Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 41–66

УДК 517.984.48:532.135

МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ОЛДРОЙТА

© 2016 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе выведены математические модели сжимаемых вязкоупругих жидкостей Максвелла, Олдройта и Кельвина—Фойгта. Изучена модель вращающейся вязкоупругой баротропной жидкости Олдройта. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследована спектральная задача, ассоциированная с изучаемой системой. Доказаны утверждения о локализации спектра, о существенном и дискретном спектре, об асимптотике спектра. В случае, если система находится в невесомости и не вращается, доказаны утверждения о кратной полноте и базисности специальной системы элементов. В последнем случае и при условии достаточно большой вязкости в системе найдено разложение решения эволюционной задачи по специальной системе элементов.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение

В работе изучается модель вязкоупругой баротропной жидкости, которая является развитием модели Олдройта для несжимаемой жидкости. Первые модели несжимаемых жидкостей, учитывающие предысторию течения и названные впоследствии линейными вязкоупругими жидкостями, были предложены в XIX в. Дж. Максвеллом [25,26], В. Кельвином [23] и В. Фойгтом [30,31]. Эти модели были развиты в середине XX в. в значительной степени благодаря работам Дж. Г. Олдройта [27,28]. Впоследствии эти и более общие модели изучались многими авторами. Отметим работы [7, 16] (см. также указанную там литературу), посвященные исследованию начально-краевых

Работа сделана при финансовой поддержке РНФ (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

задач для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта. Спектральному анализу модели Олдройта вязкоупругой несжимаемой жидкости посвящены работы [2,13,14] (см. также указанную там литературу).

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях вязкоупругой сжимаемой жидкости, заполняющей ограниченную равномерно вращающуюся область. В третьем разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом соответствующая задача Коши для системы интегродифференциальных уравнений сводится к задаче Коши

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0,$$

в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Оператор $\mathcal{A}$ представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу и является максимальным секториальным оператором. Отсюда выводится утверждение о сильной разрешимости исходной начально-краевой задачи.

В четвертом разделе исследуется задача о спектре оператора $\mathcal{A}$, которая ассоциируется со спектральной задачей для исходной системы интегродифференциальных уравнений. Установлено, что спектр оператора $\mathcal{A}$ расположен в правой открытой полуплоскости. Существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ в общем случае состоит из конечного количества точек и отрезков на действительной положительной полуоси. Дискретный спектр расположен в некоторой полосе, содержащей действительную положительную полуось. Если система не вращается, то дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ — вещественный за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных собственных значений. Если, дополнительно, система находится в невесомости, то при некоторых условиях система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис (при $p > 3$) пространства $\mathcal{H}$.

2. Постановка задачи

2.1. Модели вязкоупругих сжимаемых жидкостей. Как известно, движение вязкой сжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описывается следующей системой уравнений в форме Коши (см., например, [19, с. 21-22]):

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + \mathrm{Div}\sigma + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.2}$$

В данной системе $\vec{v} = \vec{v}(t,x)$ $(x := (x_1,x_2,x_3)\in\Omega)$ — поле скоростей жидкости, $\widehat{\rho} = \widehat{\rho}(t,x)$ — плотность жидкости, $\widehat{P} = \widehat{P}(t,x)$ — давление в жидкости, $\vec{F} = \vec{F}(t,x)$ — поле внешних сил. Через $\mathrm{Div}\sigma$ обозначен вектор, координатами которого являются дивергенции строк матрицы $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$, где σ — тензор вязких напряжений в жидкости. При этом определяющее соотношение для вязкой сжимаемой жидкости имеет вид:

$$\sigma_{ij} = \mu\Big[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\Big] + \eta\delta_{ij}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} =: \mu\sigma_{ij}^{(1)} + \eta\sigma_{ij}^{(2)} \quad (i,j = 1,2,3).$$

Будем считать далее, что жидкость удовлетворяет обобщенной математической модели, описываемой следующим определяющим соотношением:

$$P_m\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma = Q_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(1)} + R_n\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)\sigma^{(2)}, \tag{2.3}$$

где $P_m(\lambda)$, $Q_n(\lambda)$, $R_n(\lambda)$ — многочлены степеней m и n соответственно. Если $n = m-1$, то определяющее соотношение (2.3) будет соответствовать модели Максвелла, если $n = m$ — модели Олдройта, если $n = m+1$ — модели Кельвина—Фойгта. Предположим, что корни полинома $P_m(\lambda)$ вещественны, различны и отрицательны, обозначим их через $-b_l$ $(l = \overline{1,m})$, а дроби $Q_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$, $R_n(\lambda)P_m^{-1}(\lambda)$ имеют следующие разложения:

$$\frac{Q_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\mu_{-1}\lambda + \gamma_2\mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l+\lambda}, \quad \frac{R_n(\lambda)}{P_m(\lambda)} = \gamma_1\eta_{-1}\lambda + \gamma_2\eta_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\eta_l}{b_l+\lambda}, \tag{2.4}$$

где $\mu_l, \eta_l > 0$, $l = \overline{-1, m}$, и γ_1, γ_2 принимают значения 0 или 1. При этом $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ для модели Максвелла, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ для модели Олдройта, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ для модели Кельвина—Фойгта. Из определяющего соотношения (2.3) с помощью преобразования Лапласа и представлений (2.4) можно найти (см. [7, с. 43–46]) тензор вязких напряжений σ:

$$\sigma(t,x) = J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) + J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x), \tag{2.5}$$

$$J_1(t)\sigma^{(1)}(t,x) := \gamma_1\mu_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(1)}(t,x) + \gamma_2\mu_0\sigma^{(1)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \mu_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(1)}(s,x)\,ds,$$

$$J_2(t)\sigma^{(2)}(t,x) := \gamma_1\eta_{-1}\frac{\partial}{\partial t}\sigma^{(2)}(t,x) + \gamma_2\eta_0\sigma^{(2)}(t,x) + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t \eta_l e^{-b_l(t-s)}\sigma^{(2)}(s,x)\,ds.$$

В (2.5) мы пренебрегли экспоненциально затухающим во времени слагаемым, порождаемым состоянием жидкости в начальный момент времени. Это слагаемое можно считать отнесенным к полю внешних сил.

Из системы (2.1)-(2.2) и соотношения (2.5) получим систему уравнений, описывающую движения обобщенной сжимаемой вязкоупругой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\widehat{\rho}\Big[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\Big] = -\nabla\widehat{P} + J_1(t)\big(\Delta\vec{v} + \frac{1}{3}\nabla\mathrm{div}\vec{v}\big) + J_2(t)\nabla\mathrm{div}\vec{v} + \widehat{\rho}\vec{F} \quad (\text{в } \Omega), \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\widehat{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}(\widehat{\rho}\vec{v}) = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } \partial\Omega). \tag{2.7}$$

Отметим здесь, что если $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$ и жидкость несжимаема, то уравнения (2.6), (2.7) будут описывать обычную жидкость Одройта (см., например, [2]).

2.2. Уравнения малых движений баротропной жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающуюся область. Пусть сжимаемая жидкость Олдройта занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, равномерно вращающуюся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения области запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, т. е. $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Далее будем считать, что сжимаемая жидкость удовлетворяет уравнению состояния баротропной жидкости: $\widehat{P} = a_\infty^2\widehat{\rho}$, где $a_\infty = \mathrm{const}$ — скорость звука в сжимаемой жидкости.

Рассмотрим состояние относительного равновесия жидкости. Из уравнения (2.6) движения сжимаемой жидкости Олдройта, записанного в подвижной системе координат, найдем формулу для градиента стационарного давления:

$$\nabla P_0 = \rho_0\big(-\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) - g\vec{e}_3\big) = \rho_0\nabla\big(2^{-1}|\vec{\omega}_0\times\vec{r}|^2 - gx_3\big), \tag{2.8}$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор текущей точки области Ω, а ρ_0 — стационарная плотность жидкости. Из (2.8) и соотношения $P_0 = a_\infty^2\rho_0$ заключаем, что стационарная плотность ρ_0 является функцией параметра $z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3$. При этом ρ_0 будет постоянной только если в системе отсутствует вращение и гравитационное поле. Для функции $\rho_0(z)$ выполнено также следующее свойство: $0 < \alpha_1 \leqslant \rho_0(z) \leqslant \alpha_2$.

Представим теперь полное давление и плотность жидкости в виде: $\widehat{P}(t,x) = P_0(z) + p(t,x)$, $\widehat{\rho}(t,x) = \rho_0(z) + \widetilde{\rho}(t,x)$, где $p(t,x)$ и $\widetilde{\rho}(t,x)$ — это динамическое давление и плотность соответственно, возникающие при малых движениях жидкости относительно стационарного состояния.

Осуществим линеаризацию уравнений (2.6), (2.7) (при $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$), записанных в подвижной системе координат, относительно состояния относительного равновесия. Получим задачу о малых движениях баротропной вращающейся жидкости Олдройта, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело:

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -\nabla\big(\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\,\widetilde{\rho}(t,x)\big)+ \\ + \frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x) + (\eta_0+\frac{\mu_0}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big)+ \\ + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x) + (\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial\widetilde{\rho}(t,x)}{\partial t} + \mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(t,x) = \vec{0} \ \ (\text{на } \partial\Omega),$$

где $\vec{u}(t,x)$ — поле скоростей жидкости в подвижной системе координат, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Осуществим в полученной системе, с целью ее симметризации, следующую замену:

$$a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\widetilde{\rho}(t,x) = \rho(t,x).$$

В результате получим основную задачу:

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big)+ \\ + \frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x) + (\eta_0+\frac{\mu_0}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big)+ \quad (2.9) \\ + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x) + (\eta_l+\frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x) \ \ (\text{в } \Omega),$$

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\text{в } \Omega), \quad \vec{u}(t,x) = \vec{0} \ \ (\text{на } \partial\Omega). \quad (2.10)$$

Для полноты формулировки задачи зададим еще начальные условия:

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x). \quad (2.11)$$

3. Теорема о существовании и единственности сильного решения задачи

В этом разделе начально-краевая задача (2.9)–(2.11), описывающая малые движения вращающейся сжимаемой вязкоупругой жидкости Олдройта, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (3.6) для системы дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (3.6). Основное утверждение раздела — теорема 3.1.

3.1. Операторная формулировка задачи. Введем векторное гильбертово пространство $H := \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$ с весом $\rho_0(z)$ и скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{u},\vec{v})_{H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} := \int_\Omega \rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\vec{u}\|^2_{H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} = \int_\Omega \rho_0(z)|\vec{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\rho_0}(\Omega) := \{f\in L_2(\Omega) \mid (f,\rho_0^{1/2})_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Определим оператор $S\vec{u}(t,x) := i\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big)$, $\mathcal{D}(S) = \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$. Верна лемма, доказательство которой подобно доказательству аналогичной леммы о свойствах кориолисова оператора из [9].

Лемма 3.1. *Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $H = \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$: $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(H)$; более того, $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(H)} = 1$.*

Будем считать далее, что граница $\partial\Omega$ области Ω — класса C^2.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$-\rho_0^{-1}(z)\big(\alpha\Delta\vec{u}(x)+\beta\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)\big)=\vec{v}(x)\quad(\text{в }\Omega),\quad \vec{u}(x)=\vec{0}\quad(\text{на }\partial\Omega),\quad \alpha>0,\ \beta\geqslant 0. \tag{3.1}$$

Эта задача, как известно (см. [17]), имеет единственное обобщенное решение $\vec{u}=A^{-1}(\alpha,\beta)\vec{v}$ для любого $\vec{v}\in H$, где оператор $A(\alpha,\beta)$ является самосопряженным и положительно определенным в H. Энергетическое пространство $H_{A(\alpha,\beta)}=\mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta))=\{\vec{u}\in\vec{W}_2^1(\Omega)|\ \vec{u}=\vec{0}\ (\text{на }\partial\Omega)\}$ оператора $A(\alpha,\beta)$ компактно вложено в пространство H, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta)$ компактен и положителен в H. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v}\in H_{A(\alpha,\beta)}$

$$\begin{gathered}(\vec{u},\vec{v})_{A(\alpha,\beta)}=(A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{u},A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{v})_{\vec{L}(\Omega,\rho_0)}=\alpha\mathcal{J}(\vec{u},\vec{v})+\beta\mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}),\\ \mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}):=\int_\Omega\sum_{i=1}^3\nabla u_i(x)\cdot\overline{\nabla v_i(x)}\,d\Omega,\quad \mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}):=\int_\Omega\mathrm{div}\vec{u}(x)\,\overline{\mathrm{div}\vec{v}(x)}\,d\Omega.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Кроме того, можно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $H_{A(\alpha_1,\beta_1)}$ и $H_{A(\alpha_2,\beta_2)}$ эквивалентны между собой.

