w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{3.12}$$

которая следует из формулы (1.16) (теорема 1.5). На ее основе естественно определяется слабое решение $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ задачи (3.8) как такая функция, для которой выполнено тождество

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1,\ (-\partial_{21}v_{11})\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}\ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{3.13}$$

Здесь в силу (3.10) и леммы 1.2 правая часть является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Поэтому при любом $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$ существует единственная функция $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$, являющаяся слабым решением задачи (3.8):

$$w_{11} =: V_{21}(-\partial_{21}v_{11}) = -V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1,$$

где $V_{21} : H^{-1/2}(\Gamma_{21}) \to H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ — ограниченный оператор.

Окончательно приходим к выводу, что условие (3.5) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения $u_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$, и это решение выражается формулой

$$u_{11} = v_{11} + w_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 - V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 =: \widehat{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \tag{3.14}$$

где $\widehat{\gamma}_{11}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^1_h(\Omega_1)$ — ограниченный оператор.

Аналогично рассматриваются задачи (3.3) и (3.4), и итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Каждая из задач Зарембы* (3.2)–(3.4) *имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k) \cap H^1_h(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}, \tag{3.15}$$

и это решение выражается формулой (*см.* (3.14))

$$u_{1k} = \widehat{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ \widehat{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk});\ H^1_h(\Omega_k)),\ k = \overline{1,3}. \tag{3.16}$$

Перейдем теперь ко второму этапу — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (3.1). Как следует из абстрактной постановки этой задачи (см. (2.27), (2.28)), необходимо исследовать проблему нахождения набора $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} &u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12},\\ \partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} (=: \chi_{21}) \quad (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),\\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13},\\ \partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} (=: \chi_{32}) \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{gathered} \tag{3.18}$$

Здесь $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau = u_{(1)}$ — решение задачи Зарембы (см. (3.2)–(3.4)), а φ_{21} и φ_{32} — заданные функции.

Если функции χ_{21} и χ_{32} известны, то вместо (3.17), (3.18) возникают три распадающиеся задачи Неймана. В частности, для функции u_{21} имеем задачу

$$u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11}u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \partial_{21}u_{21} = \chi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),$$

слабое решение которой будем разыскивать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1) =: H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1).$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (3.8)–(3.13)). Для ее слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (3.10)), чтобы выполнялось условие

$$\chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),$$

а тогда решение выражается формулой

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21},\ V_{21} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{3.19}$$

Аналогичное рассмотрение двух других задач Неймана, возникающих из проблемы (3.17), (3.18) и основанное на обобщенных формулах Грина

$$(\eta_2,\ u_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2,\ u_{22} - \Delta u_{22}\rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{12}\eta_2,\ \partial_{12}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} +$$
$$+\langle \gamma_{32}\eta_2,\ \partial_{32}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}\ \forall \eta_2,\ u_{22} \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_2),$$
$$(\eta_3,\ u_{23})_{H^1(\Omega_3)} = \langle \eta_3,\ u_{23} - \Delta u_{23}\rangle_{L_2(\Omega_3)} + \langle \gamma_{23}\eta_3,\ \partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})}\ \forall \eta_3,\ u_{23} \in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3),$$

приводит к следующему выводу:

$$\begin{gathered} u_{22} = V_{12}\chi_{21} - V_{32}\chi_{32}, \\ V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)),\ V_{32} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)), \\ u_{23} = -V_{23}\chi_{32},\ V_{23} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3)). \end{gathered} \tag{3.20}$$

Имея представления (3.19), (3.20), из главных граничных условий в (3.18) приходим к системе уравнений (см. (2.37), (2.38)):

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{21} \\ \chi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{21} \\ \widetilde{\varphi}_{32} \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

$$\begin{gathered} C_{11} := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})), \\ C_{12} := -\gamma_{12}V_{32} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})), \\ C_{21} := -\gamma_{32}V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})), \\ C_{22} := \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Здесь матрица Стеклова

$$C := (C_{jk})^2_{j,k=1} \tag{3.23}$$

отображает $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})$ на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})$ и является положительным оператором: подсчет, основанный на преобразованиях, описанных в лемме 2.2 и на определениях операторов V_{jk}, аналогичных (2.41)–(2.45) (см. лемму 2.1), приводит к формуле (см. (2.46))

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}.$$

Отсюда следует, что существует обратный оператор

$$C^{-1} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32});\ H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})),$$

и тогда решение задачи (3.21) существует и единственно при

$$\widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (3.17), (3.18) *выполнены условия* (3.15), *а также условия согласования*

$$\begin{gathered} \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \\ \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}), \end{gathered} \tag{3.24}$$

где $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ *— слабое решение вспомогательной задачи Зарембы* (3.2)–(3.4). *Тогда задача Стеклова* (3.17), (3.18) *имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3),$$

представимое формулами

$$\begin{gathered} u_{(2)} = (V_{21}\chi_{21};\ V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21}; -V_{32}\chi_{32})^\tau, \\ \chi := (\chi_{21};\ \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau, \end{gathered} \tag{3.25}$$

где операторы V_{jk} введены формулами (*см.* (2.41), (2.43)–(2.45))

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{H^1(\Omega_1)} := \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} \ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \tag{3.26}$$

$$(\eta_3, V_{23}\chi_{32})_{H^1(\Omega_3)} := \langle \gamma_{23}\eta_3, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})} \ \forall \eta_3 \in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3) \ \forall \chi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32});$$

$$(\eta_2, V_{12}\chi_{21})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{12}\eta_2, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \quad (\eta_2, V_{32}\chi_{32})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}$$
$$\forall \eta_2 \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_1) \ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}) \ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}).$$

Соответственно, операторная матрица Стеклова C (*см.* (3.23)) *введена посредством ее элементов* (3.22), *а операторы* γ_{jk} — *это операторы следа из* $H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ *на* $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{jk})$ $(j \neq k)$.

Третьим этапом, согласно общей схеме раздела 2, является рассмотрение первой вспомогательной задачи Крейна, порожденной проблемой (3.1), (3.2):

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k) =: H^1(\Omega),$$

$$u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{kk} u_{3k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}; \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0, \quad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ &\gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0, \quad \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32}). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Введем в $H^1(\Omega)$ подпространство $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(u_{31}; u_{32}; u_{33})$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (3.27), (3.28), т. е.

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega), \ \gamma_{kk}u_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3},$$
$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32})\}.$$

Это подпространство плотно вложено в

$$L_2(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

так как оно содержит подпространство

$$H^1_{00,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) : \ u_k \in H^1_0(\Omega_k), \ k = \overline{1,3}\},$$

где $H^1_0(\Omega_k)$ плотно вложено в $L_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Поэтому $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Для функций $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau$ и $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})$ из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем следующую обобщенную формулу Грина:

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{3k} - \Delta u_{3k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$
$$+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}.$$

Отсюда и из (3.27), (3.28) естественно дается определение слабого решения этой задачи: это такой набор $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)} \ \forall u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.3, приходим к следующему результату.