Определим операторы $A_l:=A(\mu_l,\eta_l+3^{-1}\mu_l)$ $(l=\overline{0,m})$ (напомним, что $\mu_l,\eta_l>0$, $l=\overline{0,m}$). При этом $\mathcal{D}(A_0)=\mathcal{D}(A_l)$ $(l=\overline{1,m})$ в силу гладкости границы.

Определим оператор $B\vec{u}(t,x):=a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big)$, $\mathcal{D}(B):=\{\vec{u}\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)|\ \mathrm{div}(\rho_0\vec{u})\in\vec{L}_2(\Omega,\rho_0),\ \vec{u}\cdot\vec{n}=0\ (\text{на }\partial\Omega)\}\supset\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l=\overline{1,m})$.

Лемма 3.2. *Сопряженный оператор определяется по формуле* $B^*\rho(x)=-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)$, $\mathcal{D}(B^*)=W_{2,\rho_0}^1(\Omega):=W_2^1(\Omega)\cap L_{2,\rho_0}(\Omega)$. *Кроме того, имеют место неравенства*:

$$\exists\, c_l>0:\quad \|B\vec{u}\|_{W_{2,\rho_0}^1(\Omega)}\leqslant c_l\|A_l\vec{u}\|_H\quad\forall\,\vec{u}\in\mathcal{D}(A_l)\ \ (l=\overline{0,m}).$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}\in\mathcal{D}(B)$. Вычислим

$$\begin{gathered}(B\vec{u},\rho)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}=\int_\Omega a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\overline{\rho(x)}\,d\Omega=-\int_\Omega\rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)}\,d\Omega+\\ +\int_{\partial\Omega}a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\overline{\rho(x)}\vec{u}(x)\cdot\vec{n}\,dS=-\int_\Omega\rho_0(z)\vec{u}(x)\cdot\overline{\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big)}\,d\Omega=(\vec{u},-\nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}\rho\big))_H.\end{gathered}$$

Отсюда и из определения сопряженного оператора следуют формулы для B^*.

Для доказательства неравенств в лемме понадобятся некоторые вспомогательные оценки и рассуждения. Для $l=\overline{0,m}$ рассмотрим задачи

$$L_l\vec{u}:=-\mu_l\Delta\vec{u}(x)-(\eta_l+3^{-1}\mu_l)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)=\vec{f}(x)\ \ (\text{в }\Omega),\quad B_{L,l}\vec{u}:=\vec{u}(x)=\vec{g}(x)\ \ (\text{на }\partial\Omega).$$

Можно проверить, что матричное дифференциальное выражение L_l определяет невырожденную правильно эллиптическую по Дуглису—Ниренбергу систему, а граничное условие $B_{L,l}$ удовлетворяет условию дополнительности (см. [18]). Из теоремы о нормальной разрешимости [18, с. 241] следует, что существуют константы $d_{1,l}>0$, $d_{2,l}>0$ $(l=\overline{0,m})$, не зависящие от поля $\vec{u}$, такие, что

$$\begin{gathered}d_{1,l}\|\vec{u}\|_{\vec{W}_2^2(\Omega)}^2\leqslant\|L_l\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}^2\leqslant d_{2,l}\|\vec{u}\|_{\vec{W}_2^2(\Omega)}^2\quad\forall\,\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega,B_{L,l}),\\ \vec{W}_2^2(\Omega,B_{L,l}):=\{\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega)\big|\ B_{L,l}\vec{u}=\vec{u}(x)=\vec{0}\ \ (\text{на }\partial\Omega)\}=\mathcal{D}(A_l),\\ \|\vec{u}\|_{\vec{W}_2^2(\Omega)}^2:=\sum_{k=1}^3\Big[\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2+\sum_{i,j=1}^3\Big\|\frac{\partial^2u_k}{\partial x_i\partial x_j}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2\Big].\end{gathered} \tag{3.3}$$

Далее, из неравенства Эрлинга—Ниренберга [3, с. 33] следует, что существует константа $d_1>0$, не зависящая от поля $\vec{u}$, такая, что

$$\Big\|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\Big\|_{L_2(\Omega)}^2\leqslant d_1\|\vec{u}\|_{\vec{W}_2^2(\Omega)}^2\quad\forall\,\vec{u}\in\vec{W}_2^2(\Omega),\quad k,j=1,2,3. \tag{3.4}$$

Пусть теперь $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_l) = \vec{W}_2^2(\Omega, B_{L,l})$ $(l = \overline{0,m})$. С использованием неравенств (3.3), (3.4) проведем следующие оценки:

$$\|B\vec{u}\|^2_{W^1_{2,\rho_0}(\Omega)} = a^2_\infty \int\limits_\Omega \left(\left|\nabla\left(\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\right)\right|^2 + \left|\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}(\rho_0(z)\vec{u}(x))\right|^2\right) d\Omega \leqslant$$
$$\leqslant d_2\|\vec{u}\|^2_{\vec{W}^2_2(\Omega)} \leqslant d_2 d_{1,l}^{-1}\|L_l\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega)} \leqslant d_2 d_{1,l}^{-1} \max_{x\in\overline{\Omega}} \rho_0(z) \int\limits_\Omega \rho_0(z)|\rho_0^{-1}(z)L_l\vec{u}(x)|^2\, d\Omega = c_l\|A_l\vec{u}\|^2_H,$$

где $c_l = c_l(d_{1,l}, d_1, \rho_0, a_\infty, \Omega) > 0$ — некоторая абсолютная константа. □

Для $l = \overline{1,m}$ определим следующие операторы:

$$Q_l := A_l^{1/2}A_0^{-1/2}, \quad Q_l^+ := A_0^{-1/2}A_l^{1/2}, \quad Q_B := BA_0^{-1/2}, \quad Q_B^+ := A_0^{-1/2}B^*. \tag{3.5}$$

Лемма 3.3. $Q_l \in \mathcal{L}(H)$, $Q_B \in \mathcal{L}(H, L_{2,\rho_0}(\Omega))$. *Операторы* Q_l^+, Q_B^+ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_l^*, Q_B^* *соответственно. При этом* $Q_B^+ = Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_l^+ = Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$ $(l = \overline{1,m})$, *операторы* $Q_l^*Q_l$ *положительно определены.*

Доказательство. Доказательство проведем для оператора Q_l. Ограниченность Q_l следует из равенства $\mathcal{D}(A_l) = \mathcal{D}(A_0)$ $(l = \overline{1,m})$. Следовательно, $Q_l^* \in \mathcal{L}(H)$. Далее, для любого $\vec{u} \in H$ и $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ имеем $(Q_l\vec{u}, \vec{v})_H = (A_l^{1/2}A_0^{-1/2}\vec{u}, \vec{v})_H = (\vec{u}, Q_l^+\vec{v})_H = (\vec{u}, Q_l^*\vec{v})_H$. Отсюда следует, что $Q_l^+ = Q_l^*|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}$, $\overline{Q_l^+} = Q_l^*$ $(l = \overline{1,m})$. Далее, для любого $\vec{u} \in H$ с учетом (3.2) имеем

$$\left(Q_l^*Q_l\vec{u}, \vec{u}\right)_H = \left(Q_l\vec{u}, Q_l\vec{u}\right)_H = \left(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u}\right)_{A_l} =$$
$$= \mu_l\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u}) + \left(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\right)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u}) \geqslant$$
$$\geqslant \min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0}, \frac{3\eta_l + \mu_l}{3\eta_0 + \mu_0}\right\}\left[\mu_0\mathcal{J}(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u}) + \left(\eta_0 + \frac{\mu_0}{3}\right)\mathcal{D}(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u})\right] =$$
$$= \min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0}, \frac{3\eta_l + \mu_l}{3\eta_0 + \mu_0}\right\}\left(A_0^{-1/2}\vec{u}, A_0^{-1/2}\vec{u}\right)_{A_0} = \min\left\{\frac{\mu_l}{\mu_0}, \frac{3\eta_l + \mu_l}{3\eta_0 + \mu_0}\right\}\|\vec{u}\|^2_H,$$

откуда следует положительная определенность оператора $Q_l^*Q_l$. □

С использованием введенных операторов задачу (2.9)–(2.11) запишем в виде задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве $H_0 := H \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ $(H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0))$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + (2\omega_0 iS + A_0)\vec{u} - B^*\rho + \displaystyle\sum_{l=1}^m \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}A_l\vec{u}(s)\, ds = \vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + B\vec{u} = 0, \quad (\vec{u}(0); \rho(0))^\tau := (\vec{u}^0; \rho^0)^\tau, \end{cases} \tag{3.6}$$

где символ τ обозначает операцию транспонирования.

Определение 3.1. Сильное решение задачи (3.6) назовем *сильным решением* начально-краевой задачи (2.9)–(2.11). Элемент $\zeta(t) := (\vec{u}(t); \rho(t))^\tau$ назовем *сильным решением* задачи (3.6), если $\zeta(t) \in \mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $(A_0\vec{u}(t); B^*\rho(t))^\tau \in C(\mathbb{R}_+, H_0)$, $(\vec{u}(t); \rho(t))^\tau \in C^1(\mathbb{R}_+, H_0)$, $(\vec{u}(0); \rho(0))^\tau := (\vec{u}^0; \rho^0)^\tau$ и выполнены уравнения из (3.6) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

3.2. Переход к дифференциально-операторному уравнению первого порядка. Теорема о сильной разрешимости. Пусть $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ — сильное решение задачи (3.6). Тогда из леммы 3.3

следует, что $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\vec{u} + A_0^{1/2}\Big\{A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^* \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds\Big\} = \vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\vec{u} = 0, \quad (\vec{u}(0); \rho(0))^\tau := (\vec{u}^0; \rho^0)^\tau. \end{cases} \tag{3.7}$$

Осуществим в системе (3.7) следующие замены:

$$\vec{v}_l(t) := \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)} Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{3.8}$$

Поля $\vec{v}_l(t)$ $(l = \overline{1,m})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Продифференцированные соотношения (3.8) и преобразованные уравнения системы (3.7) составляют следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} + 2\omega_0 iS\vec{u} + A_0^{1/2}\Big\{A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho + \sum\limits_{l=1}^{m} Q_l^*\vec{v}_l\Big\} = \vec{f}(t), \\ \dfrac{d\rho}{dt} + Q_B A_0^{1/2}\vec{u} = 0, \quad \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} - Q_l A_0^{1/2}\vec{u} + b_l\vec{v}_l = 0 \quad (l = \overline{1,m}), \\ \qquad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \rho(0) = \rho^0, \quad \vec{v}_l(0) = 0 \ \ (l = \overline{1,m}). \end{cases} \tag{3.9}$$

Эту систему будем трактовать как задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \mathcal{H}_0$, где $\mathcal{H}_0 := L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \big(\oplus_{l=1}^m H\big)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{3.10}$$

Здесь $\xi := (\vec{u}; w)^\tau$, $w := (\rho; \vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\vec{f}(t); 0)^\tau$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для операторного блока $\mathcal{A}$ справедливы следующие представления — факторизация с симметричным множителями и факторизация в форме Шура—Фробениуса:

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2}, \mathcal{I}\big) + \mathrm{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big), \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0, \mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*\big)\begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix} + \mathrm{diag}\big(2\omega_0 iS, 0\big) = \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}TA_0^{-1/2} & \mathcal{I}\end{pmatrix}\mathrm{diag}\big(A_0^{1/2}TA_0^{1/2}, \mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*\big)\begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}T\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}\end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \mid \vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A_0)\}, \tag{3.13}$$

где I, $\mathcal{I}$ — единичные операторы в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$T := (I + 2\omega_0 iA_0^{-1/2}SA_0^{-1/2})^{-1}, \quad \mathcal{Q} := \big(-Q_B, Q_1, \ldots, Q_m\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Определение 3.2 (см. [10, с. 38]). *Сильным решением* задачи Коши (3.10) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(0) = \xi^0$ и выполнено уравнение из (3.10) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Таким образом, если поле $\vec{u}(t)$ и функция $\rho(t)$ составляют сильное решение задачи (3.6), то элемент $\xi(t)$ есть сильное решение задачи (3.10). Обратное, однако, не всегда верно. Это ясно из того, что при выводе задачи Коши (3.10) осуществлялось замыкание операторов Q_B^+ и Q_l^+. Тем не менее, далее будет установлено, что если начальные данные выбирать специальным образом, то от задачи (3.10) можно будет вернуться к задаче (3.6).

Напомним, что *числовой областью* оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) := \{\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \mid \ \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \ \ \|\xi\|_{\mathcal{H}} = 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Лемма 3.4. *Оператор $\mathcal{A}$ — максимальный аккретивный и секториальный. Более того,*

$$\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \left|\mathrm{Im}\lambda\right| \leqslant \|\mathcal{Q}^*\|^2(2\omega_0)^{-1}\mathrm{Re}\lambda + 2\omega_0,\ \ 0 \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant 4\omega_0^2\|\mathcal{Q}^*\|^{-2}\} \cup$$
$$\cup\, \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \left|\mathrm{Im}\lambda\right| \leqslant 2\|\mathcal{Q}^*\|(\mathrm{Re}\lambda)^{1/2},\ \ \mathrm{Re}\lambda \geqslant 4\omega_0^2\|\mathcal{Q}^*\|^{-2}\}.$$

Доказательство. **1**. Прежде всего заметим, что $\mathcal{D}(A_0) \oplus \mathcal{D}(B^*) \bigoplus\limits_{l=1}^{m} \mathcal{D}(A_l^{1/2}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, а значит, оператор $\mathcal{A}$ плотно определен. Действительно, пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(A_0) \oplus \big[\mathcal{D}(B^*) \bigoplus\limits_{l=1}^{m} \mathcal{D}(A_l^{1/2})\big]$, т. е. $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$, $\vec{v}_l \in \mathcal{D}(A_l^{1/2})$ $(l = \overline{1,m})$. Тогда с использованием леммы 3.3 найдем

$$\vec{u} + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* w = \vec{u} + A_0^{-1/2}\Big[- Q_B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} Q_l^*\vec{v}_l\Big] = \vec{u} + A_0^{-1/2}\Big[- Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho + \sum_{l=1}^{m} Q_l^*\big|_{\mathcal{D}(A_l^{1/2})}\vec{v}_l\Big] =$$
$$= \vec{u} + A_0^{-1/2}\Big[- A_0^{-1/2}B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} A_0^{-1/2}A_l^{1/2}\vec{v}_l\Big] = A_0^{-1}\Big[A_0\vec{u} - B^*\rho + \sum_{l=1}^{m} A_l^{1/2}\vec{v}_l\Big] \in \mathcal{D}(A_0),$$

т. е. $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (3.13)).

2. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен и секториален. Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, тогда $\vec{u} \in \mathcal{D}(A_0^{1/2})$, и из факторизации (3.11) оператора $\mathcal{A}$ симметричной форме и леммы 3.1 получим

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} = \mathrm{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_0^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = \|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|_{\mathcal{H}_0}^2 \geqslant 0, \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| &= \big|\mathrm{Im}\big[(\mathcal{Q}^* w, A^{1/2}\vec{u})_H - (\mathcal{Q}A^{1/2}\vec{u}, w)_{\mathcal{H}_0} + 2\omega_0 i(S\vec{u}, \vec{u})_H\big]\big| = \\ &= \big|2\,\mathrm{Im}(\mathcal{Q}^* w, A^{1/2}\vec{u})_H + 2\omega_0 i(S\vec{u}, \vec{u})_H\big| \leqslant 2\,\|A^{1/2}\vec{u}\|_H\|\mathcal{Q}^* w\|_H + 2\omega_0\|\vec{u}\|_H^2.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Из (3.14) следует, что оператор $\mathcal{A}$ аккретивен. Из (3.14), (3.15) при любом $\alpha > 0$ найдем, что

$$\mathrm{Re}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} - \alpha\big|\mathrm{Im}\big(\mathcal{A}\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant \big(\|A^{1/2}\vec{u}\|_H - \alpha\|\mathcal{Q}^* w\|_H\big)^2 -$$
$$- \alpha^2\|\mathcal{Q}^* w\|_H^2 + \|\mathcal{G}^{1/2}w\|_{\mathcal{H}_0}^2 - 2\omega_0\alpha\|\vec{u}\|_H^2 \geqslant - \max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, H)}^2, 2\omega_0\alpha\}\|\xi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Следовательно,

$$\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} - \alpha\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \geqslant 0,$$

где $\gamma(\alpha) := \max\{\alpha^2\|\mathcal{Q}^*\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0, H)}^2, 2\omega_0\alpha\}$. Таким образом,

$$\big|\mathrm{Im}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}}\big| \leqslant \alpha^{-1}\mathrm{Re}\big(\big[\mathcal{A} + \gamma(\alpha)\big]\xi, \xi\big)_{\mathcal{H}} \quad \forall\, \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \ \alpha > 0.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{W}(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(\lambda + \gamma(\alpha))| \leqslant \mathrm{arctg}\,\alpha^{-1}\}$ при любом $\alpha > 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}$ секториален с вершиной $-\gamma(\alpha)$ и полуулом раствора $\mathrm{arctg}\,\alpha^{-1}$.

Формула из формулировки леммы получается построением огибающих соответствующих семейств прямых.

3. Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ максимален и замкнут. Для этого достаточно показать (см. [10, теорема 4.3, с. 109]), что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ непрерывно обратим при $\lambda < 0$. Положим $\xi_1 := (\vec{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\vec{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$. Определим оператор $S_A := A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Из (3.11) найдем, что уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi_1 = \xi_2$ можно переписать в векторно-матричной форме:

$$\mathrm{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix} I + 2\omega_0 iS_A - \lambda A_0^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda\end{pmatrix}\mathrm{diag}(A_0^{1/2}, \mathcal{I})\begin{pmatrix}\vec{u}_1 \\ w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_2 \\ w_2\end{pmatrix}. \tag{3.16}$$

Отсюда видно, что оператор $\mathcal{A} - \lambda$ будет иметь ограниченный обратный оператор, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, т. е. будет иметь резольвенту $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda)^{-1}$, если средний блок в (3.16) будет непрерывно обратим в $\mathcal{H}$.

Введем оператор-функцию $L(\lambda) := I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}$. Фиксируем $\lambda < 0$. Для любого $0 \neq \vec{u} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ найдем, что

$$\begin{aligned}
&\|L(\lambda)\vec{u}\|_H \geqslant \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot |(L(\lambda)\vec{u}, \vec{u})_H| \geqslant \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot \mathrm{Re}(L(\lambda)\vec{u}, \vec{u})_H = \\
&\qquad = \|\vec{u}\|_H - \lambda\|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot \|A_0^{-1/2}\vec{u}\|_H^2 + \|\vec{u}\|_H^{-1} \cdot ((\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{u}, \mathcal{Q}\vec{u})_{\mathcal{H}_0} \geqslant \|\vec{u}\|_H, \\
&\|[L(\lambda)]^*\vec{u}\|_H \geqslant \ldots \geqslant \|\vec{u}\|_H.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Следовательно, $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$, и непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix}^{-1} = \\
&= \left[\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix}\right]^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} L^{-1}(\lambda) & -L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda) & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) := (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут и максимален.

Из (3.16) получим представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A_0^{-1/2} & \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) - \mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

при всех $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) \cup \sigma(L(\lambda))$, где $\sigma(\mathcal{G})$, $\sigma(L(\lambda))$ — спектры оператора $\mathcal{G}$ и операторного пучка $L(\lambda)$ соответственно. $\square$

Отметим здесь, что свойство секториальности операторного блока $\mathcal{A}$ никак не связано с компактностью оператора A_0^{-1}. Хотя свойство $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и факторизация (3.12) показывают, что оператор $\mathcal{A}$ подобен слабому возмущению самосопряженного неотрицательного оператора. В этом случае из [10, теорема 7.2, с. 183] получим, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось.

Основываясь на лемме 3.4, докажем теорему о сильной разрешимости задачи (2.9)–(2.11).

Теорема 3.1. *Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\vec{f}(t,x)$ удовлетворяет условию Гельдера: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+\ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, что $\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)} \leqslant K|t-s|^k$ при $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. Тогда сильное решение задачи* (2.9)–(2.11) *существует и единственно.*

Доказательство. **1**. Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, $\xi^0 := (\vec{u}^0; w^0)^\tau$, $w^0 := (\rho^0; 0; \ldots; 0)^\tau$. Из (3.13) и леммы 3.3 найдем, что $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$:

$$\vec{u}^0 + A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* w^0 = \vec{u}^0 - A_0^{-1/2}Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0 = \vec{u}^0 - A_0^{-1}B^*\rho^0 = A_0^{-1}\big[A_0\vec{u}^0 - B^*\rho^0\big] \in \mathcal{D}(A_0).$$

Далее, из условий теоремы и равенства $\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} = \|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_H$ следует, что функция $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Из [5, теорема 5.9, с. 61] следует, что оператор $-\mathcal{A}$ порождает сильно непрерывную полугруппу операторов, голоморфную в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Из [5, теорема 1.4, с. 130] следует, что задача Коши (3.10) имеет единственное сильное (в смысле определения 3.2) решение.

2. Пусть функция $\xi(t)$ — единственное решение задачи Коши (3.10). То есть $\xi(t) = (\vec{u}(t); w(t))^\tau$, где $w(t) = (\rho(t); \vec{v}_1(t); \ldots; \vec{v}_m(t))^\tau$, причем $\mathcal{A}\xi(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$.

Покажем, что $A_0\vec{u} \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда в системе (3.7) можно будет раскрыть фигурные скобки и заменить «$*$» на «$+$»; в результате получим, что найденное сильное решение задачи Коши (3.10) (системы (3.7)) будет сильным решением задачи (3.6) (в смысле определения 3.1).

Запишем уравнение из (3.10) в виде системы (3.9). Учитывая, что $\vec{v}_l(0)=\vec{0}$ $(l=\overline{1,m})$, из второго и последующих уравнений системы (3.9) последовательно найдем:

$$\rho(t)=-\int\limits_0^t Q_B A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds+\rho^0,\quad \vec{v}_l(t)=\int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}Q_l A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds,\ \ l=\overline{1,m}.$$

Отсюда и из первого уравнения системы (3.9) найдем, что

$$\frac{d\vec{u}}{dt}+2\omega_0 iS\vec{u}+A_0\Big\{\vec{u}+\int\limits_0^t A_0^{-1/2}\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m e^{-b_l(t-s)}Q_l^*Q_l\Big]A_0^{1/2}\vec{u}(s)\,ds-A_0^{-1/2}Q_B^*\rho^0\Big\}=\vec{f}(t). \tag{3.19}$$

Из $\rho^0\in\mathcal{D}(B^*)$ и леммы 3.3 следует, что $A_0^{-1/2}Q_B^*\rho^0=A_0^{-1/2}Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}\rho^0=A_0^{-1}B^*\rho^0\in\mathcal{D}(A_0)$. Отсюда и из (3.19) получим, что

$$\vec{u}(t)+\int\limits_0^t R(t-s)\vec{u}(s)\,ds=:\vec{g}(t),\quad A_0\vec{g}(t)\in C(\mathbb{R}_+;H=\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)), \tag{3.20}$$

$$R(t):=A_0^{-1/2}\Big[Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m e^{-b_lt}Q_l^*Q_l\Big]A_0^{1/2}.$$

Введем пространство $H(A_0):=(\mathcal{D}(A_0),\|\cdot\|_{H(A_0)})$, где $\|\vec{u}\|_{H(A_0)}:=\|A_0\vec{u}\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)}$ для любого $\vec{u}\in\mathcal{D}(A_0)$. Известно, что $H(A_0)$ банахово пространство. Будем рассматривать (3.20) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в пространстве $H(A_0)$.

Покажем, что оператор-функция $R(t)$ непрерывна при $t\in\mathbb{R}_+$ в равномерной операторной топологии пространства $H(A_0)$. Для этого достаточно показать, что $A_0^{-1/2}Q_B^*Q_BA_0^{1/2}\in\mathcal{L}(H(A_0))$, $A_0^{-1/2}Q_l^*Q_lA_0^{1/2}\in\mathcal{L}(H(A_0))$ $(l=\overline{1,m})$. Докажем первое включение, оставшиеся включения доказываются аналогично.