Теорема 3.3. *Первая вспомогательная задача Крейна* (3.27), (3.28) *имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*. \tag{3.29}$$

Это решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f, \tag{3.30}$$

где A — *оператор гильбертовой пары* $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Если, в частности,

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

то задача (3.27), (3.28) *имеет единственное обобщенное решение*

$$u_{(3)} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_{0,\Gamma}(\Omega),$$

выражаемое той же формулой (3.30).

Рассмотрим, наконец, четвертый этап — вторую вспомогательную задачу Крейна, порожденную проблемой (3.1), (3.2). Здесь для набора функций

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$$

следует рассмотреть следующую задачу:

$$u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \text{ (в } \Omega_k), \ \ \gamma_{kk} u_{4k} = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}; \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0, \quad \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ \gamma_{32}u_{42} - \gamma_{23}u_{43} = 0, \quad \partial_{32}u_{42} + \partial_{23}u_{43} = \psi_{32} \text{ (на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Согласно условиям (3.31) для решений из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства

$$\gamma_{21}u_{41} = \gamma_{12}u_{42} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \gamma_{32}u_{42} = \gamma_{23}u_{43} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}),$$

а потому необходимые условия разрешимости задачи (3.31), (3.32) таковы:

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \ \psi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32}). \tag{3.33}$$

При этом слабое решение определяется из тождества

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \psi_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})},$$

$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Теорема 3.4. *Вторая вспомогательная задача Крейна* (3.31)-(3.32) *имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (3.33). *Это решение имеет вид*

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{3.34}$$

$$B_{21} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \ B_{32} \in \mathfrak{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32}); \ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \tag{3.35}$$

$$H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega), \ H^1_h(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1_h(\Omega_k). \tag{3.36}$$

При этом операторы B_{21} *и* B_{32} *обладают свойствами* (*см.* (2.62))

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*, \ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{3.37}$$

где $\rho_k\eta = \rho_k(\eta_1; \eta_2; \eta_3) := \eta_k, \ k = \overline{1,3},$ *— операторы сужения.*

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 2.4 и леммы 2.3. □

Подводя итог рассмотрения четырех вспомогательных задач, порожденных исходной задачей сопряжения (3.1), приходим к следующему выводу.

Теорема 3.5. *Пусть области* Ω_k $(k = \overline{1,3})$ *из* $\mathbb{R}^m$ *имеют липшицевы границы* $\partial\Omega_k$, *разбитые на липшицевы куски* Γ_{jk}, *и примыкают друг к другу, как это показано на рис.* 2.1 (*конфигурация — «дважды разрезанный банан»*). *Пусть, кроме того, выполнены условия существования решений четырех вспомогательных задач* (*см. задачи* (3.2)–(3.4), (3.17)-(3.18), (3.27)-(3.28), (3.31)-(3.32)), *т. е. условия* (3.15), (3.24), (3.29), (3.33). *Тогда задача сопряжения* (3.1) *имеет единственное слабое решение*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)} \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k),$$

где слагаемые $u_{(j)}$ *при* $j=\overline{1,4}$*, представлены соответственно формулами* (3.14)*,* (3.16); (3.25)*,* (3.26); (3.30); (3.34)–(3.36).

Замечание 3.1. Если, в частности, в задаче (3.1) граничные условия Дирихле на внешних границах Γ_{kk}, $k=\overline{1,3}$, однородные, т. е. на них выполнены условия

$$\gamma_{kk}u_k = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}), \ k=\overline{1,3},$$

то решение задачи Зарембы нулевое, т. е. $u_{(1)}=0$. В этом случае вместо условий согласования заданных граничных функций (3.24) имеем лишь естественные необходимые и достаточные условия

$$\varphi_{21}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \varphi_{32}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Замечание 3.2. Если конфигурация примыкающих друг к другу липшицевых областей будет представлять собой не «дважды разрезанный банан», как это показано на рис. 2.1, а аналогичную фигуру, разрезанную n раз, то приведенный в данном разделе подход примени́м и в этом случае. Отличием является лишь тот факт, что матрица Стеклова во второй вспомогательной задаче будет задана как оператор, действующий из прямой суммы не двух, а n экземпляров пространств функционалов, заданных на границах стыка (производных по нормали от решений на этих границах), в прямую сумму n экземпляров следов решений на границах стыка. При этом все общие свойства решений всех четырех вспомогательных задач и соответствующие утверждения об их разрешимости сохраняются.

3.2. Другой пример конфигурации пристыкованных областей. Рассмотрим теперь кратко задачу, в математическом отношении более простую, чем разобранная выше задача сопряжения (3.1).

Будем считать, что область $\Omega_1\subset\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 3)$ с внешней липшицевой границей Γ_{11} содержит внутри себя две области Ω_2 и Ω_3 с липшицевыми границами $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}$ и $\Gamma_{13}=\Gamma_{31}$, находящимися друг от друга и от Γ_{11} на положительном расстоянии (см. рис. 3.1).

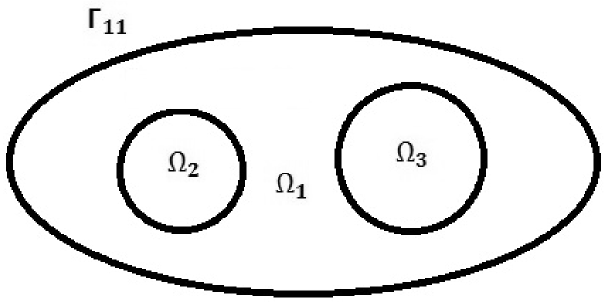

Рис. 3.1

В этой составной области рассмотрим задачу сопряжения снова на основе дифференциального выражения для оператора Лапласа, хотя аналогичные общие построения можно провести и на основе равномерно эллиптического дифференциального выражения, а также для соответствующих дифференциальных выражений, возникающих для векторных полей в теории упругости, гидродинамики и в других проблемах математической физики.