Из леммы 3.2 заключаем, что $Q_BA_0^{-1/2}=BA_0^{-1}\in\mathcal{L}(H,W_{2,\rho_0}^1(\Omega))$. Учитывая, что $\mathcal{D}(B^*)=W_{2,\rho_0}^1(\Omega)$ и $B^*\in\mathcal{L}(W_{2,\rho_0}^1(\Omega),H)$, вычислим

$$\begin{aligned}\|A_0^{-1/2}Q_B^*Q_BA_0^{1/2}\vec{u}\|_{H(A_0)}&=\|A_0^{1/2}Q_B^*Q_BA_0^{-1/2}(A_0\vec{u})\|_H=\\&=\|A_0^{1/2}Q_B^*\big|_{\mathcal{D}(B^*)}BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_H=\|B^*BA_0^{-1}(A_0\vec{u})\|_H\leqslant\\&\leqslant\|B^*\|_{\mathcal{L}(W_{2,\rho_0}^1(\Omega),H)}\|BA_0^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,W_{2,\rho_0}^1(\Omega))}\|\vec{u}\|_{H(A_0)}\quad\forall\,\vec{u}\in H(A_0).\end{aligned}$$

Таким образом, ядро уравнения (3.20) непрерывно при $0\leqslant s\leqslant t<+\infty$ со значениями в $H(A_0)$. Если $\vec{g}(t)\in C(\mathbb{R}_+,H(A_0))$, то уравнение (3.20) имеет единственное решение $\vec{u}(t)\in C(\mathbb{R}_+,H(A_0)=\mathcal{D}(A_0))$. Следовательно, в системе (3.7) можно раскрыть фигурные скобки и заменить «$*$» на «$+$»; в результате получим, что найденное сильное решение задачи Коши (3.10) (системы (3.7)) является сильным решением задачи (3.6) (в смысле определения 3.1). □

4. Задача о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости

В этом разделе исследуется спектр операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (3.11)–(3.13)). В пункте 4.1 осуществляется вывод основных спектральных задач. В пункте 4.2 исследуется существенный и дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$ (леммы 4.1–4.4). В частности, доказано, что оператор непрерывно обратим: $\mathcal{A}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

В пункте 4.3 исследуется локализация спектра оператора $\mathcal{A}$. Доказывается, что спектр оператора лежит в правой открытой полуплоскости (лемма 4.5) в некоторой полосе, содержащей положительную полуось (лемма 4.7). Устанавливается формула асимптотического распределения собственных значений оператора $\mathcal{A}$ с предельной точкой в бесконечности (лемма 4.6).

В пункте 4.4 исследуется локализация спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, если $\omega=0$. С использованием методов индефинитной метрики доказывается, что в этом случае спектр оператора лежит на положительной действительной оси за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных изолированных собственных значений конечной кратности (лемма 4.8).

Вычисляется область комплексной плоскости, которая содержит невещественные собственные значения; выводится условие, достаточное для отсутствия невещественных собственных значений (лемма 4.9).

В пункте 4.5 доказывается теорема о представлении решения эволюционной задачи (3.6), а также об асимптотическом поведении этого решения (теорема 4.1). Если внешнее поле стабилизируется, то решение эволюционной задачи сходится к решению следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho_0(z)}\left(\Big(\mu_0+\displaystyle\sum_{l=1}^m\frac{\mu_l}{b_l}\Big)\Delta\vec u(x)+\Big(\eta_0+\frac{\mu_0}{3}+\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l}\Big[\eta_l+\frac{\mu_l}{3}\Big]\Big)\nabla\mathrm{div}\vec u(x)\right)- \\ \qquad\qquad -2\omega_0\big(\vec u(x)\times\vec e_3\big)+\nabla\Big(\dfrac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\rho(x)\Big)=\vec f(x)\quad(\text{в }\Omega), \\ \dfrac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec u(x)\big)=0\quad(\text{в }\Omega),\qquad\qquad \vec u(x)=0\quad(\text{на }\partial\Omega). \end{cases}$$

В частности, в случае $\omega_0=0$ доказано, что если внешнее поле стабилизируется к некоторому потенциальному полю, то решение эволюционной задачи сходится к равновесному состоянию с новым распределением плотности.

В пункте 4.6 доказывается теорема о полноте и базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal A$ в случае, если система находится в невесомости и не вращается. В случае, если спектр оператора $\mathcal A$ действительный, найдено разложение эволюционной задачи (3.6) по соответствующей системе собственных элементов.

4.1. Вывод основных спектральных задач. Будем разыскивать решения однородного (при $\mathcal F(t)\equiv0$) уравнения (3.10) в виде $\xi(t)=\exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal A\xi=\lambda\xi,\quad \xi\in\mathcal D(\mathcal A)\subset\mathcal H, \tag{4.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругой сжимаемой жидкости Олдройта.

Пусть $\xi=(\vec u;w)^\tau\in\mathcal D(\mathcal A)$. Осуществим, с учетом факторизации (3.11), в спектральной задаче (4.1) замену искомого элемента $\mathrm{diag}(A_0^{1/2},\mathcal I)\xi=\eta=:(\vec z;w)^\tau$. Получим спектральную задачу

$$\mathcal A(\lambda)\eta:=\begin{pmatrix} I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A & \mathcal Q^* \\ -\mathcal Q & \mathcal G-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec z\\ w\end{pmatrix}=0,\quad \eta\in\mathcal H=H\oplus\mathcal H_0, \tag{4.2}$$

где $S_A=A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$. Пусть $\lambda\notin\{0,b_1,\dots,b_m\}=\sigma(\mathcal G)$, тогда из (4.2) найдем, что

$$L(\lambda)\vec z:=\big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A+\mathcal Q^*(\mathcal G-\lambda)^{-1}\mathcal Q\big]\vec z=0,\quad \vec z\in H.$$

Эту задачу, вспоминая определение операторов $\mathcal Q$ и $\mathcal G$, можно переписать в следующем виде:

$$L(\lambda)\vec z:=\Big[I-\lambda A_0^{-1}+2\omega_0 iS_A-\frac{1}{\lambda}Q_B^*Q_B+\sum_{l=1}^m\frac{1}{b_l-\lambda}Q_l^*Q_l\Big]\vec z=0,\quad \vec z\in H. \tag{4.3}$$

Из (3.18) следует, что спектр оператора $\mathcal A$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (4.1) и (4.3)) совпадают между собой при $\lambda\notin\sigma(\mathcal G)$.

4.2. О существенном и дискретном спектре задачи. Прежде всего, установим следующую лемму о точках множества $\{0,b_1,\dots,b_m\}$.

Лемма 4.1. $\{b_1,\dots,b_m\}\subset\rho(\mathcal A)$. *Точка* $\lambda=0$ *не является собственным значением оператора* $\mathcal A$ (*спектральной задачи* (4.1)).

Доказательство. Запишем уравнение $(\mathcal A-\lambda)\xi=\xi_0$ в виде системы (см. (3.9), (3.11)):

$$\begin{cases} A_0^{1/2}\Big[A_0^{1/2}\vec u+2\omega_0 iA_0^{-1/2}S\vec u-Q_B^*\rho+\displaystyle\sum_{l=1}^m Q_l^*\vec v_l\Big]-\lambda\vec u &=\vec u_0, \\ Q_BA_0^{1/2}\vec u-\lambda\rho &=\rho_0, \\ -Q_lA_0^{1/2}\vec u+b_l\vec v_l-\lambda\vec v_l &=\vec v_{l0},\quad l=\overline{1,m}. \end{cases} \tag{4.4}$$

1. Положим в системе (4.4) $\lambda = 0$, $\xi_0 = (\vec{u}_0; \rho_0; \vec{v}_{10}; \ldots; \vec{v}_{m0})^\tau = 0$ и выразим из третьего уравнения поле $\vec{v}_l$. С учетом (3.5) найдем, что $\vec{v}_l = b_l^{-1} Q_l A_0^{1/2}\vec{u} = b_l^{-1} A_l^{1/2}\vec{u}$ $(l = \overline{1,m})$. Используем найденные элементы в первом уравнении системы (4.4); умножим первое уравнение системы скалярно на поле $\vec{u}$, а второе — на функцию ρ. После простых преобразований получим систему

$$\begin{cases} \|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + 2\omega_0 i (S\vec{u}, \vec{u})_H - (Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\vec{u})_H + \displaystyle\sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l}\|A_l^{1/2}\vec{u}\|_H^2 = 0, \\ (Q_B A_0^{1/2}\vec{u}, \rho)_{L_{2,\rho_0(\Omega)}} = \overline{(Q_B^*\rho, A_0^{1/2}\vec{u})_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}} = 0. \end{cases}$$

Из этой системы следует, что $\|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + \sum\limits_{l=1}^m b_l^{-1}\|A_l^{1/2}\vec{u}\|_H^2 = 0$, а значит, $\vec{u} = 0$ в $H_{A_0} = H_{A_l}$. Следовательно, $\vec{v}_l = 0$ $(l = \overline{1,m})$. Из системы (4.4) (при $\lambda = 0$, $\xi_0 = 0$) найдем теперь, что $Q_B^*\rho = 0$. Отсюда следует, что $\rho = 0$, так как $\mathrm{Ker} Q_B^* = \{0\}$. Таким образом, $\xi = 0$, и точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

2. Положим теперь в системе (4.4) $\lambda = b_q$, $\xi_0 = 0$:

$$\begin{cases} A_0^{1/2}\Big[A_0^{1/2}\vec{u} + 2\omega_0 i A_0^{-1/2} S\vec{u} - Q_B^*\rho + \displaystyle\sum_{l=1}^m Q_l^*\vec{v}_l\Big] - b_q\vec{u} = 0, \\ Q_B A_0^{1/2}\vec{u} - b_q\rho = 0, \qquad -Q_q A_0^{1/2}\vec{u} = -A_q^{1/2}\vec{u} = 0, \\ -Q_l A_0^{1/2}\vec{u} + (b_l - b_q)\vec{v}_l = 0, \quad l = \overline{1,m}, \ l \neq q. \end{cases} \tag{4.5}$$

Последовательно из третьего, второго и четвертого уравнений системы (4.5) найдем, что $\vec{u} = 0$, $\rho = 0$, $\vec{v}_l = 0$ $(l \neq q)$. Теперь из первого уравнения из (4.5) следует, что $A_0^{1/2} Q_q^*\vec{v}_q = 0$, а значит, $\vec{v}_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$, и точка $\lambda = b_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3. Покажем теперь, что $b_q \in \rho(\mathcal{A})$. Для этого достаточно установить, в силу формулы (3.18), что в некоторой проколотой окрестности точки $\lambda = b_q$ существует $L^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(H)$. С использованием леммы 3.3 преобразуем пучок $L(\lambda)$ в окрестности точки $\lambda = b_q$ следующим образом:

$$L(\lambda) = \Big[I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A - \frac{1}{\lambda}Q_B^* Q_B + \sum_{l=1, l\neq q}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l\Big] + \frac{1}{b_q - \lambda} Q_q^* Q_q =$$

$$= \frac{1}{b_q - \lambda} Q_q^* Q_q \Big(I + (b_q - \lambda)\big[Q_q^* Q_q\big]^{-1}\Big[I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A - \frac{1}{\lambda} Q_B^* Q_B + \sum_{l=1, l\neq q}^m \frac{1}{b_l - \lambda} Q_l^* Q_l\Big]\Big) =$$

$$=: \frac{1}{b_q - \lambda} Q_q^* Q_q \big(I + G_q(\lambda)\big),$$

где $G_q(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to b_q$. Отсюда и из теоремы об обращении оператора, близкого к единичному, следует требуемое утверждение. $\square$

Приведем известное утверждение об эллиптичности двух специальных краевых задач.

Лемма 4.2.

1°. *Пусть* $a(x)$, $b(x)$, $c(x) \in C(\overline{\Omega})$, $c(x) \neq 0$ $(x \in \overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической при* $a(x) \neq 0$ $(x \in \overline{\Omega})$:

$$\begin{cases} -a(x)\Delta\vec{u}(x) - b(x)\nabla \mathrm{div}\vec{u}(x) + c(x)\nabla p(x) = \vec{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega), \\ c(x)\,\mathrm{div}\vec{u}(x) = q(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \vec{u}(x) = \vec{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega). \end{cases}$$

2°. *Пусть* $a(x)$, $b(x) \in C(\overline{\Omega})$. *Тогда следующая краевая задача является эллиптической если* $a(x) \neq 0$, $a(x) + b(x) \neq 0$ $(x \in \overline{\Omega})$ *и* $2a(x) + b(x) \neq 0$ $(x \in \partial\Omega)$:

$$-a(x)\Delta\vec{u}(x) - b(x)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) = \vec{v}(x) \quad (\textit{в } \Omega), \qquad \vec{u}(x) = \vec{g}(x) \quad (\textit{на } \partial\Omega).$$

Основываясь на лемме 4.2, докажем следующие два утверждения.

Лемма 4.3. $0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Доказательство. Нужно доказать, что существует $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из факторизации (3.12) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса видно, что для этого достаточно установить, что существует $(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$. Проведем дальнейшее доказательство в несколько этапов.

1. Для любого $\vec{u} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с использованием леммы 3.1 имеем

$$\|(I + 2\omega_0 iS_A)\vec{u}\|_H = \|(I + 2\omega_0 iA_0^{-1/2}SA_0^{-1/2})\vec{u}\|_H \leqslant (1 + 2\omega_0\|A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(H)})\|\vec{u}\|_H.$$

Отсюда следует, что для любого $\vec{v} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$

$$\|T\vec{v}\|^2_H = \|(I + 2\omega_0 iS_A)^{-1}\vec{v}\|^2_H \geqslant (1 + 2\omega_0\|A_0^{-1/2}\|^2_{\mathcal{L}(H)})^{-2}\|\vec{v}\|^2_H =: \gamma\|\vec{v}\|^2_H.$$

Отсюда и из соотношения $T + T^* = 2T^*T = 2TT^*$ для любого $w \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\begin{gathered}\|(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)w\|_{\mathcal{H}_0} \cdot \|w\|_{\mathcal{H}_0} \geqslant \mathrm{Re}((\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0} = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \mathrm{Re}(T\mathcal{Q}^*w, \mathcal{Q}^*w)_H = \\ = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + (\frac{1}{2}(T + T^*)\mathcal{Q}^*w, \mathcal{Q}^*w)_H = \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \|T\mathcal{Q}^*w\|^2_H \geqslant \\ \geqslant \|\mathcal{G}^{1/2}w\|^2_{\mathcal{H}_0} + \gamma\|\mathcal{Q}^*w\|^2_H = ((\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0}, \\ \|(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^*w\|_{\mathcal{H}_0} \cdot \|w\|_{\mathcal{H}_0} \geqslant \mathrm{Re}((\mathcal{G} + \mathcal{Q}T^*\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0} \geqslant \cdots \geqslant ((\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w)_{\mathcal{H}_0}.\end{gathered} \tag{4.6}$$

Из (4.6) следует, что для доказательства $(\mathcal{G} + \mathcal{Q}T\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ достаточно установить, что оператор $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ положительно определен или $(\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

2. С этой целью определим операторы

$$\widehat{Q} := \big(Q_1, \ldots, Q_m\big)^{\tau}, \quad \widehat{G} := \mathrm{diag}\big(b_1 I, \ldots, b_m I\big)$$

и перепишем оператор $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ относительно разложения $\mathcal{H}_0 = L_{2,\rho_0}(\Omega) \oplus \widehat{H}$, где $\widehat{H} := \bigoplus\limits_{l=1}^{m} H$, в следующей форме:

$$\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{G}\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -Q_B \\ \widehat{Q}\end{pmatrix} \cdot \big(-Q_B^*, \widehat{Q}^*\big) = \begin{pmatrix} \gamma Q_B Q_B^* & -\gamma Q_B\widehat{Q}^* \\ -\gamma\widehat{Q}Q_B^* & \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^*\end{pmatrix}.$$

Допустим, что существует $(Q_B Q_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Тогда из последнего соотношения найдем следующее разложение оператора $\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ в форме Шура—Фробениуса:

$$\begin{gathered}\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^* = \begin{pmatrix} \gamma Q_B Q_B^* & -\gamma Q_B\widehat{Q}^* \\ -\gamma\widehat{Q}Q_B^* & \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^*\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\widehat{Q}Q_B^*(Q_B Q_B^*)^{-1} & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma Q_B Q_B^* & 0 \\ 0 & \widehat{F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -(Q_B Q_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^* \\ 0 & I\end{pmatrix},\end{gathered} \tag{4.7}$$

где $\widehat{F} := \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* - \gamma\widehat{Q}Q_B^*(Q_B Q_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^*$.

По теореме о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора [20, теорема 2, с. 184] существует единственный частично изометричный оператор U, действующий из H в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$Q_B = U(Q_B^* Q_B)^{1/2} = (Q_B Q_B^*)^{1/2}U, \quad Q_B^* = (Q_B^* Q_B)^{1/2}U^* = U^*(Q_B Q_B^*)^{1/2}, \quad U^*U = P.$$

Здесь P — это оператор ортогонального проектирования пространства H на $H \ominus \mathrm{Ker}Q_B$. Отсюда следует положительная определенность оператора $\widehat{F}$:

$$\widehat{F} = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}\widehat{Q}^* - \gamma\widehat{Q}Q_B^*(Q_B Q_B^*)^{-1}Q_B\widehat{Q}^* = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}(I - U^*U)\widehat{Q}^* = \widehat{G} + \gamma\widehat{Q}(I - P)\widehat{Q}^* \gg 0.$$

Из (4.7) следует, что существует $(\mathcal{G} + \gamma\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$ и лемма будет доказана.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} -\rho_0^{-1}(z)\Big(\mu_0\Delta\vec{u}(x) + \big(\eta_0 + \dfrac{\mu_0}{3}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)\Big) + \nabla\big(a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\rho(x)\big) = \vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ a_\infty\rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(x)\big) = q(x) \quad (\text{в } \Omega), \qquad \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega).\end{cases} \tag{4.8}$$

Система (4.8) — это система Дуглиса—Ниренберга. Краевая задача, отвечающая главной части системы (4.8), имеет вид (первое уравнение умножено на $\rho_0(z)$)

$$\begin{cases} -\Big(\mu_0\Delta\vec{u}(x) + \big(\eta_0 + \dfrac{\mu_0}{3}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)\Big) + a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\nabla\rho(x) = \rho_0(z)\vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ a_\infty\rho_0^{1/2}(z)\mathrm{div}\vec{u}(x) = q(x) \quad (\text{в } \Omega), \qquad\qquad \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega) \end{cases}$$

и является эллиптической в силу леммы 4.2. Из [22] следует, что максимальный оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.8), фредгольмов. С использованием операторов A_0, Q_B, Q_B^* краевую задачу (4.8) можно переписать в следующей операторной форме в гильбертовом пространстве $H_0 = H \oplus L_{2,\rho_0}(\Omega)$ $(H = \vec{L}_2(\Omega,\rho_0))$:

$$B_0\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & -Q_B^*\\ Q_B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_0^{1/2} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \rho\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_0^{1/2}\big(A_0^{1/2}\vec{u} - Q_B^*\rho\big)\\ Q_BA_0^{1/2}\vec{u}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{v}\\ q\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(B_0) = \{\zeta = (\vec{u};\rho)^\tau \in H_0 \mid \vec{u} - A_0^{-1/2}Q_B^*\rho \in \mathcal{D}(A_0)\}.$$

Оператор B_0 является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}B_0 = \{0\}$. Эти факты доказываются по аналогии с соответствующими утверждениями в леммах 3.4 и 4.1. Оператор B_0^* также является максимальным аккретивным оператором, $\mathrm{Ker}B_0^* = \{0\}$. Отсюда и из фредгольмовости оператора B_0 следует, что существует $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$.

4. Докажем теперь, что существует $(Q_BQ_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. Допустим, что это не верно. Тогда существует некомпактная последовательность $\{\rho_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset L_{2,\rho_0}(\Omega)$ такая, что $\|\rho_n\|_{L_{2,\rho_0}(\Omega)} = 1$, $Q_BQ_B^*\rho_n \to 0$ $(n\to+\infty)$ в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$. Определим $\zeta_n := (A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n;\rho_n)^\tau$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $\{\zeta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathcal{D}(B_0)$, так как $[A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n] - A_0^{-1/2}Q_B^*[\rho_n] = 0 \in \mathcal{D}(A_0)$. Кроме того, имеем

$$\zeta_n \nrightarrow 0, \quad B_0\zeta_n = B_0\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}Q_B^*\rho_n\\ \rho_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ Q_BQ_B^*\rho_n\end{pmatrix} \to 0 \quad (n\to+\infty),$$

что противоречит $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(H_0)$. Таким образом, $(Q_BQ_B^*)^{-1} \in \mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))$. □

Определение 4.1. *Существенным спектром* оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (4.1)) назовем множество $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \{\lambda\in\mathbb{C} \mid (\mathcal{A}-\lambda) — \text{нефредгольмов}\}$.

Для описания существенного спектра задачи определим функции

$$\varphi(\lambda) := \mu_0 + \sum_{l=1}^m \frac{\mu_l}{b_l-\lambda}, \quad \psi(\lambda,x) := \eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^m \frac{1}{b_l-\lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big) - \frac{1}{\lambda}\,a_\infty^2\rho_0(z). \tag{4.9}$$

С помощью функций (4.9) определим множества в комплексной плоскости (точнее, на $\mathbb{R}_+$)

$$\begin{aligned} \Lambda_{E,1} &:= \big\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \varphi(\lambda) = 0\big\},\\ \Lambda_{E,2} &:= \big\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \varphi(\lambda) + \psi(\lambda,x) = 0,\ x\in\Omega\big\},\\ \Lambda_L &:= \big\{\lambda\in\mathbb{C}\mid 2\varphi(\lambda) + \psi(\lambda,x) = 0,\ x\in\partial\Omega\big\}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Простые геометрические рассуждения показывают, что множество $\Lambda_{E,1}$ состоит ровно из m различных точек, находящихся на луче $(b_1,+\infty)$ и разделенных точками b_l $(l=\overline{1,m})$. Каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L состоит ровно из $(m+1)$-го отрезка на луче $(0,+\infty)$. Для каждого множества отрезки разделены точками b_l $(l=\overline{1,m})$. Если рассматриваемая система не вращается и находится в невесомости $(\omega_0 = 0,\ g = 0)$, то $\rho_0 = \mathrm{const}$, и каждое из множеств $\Lambda_{E,2}$, Λ_L превращается в набор из $(m+1)$-й точки.

Лемма 4.4. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \Lambda_{E,1}\cup\Lambda_{E,2}\cup\Lambda_L \subset (0,+\infty)$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{gathered} -\frac{1}{\rho_0(z)}\Big[\mu_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{\mu_l}{b_l-\lambda}\Big]\Delta\vec{u}(x) - \frac{1}{\rho_0(z)}\Big[\eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l-\lambda}\Big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\Big)\Big]\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x) + \\ + \frac{1}{\lambda}\nabla\Big[\frac{a_\infty^2}{\rho_0(z)}\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(x)\big)\Big] - 2\omega_0\big(\vec{u}(x)\times\vec{e}_3\big) - \lambda\vec{u}(x) = \vec{v}(x) \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{u}(x) = 0 \quad (\text{на } \partial\Omega). \end{gathered} \tag{4.11}$$

Из (4.9), (4.10) и леммы 4.2 найдем, что краевая задача (4.11) является эллиптической. Из [22] следует, что оператор, являющийся L_2-реализацией краевой задачи (4.11), фредгольмов. С использованием введенных ранее операторов и пучка (4.3) можно проверить, что краевую задачу (4.11) можно переписать в виде $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}\vec{u} = \vec{v}$. Таким образом, оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [15, лемма 1, с. 52] следует, что оператор $A_0^{1/2}L(\lambda)A_0^{1/2}$ фредгольмов как оператор, действующий из H_{A_0} в $H_{A_0}^*$ ($H_{A_0}^*$ — пространство, сопряженное к H_{A_0} относительно скалярного произведения в H). Следовательно, оператор $L(\lambda)$ также фредгольмов в $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$.