Итак, для искомых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ имеем следующую задачу сопряжения:

$$u_1-\triangle u_1 = f_1 \text{ (в } \Omega_1), \ \ \gamma_{11}u_1=\varphi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \tag{3.38}$$

$$u_2-\triangle u_2 = f_2 \text{ (в } \Omega_2), \ \ u_3-\triangle u_3 = f_3 \text{ (в } \Omega_3), \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2=\varphi_{21}, \quad \partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2=\psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21}),\\ \gamma_{31}u_1-\gamma_{13}u_3=\varphi_{31}, \quad \partial_{31}u_1+\partial_{13}u_3=\psi_{31} \text{ (на } \Gamma_{31}). \end{aligned} \tag{3.40}$$

Как и ранее, будем разыскивать слабое решение в виде

$$u=(u_1;u_2;u_3)^\tau = \sum_{j=1}^4 u_{(j)} = \sum_{j=1}^4 (u_{j1};u_{j2};u_{j3})^\tau \subset H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 H^1(\Omega_k). \tag{3.41}$$

Здесь на первом этапе в проблеме Зарембы возникает краевая задача лишь для функции u_{11}, и формально можно считать, что $u_{12}=0$, $u_{13}=0$. Имеем задачу

$$\begin{gathered}u_{11}-\triangle u_{11}=0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{11}=\varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ \partial_{21}u_{11}=0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \qquad \partial_{31}u_{11}=0 \ (\text{на } \Gamma_{31}).\end{gathered}$$

Как и при рассмотрении задачи (3.2), приходим к выводу, что условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}) \tag{3.42}$$

является необходимым и достаточным для существования слабого решения $u_{11}\in H_h^1(\Omega_1)$, и оно выражается формулой (см. (3.14))

$$u_{11}=\widehat{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \ \ \widehat{\gamma}_{11}^{-1}\in\mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\ H_h^1(\Omega_1)). \tag{3.43}$$

На втором этапе, т. е. для вспомогательной задачи Стеклова, возникает проблема

$$\begin{array}{ll} u_{21}-\triangle u_{21}=0 \ (\text{в } \Omega_1), & \gamma_{11}u_{21}=0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ u_{22}-\triangle u_{22}=0 \ (\text{в } \Omega_2), & u_{23}-\triangle u_{23}=0 \ (\text{в } \Omega_3),\\ \gamma_{21}u_{21}-\gamma_{12}u_{22}=\widetilde{\varphi}_{21}:=\varphi_{21}-\gamma_{21}u_{11}, & \partial_{21}u_{21}=-\partial_{12}u_{22}(=:\chi_{21}) \ (\text{на } \Gamma_{21}=\Gamma_{12}),\\ \gamma_{31}u_{21}-\gamma_{13}u_{23}=\widetilde{\varphi}_{31}:=\varphi_{31}-\gamma_{31}u_{11}, & \partial_{31}u_{21}=-\partial_{13}u_{23}(=:\chi_{31}) \ (\text{на } \Gamma_{31}=\Gamma_{13}).\end{array} \tag{3.44}$$

Упрощающей особенностью задачи (3.38)–(3.40) является тот факт, что здесь, как и в (1.4), имеют место свойства

$$(H^{1/2}(\Gamma_{11}))^*=H^{-1/2}(\Gamma_{11}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{21}))^*=H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{31}))^*=H^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

Поэтому, используя соответствующие формулы Грина вида (1.8), (1.9) для областей $\Omega_k,\ k=\overline{1,3}$, а также общие рассуждения для задачи Стеклова, приходим к выводу, что

$$u_{21}=V_{21}\chi_{21}+V_{31}\chi_{31},\ u_{22}=-V_{12}\chi_{21},\ u_{23}=-V_{13}\chi_{31}, \tag{3.45}$$

$$\begin{gathered}V_{21}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)),\ V_{31}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)),\\ V_{12}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_h(\Omega_2)),\ V_{13}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_h(\Omega_3)).\end{gathered}$$

Соответствующая операторная матрица Стеклова

$$C=\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma_{21}V_{21}+\gamma_{12}V_{12} & \gamma_{21}V_{21}\\ \gamma_{31}V_{21} & \gamma_{31}V_{31}+\gamma_{13}V_{13}\end{pmatrix}$$

действует из $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dotplus)H^{-1/2}(\Gamma_{31})$ на $H^{1/2}(\Gamma_{21})(\dotplus)H^{1/2}(\Gamma_{31})$ и обладает свойством

$$\langle C\chi,\chi\rangle=\sum_{k=1}^{3}\|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}, \quad \chi=(\chi_{21},\chi_{31})^\tau.$$

Отсюда следует, что

$$(\widetilde{\varphi}_{21};\widetilde{\varphi}_{31})^\tau=C^{-1}\chi, \tag{3.46}$$

и потому слабое решение $u_{(2)}=(u_{21};u_{22};u_{23})^\tau$ задачи (3.44) существует, единственно и выражается формулами (3.45), (3.46). При этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.42), а также условия

$$\varphi_{21}\in H^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \varphi_{31}\in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \tag{3.47}$$

Заметим, что в этой задаче не требуется выполнение условий согласования типа (3.19).

Рассмотрим теперь третий этап, связанный с проблемой (3.38)–(3.40), — первую вспомогательную задачу Крейна:

$$\begin{gathered}u_{3k}-\triangle u_{3k}=f_k \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \gamma_{11}u_{31}=0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\ \gamma_{21}u_{31}-\gamma_{12}u_{32}=0, \ \ \partial_{21}u_{31}+\partial_{12}u_{32}=0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\\ \gamma_{31}u_{31}-\gamma_{13}u_{33}=0, \ \ \partial_{31}u_{31}+\partial_{13}u_{33}=0 \ (\text{на } \Gamma_{31}).\end{gathered} \tag{3.48}$$

Введем подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega):=\{(u_1;u_2;u_3)^\tau\in H^1(\Omega):\gamma_{11}u_1=0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),$$

$$\gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2=0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \gamma_{31}u_1-\gamma_{13}u_3=0 \ (\text{на } \Gamma_{31})\},$$

содержащее плотное в $L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 L_2(\Omega_k)$ подпространство $H_0^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 H_0^1(\Omega_k)$. Как и ранее, для задачи (3.48) приходим к следующему выводу. Задача (3.48) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H_{0,\Gamma}^1(\Omega))^*. \tag{3.49}$$

При этом $u_{(3)} = A^{-1}f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H_{0,\Gamma}^1(\Omega); L_2(\Omega))$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то $u_{(3)} = A^{-1}f \subset \mathcal{D}(A)$ — обобщенное решение задачи (3.48).

Вторая вспомогательная задача Крейна для проблемы (3.38)–(3.40) формулируется следующим образом:

$$\begin{array}{l} u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ k = \overline{1,3},\ \ \gamma_{11}u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0,\ \ \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31}u_{41} - \gamma_{13}u_{43} = 0,\ \ \partial_{31}u_{41} + \partial_{13}u_{43} = \psi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{array} \tag{3.50}$$

Здесь для определения слабого решения используем обобщенную формулу Грина

$$\sum_{k=1}^3 (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^3 \langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} +$$
$$+ \langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{41} + \partial_{13}u_{43}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})},$$
$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau,\ u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega),$$

и обычным образом устанавливаем, что задача (3.50) имеет слабое решение из $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \tag{3.51}$$

Таким образом, приходим к следующему итогу. Задача сопряжения (3.38)–(3.40) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (3.42), (3.47), (3.49), (3.51). Это решение выражается формулами (3.41), (3.43), (3.45), (3.46) $u_{(3)} = A^{-1}f$ а также формулами

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{31}\psi_{31},$$
$$B_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H_{0,\Gamma,h}^1(\Omega)),\ \ B_{31} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31}); H_{0,\Gamma,h}^1(\Omega)),$$

причем для B_{21} и B_{31} выполнены свойства, аналогичные свойствам (3.37).