Из [21, теорема 3.1, с. 374] (теорема о произведении фредгольмовых операторов) и факторизации (3.11) теперь найдем, что оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A_0^{-1} + 2\omega_0 i S_A & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^*\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G})\mathcal{Q} & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{G}) = (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}$, $S_A = A_0^{-1/2}SA_0^{-1/2}$, фредгольмов. Следовательно, для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ получаем включение $\sigma_{ess}(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$.

Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным, а оператор $\mathcal{A}$ имеет регулярные точки. Отсюда и из [8, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \in \Lambda_{E,1} \cup \Lambda_{E,2} \cup \Lambda_L$. В этом случае получим противоречие, так как регулярные точки (отличные от $0, b_1, \cdots, b_m$) и изолированные собственные значения конечной кратности оператора $\mathcal{A}$ являются регулярными и изолированными собственными значениями конечной кратности для пучка $L(\lambda)$ (см. (3.18) и лемму 4.10). □

4.3. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности.

Из леммы 3.4 следует, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$. Докажем, что спектр оператора $\mathcal{A}$ лежит в правой открытой полуплоскости.

Лемма 4.5. $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}\lambda > 0\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \ldots, b_m\}$. Тогда λ, являющееся собственным значением оператора $\mathcal{A}$, является также собственным значением пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)). То есть, существует $0 \neq \vec{z} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ такой, что $L(\lambda)\vec{z} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\vec{z}$, получим уравнение, которому удовлетворяет λ:

$$1 - \lambda p + 2\omega_0 i s - \frac{1}{\lambda}\,q_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{b_l - \lambda} = 0, \tag{4.12}$$

$$p := \frac{\|A_0^{-1/2}\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad s := \frac{(S_A\vec{z}, \vec{z})_H}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad q_0 := \frac{\|Q_B\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2}, \quad q_l := \frac{\|Q_l\vec{z}\|_H^2}{\|\vec{z}\|_H^2} \ \ (l = \overline{1,m}).$$

Выделим действительную и мнимую части из (4.12):

$$1 - p\operatorname{Re}\lambda - q_0\frac{\operatorname{Re}\lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l(b_l - \operatorname{Re}\lambda)}{|b_l - \lambda|^2} = 0, \tag{4.13}$$

$$-p\mathrm{Im}\lambda + 2\omega_0 s + q_0\frac{\mathrm{Im}\lambda}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{q_l\mathrm{Im}\lambda}{|b_l-\lambda|^2} = 0. \tag{4.14}$$

Учитывая, что $p>0$, из (4.13) и леммы 4.3 следует утверждение леммы. □

Лемма 4.6. *Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ существует $R=R(\varepsilon)>0$ такое, что весь спектр оператора $\mathcal{A}$ принадлежит множеству $\Lambda_\varepsilon\cup C_R$, где $\Lambda_\varepsilon := \{\,|\arg\lambda|<\varepsilon\}$, $C_R := \{\,|\lambda|<R\}$. Более того, спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_n^{(+\infty)}\}_{n=1}^{\infty}$, расположенных в Λ_ε со следующей асимптотикой*:

$$\lambda_n^{(+\infty)} = \lambda_n(A_0)(1+o(1)) \quad (n\to+\infty),$$

$$\lambda_n(A_0) = \Big[\frac{2\mu_0^{-3/2}+\zeta_0^{-3/2}}{6\pi^2}\int_\Omega \rho_0^{3/2}(z)\,d\Omega\Big]^{-2/3} n^{2/3}(1+o(1)) \ \Big(\zeta_0 := \eta_0+\frac{4\mu_0}{3}\Big) \quad (n\to+\infty).$$

Доказательство. Оператор S_A компактен, $\mathrm{Ker}A_0^{-1}=\{0\}$, следовательно (см. [11, лемма 3.1, с. 15]), $\|(I-\lambda A_0^{-1})^{-1}S_A\|_H\to 0$ при $\lambda\to\infty$, $\lambda\in\mathbb{C}\backslash\Lambda_\varepsilon$. Отсюда следует, что существует $R=R(\varepsilon)$ такое, что пучок $L(\lambda)$ из (4.3) непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon\cup C_R)$. Наличие соответствующей ветви собственных значений и ее асимптотика следует из степенной асимптотики собственных значений оператора A_0 и теоремы А. С. Маркуса—В. И. Мацаева [12]. Асимптотика собственных значений оператора A_0 следует из [4, с. 10]. □

Лемма 4.7. *Для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ спектр $\sigma(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$, за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, лежит в полосе $\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\lambda>0,\ |\mathrm{Im}\lambda|\leqslant 2\omega_0+\varepsilon\}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, очевидно, что ветвь собственных значений из леммы 4.6 попадает в указанную область. Пусть λ — собственное значение из указанной ветви, а $\vec{z}$ — соответствующий ему собственный элемент пучка $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda)\vec{z}=0$. Умножив последнее равенство скалярно на $\vec{z}$ и выделив из полученного соотношения действительную и мнимую части, получим равенства (4.13) и (4.14) соответственно. Из (4.14) с учетом (4.13) найдем:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}\lambda| &= |2\omega_0 s|\cdot\Big|-p+\frac{q_0}{|\lambda|^2}+\sum_{l=1}^{m}\frac{q_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|^{-1} = \\ &= \frac{2\omega_0|s|\mathrm{Re}\lambda}{\Big|2p\mathrm{Re}\lambda-1-\sum\limits_{l=1}^{m}\frac{q_lb_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|} = 2\omega_0\cdot\frac{|s|}{p}\cdot\frac{p\mathrm{Re}\lambda}{\Big|2p\mathrm{Re}\lambda-1-\sum\limits_{l=1}^{m}\frac{q_lb_l}{|b_l-\lambda|^2}\Big|}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Из леммы 3.1 получим, что $|s|p^{-1} = (SA_0^{-1/2}\vec{z},A_0^{-1/2}\vec{z})_H\|A_0^{-1/2}\vec{z}\|_H^{-2}\leqslant 1$. Из (4.13) следует, что $p\mathrm{Re}\lambda\to 1$ при $\lambda\to\infty$. Теперь из (4.15) следует, что $|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant 2\omega_0+\varepsilon$, если только λ — достаточно большое по абсолютной величине собственное значение. □

4.4. Локализация спектра в случае $\omega_0=0$. В следующих двух утверждениях установим локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$ в случае, когда в системе отсутствует вращение, т. е., когда $\omega_0=0$. Рассуждения будут основаны на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1, 24]. В связи с этим обстоятельством будем считать, что $\mathcal{H}=\mathcal{H}_+\oplus\mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := H = \vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_0$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I,-\mathcal{I}_0)$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1,\xi_2] := (\mathcal{J}\zeta_1,\zeta_2)_{\mathcal{H}} = (\vec{v}_1,\vec{v}_2)_{\mathcal{H}_+}-(w_1,w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H}=\mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H}=\mathcal{H}_-$. Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi,\xi]\geqslant 0$ для любого $\xi\in L_+$, и *максимальным неотрицательным* ($L_+\in\mathfrak{M}^+$), если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-.

Известно (см. [1, с. 70]), что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ ($\|K_+\| \leqslant 1$) такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, с. 84]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) ($\mathcal{A} \in (H)$), если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Лемма 4.8. *В случае $\omega_0 = 0$ спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества собственных значений, расположенных симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Из факторизации (3.12) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса и положительной определенности оператора $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* \gg 0$ (см. лемму 4.3) найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I} \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A_0^{-1}, (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}A_0^{-1/2} & \mathcal{I} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_0^{-1} - A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & -A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \\ (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} & (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных собственных значений. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [1, следствие 5.21, с. 245]). В самом деле, из компактности оператора $A_0^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, с. 287]), оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+(\mathcal{A}^{-1}), L_-(\mathcal{A}^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\|K_+\| \leqslant 1$ и

$$L_+(\mathcal{A}^{-1}) = \big\{(\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- | \ (\vec{u}; w)^\tau = (\vec{u}; K_+\vec{u})^\tau, \ \vec{u} \in \mathcal{H}_+\big\}.$$

Пусть $(\vec{u}_1; w_1)^\tau = (\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau \in L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau = (\vec{u}_2; K_+\vec{u}_2)^\tau$. Отсюда и из (4.16) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+ &= -(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2} + \\ &+ K_+\big(A_0^{-1} - A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A_0^{-1/2}\big) - K_+A_0^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Отсюда и из $A_0^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$. □

Лемма 4.9. *Пусть $\omega_0 = 0$ и λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда*

$$\gamma_1 < \mathrm{Re}\lambda_0 < \gamma_2, \quad |\lambda_0|^2 < \big(b_m + 2c + 2(c^2 + b_m c)^{1/2}\big)\big(2b_m + c\big),$$

$$\gamma_1 := \big[2\|A_0^{-1/2}\|^2\big]^{-1}, \quad \gamma_2 := b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}, \quad c := \|Q_B\|^2_{\mathcal{L}(L_{2,\rho_0}(\Omega))} + \sum_{l=1}^m \|Q_l\|^2_{\mathcal{L}(H)}.$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, если выполнено условие

$$2\|A_0^{-1/2}\|^2 \leqslant \big(b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}\big)^{-1}. \tag{4.18}$$

Доказательство. Поскольку $\omega_0 = 0$ и λ_0 — невещественное собственное значение оператора $\mathcal{A}$, тогда λ_0 есть корень уравнения (4.12) при некотором фиксированном $\vec{z} = \vec{z}_0$. Перепишем уравнение (4.12) в следующих формах:

$$0 = 1 - \lambda p - \frac{1}{\lambda}\Big(\widehat{q} - \sum_{l=1}^{m} \frac{\widehat{q}_l}{b_l - \lambda}\Big), \quad \widehat{q} := q_0 + \sum_{l=1}^{m} q_l, \quad \widehat{q}_l := b_l q_l \quad (l = \overline{1,m}),$$

$$0 = (\lambda - \lambda^2 p - \widehat{q}) \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) + \sum_{l=1}^{m} \widehat{q}_l \prod_{k \neq l}^{m} (b_k - \lambda) =$$

$$= -p(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^m \lambda^{m+1}\Big[1 + p\sum_{l=1}^{m} b_l\Big] - (-1)^m \lambda^m \Big[\widehat{q} + \sum_{l=1}^{m} b_l + p\sum_{i<j} b_i b_j\Big] + \ldots . \quad (4.19)$$

Уравнение (4.12) имеет m действительных корней, которые мы обозначим через λ_l ($\lambda_l \in (b_{l-1}, b_l)$, $l = \overline{1,m}$, $b_0 := 0$), и еще два корня — λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0 := \mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0 := \mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0 = -p\prod_{l=1}^{m} (\lambda_l - \lambda)\big((\lambda - \xi_0)^2 + \eta_0^2\big) = -p(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^m \lambda^{m+1} p\Big[2\xi_0 + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l\Big] -$$

$$- (-1)^m \lambda^m p\Big[(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^{m} \lambda_l + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j\Big] + \ldots . \quad (4.20)$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{m+1} и λ^m из (4.19) и (4.20), получим

$$2\xi_0 + \sum_{l=1}^{m} \lambda_l = \frac{1}{p} + \sum_{l=1}^{m} b_l, \quad (4.21)$$

$$(\xi_0^2 + \eta_0^2) + 2\xi_0 \sum_{l=1}^{m} \lambda_l + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j = \frac{\widehat{q}}{p} + \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{m} b_l + \sum_{i<j} b_i b_j. \quad (4.22)$$

Из (4.21) следует, что $2\mathrm{Re}\lambda_0 = 2\xi_0 = p^{-1} + \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda_l) > p^{-1} \geqslant \|A_0^{-1/2}\|^2$, и оценка снизу на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Далее мы следуем идеям из [24, с. 378]. Обозначим $\delta := 2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l - \lambda_l)$, $\omega := (2p)^{-1}$, тогда $\xi_0 = \omega + \delta$ (см. (4.21)). Выразим из (4.21) $\sum_{l=1}^{m} \lambda_l$ и подставим его в (4.22). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2 + 2\delta \sum_{l=1}^{m} \lambda_l - \sum_{i<j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) = -\omega^2 + 2\omega(\delta + \widehat{q}) - \delta^2. \quad (4.23)$$

Из условия $\lambda_l \in (b_{l-1}, b_l)$, $l = \overline{1,m}$ ($b_0 = 0$) можно вывести оценку [24, формула (5.24), с. 380]:

$$\sum_{i<j} (b_i b_j - \lambda_i \lambda_j) < \sum_{j=1}^{m} (b_j - \lambda_j)\Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\Big) = 2\delta \sum_{l=1}^{m} \lambda_l. \quad (4.24)$$

Из (4.24) следует положительность правой части в (4.23), а значит, $\omega < \delta + \widehat{q} + (2\delta\widehat{q} + \widehat{q}^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0 = \xi_0 < 2\delta + \widehat{q} + (2\delta\widehat{q} + \widehat{q}^2)^{1/2} \leqslant b_m + c + (c^2 + b_m c)^{1/2}$, $c = \|Q_B\|^2 + \sum_{l=1}^{m} \|Q_l\|^2$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (4.18), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее, выразим из (4.22) $(\xi_0^2 + \eta_0^2) = |\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (4.21). С использованием оценки (4.24) получим, что $|\lambda_0|^2 < 2\omega(q + 4\delta)$. После простых оценок отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. $\square$

4.5. О представлении решения эволюционной задачи и его стабилизации. Из лемм 3.4 и 4.5 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы, и эта полугруппа имеет отрицательный тип, так как $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$ (см., например, [29, теорема 4.3, с. 118]). Это обстоятельство позволяет применить к задаче (3.10) (а затем и к задаче (3.6)) соответствующие теоремы о представлении решения эволюционного уравнения и об асимптотическом поведении этого решения.

По краевой задаче (3.1) определим оператор

$$A := A\Big(\mu_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu_l}{b_l}, \eta_0 + \frac{\mu_0}{3} + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l}\big(\eta_l + \frac{\mu_l}{3}\big)\Big),$$

с помощью которого можно существенно упростить формулы следующей теоремы при $\omega_0 = 0$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условию теоремы* 3.1. *Тогда сильное решение задачи* (3.6) *представимо в виде*

$$\begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \mathcal{U}(t) \begin{pmatrix} \vec{u}^0 \\ \rho^0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \begin{pmatrix} \vec{f}(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds,$$

$$\mathcal{U}(t) := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \begin{pmatrix} \lambda^2 A_0^{-1/2} L^{-1}(\lambda) A_0^{-1/2} & -\lambda A_0^{-1/2} L^{-1}(\lambda) Q_B^* \\ \lambda Q_B L^{-1}(\lambda) A_0^{-1/2} & Q_B L^{-1}(\lambda) Q_B^* - \lambda I \end{pmatrix} d\lambda,$$

где контур Γ *является границей сектора* $\Lambda_{\omega,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda - \omega)| < \theta\}$ *и ориентирован так, что* $\mathrm{Im}\lambda$ *убывает при его обходе. Числа* $\omega > 0$ *и* $\theta \in (0, \pi/2)$ *выбраны так, чтобы* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega,\theta}$ (*см. леммы* 3.4, 4.5). *При этом*

$$\lim_{t\to+\infty} \vec{f}(t) = \vec{f} \implies \lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A_0^{-1/2} M \Big(M^{-1} - Q_B^* \big(Q_B M Q_B^*\big)^{-1} Q_B\Big) M A_0^{-1/2} \vec{f} \\ -\big(Q_B M Q_B^*\big)^{-1} Q_B M A_0^{-1/2} \vec{f} \end{pmatrix},$$

$$M := \Big(I + \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{b_l} Q_l^* Q_l + 2\omega_0 i S_A\Big)^{-1}.$$

Если $\omega_0 = 0$, *то*

$$\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} \vec{u}(t) \\ \rho(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}\big(I - P\big)A^{-1/2}\vec{f} \\ -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1} BA^{-1}\vec{f} \end{pmatrix},$$

где P — *ортопроектор пространства* $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ *на* $H \ominus \mathrm{Ker}(BA^{-1/2})$. *Если предположить дополнительно, что* $\vec{f} = \nabla q$, *то*

$$\vec{u} = 0, \quad \rho = \frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\Big(q - \int_\Omega \rho_0(z) q \, d\Omega \Big[\int_\Omega \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big).$$

Доказательство. **1**. Пусть $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A_0)$, $\rho^0 \in \mathcal{D}(B^*)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условию теоремы 3.1. Тогда по теореме 3.1 задача Коши (3.6) имеет единственное сильное решение $\zeta(t) = (\vec{u}(t); \rho(t))^\tau$, а построенная по $\zeta(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (3.10). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\, ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{-\lambda t} (\mathcal{A} - \lambda)^{-1} \xi^0 \, d\lambda, \tag{4.25}$$

где контур Γ выбирается как описано в условии теоремы. Дальнейшее доказательство состоит в простых вычислениях с использованием в (4.25) формулы (3.18), формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$ и $\xi(t)$.

2. Из условий теоремы следует, что $\mathcal{F}(t) \to \mathcal{F} := (\vec{f}; 0)^\tau$ при $t \to +\infty$. Из лемм 3.4 и 4.5 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор голоморфной полугруппы и справедливо включение $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Отсюда следует (см. [29, теорема 4.3, с. 118]), что соответствующая полугруппа имеем отрицательный тип. По теореме [29, теорема 4.4, с. 119] $\xi(t) \to \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ при $t \to +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}\mathcal{X}=\mathcal{F}$. Полагая в (4.4) $\lambda=0$, $\xi=\mathcal{X}$, $\xi_0=\mathcal{F}$ найдем, что

$$\begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I+\sum\limits_{l=1}^{m} b_l^{-1}Q_l^*Q_l+2\omega_0 iS_A & -Q_B^* \\ Q_B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_B M A_0^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{1/2}M^{-1}A_0^{1/2} & 0 \\ 0 & Q_BMQ_B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -A_0^{-1/2}MQ_B^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим

$$\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & A_0^{-1/2}MQ_B^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2} & 0 \\ 0 & (Q_BMQ_B^*)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q_BMA_0^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_0^{-1/2}M\Big(M^{-1}-Q_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_B\Big)MA_0^{-1/2}\vec{f} \\ -\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\vec{f} \end{pmatrix}.$$

3. Пусть теперь $\omega_0=0$. Проведем ряд вычислений, воспользовавшись тем, что если два ограниченных оператора совпадают на некотором плотном в пространстве множестве, то они совпадают:

$$M^{-1}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = I+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}Q_l^*Q_l\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = I+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}A_0^{-1/2}A_lA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} =$$
$$= A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})} = (A^{1/2}A_0^{-1/2})^*(A^{1/2}A_0^{-1/2})\Big|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})},$$
$$M=\big(I+\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{b_l}Q_l^*Q_l\big)^{-1} = (A^{1/2}A_0^{-1/2})^{-1}\big((A^{1/2}A_0^{-1/2})^*\big)^{-1} = (A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*,$$
$$A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2} = A_0^{-1/2}(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*A_0^{-1/2} = A^{-1},$$
$$A_0^{-1/2}MQ_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_0^{-1/2}(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*(BA_0^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} =$$
$$= A^{-1}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = A^{-1/2}(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)},$$
$$Q_BMQ_B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = (BA_0^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*(BA_0^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} =$$
$$= BA^{-1}B^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} = (BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)},$$
$$Q_BMA_0^{-1/2} = (BA_0^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})(A_0^{1/2}A^{-1/2})^*A_0^{-1/2} = BA^{-1} = (BA^{-1/2})A^{-1/2}.$$

По теореме [20, теорема 2, с. 184] о полярном разложении плотно определенного замкнутого оператора существует единственный частично изометричный оператор U, действующий из H в $L_{2,\rho_0}(\Omega)$, такой, что

$$(BA^{-1/2}) = \big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{1/2}U, \quad (BA^{-1/2})^* = U^*\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{1/2}, \quad U^*U=P.$$

Здесь P — это оператор ортогонального проектирования пространства H на $H\ominus \mathrm{Ker}(BA^{-1/2})$.

С использованием проведенных вычислений теперь найдем, что

$$\vec{u} = A_0^{-1/2}M\Big(M^{-1}-Q_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_B\Big)MA_0^{-1/2}\vec{f} =$$
$$= \Big(A_0^{-1/2}MA_0^{-1/2}-A_0^{-1/2}MQ_B^*\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\Big)\vec{f} =$$
$$= \Big(A^{-1}-A^{-1/2}(BA^{-1/2})^*\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}(BA^{-1/2})A^{-1/2}\Big)\vec{f} =$$
$$= A^{-1/2}\big(I-U^*U\big)A^{-1/2}\vec{f} = A^{-1/2}\big(I-P\big)A^{-1/2}\vec{f},$$
$$\rho = -\big(Q_BMQ_B^*\big)^{-1}Q_BMA_0^{-1/2}\vec{f} = -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}BA^{-1}\vec{f}.$$

4. Предположим теперь, что $\vec{f} = \nabla q$. Тогда мы можем записать поле $\vec{f}$ следующим образом:

$$\vec{f} = \nabla q = \nabla\Big(q - \int\limits_\Omega \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_\Omega \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big) =$$

$$= -\nabla\left(\frac{a_\infty}{\rho_0^{1/2}(z)}\Big\{-\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\Big(q - \int\limits_\Omega \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_\Omega \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big)\Big\}\right) = B^* p,$$

$$p := -\frac{\rho_0^{1/2}(z)}{a_\infty}\Big(q - \int\limits_\Omega \rho_0(z) q\, d\Omega \Big[\int\limits_\Omega \rho_0(z)\, d\Omega\Big]^{-1}\Big) \in \mathcal{D}(B^*).$$

Из этого представления, учитывая, что $(BA^{-1/2})^* p \in \overline{\mathrm{Im}(BA^{-1/2})^*} = H \ominus \mathrm{Ker}(BA^{-1/2})$ и, соответственно, $P(BA^{-1/2})^* p = (BA^{-1/2})^* p$, теперь найдем

$$\vec{u} = A^{-1/2}\big(I - P\big)A^{-1/2} B^* p = A^{-1/2}\big(I - P\big)(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = 0,$$

$$\rho = -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1} BA^{-1} B^* p =$$

$$= -\big((BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\big)^{-1}(BA^{-1/2})(BA^{-1/2})^*\Big|_{\mathcal{D}(B^*)} p = -p.$$

Теорема доказана. □

4.6. Теорема о кратной базисности для специальной системы элементов в случае $\omega_0 = 0$, $g = 0$. Разложение решения эволюционной задачи. Дадим следующее определение.

Определение 4.2 (см. [11, с. 61])**.** Пусть λ_0 — собственное значение, а $\vec{z}_0$ — отвечающий ему собственный элемент оператор-функции $L(\lambda)$, т. е. $L(\lambda_0)\vec{z}_0 = 0$. Элементы $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ называют *присоединенными* к собственному элементу $\vec{z}_0$, если $\sum\limits_{k=0}^{j} (k!)^{-1} L^{(k)}(\lambda_0)\vec{z}_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной цепочки* $\vec{z}_0, \vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов.

В работе [6] установлена следующая лемма о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ (задачи (4.1)) и пучка $L(\lambda)$ (см. (4.3)).

Лемма 4.10. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\vec{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов оператора $\mathcal{A}$, отвечающей собственному значению λ_0 $(\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m)$, тогда $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A_0^{1/2}\vec{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0, тогда $\{\xi_k = (A_0^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum\limits_{l=0}^{k} (\mathcal{G} - \lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l$, — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов оператора $\mathcal{A}$.

Рассмотрим пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с индефинитным скалярным произведением (см. п. 4.4). Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти $\mathcal{J}$-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})|\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}, \quad \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)|\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}.$$

Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Т. Я. Азизова [1, теорема 2.12, с. 271] установим следующую теорему в случае, когда $\omega_0 = 0$, $g = 0$.