Отметим еще раз, что в проблеме сопряжения (3.38)–(3.40) никаких условий согласования заданных граничных функций не требуется.

3.3. Третья конфигурация: одна область с границей, гомеоморфной сфере с тремя разрезанными ручками. Задачу сопряжения по предполагаемой схеме можно исследовать и в случае, когда имеется лишь одна область, в которой разыскивается искомая функция, а условия сопряжения задаются на двух или более примыкающих друг к другу участках границы этой области. Так будет, в частности, если область Ω односвязна, а граница $\partial\Omega$ этой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками (см. рис. 3.2)

Обозначим часть $\partial\Omega$ вне стыков через Γ_0, а на стыках Γ_k выделим экземпляры Γ_k' и Γ_k'', по которым можно достичь этих стыков по непрерывности изнутри Ω. При этом, очевидно, на $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ возможны разрывы с двух сторон как у предельных функций $\gamma_k'u$ и $\gamma_k''u$, так и у производных по внешней нормали $\partial_k'u$ и $\partial_k''u$. Будем считать также, как обычно, что куски Γ_k $(k = \overline{1,3})$ — липшицевы.

В итоге возникает следующая задача сопряжения. Необходимо найти функцию $u(x)$, $x \in \Omega$, из уравнения и граничных условий:

$$\begin{array}{ll} u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), & \gamma_0 u = \varphi_0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ \gamma_k'u - \gamma_k''u = \varphi_k, & \partial_k'u + \partial_k''u = \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \end{array} \tag{3.52}$$

Здесь заданными функциями являются f, а также φ_0, φ_k $(k = \overline{1,3})$ и ψ_k $(k = \overline{1,3})$.

Будем разыскивать слабое решение задачи (3.52) из пространства $H^1(\Omega)$ по общей схеме, предложенной выше. Тогда на первом этапе возникает задача Зарембы для функции $u_1(x)$:

$$\begin{array}{ll} u_1 - \Delta u_1 = 0 \ (\text{в } \Omega), & \gamma_0 u_1 = \varphi_0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ \partial_k'u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_k') & \partial_k''u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_k''),\ k = \overline{1,3}. \end{array} \tag{3.53}$$

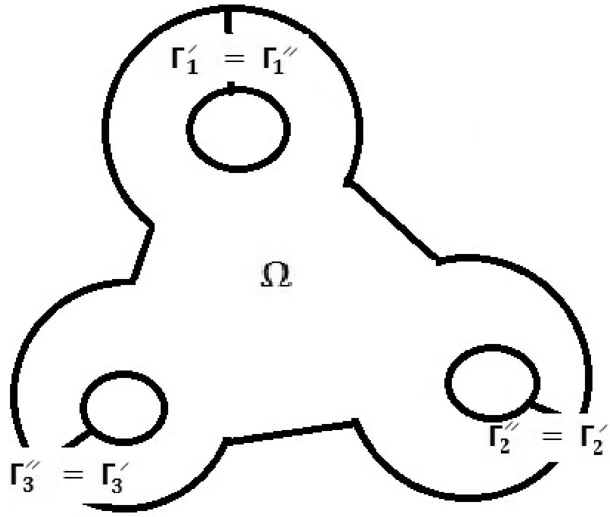

Рис. 3.2

Если слабое решение этой задачи принадлежит $H^1_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то его след на $\partial\Omega$ является функцией из $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Поэтому возникает следующее дополнительное условие: существует функция $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ такая, что ее сужение на Γ_0 совпадает с φ_0, т. е.

$$\rho_0\varphi = \varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \tag{3.54}$$

где $\rho_0 : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_0)$ — оператор сужения (он ограничен).

Тогда так же, как для рассмотренной выше задачи (3.2), в частности, для задачи (3.8), приходим к выводу, что задача (3.53) имеет единственное слабое решение $u_1 \in H^1_h(\Omega)$, выражаемое формулой

$$u_1 = \widehat{\gamma}_0^{-1}\varphi_0,\ \widehat{\gamma}_0^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_0); H^1_h(\Omega)). \tag{3.55}$$

Здесь при доказательстве (3.55), как и в (3.11), (3.12), снова используется обобщенная формула Грина в форме (1.16):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{3}\langle \gamma'_k\eta, \partial'_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} + \sum_{k=1}^{3}\langle \gamma''_k\eta, \partial''_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{3.56}$$

$$\eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega),\ \gamma'_k\eta,\ \gamma''_k\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial'_k u,\ \partial''_k u \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.$$

На втором этапе исследования проблемы (3.52) возникает следующая задача Стеклова:

$$u_2 - \Delta u_2 = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_0 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_0),$$

$$(\gamma'_k - \gamma''_k)u_2 = \widetilde{\varphi}_k := \varphi_k - (\gamma'_k - \gamma''_k)u_1,\ \ \partial'_k u_2 = -\partial''_k u_2 (=: \chi_k) \ (\text{на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{3.57}$$

С использованием формулы Грина (3.56) ее решение через функции χ_k выражается в виде

$$u_{(2)} = \sum_{k=1}^{3}(V'_k - V''_k)\chi_k,$$

$$V'_k = (\gamma'_k)^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma'_k); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \quad V''_k = (\gamma''_k)^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma''_k); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \tag{3.58}$$

а условия для следов функций на стыках дают уравнение

$$\begin{pmatrix}\gamma_1' - \gamma_1''\\ \gamma_2' - \gamma_2''\\ \gamma_3' - \gamma_3''\end{pmatrix}(V_1' - V_1''; \, V_2' - V_2'', \, V_3' - V_3'')\begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_1\\ \widetilde{\varphi}_2\\ \widetilde{\varphi}_3\end{pmatrix} \tag{3.59}$$

для нахождения неизвестных $\chi_k, \ k = \overline{1,3}$. В силу (3.58) матрица C из (3.59), очевидно, самосопряженная, т. е.

$$\langle C\chi, \widehat{\chi}\rangle = \overline{\langle C\widehat{\chi}, \chi\rangle}, \quad \chi, \ \widehat{\chi} \in (\dot{+})_{k=1}^3 H^{-1/2}(\Gamma_k),$$

и, кроме того, положительная:

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \Big\| \sum_{k=1}^3 (V_k' - V_k'')\chi_k \Big\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_2\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому система уравнений (3.59) имеет единственное решение

$$\chi := (\chi_1; \chi_2; \chi_3)^\tau = C^{-1}\widetilde{\varphi}, \ \widetilde{\varphi} := (\widetilde{\varphi}_1; \widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\varphi}_3)^\tau \in (\dot{+})_{k=1}^3 \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k).$$

Значит, при выполнении этого требования на $\widetilde{\varphi}$ задача (3.57) имеет единственное слабое решение $u_{(2)} \in H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)$.

На третьем этапе имеем проблему

$$\begin{gathered} u_3 - \Delta u_3 = f \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_0 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ (\gamma_k' - \gamma_k'')u_3 = 0, \ \ (\partial_k' + \partial_k'')u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_k), \ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{3.60}$$

Введем подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{u \in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega) : (\gamma_k' - \gamma_k'')u = 0 \ (\text{на } \Gamma_k)\},$$

плотное в $L_2(\Omega)$, т. е. $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара. Из формулы Грина (3.56) для элементов из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ будем иметь тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^3 \langle \gamma_k'\eta, (\partial_k' + \partial_k'')u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}.$$

Отсюда, определяя слабое решение задачи (3.60), получаем, что при $f \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*$ эта задача имеет решение $u_{(3)} = A^{-1}f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$.

Наконец, на четвертом этапе возникает задача

$$\begin{gathered} u_4 - \Delta u_4 = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_0 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ (\gamma_k' - \gamma_k'')u_4 = 0, \ \ (\partial_k' + \partial_k'')u_4 = \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k), \ k = \overline{1,3}, \end{gathered}$$

слабое решение которой при условиях $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,3}$, существует, единственно и выражается формулой

$$u_{(4)} = \sum_{k=1}^3 B_k\psi_k, \ B_k \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)).$$

Подводя итоги рассмотрения задачи (3.52), приходим к выводу, что при предположении (3.54), а также при других необходимых условиях эта задача имеет единственное слабое решение $u = \sum\limits_{k=1}^4 u_k \in H^1(\Omega)$, где составляющие u_k выражаются приведенными выше формулами.

Замечание 3.3. Проведенные построения показывают, что аналогичным образом рассматривается проблема в области с границей, гомеоморфной сфере с произвольным числом n разрезанных ручек.

Замечание 3.4. По такой же схеме можно рассмотреть проблемы, в которых для области Ω вместо разрезов с поверхностями $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ имеются разведенные липшицевы куски Γ_k' и Γ_k'' с одинаковыми свойствами, т. е. имеются оснащения

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k') = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k'') \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma_k') = L_2(\Gamma_k'') \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k') = H^{-1/2}(\Gamma_k''), \ k = \overline{1,n}.$$

4. Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами и задачами сопряжения

4.1. Смешанная спектральная задача в одной области. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k,\ k=\overline{1,4}$. В этой области будем исследовать следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \tag{4.1}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \tag{4.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4). \tag{4.3}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_3 — условие Аграновича (см. [28]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_4 — условие типа Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжелой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. Отметим еще, что в этой проблеме имеется два параметра, т. е. λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [28]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В. И. Горбачук (см. [10]).

Задачу (4.1)–(4.3) можно исследовать с помощью общей схемы, которая обсуждалась в первых трех разделах. С этой точки зрения здесь подлежит рассмотрению одна первая вспомогательная задача Крейна и три вторых вспомогательных задачи Крейна.

Именно, слабое решение задачи (4.1)–(4.3), в силу однородного условия Дирихле на Γ_1, естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1)\} \subset \widehat{H}^1(\Omega).$$

Будем разыскивать решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ в виде суммы решений четырех задач, т. е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k,\ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{4.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3),\ \partial_4 u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3),\ \partial_4 u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3),\ \partial_4 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \ (\text{на } \Gamma_3),\ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{4.8}$$

Желая представить решение u в виде (4.4), естественно ввести пространство

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,4}\}$$

(см. (1.22)) и его подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{4.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина, следующую из (1.25), (1.26):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall\, \eta,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{4.10}$$

$$\gamma_k\eta \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (4.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f\rangle_{L_2(\Omega)} (= \langle \eta, \lambda u\rangle_{L_2(\Omega)}) \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и предыдущие рассмотрения показывают, что

$$u_1 = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u, \tag{4.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (4.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2\eta, \psi_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2\eta, \mu\gamma_2 u\rangle_{L_2(\Gamma_2)} \ \ \forall\, \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2\psi_2 = \lambda V_2\gamma_2 u,\ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (4.7) и (4.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3\psi_3 = \lambda V_3\gamma_3 u,\ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4\psi_4 = \lambda^{-1} V_4\gamma_4 u,\ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{4.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (4.11), (4.12), (4.13), получаем, что слабое решение u задачи (4.1)–(4.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{4.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{1,3}. \tag{4.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega), \tag{4.16}$$

подставим это выражение в (4.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (4.15)). Тогда взамен (4.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A_1^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{4.17}$$

$$B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{4.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — заданным фиксированным.

Не проводя подробного анализа свойств решений задачи (4.17), (4.18), сделаем несколько предварительных выводов.

1°. Если $\mu \leqslant 0$, то $I - \mu B_2 \geqslant I \gg 0$; тогда задача (4.17) приводится к уравнению

$$\eta = (I - \mu B_2)^{-1/2}(\lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4)(I - \mu B_2)^{-1/2}\eta,\ \eta \in L_2(\Omega),$$

и возникает хорошо изученный операторный пучок Крейна.

2°. Если $\mu > 0$ и $\ker(I - \mu B_2) = \{0\}$, то возникает индефинитная метрика (пространство Понтрягина Π_κ). Такие проблемы встречаются в задачах конвекции.

3°. Если $\operatorname{Im}\mu \neq 0$, то оператор $I - \mu B_2$ обратим. В этом варианте имеем спектральную проблему для пучка, близкого к пучку Крейна (вращающаяся тяжелая вязкая жидкость).

4°. Если Γ_4 — пустое множество, то $B_4 = 0$ и возникает проблема, аналогичная задаче сопряжения из теории дифракции (μ — спектральный параметр).

5°. Если λ — фиксированный параметр, то (4.17) приводится к задаче на собственные значения слабо возмущенного самосопряженного оператора (проблема Келдыша).

Таким образом, задача (4.17), (4.18) содержит в себе много известных спектральных проблем, встречающихся в приложениях.

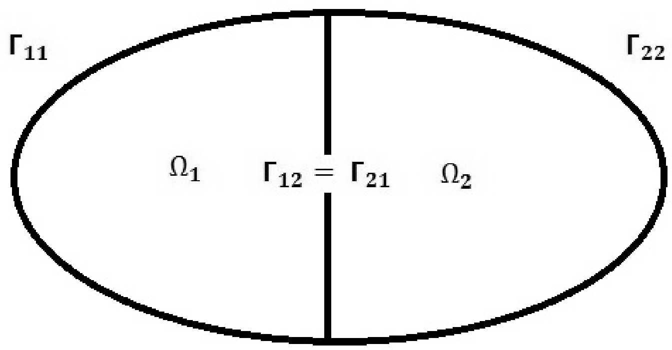

Рис. 4.1

4.2. Спектральная задача сопряжения для двух примыкающих областей. Рассмотрим теперь более сложную задачу — конфигурацию из двух примыкающих областей, причем на отдельных участках границы этих областей заданы однородные условия, содержащие спектральный либо фиксированный параметр.

Итак, будем считать, что две области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами примыкают друг к другу, как это показано на рис. 4.1.

Их внешние границы Γ_{11} и Γ_{22} являются липшицевыми кусками и сами разбиты на липшицевы куски:

$$\Gamma_{kk} = (\bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_{kk,j}) \cup \partial\Gamma^0_{kk},\ k = 1, 2,$$

а граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ разбита на семь липшицевых кусков:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bigcup_{j=1}^{7} \Gamma_{21,j}) \cup \partial\Gamma^0_{21},\ \Gamma_{21,j} = \Gamma_{12,j}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma^0_{kl}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kl} на части $\Gamma_{kl,j}$.

Опираясь на эти определения, сформулируем постановку спектральной задачи сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях Ω_k, $k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1 и Ω_2 —

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 := \lambda u_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad u_2 - \triangle u_2 = f_2 := \lambda u_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{4.19}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}); \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{11,2} u_1 = \psi_{11,2} := \mu\gamma_{11,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \qquad \partial_{22,2} u_2 = \psi_{22,2} := \mu\gamma_{22,2} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2});\\
\partial_{11,3} u_1 = \psi_{11,3} := \lambda\gamma_{11,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3} u_2 = \psi_{22,3} := \lambda\gamma_{22,3} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3});\\
\partial_{11,4} u_1 = \psi_{11,4} := \lambda^{-1}\gamma_{11,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4} u_2 = \psi_{22,4} := \lambda^{-1}\gamma_{22,4} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4});
\end{aligned} \tag{4.21}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}); \tag{4.22}$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0,\ \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 = \psi_{21,2} := \mu\gamma_{21,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{4.23}$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0,\ \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 = \psi_{21,3} := \lambda\gamma_{21,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{4.24}$$

$$\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2 = 0,\ \partial_{21,4} u_1 + \partial_{12,4} u_2 = \psi_{21,4} := \lambda^{-1}\gamma_{21,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}); \tag{4.25}$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = \psi_{21,5} := \lambda(\gamma_{21,5} u_1 - \gamma_{12,5} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5}); \tag{4.26}$$

$$\partial_{21,6} u_1 = -\partial_{12,6} u_2 = \psi_{21,6} := \lambda(\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6}); \tag{4.27}$$

$$\partial_{21,7} u_1 = -\partial_{12,7} u_2 = \psi_{21,7} := \lambda^{-1}(\gamma_{21,7} u_1 - \gamma_{12,7} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}). \tag{4.28}$$

Здесь λ и μ, как и в задаче (4.1)–(4.3), — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. Отметим еще, что условия (4.23), (4.25), (4.27) называют условиями первой задачи сопряжения, а (4.24), (4.26), (4.28) — условиями второй задачи сопряжения (см. [28]).

Из постановки задачи (4.19)–(4.28) видно (см. (4.20)), что ее слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2)$. Более того, это решение должно принадлежать подпространству $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ тех элементов, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках — это группа первых условий в (4.21)–(4.25). Значит,

$$\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) : \gamma_{21,k}u_1 - \gamma_{12,k}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{21,k}),\ k = \overline{1,4}\}.$$

Далее, представляя решение задачи в виде суммы вспомогательных задач, в которых неоднородности, т. е. формально полагаемые заданными функции в (4.19)–(4.28), содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий для областей Ω_k, $k = 1, 2$, следует воспользоваться обобщенными формулами Грина в форме (1.25)-(1.26). Тогда для элементов из $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ будем иметь обобщенную формулу Грина в следующем виде:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_k - \triangle u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{4} \langle \gamma_{kk,j}\eta_k, \partial_{kk,j}u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk,j})} + \sum_{j=1}^{4} \langle \gamma_{21,j}\eta_1, \partial_{21,j}u_1 + \partial_{12,j}u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})} +$$
$$+ \sum_{j=5}^{7} \langle \gamma_{21,j}\eta_1 - \gamma_{12,j}\eta_2, \partial_{21,j}u_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}, \tag{4.29}$$

где следы $\gamma_{kl,j}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl,j})$, а производные по нормали $\partial_{kl,j}u_l \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl,j})$, т. е. из сопряженного пространства (см. (4.9), (4.10)).

Отметим еще, что пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1) \oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Следуя схеме, уже изложенной для задачи (4.1)–(4.3), приходим к выводу, что первая вспомогательная задача Крейна, отвечающая неоднородным членам лишь в уравнениях (4.19) с заданными f_1 и f_2, определяется как слабое решение $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12})$ на основе тождества

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta = (\eta_1; \eta_2) \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (4.29). Поэтому

$$u_{(1)} = A^{-1}f = \lambda A^{-1}u,\ f = (f_1, f_2) \in (\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*.$$

Далее, заданным функциям $\psi_{11,2}$ и $\psi_{22,2}$ из (4.27) отвечают слабые решения $u^I_{(2)}$ и $u^{II}_{(2)}$, соответственно, определяемые тождествами

$$(\eta, u^I_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{11,2}\eta_1, \psi_{11,2} \rangle_{L_2(\Gamma_{11,2})}\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$
$$(\eta, u^{II}_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{22,2}\eta_2, \psi_{22,2} \rangle_{L_2(\Gamma_{22,2})}\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Обозначая эти решения через $V_{11,2}\psi_{11,2}$ и $V_{22,2}\psi_{22,2}$, приходим к выводу, что

$$u_{(2)} = u^I_{(2)} + u^{II}_{(2)} = \mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1 + V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2)u,$$

где $p_k u = p_k(u_1; u_2) := u_k$, $k = 1, 2$. Отметим еще, что имеют место свойства

$$V_{kk,2} = (\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Аналогично определяются слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{11,3}$ и $\psi_{11,4}$ соответственно. Тогда

$$u_{(3)} = \lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1 + V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2)u,\ \ V_{kk,3} = (\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k = 1, 2.$$

Таким же образом имеем

$$u_{(4)} = \lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1 + V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2)u, \;\; V_{kk,4} = (\gamma_{kk,4}p_k)^*, \; k = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи, отвечающие заданным элементам $\psi_{21,j}$ из (4.23)–(4.25), $j = \overline{1,3}$. Решение, соответствующее $\psi_{21,2}$, определяется из тождества

$$(\eta, u_{(5)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,2}\eta_1, \psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})}, \; \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

и при $\psi_{21,2} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$ имеем единственное решение

$$u_{(5)} = V_{21,2}\psi_{21,2} = \mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1 u, \;\; V_{21,2} = (\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично получаем формулы, отвечающие $\psi_{21,3}$ и $\psi_{21,4}$:

$$u_{(6)} = \lambda V_{21,3}\gamma_{21,3}p_1 u, \quad V_{21,3} = (\gamma_{21,3}p_1)^*,$$

$$u_{(7)} = \lambda^{-1} V_{21,4}\gamma_{21,4}p_1 u, \quad V_{21,4} = (\gamma_{21,4}p_1)^*.$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений, отвечающих элементам $\psi_{21,j}$, $j = \overline{5,7}$, из (4.26)–(4.28). Решение $u_{(8)}$, отвечающее $\psi_{21,5}$, как следует из формулы Грина (4.29), определено тождеством

$$(\eta, u_{(8)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,5}\eta_1 - \gamma_{12,5}\eta_2, \psi_{21,5}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,5})} \; \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

При любом $\psi_{21,5} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,5})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,5}\psi_{21,5} = \mu V_{21,5}(\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)u, \;\; V_{21,5} = (\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оставшихся двух решений $u_{(9)}$ и $u_{(10)}$ вспомогательных задач, отвечающих заданным $\psi_{21,6}$ и $\psi_{21,7}$ соответственно из (4.27), (4.28). Имеем

$$u_{(9)} = \lambda V_{21,6}(\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)u, \quad V_{21,6} = (\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda^{-1} V_{21,7}(\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)u, \quad V_{21,7} = (\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)^*.$$

Итогом проведенных построений является такой вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (4.19)–(4.28) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + C_3)u + \mu C_2 u + \lambda^{-1} C_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{4.30}$$

$$C_2 := V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*,$$

$$C_3 := V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*,$$

$$C_4 := V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*.$$

Таким образом, для спектральной проблемы сопряжения (4.19)–(4.28) получилось уравнение (4.30) такого же общего вида, как уравнение (4.14) для более простой спектральной проблемы (4.1)–(4.3).

Осуществляя еще в (4.30) такую же замену, как в (4.16), т. е.

$$u = A^{-1/2}v, \; v \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),$$

и действуя оператором $A^{1/2}$, приходим окончательно к спектральной задаче

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1} B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{4.31}$$

$$0 \leqslant B_k = A^{1/2}C_k A^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \; k = \overline{1,4}, \tag{4.32}$$

равносильной исходной проблеме (4.19)–(4.28).

Очевидно, для задачи (4.31), (4.32) имеют место те же предварительные выводы, которые были указаны в свойствах 1°–5° для задачи (4.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Агранович М. С., Амосов Г. А., Левитин М.* Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии// Росс. ж. мат. физ. — 1999. — *6*, № 3. — С. 247–281.
3. *Агранович М. С., Менникен Р.* Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности// Мат. сб. — 1999. — *30*, № 1. — С. 29–68.
4. *Бабский В. Г., Жуков М. Ю., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — Киев: Наукова думка, 1992.
5. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
6. *Войтицкий В. И.* Абстрактная спектральная задача Стефана// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2006. — *19*, № 2. — С. 20–28.
7. *Войтицкий В. И.* О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса—Томсона// Нелин. гранич. задачи. — 2007. — *17*. — С. 31–49.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
9. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Наука, 1994.
10. *Горбачук В. И.* Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений// В сб.: «Функциональные и численные методы математической физики», Ин-т матем. и механики. — Киев: Наукова думка, 1998. — С. 60–63.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2004. — *2*. — С. 52–80.
12. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2007. — *20*, № 2. — С. 3–12.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
14. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 71–107.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
17. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения// Межд. науч. конф. «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения — V», Ростов-на-Дону. — 2015. — С. 211.
18. *Копачевский Н. Д., Радомирская К. А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения// XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. — 2015. — С. 52.
19. *Крейн С. Г.* О колебаниях вязкой жидкости в сосуде// Докл. АН СССР. — 1964. — *159*, № 2. — С. 262–265.
20. *Крейн С. Г., Лаптев Г. И.* К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *1*, № 2. — С. 40–50.
21. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
22. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
23. *Старков П. А.* Операторный подход к задачам сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2002. — *15*, № 2. — С. 82–88.
24. *Старков П. А.* О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2003. — *1*. — С. 118–131.
25. *Старков П. А.* Примеры многокомпонентных задач сопряжения// Уч. зап. Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. Мат. Мех. Информ. Киберн. — 2005. — *18*, № 1. — С. 89–94.
26. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
27. *Agranovich M. S.* Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in smooth and lipschitz domains. — Cham: Springer, 2015.

28. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. — Berlin: Wiley-VCN, 1999.
29. *Aubin J.-P.* Abstract boundary-value operators and their adjoint// Rend. Semin. Math. Univ. Padova. — 1970. — *43*. — С. 1–33.
30. *Babckii V. G., Kopachevskii N. D., Myshkis A. D., Slobozhanin L. A., Tyuptsov A. D.* Low-gravity fluid mechanics. — Springer, 1987.
31. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2001.
32. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 2003.
33. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
34. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. Lond. Math. Soc. — 1999. — *60*, № 1. — С. 237–257.
35. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations. — San Marcos: Southwest Texas State Univ., 1994.
36. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D.* On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations// Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Volume 2: Differential operators and mechanics. Papers based on invited talks at the international conference on modern analysis and applications, Odessa, Ukraine, April 9–14, 2007. — Basel: Birkhauser, 2009. — С. 381–394.
37. *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D., Starkov P. A.* Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems// J. Math. Sci. — 2010. — *170*, № 2. — С. 131–172.

Н. Д. Копачевский
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: kopachevsky@list.ru

К. А. Радомирская
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4
E-mail: radomirskaya@mail.ru

UDC 517.95+517.98

Abstract Mixed Boundary-Value and Spectral Conjugation Problems and Their Applications

© 2016 **N. D. Kopachevskii, K. A. Radomirskaya**

Abstract. Basing on the abstract Green formula, we study general approach to abstract boundary-value conjugation problems. We consider examples of some configurations of docked domains for conjugation problems using generalized Green formula for the Laplace operator. Also we consider spectral problems with two complex parameters: one of them can be treated as fixed and the other one as spectral. By means of the proposed general approach, we reduce these problems to the spectral problem for operator pencil with self-adjoint operator coefficients acting in Hilbert space and depending on two parameters.

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundary], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).

2. M. S. Agranovich, G. A. Amosov, and M. Levitin, “Spektral’nye zadachi dlya sistemy Lame v gladkikh i negladkikh oblastyakh so spektral’nym parametrom v kraevom uslovii” [Spectral problems for the Lame system in smooth and nonsmooth domains with spectral parameter in the boundary-value condition], *Ross. zh. mat. fiz.* [Russ. J. Math. Phys.], 1999, **6**, No. 3, 247–281 (in Russian).
3. M. S. Agranovich and R. Menniken, “Spektral’nye zadachi dlya uravneniya Gel’mgol’tsa so spektral’nym parametrom v granichnykh usloviyakh na negladkoy poverkhnosti” [Spectral problems for the Helmholtz equation with spectral parameter in the boundary-value conditions on nonsmooth surface], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1999, **30**, No. 1, 29–68 (in Russian).
4. V. G. Babskiy, M. Yu. Zhukov, N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Metody resheniya zadach gidromekhaniki dlya usloviy nevesomosti* [Methods of Solution for Problems of Hydromechanics in Weightlessness Conditions], Naukova Dumka, Kiev, 1992 (in Russian).
5. V. G. Babskiy, N. D. Kopachevskiy, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Gidromekhanika nevesomosti* [Hydromechanics in Weightlessness], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
6. V. I. Voytitskiy, “Abstraktnaya spektral’naya zadacha Stefana” [Abstract Stefan spectral problem] *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2006, **19**, No. 2, 20–28 (in Russian).
7. V. I. Voytitskiy, “O spektral’nykh zadachakh, porozhdennykh zadachey Stefana s usloviyami Gibbsa—Tomsona” [On spectral problems generated by the Stefan problem with Gibbs–Thomson conditions], *Nelin. granich. zadachi* [Nonlinear Bound. Value Probl.], 2007, **17**, 31–49 (in Russian).
8. V. I. Voytitskiy, N. D. Kopachevskiy, and P. A. Starkov, “Mnogokomponentnye zadachi sopryazheniya i vspomogatel’nye abstraktnye kraevye zadachi” [Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **34**, 5–44 (in Russian).
9. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, *Obobshchennye funktsii i uravneniya v svertkakh*, Nauka, M., 1994 (in Russian).
10. V. I. Gorbachuk, “Dissipativnye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’nykh uravneniy” [Dissipative boundary-value problems for elliptic differential equations], In: *Funktsional’nye i chislennye metody matematicheskoy fiziki* [Functional and Numerical Methods of Mathematical Physics], In-t matem. i mekhaniki, Naukova dumka, Kiev, 1998, 60–63 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i ee prilozheniyakh k zadache Stoksa” [On abstract Green formula for triple of Hilbert spaces and its applications to the Stokes problem], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2004, **2**, 52–80 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskiy, “Abstraktnaya formula Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach” [Abstract Green formula for mixed boundary-value problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2007, **20**, No. 2, 3–12 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya smeshannykh kraevykh zadach i nekotorykh ee prilozheniyakh” [On abstract Green formula for mixed boundary-value problems and some its applications], *Spektr. i evolyuts. zadachi* [Spectral Evolution Probl.], 2011, **21**, No. 1, 2–39 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskiy, “Ob abstraktnoy formule Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv i polutoralineynykh form” [On abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces and sesquilinear forms] *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 71–107 (in Russian).
15. N. D. Kopachevskiy and S. G. Kreyn, “Abstraktnaya formula Grina dlya troyki gil’bertovykh prostranstv, abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi” [Abstract Green formula for a triple of Hilbert spaces, abstract boundary-value and spectral problems], *Ukr. mat. vestn.* [Ukr. Math. Bull.], 2004, **1**, No. 1, 69–97 (in Russian).
16. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral’nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
17. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye smeshannye kraevye zadachi sopryazheniya” [Abstract mixed boundary-value conjugation problems], Int. Sci. Conf. *Sovremennye metody i problemy teorii operatorov i garmonicheskogo analiza i ikh prilozheniya — V* [Contemporary methods and problems of operator theory and harmonic analysis and their applications], Rostov-na-Donu, 2015, 211 (in Russian).
18. N. D. Kopachevskiy and K. A. Radomirskaya, “Abstraktnye kraevye i spektral’nye zadachi sopryazheniya” [Abstract boundary-value and spectral conjugation problems], *XXVI Krymskaya osennyaya*

matematicheskaya shkola-simpozium po spektral'nym i evolyutsionnym zadacham [XXVI Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems], 2015, 52 (in Russian).

19. S. G. Kreyn, “O kolebaniyakh vyazkoy zhidkosti v sosude” [On oscillations of viscous fluid in a vessel], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1964, **159**, No. 2, 262–265 (in Russian).
20. S. G. Kreyn and G. I. Laptev, “K zadache o dvizhenii vyazkoy zhidkosti v otkrytom sosude” [To the problem of motion of viscous fluid in an open vessel], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **1**, No. 2, 40–50 (in Russian).
21. Zh.-L. Lions and E. Madzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971 (in Russian).
22. Zh.-P. Oben, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximate Solution of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (in Russian).
23. P. A. Starkov, “Operatornyy podkhod k zadacham sopryazheniya” [Operator approach to conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2002, **15**, No. 2, 82–88 (in Russian).
24. P. A. Starkov, “O bazisnosti sistemy sobstvennykh elementov v zadachakh sopryazheniya” [On basisness of eigenelements in conjugation problems] *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2003, **1**, 118–131 (in Russian).
25. P. A. Starkov, “Primery mnogokomponentnykh zadach sopryazheniya” [Examplex of multicomponent conjugation problems], *Uch. zap. Tavr. nats. un-ta im. V. I. Vernadskogo. Ser. Mat. Mekh. Inform. Kibern.* [Sci. Notes Tavricheskiy Nat. Vernadskiy Univ. Ser. Math. Mech. Inform. Cybern.], 2005, **18**, No. 1, 89–94 (in Russian).
26. M. S. Agranovich, “Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2008, **15**, No. 2, 146–155.
27. M. S. Agranovich, *Sobolev Spaces, Their Generalizations, and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains*, Springer, Cham, 2015.
28. M. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbanm, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich, *Generalized Method of Eigenoscillations in Difraction Theory*, Wiley-VCN, Berlin, 1999.
29. J.-P. Aubin, “Abstract boundary-value operators and their adjoint,” *Rend. Semin. Math. Univ. Padova*, 1970, **43**, 1–33.
30. V. G. Babckii, N. D. Kopachevskii, A. D. Myshkis, L. A. Slobozhanin, and A. D. Tyuptsov, *Low-Gravity Fluid Mechanics*, Springer, 1987.
31. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-Adjoint Problems for an Ideal Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2001.
32. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluid*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
33. W. McLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
34. V. S. Rychkov, “On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains,” *J. Lond. Math. Soc.* , 1999, **60**, No. 1, 237–257.
35. R. E. Showalter, *Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations*, Southwest Texas State Univ., San Marcos, 1994.
36. V. I. Voytitsky and N. D. Kopachevsky, “On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations”// *Modern analysis and applications. The Mark Krein centenary conference. Volume 2: Differential operators and mechanics. Papers based on invited talks at the international conference on modern analysis and applications*, Odessa, Ukraine, April 9–14, 2007, Birkhauser, Basel, 2009, 381–394.
37. V. I. Voytitsky, N. D. Kopachevsky, and P. A. Starkov, “Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems,” *J. Math. Sci.*, 2010, **170**, No. 2, 131–172.

N. D. Kopachevskii
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: kopachevsky@list.ru

K. A. Radomirskaya
V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia
E-mail: radomirskaya@mail.ru