Теорема 4.2. *Имеют место следующие утверждения.*

1°. $\operatorname{codim} \mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \operatorname{codim} \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2°. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) | \lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — *невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 — *числа, определенные в лемме* 4.9.
3°. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.
4°. *Если* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$ (*соответственно,* $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$), *то в* $\mathcal{H}$ *существует почти* $\mathcal{J}$*-ортонормированный* p*-базис* (*при* $p > 3$), *составленный из собственных* (*соответственно, корневых*) *элементов оператора* $\mathcal{A}$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то указанный базис из собственных элементов будет* $\mathcal{J}$*-ортонормированным.*

Доказательство. В лемме 4.8 установлено, что $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$. Кроме того, из (4.17) следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3$, поскольку $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 3/2$, согласно лемме 4.6. Из леммы 4.4 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ (при $\omega_0 = 0$, $g = 0$) имеет конечное количество точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Т. Я. Азизова. Применим эту теорему к оператору $\mathcal{A}^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует 1°.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H} \iff \operatorname{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) | \lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, замечание 3.8, с. 271] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1} \in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1}) = \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ для $\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda = \overline{\lambda} \in \sigma_p(\mathcal{A})$, $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено. В силу леммы 4.10 это эквивалентно тому, что в $\operatorname{Ker} L(\lambda)$ существует такой элемент $\vec{z}_0$, что элемент $\xi_0 = (A_0^{-1/2}\vec{z}_0; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi = (A_0^{-1/2}\vec{z}; (\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z})^\tau$, где $\vec{z} \in \operatorname{Ker} L(\lambda)$, т. е. $[\xi_0, \xi] = 0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}\big)_H = 0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$, $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0, \vec{z}_0\big)_H = 0$. Таким образом, λ есть кратный корень уравнения (4.12) при $\vec{z} = \vec{z}_0$. Полагая в формуле (4.20) леммы 4.9 $\eta_0 = 0$ и считая, что ξ_0 и есть этот кратный корень, найдем, что $\lambda \in (\gamma_1, \gamma_2)$.

Из лемм 4.1, 4.3 следует, что $\sigma(\mathcal{G}) = \{0, b_1, \cdots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$, а значит, $\{0, b_1, \cdots, b_m\} \cap s(\mathcal{A}) = \varnothing$. Таким образом, $s(\mathcal{A}) \subset (\gamma_1, \gamma_2)$, и утверждение 2° доказано.

3. Первые части утверждений 3° и 4° — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Т. Я. Азизова. Если $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, то $s(\mathcal{A}) = \varnothing$, и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$, и соответствующий p-базис (при $p > 3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. □

Пусть $\omega_0 = 0$, $g = 0$. Будем считать, что $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, тогда по теореме 4.2 существует $\mathcal{J}$-ортонормированный p-базис (при $p > 3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По лемме 4.10 этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{gathered}\Big\{\xi_k^\pm := \big(A_0^{-1/2}\vec{z}_k^\pm; (\mathcal{G} - \lambda_k^\pm)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_k^\pm\big)^\tau\Big\}_{k=1}^\infty, \\ \xi_k^\pm \in L_\pm(\mathcal{A}^{-1}), \quad [\xi_k^+, \xi_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\xi_k^-, \xi_j^-] = -\delta_{kj}, \quad [\xi_k^+, \xi_j^-] = 0,\end{gathered} \tag{4.26}$$

где собственные значения λ_k^+ составляют ветвь из леммы 4.6.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (3.10) в форме

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^\infty c_k^+(t)\xi_k^+ + \sum_{j=1}^\infty c_j^-(t)\xi_j^-, \quad c_k^+(0) = [\xi^0, \xi_k^+], \quad c_j^-(0) = -[\xi^0, \xi_j^-]. \tag{4.27}$$

Из (3.10), (4.26), (4.27), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_k^+ t}[\xi^0, \xi_k^+] + \int_0^t e^{-\lambda_k^+(t-s)}[\mathcal{F}(s), \xi_k^+]\,ds\Big)\xi_k^+ -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty}\Big(e^{-\lambda_j^- t}[\xi^0, \xi_j^-] + \int_0^t e^{-\lambda_j^-(t-s)}[\mathcal{F}(s), \xi_j^-]\,ds\Big)\xi_j^-, \qquad (4.28)$$

$$[\xi^0, \xi_k^\pm] = \big(\vec{u}^0, A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_H - \frac{1}{\lambda_k^\pm}\big(\rho^0, Q_B\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}, \quad [\mathcal{F}(t), \xi_k^\pm] = \big(\vec{f}(t), A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_H, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из (4.28), (3.5) получим в явном виде разложение решения $\vec{u}(t)$, $\rho(t)$ задачи (3.6) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\vec{z}_k^{\,\pm}\}_{k=1}^{+\infty}$, связанных с $\mathcal{J}$-ортонормированным базисом (4.26):

$$\begin{pmatrix}\vec{u}(t)\\ \rho(t)\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k^+(t)\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,+}\\ (\lambda_k^+)^{-1}BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,+}\end{pmatrix} - T_k^-(t)\begin{pmatrix}A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,-}\\ (\lambda_k^-)^{-1}BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,-}\end{pmatrix}\right),$$

$$T_k^\pm(t) := e^{-\lambda_k^\pm t}\left(\big(\vec{u}^0, A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_H - \frac{1}{\lambda_k^\pm}\big(\rho^0, BA_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_{L_{2,\rho_0}(\Omega)}\right) + \int_0^t e^{-\lambda_k^\pm(t-s)}\big(\vec{f}(s), A_0^{-1/2}\vec{z}_k^{\,\pm}\big)_H\,ds.$$

Автор приносит благодарность проф. Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1998. — *6*. — С. 5–33.
3. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
4. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. мат. ан. — 1977. — *14*. — С. 5–58.
5. *Голдстейн Дж. А.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
6. *Закора Д. А.* Операторный подход к модели Ильюшина вязкоупругого тела параболического типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *57*. — С. 31–64.
7. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
8. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. *Копачевский Н. Д, Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
10. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
11. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
12. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
13. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой жидкости в открытом сосуде// Усп. мат. наук. — 1989. — *44*, № 4.
14. *Милославский А. И.* Спектр малых колебаний вязкоупругой наследственной среды// Докл. АН СССР. — 1989. — *309*, № 3. — С. 532–536.
15. *Михлин С. Г.* Спектр пучка операторов теории упругости// Усп. мат. наук. — 1973. — *28*, № 3. — С. 43–82.
16. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина—Фойгта и жидкостей Олдройта// Тр. МИАН. — 1989. — *179*. — С. 126–164.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса—Л. Ниренберга. II// Тр. МИАН. — 1966. — *92*. — С. 233–297.

19. *Фрейденталь А., Гейрингер Х.* Математические теории неупругой сплошной среды. — М.: Физматгиз, 1962.
20. *Birman M. Sh., Solomjak M. Z.* Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space. — Dordrecht—Boston—Lancaser—Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1987.
21. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
22. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227*. — C. 247–276.
23. *Kelvin (Thomson) W.* On the theory viscoelastic fluids// Math. A. Phys. Pap. — 1875. — *3*. — C. 27–84.
24. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-adjoint problems for viscous fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
25. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1867. — *157*. — C. 49–88.
26. *Maxwell J. C.* On the dynamical theory of gases// Philos. Mag. — 1868. — *35*. — C. 129–145.
27. *Oldroyd J. G.* On the formulation of rheological equations of state// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1950. — *A200*. — C. 523–541.
28. *Oldroyd J. G.* The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1953. — *A218*. — C. 122–137.
29. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
30. *Voight W.* Uber die innere Reibung der fasten Korper, inslesondere der krystalle// Gottinden Abh. — 1889. — *36*, № 1. — C. 3–47.
31. *Voight W.* Uber innex Reibung faster Korper, insbesondere der Metalle// Ann. Phys. U. Chem. — 1892. — *47*, № 9. — C. 671–693.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

V. I. Vernadsky Crimean Federal University
Vernadsky Avenue, 4, Simferopol, 295007, Russia;
Voronezh State University
Universitetskaya Square, 1, Voronezh, 1394006, Russia

UDC 517.984.48:532.135

Model of the Oldroyd Compressible Fluid

© 2016 **D. A. Zakora**

Abstract. In this paper, mathematical models of compressible viscoelastic Maxwell, Oldroyd, and Kelvin–Voigt fluids are derived. A model of rotating viscoelastic barotropic Oldroyd fluid is studied. A theorem on strong unique solvability of the corresponding initial-boundary value problem is proved. The spectral problem associated with such a system is studied. Results on the spectrum localization, essential and discrete spectra, and spectrum asymptotics are obtained. In the case where the system is in the weightlessness state and does not rotate, results on multiple completeness and basisness of a special system of elements are proved. In such a case, under condition of sufficiently large viscosity, expansion of the solution of the evolution problem with respect to a special system of elements is obtained.

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Foundations of Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metrics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevskiy and L. D. Orlova, "Evolyutsionnye i spektral'nye zadachi, porozhdennye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolution and spectral problems generated by the problem of small movements of viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint-Petersburg Math. Soc.], 1998, **6**, 5–33 (in Russian).
3. Yu. M. Berezanskiy, *Razlozhenie po sobstvennym funktsiyam samosopryazhennykh operatorov* [Expansion in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators], Naukova dumka, Kiev, 1965 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotics of spectra of differential equations] *Totals Sci. Tech. VINITI. Ser. Math. Anal.*, 1977, **14**, 5–58 (in Russian).
5. Dzh. A. Goldsteyn, *Polugruppy lineynykh operatorov i ikh prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Their Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (in Russian).
6. D. A. Zakora, "Operatornyy podkhod k modeli Il'yushina vyazkouprugogo tela parabolicheskogo tipa" [Operator approach to the Il'yushin model of viscoelastic body of parabolic type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **57**, 31–64 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, "Issledovanie nachal'no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel'vina—Foygta" [Investigation of initial-boundary value problems for Kelvin–Voigt mathematical models of motion of fluids], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (in Russian).
9. N. D. Kopachevskiy, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye metody v lineynoy gidrodinamike: evolyutsionnye i spektral'nye zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
10. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
11. A. S. Markus, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu polinomial'nykh operatornykh puchkov* [Introduction to Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils], Shtiintsa, Kishinev, 1986 (in Russian).
12. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teorema o sravnenii spektrov i spektral'naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha" [Theorem on comparison of spectra and spectral asymptotics for the M. V. Keldysh Pencil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
13. A. I. Miloslavskiy "Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy zhidkosti v otkrytom sosude" [Spectrum of small oscillation of viscoelastic fluid in open vessel], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1989, **44**, No. 4 (in Russian).
14. A. I. Miloslavskiy, "Spektr malykh kolebaniy vyazkouprugoy nasledstvennoy sredy" [Spectrum of small oscillations of viscoelastic inheritance medium], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **309**, No. 3, 532–536 (in Russian).
15. S. G. Mikhlin, "Spektr puchka operatorov teorii uprugosti" [Spectrum of the operator pencil from the elasticity theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1973, **28**, No. 3, 43–82 (in Russian).
16. A. P. Oskolkov, "Nachal'no-kraevye zadachi dlya uravneniy dvizheniy zhidkostey Kel'vina—Foygta i zhidkostey Oldroyta" [Initial-boundary value problems for equations of motion for Kelvin–Voigt and Oldroyd fluids], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1989, **179**, 126–164 (in Russian).
17. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematical Physics and Technics], Mir, Moscow, 1985 (in Russian).
18. V. A. Solonnikov, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya sistem, ellipticheskikh v smysle A. Daglisa—L. Nirenberga. II" [On general boundary-value problems for elliptic systems in the A. Douglis–L. Nirenberg sense] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1966, **92**, 233–297 (in Russian).
19. A. Freydental' and Kh. Geyringer, *Matematicheskie teorii neuprugoy sploshnoy sredy* [Mathematical Theories of Nonelastic Continuous Medium], Fizmatgiz, Moscow, 1962 (in Russian).
20. M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak, *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht–Boston–Lancaser–Tokyo, 1987.
21. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1990.

22. G. Grubb and G. Geymonat, “The essential spectrum of elliptic systems of mixed order,” *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
23. W. Kelvin (Thomson), “On the theory viscoelastic fluids,” *Math. A. Phys. Pap.*, 1875, **3**, 27–84.
24. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself-Adjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2003.
25. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1867, **157**, 49–88.
26. J. C. Maxwell, “On the dynamical theory of gases,” *Philos. Mag.*, 1868, **35**, 129–145.
27. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1950, **A200**, 523–541.
28. J. G. Oldroyd, “The elastic and viscous properties of emulsions and suspensions,” *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1953, **A218**, 122–137.
29. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983.
30. W. Voight, “Uber die innere Reibung der fasten Korper, inslesondere der krystalle,” *Gottinden Abh.*, 1889, **36**, No. 1, 3–47.
31. W. Voight, “Uber innex Reibung faster Korper, insbesondere der Metalle,” *Ann. Phys. U. Chem.*, 1892, **47**, No. 9, 671–693.

D. A. Zakora
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu