Современная математика. Фундаментальные направления. Том 61 (2016). С. 5–40

УДК 517.938

СИСТЕМЫ МОРСА—СМЕЙЛА И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НЕСУЩИХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2016 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. Настоящий обзор посвящен изложению результатов, относящихся к взаимосвязи между глобальной динамикой систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях и топологией несущих многообразий. Мы приводим также результаты, связанные с топологической классификацией систем Морса—Смейла.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В 1937 году А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [2] ввели понятие *грубой* динамической системы с непрерывным временем (потока) на компактной плоской области, диффеоморфной кругу и ограниченной циклом без контакта. Смысл понятия грубости состоит в том, что достаточно малые C^1-возмущения системы не меняют качественного поведения решений системы. Плодотворность введенного понятия была продемонстрирована тем, что в [2] фактически было доказано, что грубые системы типичны, т. е. образуют открытое всюду плотное множество в пространстве рассматриваемых систем, снабженном C^1-топологией. Кроме этого, А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин показали, что грубые системы обладают достаточно ясной динамикой. А именно, согласно [2], грубые потоки в ограниченной части плоскости (это понятие естественно обобщается на потоки на двумерной сфере и ниже для простоты мы будем в основном уделять внимание многообразиям без края) составляют потоки с конечным числом состояний равновесия и периодических траекторий, которые гиперболичны и их объединение содержит предельное множество любой траектории. Более того, нет сепаратрис, идущих из седла в седло (включая то же самое седло).

Естественно, что работа [2] оказала большое влияние на исследования так называемой горьковской школы, т. е. самого А. А. Андронова, его учеников и его сотрудников. Представителем этой школы А. Г. Майером [29] было введено понятие *грубости* для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности и, фактически, понятие грубого потока без состояний равновесия на торе. Из работы [29] следует, что грубые каскады на окружности также типичны и имеют достаточно ясную динамику. А именно, грубый каскад имеет только конечное число периодических точек, причем каждая такая точка является гиперболической.

В 1959 году М. Пейшото [82] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом М. Пейшото модифицировал понятие грубости и ввел понятие *структурной устойчивости*, которое стало более популярным и употребимым. Фактически результат Пейшото дословно повторяет результат Андронова—Понтрягина о динамике структурно устойчивого потока, при этом было явно сформулировано утверждение о типичности таких полей (у Андронова—Понтрягина это утверждение формально не выделялось). Отметим, что М. Пейшото передоказал часть результатов А. Г. Майера, не зная о работе [29].

Под влиянием работ [2, 82] в 1960 году С. Смейл [90] ввел класс динамических систем на многообразиях, изначально претендовавших на роль типичных динамических систем с достаточно ясной (как тогда казалось) динамикой и которые в дальнейшем стали называть системами Морса—Смейла. По существу определение С. Смейла содержало перечисление свойств, полученных в [2, 82], при этом аналогом условия Андронова—Понтрягина об отсутствии сепаратрисных связей в многомерном случае стало условие трансверсальности пересечений сепаратрис. До этой работы С. Смейл был уже известным топологом в связи с его доказательством гипотезы Пуанкаре для многообразий размерности $\geqslant 5$. В его работах [91, 93], связанных с доказательством гипотезы Пуанкаре, существенно использовалась теория Морса и векторные поля, порождаемые градиентом функций Морса. В 1961 году С. Смейл [92] выделил класс градиентно-подобных векторных полей (т. е. потоков Морса—Смейла без периодических траекторий) и доказал, что выделенный класс открыт и плотен в множестве градиентных векторных полей.

Естественным является вопрос о существовании систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях. С. Смейл [92] доказал, что любую функцию Морса на многообразии можно аппроксимировать такой функцией Морса, что ее градиент будет являться векторным полем Морса—Смейла без периодических орбит. Тогда сдвиг на время $t = 1$ вдоль траекторий такого поля является диффеоморфизмом Морса—Смейла. Так как функции Морса существуют на любом замкнутом многообразии, то получаем, что *системы Морса—Смейла* (*как потоки, так и диффеоморфизмы*) *существуют на любом замкнутом многообразии*. Дж. Палис и С. Смейл [80, 81] доказали структурную устойчивость систем Морса—Смейла. Поэтому эти системы *образуют открытое множество в пространстве C^1-гладких динамических систем*. С современной точки зрения системы Морса—Смейла на замкнутых многообразиях суть в точности структурно устойчивые динамические системы с нулевой топологической энтропией. С этой точки зрения они являются простейшими структурно устойчивыми системами (спустя короткое время Д. В. Аносов [3, 4] и С. Смейл [39, 94] доказали существование широких классов структурно устойчивых динамических систем с положительной топологической энтропией).

Уже в пионерской работе [90] была выявлена тесная связь между динамическими характеристиками системы Морса—Смейла и топологией несущего многообразия. Именно этим обстоятельством объясняется пристальное внимание к системам Морса—Смейла и непрекращающийся поток работ по данной тематике. Результаты многих разделов топологии, которые изначально не имели никакого отношения к динамическим системам, нашли применение при исследовании систем Морса—Смейла. Например, для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия было установлено, что периодические траектории образуют довольно специальный набор узлов и зацеплений. Сравнительно недавно была обнаружено, что инвариантные многообразия седловых точек могут иметь дикое вложение.

Настоящий обзор посвящен изложению результатов, относящихся к взаимосвязи между глобальной динамикой систем Морса—Смейла на замкнутых многообразиях и топологией несущих многообразий. Мы приводим также результаты, связанные с топологической классификацией систем Морса—Смейла. Системы Морса—Смейла рассматриваются на замкнутых гладких n-мерных ($n \geqslant 1$) связных многообразиях M^n.

Структура статьи следующая. В разделе 1 мы даем исторически первое определение системы Морса—Смейла, принадлежащее С. Смейлу, и приводим элементарные следствия, вытекающие непосредственно из определения. В разделе 2 приводится конструкция фильтрации несущего многообразия, связанная с динамикой системы Морса—Смейла и введенная Смейлом для вывода системы неравенств, названных Смейлом неравенствами Морса. Эти неравенства устанавливают соотношения между числами Бетти несущего многообразия и динамическими характеристиками системы Морса—Смейла. В разделе 3 рассматриваются системы Морса—Смейла на одномерных и двумерных многообразиях. Далее мы рассматриваем системы Морса—Смейла на многообразиях, размерность которых не меньше трех. В разделе 4 рассматриваются потоки Морса—Смейла без состояний равновесия (неблуждающее множество системы состоит из периодических траекторий), и приводятся ставшие уже классическими результаты Дж. Моргана и Д. Азимова о структуре несущего многообразия. В разделе 5 рассматриваются потоки Морса—Смейла на 3-многообразиях, неблуждающее множество которых содержит состояния равновесия. Наряду с теоремами о структуре несущего многообразия приводятся условия существования периодических траекторий, что обычно бывает важно для приложений. В разделе 6 описывается динамика потоков с тремя состояниями равновесия и изучается топология многообразия, допускающего такие системы. В разделе 7 рассматриваются системы Морса—Смейла (как потоки, так и диффеоморфизмы) с некоторыми ограничениями, в основном касающимися отсутствия гетероклинических пересечений различных типов. В качестве следствий мы получаем достаточные условия наличия гетероклинических кривых или гетероклинических точек. Теоремы о существовании гетероклинических кривых, как выяснилось сравнительно недавно, важны для изучения магнитных полей в электропроводящих средах (см. например, [67]). В разделе 8 мы приводим представление произвольного диффеоморфизма Морса—Смейла в виде диффеоморфизма источник—сток, которое используется в разделе 9 для получения некоторых классификационных результатов.

Благодарности. Авторы благодарят В. С. Медведева, а также всех участников семинара «Топологические методы в динамике» в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» за полезные обсуждения. Исследования выполнялись в рамках проектов РФФИ 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а, РНФ 14-41-00044 и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 98) в 2016 году.

1. Основные определения

Прежде чем дать исторически первое определение динамической системы Морса—Смейла (в современной терминологии), напомним некоторые понятия и введем необходимые обозначения. Пространство C^r-диффеоморфизмов (соответственно, векторных полей гладкости C^r), наделенное равномерной C^r-топологией, обозначим через $Diff^r\ (M^n)$ (соответственно, $\chi^r\ (M^n)$). Для $r = 1$ будем обычно писать $Diff\ (M^n)$, $\chi\ (M^n)$. Для краткости мы в основном даем определения только для диффеоморфизмов, поскольку соответствующие определения для векторных полей (и потоков) аналогичны.

Зафиксируем $f \in Diff\ (M^n)$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $|n_0| \geqslant N$ и $f^{n_0}(U) \cap U \neq \varnothing$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f обозначается через $NW(f)$. Очевидно, периодическая точка является неблуждающей. Периодическая точка $x_0 \in Per\ (f)$, $f^q(x_0) = x_0$, называется *гиперболической*, если производная $Df^q(x_0) : T_{x_0}M^n \to T_{x_0}M^n$ (рассматриваемая как линейное отображение касательного пространства в себя) не имеет собственных чисел, равных по модулю единице. Согласно теореме Гробмана—Хартмана, в некоторой окрестности гиперболической неподвижной точки x_0 диффеоморфизм f сопряжен линейному диффеоморфизму, определяемому матрицей Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ $[22, 23, 71]$. Напомним, что два диффеоморфизма $f : M \to M$, $f' : M' \to M'$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M \to M'$ такой, что $hf = f'h$.

Отсюда получаем, что для гиперболической точки x_0 существуют так называемые устойчивое $W^s(x_0)$ и неустойчивое $W^u(x_0)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M^n$ таких, что $\varrho_M(f^{qk}x_0, f^{qk}y) \to 0$ при $k \to +\infty$ и $k \to -\infty$, соответственно, где ϱ_M — метрика на M^n. Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(x_0)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1}. Известно, что $W^s(x_0)$ и $W^u(x_0)$ гомеоморфны (во внутренней топологии) евклидовым пространствам $\mathbb{R}^{\dim W^s(x_0)}$, $\mathbb{R}^{\dim W^u(x_0)}$, соответственно, и являются гладкими инъективными иммерсиями последних в M^n $[39, 72]$. При этом периодическая гиперболическая точка

$p \in NW(f)$ называется *узловой*, если либо $\dim W^s(p) = n$ (в этом случае p называется *стоковой точкой*, см. рис. 1.1 (c)), либо $\dim W^u(p) = n$ (в этом случае p называется *источниковой точкой*, см. рис. 1.1 (b)). В частном случае, когда точка p неподвижна, она называется *узлом* (соответственно, *стоком* или *источником*). Гиперболическая периодическая точка $\sigma \in NW(f)$ называется *седловой*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность (см. рис. 1.1 (a)).

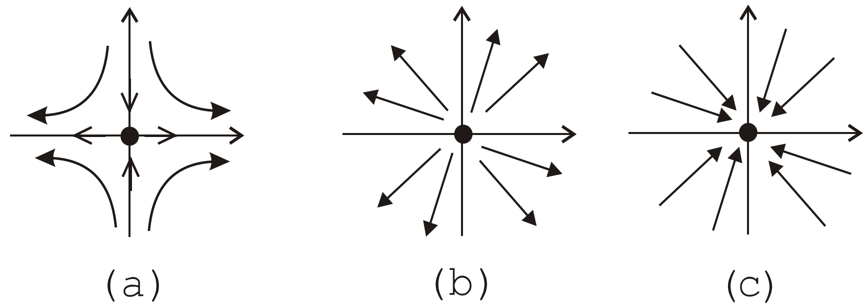

Рис. 1.1

Аналогично вводятся определения гиперболического состояния равновесия потока и гиперболического периодического движения и их устойчивых и неустойчивых многообразий. Однако для потоков имеется нюанс, состоящий в том, что неустойчивые многообразия состояния равновесия гомеоморфны евклидовым пространствам, в то время как для одномерных периодических траекторий они гомеоморфны цилиндрам соответствующей размерности.

Диффеоморфизм f называется *диффеоморфизмом Морса—Смейла*, если $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = Per\ (f)$), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y \in NW(f)$. Для потоков определение аналогично. Обозначим через $\mathcal{MS}^r\ (M^n)$ (соответственно, $\Sigma^r(M^n)$) множество C^r-диффеоморфизмов (соответственно, векторных полей) Морса—Смейла на M^n. Для $r = 1$ будем писать $\mathcal{MS}\ (M^n)$, $\Sigma\ (M^n)$.

Приведем некоторые определения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть $f \in \mathcal{MS}\ (M^n)$. Если $\dim W^u(\sigma) = i$, то каждую компоненту множества $W^u(\sigma) \setminus \sigma$ будем называть *i-мерной неустойчивой сепаратрисой*, а каждую компоненту множества $W^s(\sigma) \setminus \sigma$ будем называть $(n-i)$*-мерной устойчивой сепаратрисой*. Поскольку точка разбивает одномерное евклидово пространство, но не разбивает евклидово пространство большей размерности, то одномерное (устойчивое или неустойчивое) многообразие седловой периодической точки состоит из самой седловой точки и двух одномерных сепаратрис, а i-мерное многообразие при $i \geqslant 2$ состоит из седловой точки и одной i-мерной сепаратрисы.

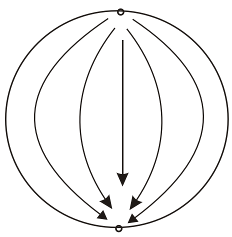

Рис. 1.2

Самым простым диффеоморфизмом Морса—Смейла является диффеоморфизм замкнутого многообразия с двумя неподвижными точками, одна из которых является притягивающей (сток), а другая — отталкивающей (источник), и других периодических точек нет, см. рис. 1.2. В этом случае многообразие является сферой $\mathbb{S}^n$, и динамика такого диффеоморфизма проста: все точки, отличные от неподвижных точек, являются блуждающими и движутся под действием диффеоморфизма от источника к стоку. Все такие диффеоморфизмы попарно топологически сопряжены друг другу (см., например, [21, теорема 2.2.1]).

Если $\psi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса, то векторное поле $\nabla\psi = grad\ \psi$ на M^n определяет поток ψ^t без периодических траекторий и с конечным числом состояний равновесия, причем все состояния равновесия гиперболические. Поток ψ^t называется *градиентным* и в общем случае не является потоком Морса—Смейла, поскольку у него может нарушаться трансверсальность пересечения сепаратрис различных седел. Однако С. Смейл [92] показал, что в пространстве функций Морса существует открытое и всюду плотное множество функций Морса, градиент которых задает поток Морса—Смейла.

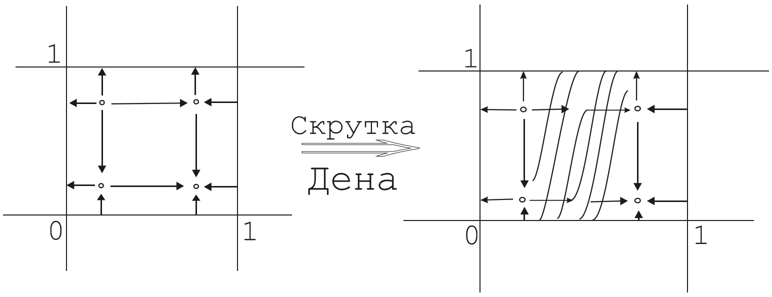

Рис. 1.3

Диффеоморфизмы Морса—Смейла, являющиеся сдвигами на единицу времени потока, очевидно индуцируют тождественное отображение в группе гомологий. Спрашивается, существуют ли диффеоморфизмы Морса—Смейла, индуцирующие нетривиальные изоморфизмы в группе гомологий? Ответ положительный: например, диффеоморфизм Морса—Смейла двумерного тора, не вкладываемый в поток и индуцирующий нетривиальный изоморфизм в одномерной группе гомологий, можно получить как композицию сдвига вдоль траекторий градиентного векторного поля Морса—Смейла и соответствующим образом подобранной скрутки Дэна вдоль замкнутой трансверсали. На рис. 1.3 (левая часть) приводится фазовый портрет градиентного векторного поля с двумя седлами и двумя узлами на квадрате, который является фундаментальной областью на универсальной накрывающей тора. Скрутка Дена производится вдоль кривой, в которую проектируется прямая $x = \dfrac{1}{2}$. В результате композиции сдвига вдоль траекторий и скрутки Дена получается диффеоморфизм, у которого устойчивое многообразие одного седла трансверсально пересекается с неустойчивым многообразием другого седла, см. рис. 1.3 (правая часть). Скрутка Дена приводит не только к нетривиальному действию в группе гомологий, но и к возникновению так называемых гетероклинических точек, являющихся препятствием к включению такого диффеоморфизма в поток. Дж. Палис [80] доказал, что в любой окрестности тождественного отображения поверхности существуют диффеоморфизмы Морса—Смейла, не вкладываемые в поток.

В работе [88] была анонсирована, а в [89] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^d \to M^d$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда собственные значения индуцированного отображения $f_* : H_*(M^d, \mathbb{R}) \to H_*(M^d, \mathbb{R})$ являются корнями из единицы.*

Напомним, что f_* означает семейство всех отображений $f_{*,k} : H_k(M^d, \mathbb{R}) \to H_k(M^d, \mathbb{R})$, $k \in \{0, \ldots, d\}$.

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, и σ_1, $\sigma_2 \in NW(f)$ — различные седловые периодические точки. Пересечение их инвариантных многообразий $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ в случае $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2) \neq \varnothing$ называется *гетероклиническим*. Поскольку каждое из $W^s(\sigma_1)$, $W^u(\sigma_2)$ является локально вложенным подмногообразием, то любая компонента связности гетероклинического пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ также является локально вложенным подмногообразием. Если $\dim (W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) \geqslant 1$, то компонента связности пересечения $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ называется *гетероклиническим многообразием*. В частности, если $\dim (W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) = 1$, то гетероклиническое многообразие является *гетероклинической кривой*, см. рис. 1.4.

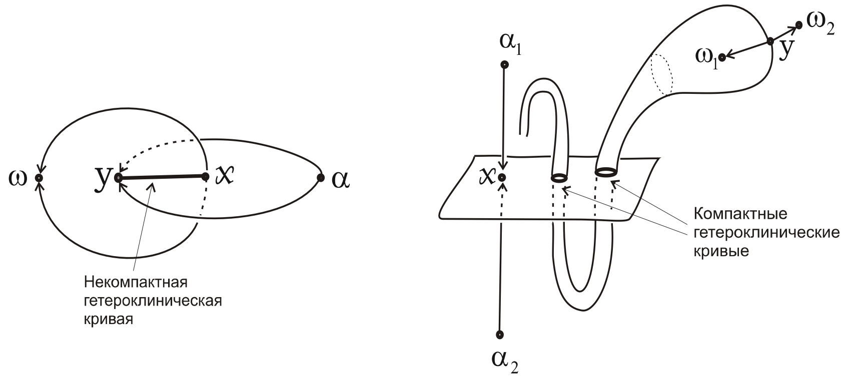

Рис. 1.4

Если $\dim(W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)) = 0$, то пересечение $W^s(\sigma_1) \cap W^u(\sigma_2)$ есть счетное множество точек, которые называются *гетероклиническими*. Множество гетероклинических точек инвариантно и представляет собой объединение *гетероклинических орбит*. Отметим, что у потоков Морса—Смейла гетероклинических точек не бывает, и гетероклиническое многообразие состоит из одномерных траекторий.

2. Фильтрация Смейла и неравенства Морса

Одними из первых свойств, вытекающих из определения систем Морса—Смейла и доказанных Смейлом [90], являются следующие результаты.

Предложение 2.1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда*

$$M^n = \bigcup_{p \in NW(f)} W^s(p) = \bigcup_{p \in NW(f)} W^u(p).$$

Аналогичное утверждение справедливо и для потоков Морса—Смейла.

Теорема 2.1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, и p, $q \in NW(f)$. Если $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$, то*

1. $W^u(q) \subset \operatorname{clos} W^u(p)$ *и* $\dim W^u(p) \geqslant \dim W^u(q)$;
2. $W^s(p) \subset \operatorname{clos} W^s(q)$ *и* $\dim W^s(p) \leqslant \dim W^s(q)$.

Неравенства, связывающие размерности, доказываются следующим образом. Действительно, пусть $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$ для некоторых точек p, $q \in NW(f)$. Поскольку инвариантные многообразия $W^u(p)$, $W^s(q)$ пересекаются трансверсально, то $\dim\ W^s(q) + \dim\ W^u(p) \geqslant n$. Следовательно, всегда $\dim\ W^s(q) \geqslant \dim\ W^s(p)$, так как $\dim\ W^s(p) = n - \dim\ W^u(p)$. Аналогично доказывается неравенство $\dim W^u(p) \geqslant \dim W^u(q)$.

Условие $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$ будем обозначать через $p \succ q$. Из конечности числа неблуждающих орбит и теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Для диффеоморфизма Морса—Смейла отношение $\succ$ является отношением частичного порядка на множестве периодических орбит.*

Отношение $\succ$ очевидным образом переносится на множество периодических орбит. Обозначим через O_r орбиту точки $r \in NW(f)$. Положим $O_p \succ O_q$, если существуют точки $r \in O_p$, $s \in O_q$ такие, что $r \succ s$. Из предложения 2.2 вытекает, что отношение $\succ$ также является отношением частичного порядка на множестве периодических орбит.

Первоначальное и схематичное изображение динамики системы Морса—Смейла было предложено Смейлом [39] в виде графа (позднее стали говорить «*граф Смейла*»), который строится следующим образом. Периодической орбите O_p точки p поставим в соответствие вершину $\upsilon(O_p)$ графа G. Две вершины $\upsilon(O_p)$, $\upsilon(O_q)$ графа G соединяются ребром, идущим от $\upsilon(O_p)$ к $\upsilon(O_q)$, тогда и только тогда, когда $W^u(p) \cap W^s(q) \neq \varnothing$ и нет $r \in NW(f)$ таких, что $W^u(p) \cap W^s(r) \neq \varnothing$ и $W^u(r) \cap W^s(q) \neq \varnothing$ (т. е. $p \succ r \succ q$). Построенный таким образом граф (иногда его вершины наделяют дополнительной информацией о размерности устойчивых и неустойчивых многообразий) называется *графом Смейла* диффеоморфизма f.

Аналогичное определение порядка и графа Смейла можно ввести и для потоков Морса—Смейла. Ясно, что топологически эквивалентные системы Морса—Смейла должны иметь изоморфные графы Смейла. Оказалось, что обратное неверно даже для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий на поверхностях. Пейшото [85] построил топологически не эквивалентные потоки Морса—Смейла на сфере с изоморфными графами Смейла (кроме оригинальной работы, см., например, [79]).

Напомним, что последовательность подмножеств $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ топологического пространства M^n называется *фильтрацией*, если семейство множеств $M_0, M_1, \ldots$ составляет фундаментальное покрытие пространства M^n. В своей пионерской работе [90] Смейл, используя теорему 2.1, построил конечную фильтрацию, связанную с динамикой системы Морса—Смейла. Смейл заметил, что подмножества $K^d = \bigcup\limits_{\dim W_i^u \leqslant d} W_i^u$ образуют фильтрацию, но из включения $W_i^u \subset K^d$ не обязательно следует включение $\partial W_i^u \subset K^{d-1}$, что связано с возможным существованием неустойчивых многообразий, лежащих в предельном множестве других неустойчивых многообразий той же размерности. В действительности Смейл использовал следующую фильтрацию для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$. Возьмем в качестве $M_0 = K^0$ семейство стоковых периодических точек. Пусть M_1 — объединение M_0 и одномерных неустойчивых многообразий, границы которых принадлежат M_0. Заметим, что $M_1 \subset K^1$, но в M_1 не входят одномерные неустойчивые многообразия, в предельном множестве которых лежат другие одномерные неустойчивые многообразия, см. рис. 1.3. Если M_{i-1} построено, то M_i получается присоединением к M_{i-1} неустойчивых многообразий, граница которых принадлежит M_{i-1}. Из предложения 2.1 вытекает, что $M_k = M^n$ для некоторого k. Ясно, что все M_i замкнуты, инвариантны относительно f и образуют конечную фильтрацию многообразия M^n.

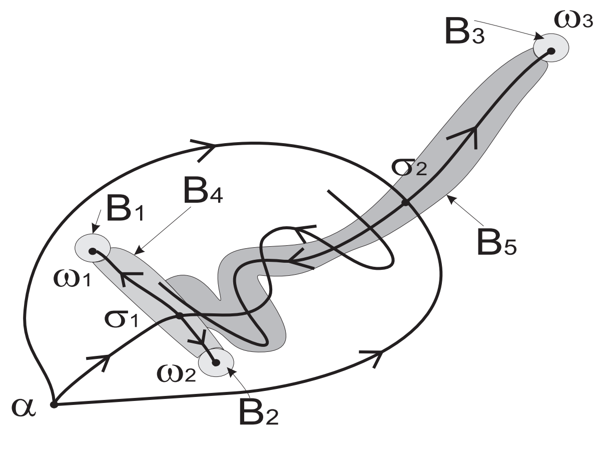

Рис. 2.1

На рис. 2.1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма сферы S^2, неблуждающее множество которого гиперболично и состоит из трех неподвижных стоковых точек $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, двух неподвижных седловых точек σ_1, σ_2 и одного неподвижного источника α. Элементы фильтрация для этого диффеоморфизма имеют вид $M_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} B_j$, $i = \overline{1,5}$, и $M_6 = S^2$, где B_i — специально подобранные диски.

Обозначим через C_j число периодических точек p диффеоморфизма f, у которых устойчивое многообразие имеет размерность $j = \dim W^s(p)$, $p \in Per\,(f)$. Пусть $\beta_i(M^n) = \beta_i$ — i-е число Бетти многообразия M^n, т. е. $\beta_i(M^n) = rank\ H_i(M^n, \mathbb{Z})$. Используя построенную фильтрацию $M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{i-1} \subset M_i \subset \cdots$, Смейл [90] показал, что имеют место следующие соотношения:

$$C_0 \geqslant \beta_0, \qquad C_1 - C_0 \geqslant \beta_1 - \beta_0, \qquad C_2 - C_1 + C_0 \geqslant \beta_2 - \beta_1 + \beta_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \beta_i.$$

Эти соотношения имеют место также для потока Морса—Смейла, но числа Бетти вычисляются в кольце $\mathbb{Z}_2$, $\beta_i(M^n) = rank\ H_i(M^n, \mathbb{Z}_2)$, а под C_j понимается число состояний равновесия с j-мерными устойчивыми сепаратрисами плюс число одномерных периодических траекторий с $(j+1)$-мерными устойчивыми сепаратрисами. Для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия в работе [63] (см. также [64]) получено усиление неравенств Морса—Смейла.

Название неравенств именем Морса связано с исследованиями М. Морса [76] связи между числом критических точек функции Морса и топологической структурой многообразия.

Поскольку для связного многообразия $\beta_0 = 1$, то из первого неравенства приведенной системы неравенств следует, что *система Морса—Смейла имеет по крайней мере одну стоковую и по крайней мере одну источниковую периодическую орбиту*. Это подтверждает упомянутый ранее факт о том, что самым простым диффеоморфизмом Морса—Смейла является диффеоморфизм замкнутого многообразия с двумя неподвижными точками, одна из которых есть источник, а другая — сток, и других периодических точек нет, см. рис. 1.2.

3. Одномерные и двумерные системы

Окружность S^1 является единственным замкнутым одномерным многообразием. Системы (как потоки, так и диффеоморфизмы) Морса—Смейла на S^1 всюду плотны и имеют достаточно простое комбинаторное описание. Поскольку такой поток всегда имеет только конечное число траекторий, то мы оставим характеристику потоков читателю в качестве упражнения. Что касается диффеоморфизмов, то для доказательства их плотности необходимо доказывать лемму о замыкании. Это впервые было сделано Майером [29] в 1939 году и позже передоказано Плиссом [34] и Пейшото [83, 84]. Так как для окружности лемму о замыкании удается доказать в любом классе гладкости (даже аналитическом), то получаем, что *диффеоморфизмы Морса—Смейла $\mathcal{MS}^k(S^1)$ всюду плотны в $Diff^r\ (S^1)$ для любых $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant \omega$.* Учитывая этот результат, уже нетрудно показать, что C^r-грубые или (что то же самое) C^r-структурно устойчивые диффеоморфизмы окружности совпадают с $\mathcal{MS}^r(S^1)$.

Описание и топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла окружности достаточно проста. Разобьем $\mathcal{MS}^r(S^1)$ на два подкласса $\mathcal{MS}^r_+(S^1)$ и $\mathcal{MS}^r_-(S^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Сформулируем результаты Майера по топологической классификации структурно устойчивых преобразований окружности. Из работы А.Г. Майера [29] известен следующий факт.

Предложение 3.1.

1. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$ неблуждающее множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n$, $n \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых имеет период k.*
2. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$, периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.*

Пусть $\varphi \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk}{=}p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0 по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ для $k > 1$, и числа (k, l) являются взаимно простыми[1]. Заметим, что l не зависит от выбора точки p_0 (см. рис. 3.1 (A)). Для $\varphi \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ положим $\nu = -1$; $\nu = 0$; $\nu = +1$, если его неподвижные точки являются, соответственно: источниками; стоком и источником; стоками. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечетное, и $\nu = \pm 1$, если q четное (см. рис. 3.1 (B)).

Также из работы А.Г. Майера [29] известен следующий факт.

[1] На самом деле, А.Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *порядковым числом* таким, что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

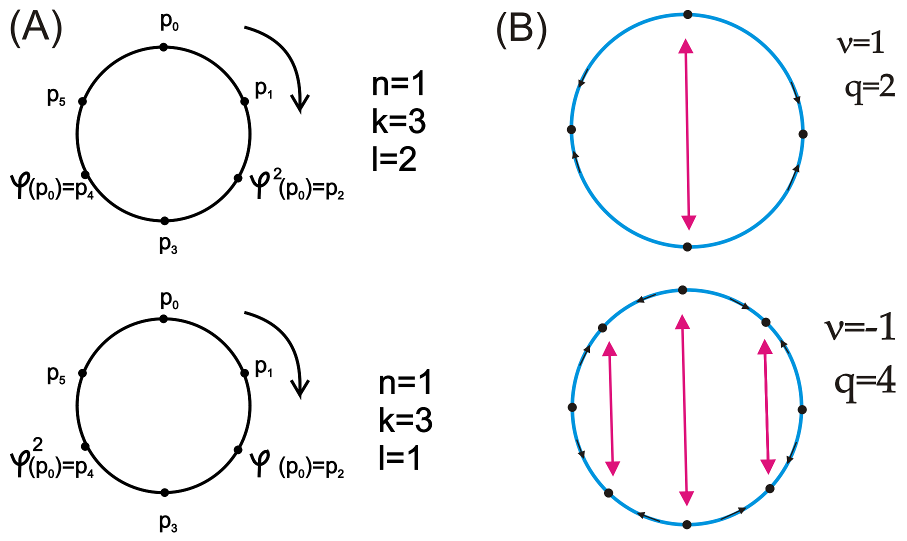

Рис. 3.1

Теорема 3.1.

1. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in \mathcal{MS}^r_+(S^1)$ *с параметрами* $n, k, l; n', k', l'$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $n = n', k = k'$ *и верно одно из следующих утверждений*:
   - $l = l'$ (*при этом, если* $l \neq 0$, *то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию*),
   - $l = k' - l'$ (*при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию*).
2. *Два диффеоморфизма* $\varphi; \varphi' \in \mathcal{MS}^r_-(S^1)$ *с параметрами* $q; q'$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $q = q'$ *и* $\nu = \nu'$.

Перейдем теперь к системам Морса—Смейла на замкнутых двумерных многообразиях. Сперва мы рассмотрим потоки, а затем диффеоморфизмы.

Для потока Морса—Смейла с определенным набором состояний равновесия единственным необходимым ограничением существования на данной замкнутой поверхности является формула Эйлера—Пуанкаре: сумма индексов состояний равновесия должна равняться эйлеровой характеристике (см., например, [42]). Что касается типичности потоков Морса—Смейла, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Векторные поля Морса—Смейла* $\Sigma\,(M^2)$ *совпадают с пространством структурно устойчивых векторных полей на замкнутой поверхности* M^2. *Более того,* $\Sigma\,(M^2)$ *открыто и плотно в пространстве* $\chi\,(M^2)$ *всех векторных полей на* M^2. *Если поверхность* M^2 *ориентируемая или неориентируемая рода* $1 \leqslant g \leqslant 3$, *то* $\Sigma^r(M^2)$ *совпадают с пространством* C^r*-структурно устойчивых векторных полей для любого* $r \geqslant 1$. *Более того, в этом случае* $\Sigma^r(M^2)$ *открыто и плотно в* $\chi^r\,(M^2)$.

Для сферы $M^2 = S^2$ теорема 3.2 фактически доказана в работе [2]. Для остальных поверхностей в случае $r = 1$, а также всех ориентируемых поверхностей и проективной плоскости в случае $r \geqslant 1$ теорема 3.2 доказана Пейшото [83, 84]. Из теоремы Арансона—Маркли [5, 73] о том, что любой поток на бутылке Клейна не имеет нетривиально рекуррентных траекторий, вытекает справедливость теоремы 3.2 для бутылки Клейна в случае $r \geqslant 1$. Наконец, для неориентируемой поверхности рода 3 теорема 3.2 в случае $r \geqslant 1$ следует из результата Гутиерреза [68] о том, что на этой поверхности у потоков нет так называемых неориентируемых нетривиально рекуррентных траекторий.

Перед тем как перейти к вопросам классификации, напомним необходимые определения. Два потока f_1^t, f_2^t на многообразии M^n называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории одного потока в траектории другого потока. Если при этом h сохраняет направление по времени, то f_1^t, f_2^t называются *топологически траекторно* (*орбитально*) *эквивалентными*. Данный инвариант называется *полным*, если его совпадение у двух потоков является необходимым и достаточным условием эквивалентности этих потоков. Обычно инвариант топологической эквивалентности тесно связан с инвариантом топологической траекторной эквивалентности (как правило, построив один из инвариантов, легко построить второй). Поэтому мы иногда не уточняем, о какой из указанных эквивалентностей идет речь.

М. Пейшото [85] в 1973 году ввел для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий полный топологический инвариант в виде оснащенного графа (см. рис. 3.2), который включает в себя информацию о взаимном расположении неблуждающих траекторий и их инвариантных многообразий (в частности, сепаратрис). Фактически, Пейшото оснастил граф Смейла дополнительной информацией так, чтобы он стал полным топологическим инвариантом (так называемый различающий граф). Подчеркнем, что значительно раньше [27, 28] Е. А. Леонтович и А. Г. Майер (см. также [1]) ввели полный топологический инвариант для потоков на сфере с конечным числом особых траекторий, названный схемой потока, который для структурно устойчивых потоков принципиально совпадает с графом Пейшото. Отметим, что имеются другие формы полного топологического инварианта таких потоков, которые по духу соответствуют оснащенному графу Пейшото, см., например, [78, 96].

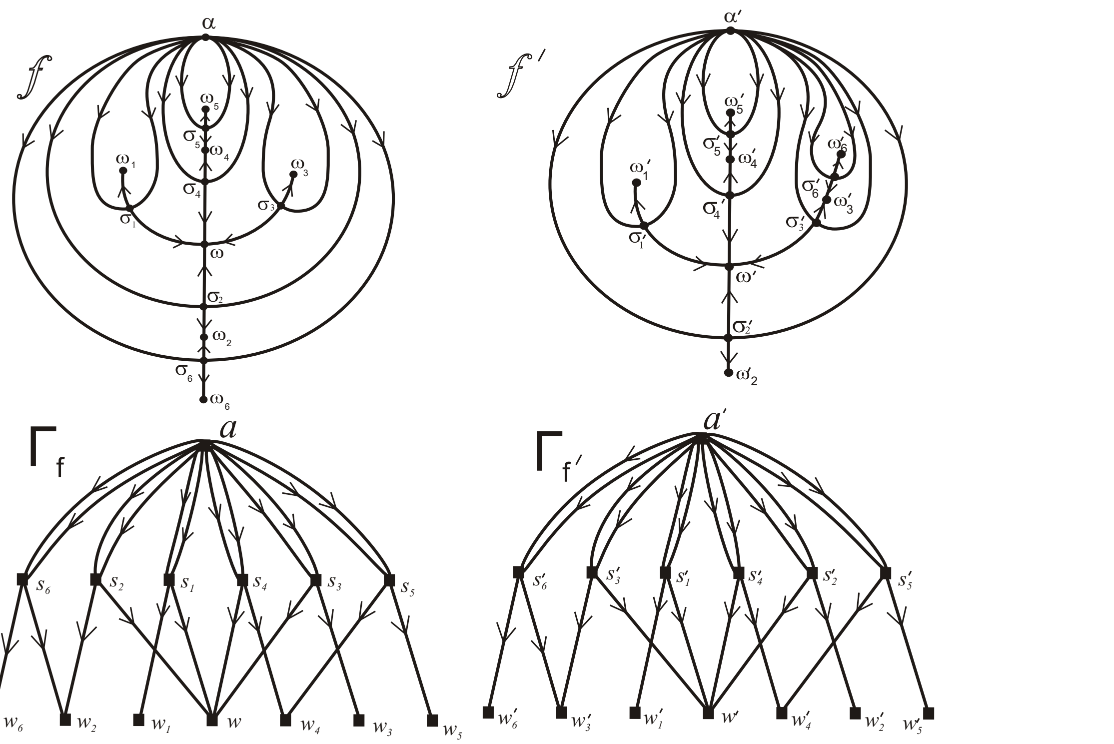

Рис. 3.2

На рис. 3.2 изображены два градиентно-подобных потока и их графы. Эта иллюстрация показывает, что граф без оснащения дополнительной информацией не является полным топологическим инвариантом. Так, изображенные потоки не являются эквивалентными, а их графы совпадают.

Полный топологический инвариант для произвольных потоков Морса—Смейла на замкнутых поверхностях был построен Ошемковым и Шарко [33]. Опишем схематично этот инвариант. Рассмотрим векторное поле $\vec{v}$ на компактной поверхности N, трансверсальное границе ∂N. Поверхность N называется *элементарной*, если она содержит либо ровно одну неблуждающую траекторию (узел или предельный цикл), либо все неблуждающие траектории суть седла. Элементарная поверхность называется *узловой* и ей приписывается $\vec{v}$-атом типа У, если она гомеоморфна диску и содержит ровно один узел (сток или источник). N приписывается $\vec{v}$-атом типа К-Меб, если она гомеоморфна либо кольцу, либо листу Мебиуса и содержит ровно один предельный цикл. Если N содержит только седла, то ей приписывается $\vec{v}$-атом типа С, см. рис. 3.3. Можно показать, что для

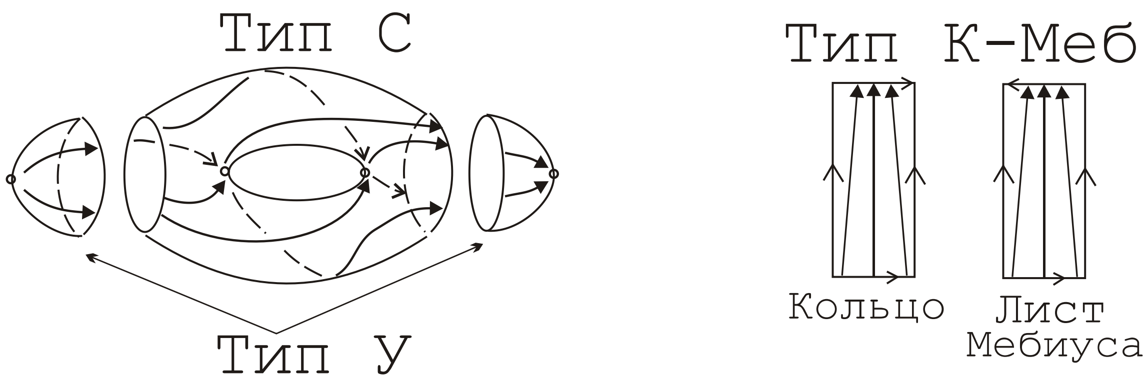

Рис. 3.3

любого векторного поля Морса—Смейла $\vec{v}$ существует семейство замкнутых попарно непересекающихся трансверсалей, которое разбивает несущую поверхность M^2 на элементарные поверхности. Поэтому полю $\vec{v}$ можно поставить в соответствие граф $\Gamma(\vec{v})$, вершины которого суть $\vec{v}$-атомы с указанием типа. Две вершины соединяются ребрами, если соответствующие элементарные поверхности имеют общую граничную компоненту. Каждое ребро наделяется направлением согласно направлению векторного поля на общей граничной компоненте. Если ребро соединяет вершины, ни одна из которых не имеет тип У, то ребру приписывается число -1 либо $+1$ в соответствии с тем, является ли гомеоморфизм, склеивающий две граничные компоненты, меняющим ориентацию или нет.

Структура потока на элементарных поверхностях, соответствующих атомам типа У и К-Меб, ясна, поскольку содержит только одну неблуждающую притягивающую или отталкивающую траекторию. Что касается типа С, то для таких атомов, по существу, строится инвариант, аналогичный по духу различающему графу Пейшото. Пусть элементарной поверхности N приписан $\vec{v}$-атом типа С. Возьмем седло $\sigma \in N$. Для векторного поля Морса—Смейла каждая сепаратриса седла σ пересекает ∂N. Дугу неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы от σ к ∂N назовем $u(s)$-дугой. Замыкания всех $u(s)$-дуг разбивают N на открытые области, каждая из которых имеет ровно одну граничную компоненту, где поле направлено наружу, и ровно одну граничную компоненту, где поле направлено внутрь, см. рис. 3.4 (a), (b). Дуга траектории от одной граничной компоненты к другой называется *t-дугой*. Выберем произвольным образом в каждой из областей по одной t-дуге. Тогда семейство всех $u(s)$-дуг и выбранных t-дуг разбивает N на криволинейные многоугольники, качественный вид которых изображен на рис. 3.4 (c). Будем называть полученные криволинейные многоугольники *каноническими*. Для данного разбиения элементарной поверхности N типа С в

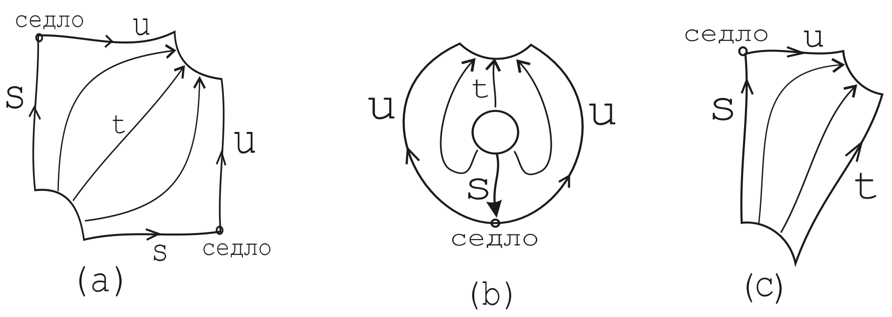

Рис. 3.4

работе [33] строится граф$\Gamma(N)$ (авторы называют его *трехцветным*) следующим образом (см. рис. 3.5):

1. вершины графа $\Gamma(N)$ взаимно однозначно соответствуют каноническим криволинейным многоугольникам;
2. если канонические многоугольники имеют общую сторону, образованную $u(s,t)$-дугой, то ребро, соединяющее соответствующие вершины, снабжаются меткой u (соответственно, s, t).

Результат построения не зависит от выбора t-дуг.

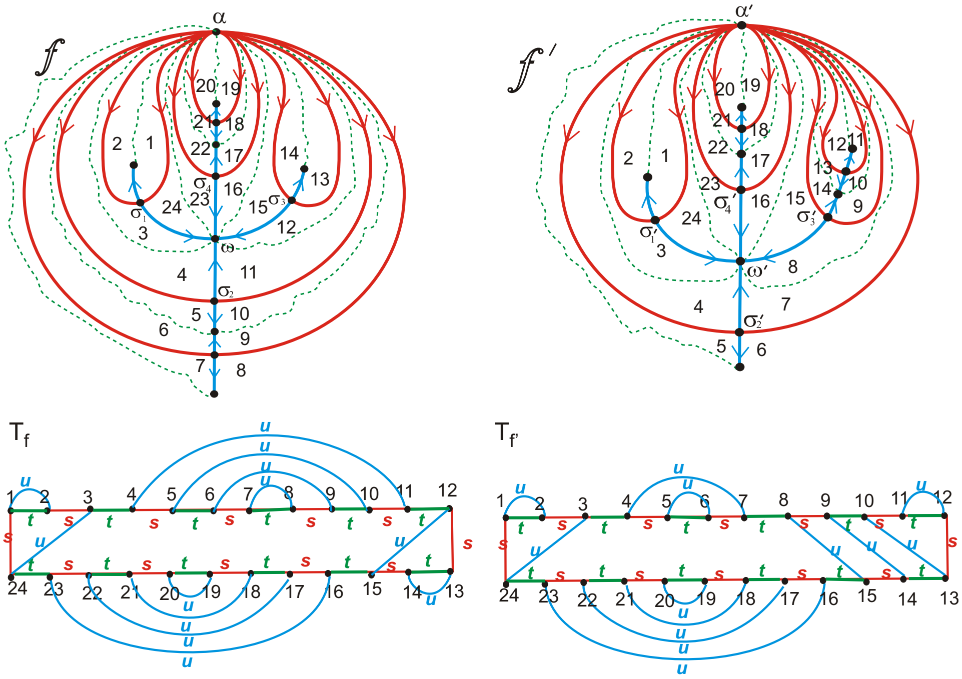

Рис. 3.5

По информации об атомах, соединяющих их кривых, а также трехцветных графах строится граф потока, который в [33] назван *молекулой*, и доказывается следующая теорема.

Теорема 3.3. *Два векторных поля Морса—Смейла $\vec{v}$, $\vec{v}'$ на замкнутой поверхности топологически траекторно эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им молекулы $\Gamma(\vec{v})$, $\Gamma(\vec{v}')$ изоморфны.*

Имеются ограничения, которые необходимо наложить на молекулу и трехцветные графы, чтобы абстрактно определенная молекула могла быть реализована как молекула некоторого векторного поля Морса—Смейла [33, теорема 3.24]. Отметим, что в [33] также предложен алгоритм сравнения молекул и алгоритм перечисления молекул по некоторому критерию сложности. В работе [66] показано, что предложенный Ошемковым и Шарко алгоритм не является эффективным. Напомним, что алгоритм решения задачи различения графов называется *эффективным*, если он занимает время, полиномиальное зависящее от числа вершин графа. Понятие эффективно решаемой задачи было предложено А. Кобэм и оно означает, что вычислительная проблема может быть реально решена на каком-либо устройстве, только если она может быть вычислена за время, ограниченное полиномом от параметра, представляющего длину входных данных [59]. На сегодняшний день неизвестно, существует ли эффективный алгоритм различения произвольных графов. В работе [66] авторы добиваются эффективности алгоритмов различения трехцветных графов и графов Пейшото за счет следующих фактов: трехцветные графы тривалентны, а графы Пейшото вложимы в 2-сферу. Кроме того, доказано, что полиномиальной является также задача установления ориентируемости поверхности и определения ее рода.

Приведем простой результат применения классификационной теоремы 3.3, который нам понадобится в дальнейшем и который иллюстрирует взаимосвязь между динамикой потока Морса—Смейла и несущей поверхностью.

Предложение 3.2. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла на замкнутой поверхности M^2 такой, что неблуждающее множество потока f^t состоит из трех состояний равновесия. Тогда $M^2 = \mathbb{P}^2$ является проективной плоскостью. Более того, все потоки Морса—Смейла на $\mathbb{P}^2$,* *неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, топологически эквивалентны.*

Перейдем к рассмотрению диффеоморфизмов на поверхностях.

В следующей теореме устанавливается связь между родом несущей поверхности и некоторыми динамическими характеристиками диффеоморфизмов Морса—Смейла замкнутых поверхностей (как ориентируемых, так и неориентируемых). Она вытекает из последнего равенства из системы неравенств Морса.

Теорема 3.4. *Пусть $f : M_g^2 \to M_g^2$ — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутой поверхности M_g^2 рода g ($g \geqslant 0$, если M_g^2 ориентируемая, и $g \geqslant 1$, если M_g^2 неориентируемая), и пусть f имеет $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек. Тогда*

$$g = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}, \text{ если поверхность } M_g^2 \text{ ориентируемая, и}$$

$$g = \nu(f) - \mu(f) + 2, \text{ если поверхность } M_g^2 \text{ неориентируемая.}$$

Отметим, что в теореме 3.4 не делается никаких предположений о возможных пересечениях инвариантных многообразий седловых периодических точек, равно как и о характере вложения в M_g^2 этих многообразий.

В работах [46–48,51,69,77] получены более тонкие результаты, касающиеся взаимосвязи между периодическими данными диффеоморфизмов Морса—Смейла, их гомотопическими классами и топологическими характеристиками несущих поверхностей (во многих из этих работ рассматриваются более широкие классы гомеоморфизмов поверхностей, включающие диффеоморфизмы Морса—Смейла). Отметим, что в [62] получено выражение дзета-функции диффеоморфизма Морса—Смейла через его периодические данные.

При решении задачи классификации (с точностью до сопряженности) диффеоморфизмов поверхностей естественно сперва рассмотреть вопрос о топологической структуре областей, на которые разбивается блуждающее множество сепаратрисами седловых периодических точек. Пусть $f \in \mathcal{MS}\ (M^2)$. Из блуждающего множества $M^2 \setminus NW(f)$ удалим сепаратрисы всех седловых периодических точек диффеоморфизма f. Тогда компонента связности оставшегося множества может быть только одного из следующих типов: 1) односвязная компонента блуждающего типа; 2) односвязная компонента периодического типа; 3) двусвязная компонента периодического типа. В последнем случае M^2 есть S^2, и граница компоненты состоит ровно из двух точек: стока и источника [6].

Диффеоморфизмы Морса—Смейла без гетероклинических точек (*градиентно-подобные диффеоморфизмы*) на ориентируемых замкнутых поверхностях были классифицированы Безденежных и Гринесом [8–10]. Немного утрируя, можно сказать, что такие диффеоморфизмы получаются суперпозицией сдвигов на единицу времени потоков Морса—Смейла без замкнутых траекторий и периодических преобразований поверхностей. Полным инвариантом таких диффеоморфизмов является аналог различающего графа Пейшото, снабженного периодическими автоморфизмами. Исчерпывающая классификация (включающая реализацию) градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях была получена также недавно в работе [20] на языке трехцветных графов, оснащенных периодическим автоморфизмом.

Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла значительно усложняется, если допустить наличие гетероклинических точек (см. рис. 3.6). Гетероклинические точки естественным образом приводят к появлению так называемых гетероклинических цепочек из седловых орбит (т. е., орбит, порождаемых седловыми периодическими точками). Напомним, что последовательность седловых орбит $O_1, \ldots, O_h$ образует *гетероклиническую цепочку*, если $W^u(O_i) \cap W^s(O_{i+1}) \neq \varnothing$ для всех $1 \leqslant i < h$. Так как диффеоморфизмы Морса—Смейла не имеют гомоклинических точек, то гетероклинические цепочки состоят из конечного числа $h \geqslant 2$ попарно различных седловых орбит. Число $h-1$ называется *длиной* цепочки $O_1, \ldots, O_h$. Максимальная из длин цепочек, соединяющих две орбиты $O \prec O'$, обозначается $beh(O'|O)$. Гетероклиническая цепочка максимальной длины соответствует простому незамкнутому пути в графе Смейла данного диффеоморфизма. На рис. 3.6 (a), (b) изображены гетероклинические цепочки длины 1 и 2.

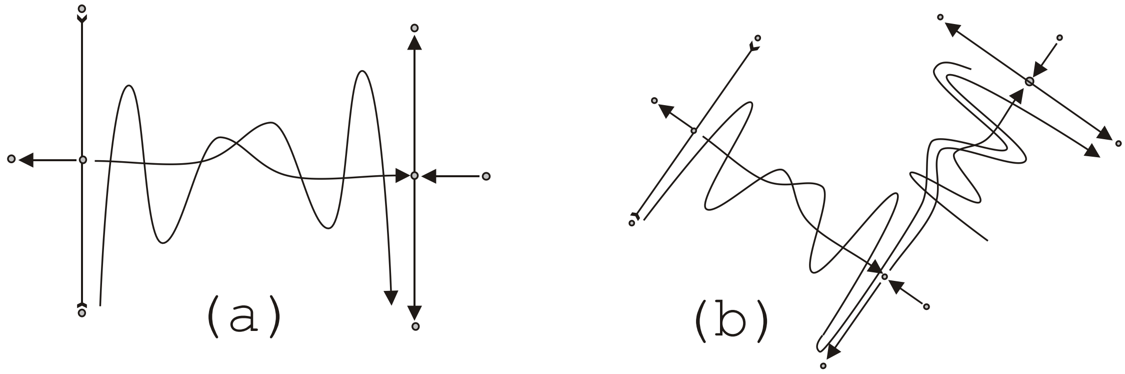

Рис. 3.6

Поскольку гетероклинические точки образованы пересечением инвариантных многообразий седловых орбит, то множество гетероклинических точек инвариантно и, следовательно, представляет собой объединение орбит. Естественно сперва рассмотреть класс диффеоморфизмов с конечным числом гетероклинических орбит. В этом случае максимальные гетероклинические цепочки имеют длину 1. Диффеоморфизмы Морса—Смейла с конечным числом гетероклинических орбит были классифицированы Гринесом [14]. В этом случае к графу Безденежных—Гринеса добавляется так называемая сигнатура, несущая требуемую информацию о гетероклинических точках (см. рис. 3.7).

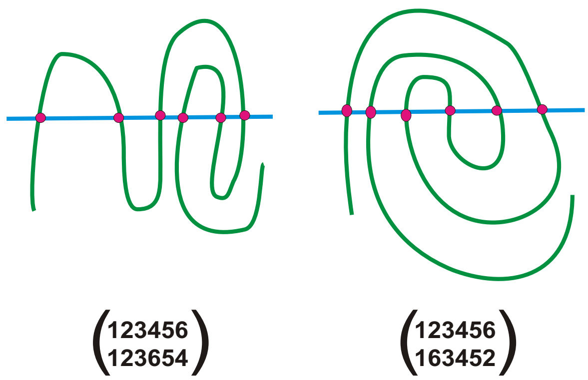

Рис. 3.7

Исчерпывающая классификация (включающая реализацию) диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным числом гетероклинических орбит на поверхностях была также получена в работе Митряковой—Починки [32], где рассматривался более широкий класс диффеоморфизмов с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях. При этом введенный в [32] полный топологический инвариант, *схема*, с точностью до гомеоморфизма представляет собой конечное число двумерных торов — пространств блуждающих орбит с набором простых замкнутых кривых — пространств орбит сепаратрис (см. рис. 3.8)

Произвольные диффеоморфизмы Морса—Смейла на ориентируемых поверхностях были классифицированы в рамках работы [56], где в терминах марковских разбиений получены необходимые и достаточные условия сопряженности любых структурно устойчивых диффеоморфизмов ориентируемых замкнутых поверхностей. Мы сформулируем основной результат работы [56] не в полной общности (для любых структурно устойчивых диффеоморфизмов), а в облегченной форме для диффеоморфизмов Морса—Смейла.

Рассмотрим максимальную гетероклиническую цепочку $O_1, \ldots, O_h$ седловых орбит диффеоморфизма Морса—Смейла f. Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{h} O_i \cup K_{1h}$, где $K_{1h} = \left(\bigcup\limits_{i=1}^{h} W^u(O_i)\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{h} W^s(O_i)\right)$, называется *насыщением* данной цепочки. Другими словами, насыщение цепочки есть объединение седловых орбит и всевозможных пересечений устойчивых и неустойчивых сепаратрис седловых

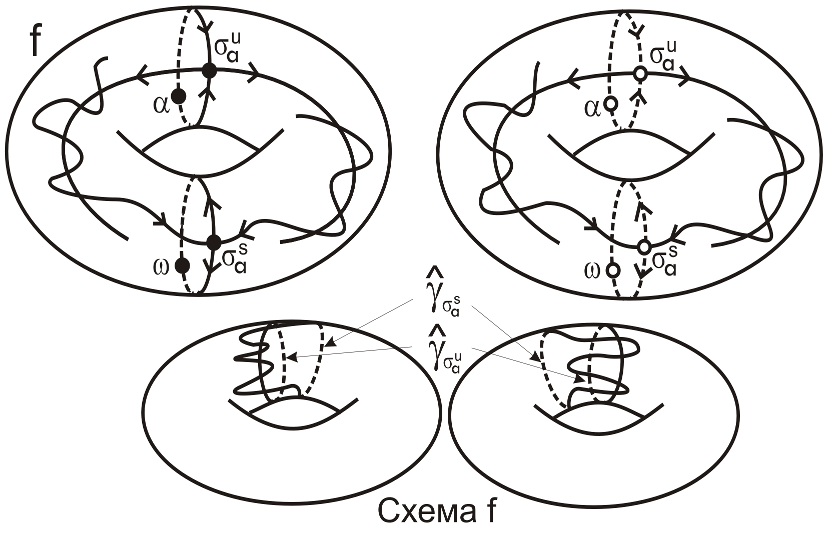

Рис. 3.8

периодических точек, входящих в цепочку. Отметим, что насыщение максимальной гетероклинической цепочки является инвариантным множеством. В силу структурной устойчивости диффеоморфизмов Морса—Смейла сепаратрисы седловых периодических точек пересекаются трансверсально. Используя этот факт, Бонатти и Ланжевен [56] доказали, что насыщение максимальных гетероклинических цепочек можно наделить равномерной гиперболической структурой, при этом на пересечении насыщений можно ввести согласованную гиперболическую структуру. Поэтому диффеоморфизму Морса—Смейла f можно поставить в соответствие гиперболическое множество K_f седлового типа, которое мы назовем *насыщенным гиперболическим* множеством. В [56] показано, что насыщенное гиперболическое множество обладает инвариантной окрестностью *конечного топологического типа* — замкнутой поверхностью с конечным числом дыр.

Насыщенное гиперболическое множество можно рассматривать как обобщение базисного множества седлового типа (на настоящем базисном множестве, кроме гиперболической структуры, имеется транзитивность). Это позволяет применить технику Боуэна—Синая для построения марковских разбиений для таких множеств [37, 38, 57]. Другими словами, насыщенное гиперболическое множество покрывается специальным семейством криволинейных четырехугольников, образованными отрезками устойчивых и неустойчивых сепаратрис. В работе [56] вводится понятие геометрического типа так называемого хорошего марковского разбиения. Геометрический тип включает в себя описание взаимного расположения, ориентацию и нумерацию криволинейных четырехугольников, а также их образов под действием диффеоморфизма. Два геометрических типа *эквивалентны*, если они являются геометрическими типами некоторых хороших марковских разбиений одного и того же гиперболического насыщенного множества (например, при изменении нумерации криволинейных прямоугольников получаются эквивалентные геометрические типы). Основной результат (см. [56, теорема 1.0.3]) содержится в следующей теореме (для случая систем Морса—Смейла).

Теорема 3.5. *Пусть K_{f_1}, K_{f_2} — насыщенные гиперболические множества диффеоморфизмов Морса—Смейла f_1, f_2 замкнутых ориентируемых поверхностей M_1, M_2 соответственно. Предположим, что K_{f_1} и K_{f_2} имеют хорошие марковские разбиения с эквивалентными геометрическими типами. Тогда f_1, f_2 сопряжены на инвариантных окрестностях множеств K_{f_1}, K_{f_2}, т. е. существует гомеоморфизм h инвариантной окрестности U_1 конечного топологического типа множества K_{f_1} в инвариантную окрестность U_2 конечного топологического типа множества K_{f_2} такой, что h сопрягает ограничения $f_1|_{U_1}$, $f_2|_{U_2}$.*

В [49] приводится конечный алгоритм, позволяющий решить вопрос об эквивалентности двух геометрических типов.

4. Потоки Морса—Смейла без состояний равновесия

В описании несущих многообразий для потоков Морса—Смейла без состояний равновесия используются понятия топологии многообразий такие, как разложение на (стандартные) ручки, разложение на круговые ручки, пространство Зейферта и т.п.

Пространством Зейферта (иногда говорят «многообразие Зейферта» или «расслоение Зейферта») называется 3-многообразие M^3, которое представляет собой объединение $M^3 = \cup C_\alpha$ попарно непересекающихся замкнутых простых кривых C_α таких, что каждая кривая C_α имеет замкнутую окрестность, гомеоморфную полноторию $D^2 \times S^1$, которая возникает из произведения $D^2 \times [0;1]$ диска на отрезок при склейке каждой точки $(x;0)$ с точкой $(d(x);1)$, где $d : D^2 \to D^2$ — поворот диска D^2 на угол $2\pi \dfrac{m}{n}$ (m, n — взаимно простые целые числа, $0 \leqslant m < n$).

Трехмерное многообразие M^3 называется *большим* в смысле Вальдхаузена, если M^3 содержит вложенную поверхность, фундаментальная группа которой бесконечна и является подгруппой фундаментальной группы многообразия M^3. Класс больших многообразий содержит, например, 3-многообразия с бесконечной первой группой гомологий и 3-многообразия с несжимаемым краем (скажем, такие как $T^2 \times [0;1]$). Дополнения к нетривиально вложенным в 3-сферу узлам также являются большими в смысле Вальдхаузена многообразиями [30].

Следующую теорему о топологической структуре несущего 3-многообразия для потока Морса—Смейла без состояний равновесия доказал Морган [75].

Теорема 4.1. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла без состояний равновесия на замкнутом трехмерном многообразии M^3. Тогда если M^3 не является большим в смысле Вальдхаузена, то M^3 — пространство Зейферта. Если M^3 является большим в смысле Вальдхаузена, то M^3 есть специальное объединение пространств Зейферта и прямых произведений $T^2 \times [0;1]$.*

Немного раньше Френкс [63] получил необходимые и достаточные условия существования потока Морса—Смейла без состояний равновесия на трехмерной сфере S^3 с предписанным набором периодических траекторий. Именно, обозначим через A_k число одномерных нескрученных[1] периодических траекторий индекса k (индекс периодической траектории равен размерности неустойчивого многообразия минус единица). Тогда на S^3 существует поток Морса—Смейла без состояний равновесия с предписанным набором (A_0, A_1, A_2) тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: 1) $A_0 \geqslant 1$, $A_2 \geqslant 1$; 2) $A_1 \geqslant A_0 - 1$, $A_1 \geqslant A_2 - 1$. При этом, число скрученных периодических траекторий индекса 1 может быть произвольным [63].

На трехмерной сфере S^3 периодические траектории потока Морса—Смейла образуют индексированные зацепления (индексированность означает, что каждому узлу приписан индекс соответствующей периодической траектории). Простейшим потоком Морса—Смейла на S^3 без состояний равновесия является поток ровно с двумя периодическими траекториями, одна из которых имеет индекс 0 — притягивающая, а вторая имеет индекс 2 — отталкивающая (см. рис. 4.1). Эти траектории образуют известное зацепление Хопфа. С учетом индексов, будем называть его $(0,2)$ зацеплением Хопфа.

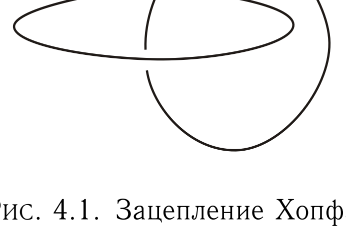

Рис. 4.1. Зацепление Хопфа

Вада [95] ввел шесть операций (назовем их *операциями Вады*) на множестве индексированных зацеплений и доказал, что любое индексированное зацепление, образованное периодическими

[1]Периодическая траектория называется *скрученной*, если отображение последования Пуанкаре на ее неустойчивом многообразии сопряжено инволюции $\vec{x} \to -\vec{x}$. В противном случае траектория называется *нескрученной*.

траекториями потока Морса—Смейла без состояний равновесия на S^3, может быть получено из $(0,2)$ зацепления Хопфа с помощью операций Вады. Обратно, любое индексированное зацепление на S^3, получаемое из $(0,2)$ зацепления Хопфа с помощью операций Вады, можно реализовать с помощью периодических траекторий некоторого потока Морса—Смейла без состояний равновесия (см. также [87, 97]). В работе Бина [50] индексированные зацепления несингулярных потоков без гетероклинических пересечений на S^3 описываются на языке *графа Ляпунова* — ориентированного графа, вершины и ребра которого соответствуют элементам фильтрации и регулярным линиям уровня, соответственно, функции Ляпунова для потока.

Напомним, что *k-ручкой* размерности n, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется произведение $D^k \times D^{n-k}$ или гомеоморфный образ этого произведения, где D^j — j-мерный замкнутый шар. Иногда $D^k \times D^{n-k}$ называют ручкой индекса k. Часть $S^{k-1} \times D^{n-k}$ границы $\partial\left(D^k \times D^{n-k}\right)$ называется *подошвой* ручки $D^k \times D^{n-k}$. Приклеивание k-ручки $D^k \times D^{n-k}$ к n-мерному многообразию M^n с непустой границей состоит в отождествлении подошвы

$$S^{k-1} \times D^{n-k} \subset S^{k-1} \times D^{n-k} \bigcup D^k \times S^{n-k-1} = \partial\left(D^k \times D^{n-k}\right)$$

и некоторой части границы ∂M^n с помощью некоторого гомеоморфизма $S^{k-1} \times D^{n-k} \to \partial M^n$. Отметим, что приклеивание ручки индекса 0 состоит в добавлении к M^n отдельно взятого шара размерности n, а приклеивание ручки индекса n заключается в заклеивании n-мерным шаром одной из компонент ∂M^n.

Круговой k-ручкой размерности n, $0 \leqslant k \leqslant n$, называется произведение $S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}$. Приклеивание круговой k-ручки $S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}$ к M^n состоит в отождествлении множества

$$S^1 \times S^{k-1} \times D^{n-k-1} \subset \partial\left(S^1 \times D^k \times D^{n-k-1}\right)$$

и части границы ∂M^n с помощью некоторого диффеоморфизма $S^1 \times S^{k-1} \times D^{n-k-1} \to \partial M^n$. Если M^n может быть получено из $M^{n-1} \times [0;1]$, где M^{n-1} — некоторое $(n-1)$-многообразие, последовательным приклеиванием круговых ручек (вообще говоря, различных индексов), то говорят, что *M^n допускает разложение на круговые ручки*.

Для многообразий размерности $n \geqslant 4$ Азимов [44] доказал следующую теорему.

Теорема 4.2. *На многообразии M^n $(n \geqslant 4)$ существует поток Морса—Смейла без состояний равновесия тогда и только тогда, когда M^n допускает разложение на круговые ручки.*

В работе [45] Азимов доказал для многообразий размерности $n \geqslant 4$, что любое векторное поле без особенностей гомотопно (в пространстве векторных полей без особенностей) векторному полю Морса—Смейла. Поэтому описание несущего многообразия в силу теоремы 4.2 может быть применимо для более широкого класса потоков без состояний равновесия.

5. Потоки Морса—Смейла с состояниями равновесия на 3-многообразиях

В описании несущих многообразий для потоков Морса—Смейла с состояниями равновесия используются такие понятия топологии многообразий, как разложение Хегора, род Хегора и т.п.

Трехмерное многообразие D^3_g называется *3-шаром с g ручками*, если D^3_g получается из трехмерного диска D^3 приклеиванием $g \geqslant 0$ ручек индекса 1. *Разбиением Хегора* рода $g \geqslant 0$ замкнутого трехмерного многообразия M^3 называется представление M^3 в виде склейки двух 3-шаров с g ручками с помощью некоторого гомеоморфизма, отождествляющего их границы. *Родом Хегора* $h(M^3)$ многообразия M^3 называется наименьшее g, для которого существует соответствующее разбиение Хегора многообразия M^3.

В работах [16, 17] рассматривается в некотором смысле альтернативная к работе [44] ситуация, когда поток Морса—Смейла необходимо содержит состояния равновесия. В [17] доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Пусть на замкнутом трехмерном многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t)$ седловых и $\mu(f^t)$ узловых состояний равновесия. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора*

рода
$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2}.$$
На любом замкнутом многообразии M^3 существует поток Морса—Смейла без периодических траекторий такой, что $2h(M^3) = \nu(f^t)$.

Следствие 5.1. *Пусть на замкнутом 3-многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t)$ седловых и $\mu(f^t)$ узловых состояний равновесия. Тогда*
$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2}.$$

Из теоремы 5.1 можно извлечь следующее достаточное условие существования периодических траекторий.

Предложение 5.1. *Пусть на замкнутом 3-многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, множество состояний равновесия которого состоит из $\nu(f^t)$ седел и $\mu(f^t)$ узлов. Тогда если*
$$h(M^3) > \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2},$$
то поток f^t имеет периодические траектории.

Теорема 5.2. *Пусть на замкнутом трехмерном многообразии M^3 задан поток f^t Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из $\nu(f^t) \geqslant 0$ седловых состояний равновесия, $\mu(f^t) \geqslant 0$ узловых состояний равновесия, $s(f^t) \geqslant 0$ седловых периодических траекторий и $r(f^t) \geqslant 0$ узловых периодических траекторий. Тогда многообразие M^3 можно представить в виде разбиения Хегора рода*
$$h_D = \frac{\nu(f^t) - \mu(f^t) + 2}{2} + s(f^t).$$
Более того,
$$h(M^3) \leqslant \frac{\nu(f^t) + r(f^t)}{2} + s(f^t).$$

Имеется несколько классификационных результатов для частных классов потоков Морса—Смейла на замкнутых 3-многообразиях. В [61] получена классификация *полярных потоков*, т. е. градиентно-подобных потоков, у которых имеется ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узел. Рассматривая пересечения сепаратрис седел со сферами, окружающими узлы, автор строит полный классификационный инвариант таких потоков, который называется в работе [61] диаграммой Хегора. Уманский [40] построил полный топологический инвариант для потоков Морса—Смейла с конечным числом траекторий, принадлежащих пересечению двумерных сепаратрис седловых неблуждающих траекторий. Этот инвариант представляет собой комбинаторное описание границ ячеек потока и описание характера примыкания ячеек к стокам и источникам. В работе [36] построен полный инвариант для потоков Морса—Смейла без периодических траекторий. Этот инвариант с точностью до гомеоморфизма представляет собой поверхность, трансверсальную траекториям потока, лежащим вне замыкания одномерных сепаратрис седловых точек, со следами от пересечения этой поверхности с двумерными сепаратрисами седловых точек.

6. Потоки с тремя состояниями равновесия

Как указывалось ранее, если неблуждающее множество потока Морса—Смейла на замкнутом многообразии M^n состоит из двух точек, то поток имеет ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узлы, многообразие M^n является n-мерной сферой и поток топологически эквивалентен стандартному потоку типа «север—юг». Естественно рассмотреть вопрос о динамике потоков Морса—Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех точек. Согласно предложению 3.2, несущее двумерное многообразие такого потока является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$, и все потоки Морса—Смейла на $\mathbb{P}^2$, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, топологически эквивалентны. Фазовый портрет такого потока изображен на рис. 6.1. Нетрудно видеть, что сток ω и неустойчивое многообразие $W^u(\sigma)$ седла σ образуют

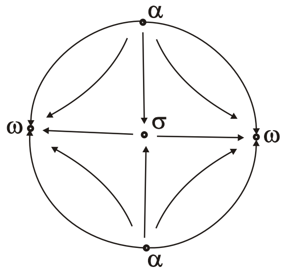

Рис. 6.1. Поток на проективной плоскости (диаметрально противоположные точки окружности отождествляются)

локально плоско вложенную окружность $S^1 \subset \mathbb{P}^2$ такую, что $\mathbb{P}^2 \setminus S^1$ гомеоморфно открытому шару. Это обстоятельство мотивирует следующее определение.

Напомним, что топологически вложенная в M^n k-мерная сфера S^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, называется *локально плоско вложенной*, если для любой точки $z \in S^k$ существует окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(S^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1. $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;
2. M^n есть дизъюнктное объединение[1] $\dfrac{n}{2}$-мерной сферы $S^{\frac{n}{2}}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n,

$$M^n = S^{\frac{n}{2}} \cup B^n, \quad S^{\frac{n}{2}} \cap B^n = \varnothing.$$

Жужомой и Медведевым в [74] (см. также [26]) была доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть f^t — поток Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном многообразии M^n, $n \geqslant 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием. При этом M^2 является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхностью рода единица с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$), а при $n \geqslant 4$*

$$\pi_1(M^n) = \cdots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0, \quad \textit{и следовательно, } M^n \textit{ — ориентируемое.}$$

Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует поток Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия.

Отметим, что поток Морса—Смейла на M^n, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, имеет ровно одно седло, и замыкания инвариантных многообразий (устойчивых и неустойчивых) этого седла являются топологически вложенными сферами размерности $n/2$. Сформулируем теперь результаты о топологической эквивалентности потоков с тремя состояниями равновесия, недавно полученные Е. В. Жужомой и В. С. Медведевым [31]. Для этого введем ключевое понятие локально эквивалентно вложенных в несущее многообразие подмногообразий.

Пусть M_1^k, M_2^k — топологически вложенные в M^n k-мерные подмногообразия, $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Будем говорить, что M_1^k и M_2^k *локально эквивалентно вложены*, если существуют окрестности $U(\operatorname{clos} M_1^k)$, $U(\operatorname{clos} M_2^k)$ топологических замыканий $\operatorname{clos} M_1^k$, $\operatorname{clos} M_2^k$ подмногообразий M_1^k, M_2^k, соответственно, и гомеоморфизм $h : U(\operatorname{clos} M_1^k) \to U(\operatorname{clos} M_2^k)$ такой, что $h(M_1^k) = M_2^k$. Для несущих многообразий размерностей $n = 8$ и $n = 16$ имеет место следующая теорема.

Теорема 6.2. *Пусть f_i^t — поток Морса—Смейла ($i = 1, 2$), неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M_i^n, где $n = 8, 16$. Потоки f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда устойчивые (равносильно неустойчивые) многообразия седел потоков f_1^t, f_2^t локально эквивалентно вложены.*

Что касается размерностей $n = 2$ и $n = 4$, то имеет место следующая теорема.

[1]Объединение называется *дизъюнктным*, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

Теорема 6.3. *Пусть f_1^t, f_2^t — потоки Морса—Смейла, неблуждающее множество которых состоит из трех состояний равновесия, на замкнутых топологических многообразиях M_1^n, M_2^n соответственно, где $n = 2, 4$. Тогда f_1^t, f_2^t топологически эквивалентны. В частности, многообразия M_1^4, M_2^4 гомеоморфны, а для размерности $n = 2$ многообразия M_1^2, M_2^2 гомеоморфны проективной двумерной плоскости $\mathbb{P}^2$.*

7. О взаимосвязи числовых характеристик неблуждающего множества систем Морса—Смейла и топологии несущего многообразия

В этом разделе рассматриваются диффеоморфизмы Морса—Смейла, удовлетворяющие некоторым специальным условиям.

Как указывалось ранее, на любом трехмерном многообразии можно задать диффеоморфизм Морса—Смейла. Однако не на всех многообразиях существуют диффеоморфизмы Морса—Смейла без гетероклинических кривых. Замечательный результат был получен в работах [12, 53] о топологической структуре замкнутых 3-многообразий, на которых такие диффеоморфизмы существуют.

Теорема 7.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого 3-многообразия без гетероклинических кривых. Тогда M^3 есть либо сфера S^3, и в этом случае $\nu(f) = \mu(f) - 2$, либо M^3 есть связная сумма $(S^2 \times S^1)\sharp \cdots \sharp(S^2 \times S^1)$. В последнем случае число слагаемых в связной сумме равно*

$$\frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2},$$

где $\nu(f)$ — число седловых и $\mu(f)$ — число узловых периодических точек.

Обозначим через $G^*(M^n)$ множество сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса—Смейла ориентируемого n-мерного ($n \geqslant 4$) замкнутого многообразия M^n, у которых все седловые периодические точки имеют одномерное устойчивое или неустойчивое многообразие, а инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются. Е. Гуревич и В. Медведев в работах [24, 25] (см. также [65]) обобщили теорему 7.1, доказав следующую теорему.

Теорема 7.2. *Замкнутое ориентируемое n-многообразие M^n ($n \geqslant 4$) допускает сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ из класса $G^*(M^n)$ с $\nu(f) \geqslant 0$ седловыми и $\mu(f) \geqslant 2$ узловыми периодическими точками тогда и только тогда, когда M^n есть либо сфера, и в этом случае $\nu(f) = \mu(f) - 2$, либо M^n есть связная сумма $(S^{n-1} \times S^1)\sharp \cdots \sharp(S^{n-1} \times S^1)$. В последнем случае число слагаемых в связной сумме равно*

$$\frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

По существу, из теоремы 7.1 вытекает, что на 3-многообразиях не существует диффеоморфизмов Морса—Смейла ровно с тремя периодическими точками. Опуская тривиальный случай диффеоморфизма ровно с двумя периодическими точками, получаем, что простейшим является диффеоморфизм Морса—Смейла ровно с четырьмя периодическими точками. У таких диффеоморфизмов возможно достаточно сложное вложение инвариантных многообразий седловых периодических точек, что приводит к существованию нетривиальных примеров даже на 3-сфере S^3. Возможность дикого (не ручного) вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек была открыта в работе Д. Пикстона [86] для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : S^3 \to S^3$ с тремя узлами (два стока и один источник) и одним седлом с одномерной (неустойчивой) и двумерной (устойчивой) сепаратрисами (далее мы называем класс таких диффеоморфизмов *классом Пикстона*). Чтобы понять возникновение дикого вложения сепаратрис седловой неподвижной точки диффеоморфизма f, обозначим через ω_1, ω_2 стоки и через $W^{u+}(\sigma)$ сепаратрису седла σ, идущую в сток ω_2, см. рис. 7.1 (a). Теперь представим объединение $\alpha \cup W^s(\sigma) \cup W^{u+}(\sigma) \cup \omega_2$ как бесконечную «кривую», половина которой немного раздута (эта половина соответствует $\alpha \cup W^s(\sigma)$), где $W^s(\sigma)$ — устойчивое многообразие седла σ. Затем вложим эту кривую вместе с некоторой окрестностью в S^3, как кривую с двумя концами дикости. Например, как хорошо известную дикую дугу Артина—Фокса [43], см. рис. 7.1 (b).

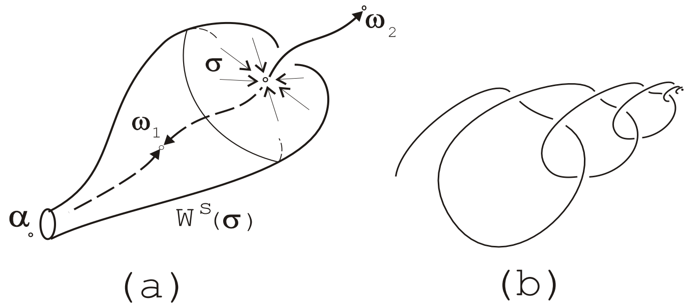

Рис. 7.1

Дадим точное определение. Пусть $f \in \mathcal{MS}(M^3)$, ω — стоковая точка и $\ell^u(\sigma)$ — одномерная сепаратриса седловой точки σ такая, что $\ell^u(\sigma) \subset W^s(\omega)$. Сепаратриса $\ell^u(\sigma)$ называется *ручно вложенной* в M^3, если существует гомеоморфизм $h : W^s(\omega) \to \mathbb{R}^3$ такой, что $h(\ell^u(\sigma))$ — луч в $\mathbb{R}^3$. Аналогичным образом пучок L_ω одномерных сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании, называется *ручным*, если существует гомеоморфизм $h : W^s(\omega) \to \mathbb{R}^3$, распрямляющий сепаратрисы.

Из работы [70] вытекает следующий критерий ручного вложения одномерной седловой сепаратрисы.

Предложение 7.1. *Пусть $f \in \mathcal{MS}(M^3)$, ω — стоковая точка и $\ell^u(\sigma)$ — одномерная сепаратриса седловой точки σ такая, что $\ell^u(\sigma) \subset W^s(\omega)$. Сепаратриса $\ell^u(\sigma)$ ручно вложена в M^3 тогда и только тогда, когда существует гладкий 3-шар $B_\omega \subset W^s(\omega)$, содержащий ω в своей внутренности и такой, что $\ell^u(\sigma)$ пересекает ∂B_ω в одной точке.*

Аналогичный критерий для пучка одномерных сепаратрис не имеет места. Так, в работе [60] построен пучок дуг в $\mathbb{R}^3$, пересекающих границу некоторого 3-шара по одной точке, но являющийся ручным (см. рис. 7.2, где пучок дуг Дебрунера—Фокса реализован пучком сепаратрис диффеоморфизма Морса—Смейла на S^3). Авторы назвали такой пучок *умеренно диким*, поскольку при извлечении любой дуги из такого пучка оставшееся объединение дуг становится ручным.

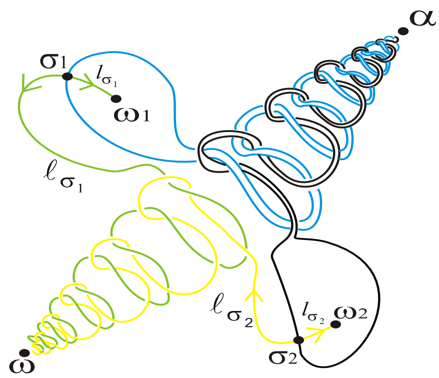

Рис. 7.2

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса—Смейла без гетероклинических точек замкнутого 3-многообразия M^3. Будем говорить, что одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f *тривиально вложены*, если все пучки одномерных сепаратрис являются ручными.

Следующая теорема и следствия из нее о связи динамических характеристик диффеоморфизма Морса—Смейла с тривиально вложенными сепаратрисами и без гетероклинических точек с родом разбиения Хегора несущего 3-многообразия получены в работах [16, 17].

Теорема 7.3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм замкнутого 3-многообразия M^3, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек. Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то многообразие M^3 можно* *представить в виде разбиения Хегора рода*

$$h = \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}.$$

Следствие 7.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — градиентно-подобный диффеоморфизм замкнутого 3-многообразия M^3. Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то число седловых периодических точек диффеоморфизма f не меньше удвоенного рода Хегора многообразия M^3. На любом замкнутом многообразии M^3 рода Хегора $h(M^3)$ существует диффеоморфизм f Морса—Смейла без гетероклинических точек такой, что число седловых периодических точек диффеоморфизма f равно $2h(M^3)$.*

Из следствия 7.1 вытекает следующее достаточное условие наличия гетероклинических точек у диффеоморфизма Морса—Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами седловых периодических точек.

Предложение 7.2. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого 3-многообразия M^3, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек, и предположим, что одномерные сепаратрисы седловых периодических точек диффеоморфизма f тривиально вложены. Тогда если*

$$h(M^3) > \frac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2},$$

то f имеет гетероклинические точки. В частности, f не вкладывается в поток.

Известно, что род Хегора аддитивен по отношению к связным суммам 3-многообразий [30]. Поскольку $h(S^2 \times S^1) = 1$, то род Хегора связной суммы $h\left((S^2 \times S^1)\sharp \cdots \sharp(S^2 \times S^1)\right)$ равен числу слагаемых в связной сумме. Отсюда, теоремы 7.1 и теоремы Зейферта—Ван Кампена вытекает следующее утверждение.

Предложение 7.3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого 3-многообразия, имеющий $\nu(f)$ седловых и $\mu(f)$ узловых периодических точек, и выполняется одно из следующих условий*:

1. $h(M^3) > \dfrac{\nu(f) - \mu(f) + 2}{2}$;
2. *фундаментальная группа $\pi_1(M^3)$ не равна свободному произведению $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ g экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$.*

Тогда f имеет гетероклинические кривые.

Замкнутые гетероклинические кривые нередко имеют искусственное происхождение и их наличие не обусловлено топологической структурой несущего многообразия или динамическими ограничениями. Что касается незамкнутых гетероклинических кривых, то, как показывает следующая теорема, доказанная в [18], имеются диффеоморфизмы Морса—Смейла, которые необходимо имеют незамкнутые гетероклинические кривые.

Теорема 7.4. *Пусть f — диффеоморфизм Морса—Смейла замкнутого ориентируемого трехмерного многообразия, для которого 3-мерная сфера S^3 является универсальным накрытием, и пусть неблуждающее множество f состоит из двух седловых и двух узловых периодических точек. Тогда существует, по крайней мере, одна гетероклиническая незамкнутая кривая, граница которой состоит из седловых точек* (*см. рис.* 7.3). *Каждая такая гетероклиническая кривая инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f. Более того, если пересечение двумерных инвариантных многообразий седловых точек не исчерпывается такими гетероклиническими кривыми, то оставшаяся часть пересечения содержит счетное семейство замкнутых гетероклинических кривых, которые представляют собой объединение орбит некоторого конечного набора замкнутых гетероклинических кривых.*

В следующей теореме получена нижняя оценка числа незамкнутых гетероклинических кривых для диффеоморфизмов Морса—Смейла на линзах $L_{p,q}$ в предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизма содержит ровно четыре периодические точки [18].

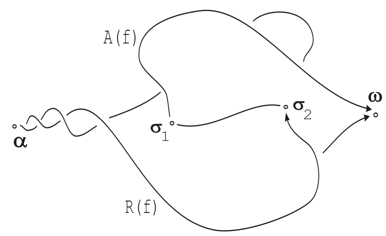

Рис. 7.3

Теорема 7.5. *Пусть $f : L_{p,q} \to L_{p,q}$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех периодических точек. Тогда*

1. *f имеет 2 узловых и 2 седловых периодических точек, при этом седловые точки имеют разный индекс Морса.*
2. *Если одномерные сепаратрисы диффеоморфизма f тривиально вложены, то существует, по крайней мере, p гетероклинических незамкнутых кривых, граница каждой из которых состоит из седловых точек. Каждая такая гетероклиническая кривая инвариантна относительно некоторой итерации диффеоморфизма f.*

Из теоремы 7.1 следует, что каждый градиентно-подобный диффеоморфизм на любом неприводимом многообразии при наличии хотя бы одной седловой точки необходимо имеет гетероклинические кривые (компактные или некомпактные). Следующая теорема, доказанная в [67], уточняет этот результат для полярных систем.

Теорема 7.6. *Двумерное инвариантное многообразие каждой седловой точки полярного градиентно-подобного диффеоморфизма на неприводимом многообразии содержит некомпактную гетероклиническую кривую.*

8. Глобальная динамика систем Морса—Смейла

Сложность динамики произвольных систем Морса—Смейла хорошо иллюстрирует следующий результат В. С. Афраймовича и Л. П. Шильникова [7]. Пусть f^t — поток на компактном многообразии M^n. Обозначим через $G(f^t)$ группу гомеоморфизмов потока f^t на себя, т. е. каждый гомеоморфизм из $G(f^t)$ переводит любую траекторию потока f^t в траекторию потока f^t с сохранением ориентации по времени. Метрика на M^n индуцирует естественную метрику на $G(f^t)$. Следуя [7], будем называть траекторию l потока f^t *особой*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $g \in G(f^t)$, ε-близкого к тождественному гомеоморфизму, выполняется условие $g(l) = l$.

Все состояния равновесия и периодические траектории потока Морса—Смейла являются особыми, поскольку они изолированы в неблуждающем множестве. Однако помимо этих траекторий особой может быть блуждающая траектория l, принадлежащая пересечению устойчивого W^s и неустойчивого многообразия W^u некоторых неблуждающих траекторий, при этом $\dim W^s + \dim W^u = \dim M^n + 1$. Траектории l приписывается тип $(\dim W^s, \dim W^u)$. Множество всех таких особых траекторий типа $(m+1, \dim M^n - m)$ и предельных для них неблуждающих траекторий обозначим через $\mathfrak{M}_{m+1}$. Это множество в общем случае несвязно и состоит из конечного числа компонент, которые обозначаются через $\mathfrak{M}^{(1)}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{M}^{(\kappa)}_{m+1}$. В этих обозначениях имеет место следующая теорема, доказанная в [7].

Теорема 8.1. *Пусть f^t — Морса—Смейла, и пусть $\mathfrak{M}^{(i)}_{m+1}$ — компонента множества $\mathfrak{M}_{m+1}$. Тогда ограничение потока Морса—Смейла на $\mathfrak{M}^{(i)}_{m+1}$ топологически орбитально эквивалентно специальной надстройке (Σ_A, f) над некоторой топологической марковской цепью (Σ_A, σ) с конечным числом состояний, где Σ_A — пространство двусторонних последовательностей, определяемых матрицей A, из нулей и единиц, а неотрицательная функция $f : \Sigma_A \to [0; 1]$ обращается в ноль только в точках, соответствующим постоянным последовательностям (σ — сдвиг влево на единицу).*

Однако несмотря на сложную структуру множества особых траекторий, любую систему Морса—Смейла можно представить в виде «источник— сток», где под «источником» и «стоком» уже понимаются по возможности просто устроенные инвариантные замкнутые множества, одно из которых является аттрактором, а другое — репеллером, см. рис. 1.2. Опишем конструкцию аттрактора A_f и репеллера R_f для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$. Когда пространство $\hat{V}_f$ орбит блуждающего множества $V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f)$ (вместе с вложенными в него образами при факторизации инвариантных многообразий седловых периодических точек) поддается описанию, то это приводит к обнаружению новых топологических инвариантов, описывающих вложение (возможно, дикое) устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек в несущее многообразие. Это создает предпосылки для топологической классификации в рамках данного класса диффеоморфизмов (см. раздел 9).

Пусть $f : M^n \to M^n$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм Морса—Смейла. Обозначим через Σ_f, Δ_f^s и Δ_f^u все седла, стоки и источники, соответственно, диффеоморфизма f. Разделим седловые точки Σ_f на два непересекающихся подмножества Σ_f^A и Σ_f^R таких, что множества

$$A_f = \Delta_f^s \cup W^u_{\Sigma_f^A} \quad \text{и} \quad R_f = \Delta_f^u \cup W^s_{\Sigma_f^R}$$

являются замкнутыми и инвариантными. Заметим, что если одно из множеств A_f или R_f инвариантно и замкнуто, то другое также является замкнутым и инвариантным. Кроме того, множества A_f и R_f содержат все периодические точки диффеоморфизма f и не пересекаются. Наибольшую размерность неустойчивого (устойчивого) многообразия точек из Σ_f^A (Σ_f^R) будем называть *размерностью* A_f (R_f).

Теорема 8.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла. Тогда множество A_f (соответственно, R_f) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f. Более того, если размерность аттрактора A_f (репеллера R_f) $\leqslant n-2$, то репеллер R_f (аттрактор A_f) является связным.*

Мы будем называть A_f и R_f *глобальными аттрактором и репеллером диффеоморфизма Морса—Смейла* $f : M^n \to M^n$.

Следующая теорема описывает топологическую структуру пространства орбит множества

$$V_f = M^n \setminus (A_f \cup R_f).$$

Обозначим через

$$\hat{V}_f = V_f/f$$

множество орбит действия f на многообразии V_f, которое совпадает с множеством орбит диффеоморфизма f на V_f. Пусть

$$p_f : V_f \to \hat{V}_f$$

— естественная проекция, ставящая в соответствие точке $x \in V_f$ ее орбиту в силу диффеоморфизма f и наделяющая множество $\hat{V}_f$ фактортопологией.

Напомним, что сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется *цилиндрически вложенной в* M^n, если существует топологическое вложение $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1;+1] \to M^n$ такое, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$. По аналогии с трехмерным случаем мы называем M^n *неприводимым*, если любая цилиндрически вложенная в M^n $(n-1)$-сфера ограничивает в M^n n-шар.

Теорема 8.3. *Пространство V_f является замкнутым гладким ориентируемым n-многообразием. Более того, если размерность аттрактора A_f и репеллера $R_f \leqslant n-2$, то V_f связно и $\hat{V}_f$ либо неприводимо, либо гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.*

Сформулируем несколько следствий теорем 8.2 и 8.3.

Следствие 8.1. *Если диффеоморфизм Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ не имеет седловых точек с одномерными неустойчивыми (устойчивыми) многообразиями, то неблуждающее множество f содержит в точности один сток (источник).*

Естественным обобщением диффеоморфизмов «источник—сток» являются так называемые *полярные диффеоморфизмы* — диффеоморфизмы Морса—Смейла, имеющие ровно один источник и один сток. Тогда из следствия 8.1 немедленно получаем.

Следствие 8.2. *Если диффеоморфизм Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ не имеет седловых точек с одномерными инвариантными многообразиями, то f — полярный диффеоморфизм.*

Напомним, что *ручкой индекса q размерности n* $(0 \leqslant q \leqslant n)$ называется прямое произведение двух дисков $H_q^n = \mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}$. Диск $\mathbb{B}^q$ называют *осью ручки*. Ручка H_q^n является гладким многообразием с краем $\partial H_q^n = \partial(\mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}) = (\partial\mathbb{B}^q \times \mathbb{B}^{n-q}) \cup (\mathbb{B}^q \times \partial\mathbb{B}^{n-q}) = (\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}) \cup (\mathbb{B}^q \times \mathbb{S}^{n-q-1})$. Напомним операцию *приклеивания ручки* H_q^n к n-многообразию A^n с краем $B^{n-1} = \partial A^n$. Пусть $\mathbb{S}^{q-1} \subset B^{n-1}$ — гладко вложенная сфера и $N(\mathbb{S}^{q-1})$ — ее трубчатая окрестность, диффеоморфная прямому произведению $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}$. Склеим многообразие A^n с ручкой H_q^n по отображению $g : \mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q} \to N(\mathbb{S}^{q-1})$, которое есть диффеоморфизм между трубчатой окрестностью $N(\mathbb{S}^{q-1})$ и многообразием $\mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{B}^{n-q}$, являющимся частью границы ∂H_q^n. Сглаживая затем «углы», возникшие в точках $\partial N(\mathbb{S}^{q-1}) = \mathbb{S}^{q-1} \times \mathbb{S}^{n-q-1}$, получим гладкое многообразие $\tilde{A}^n$ с гладким краем $\tilde{B}^{n-1}$.

Компактный n-мерный *кобордизм* — это тройка (K, L_0, L_1), где L_0 и L_1 — замкнутые многообразия размерности $n-1$, и K — компактное n-мерное многообразие такое, что $\partial K = L_0 \sqcup L_1$.

Следствие 8.3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм Морса—Смейла, Σ_f^A — множество седловых точек с одномерными неустойчивыми многообразиями и $\Sigma_f^R = \Sigma_f \setminus \Sigma_f^A$. Тогда соответствующие глобальные аттрактор A_f и репеллер R_f являются связными. Более того, существует n-мерный кобордизм (K, L_0, L_1), где $K \subset V_f$, L_i, $i = 1, 2$, гомеоморфно границе n-шара с приклеенными $g \geqslant 0$ n-мерными ручками индекса 1, такой, что $\hat{V}_f$ получается из (K, L_0, L_1) отождествлением его границ в силу диффеоморфизма f.*

Следующая теорема описывает структуру глобального аттрактора и репеллера в случае, когда они не содержат гетероклинических пересечений.

q-Клеткой e^q $(q \geqslant 0)$ в хаусдорфовом пространстве X называется образ открытого n-диска $int\ \mathbb{B}^q$ при непрерывном отображении $g^q : \mathbb{B}^q \to X$, ограничение которого $g^q|_{int\ \mathbb{B}^q} : int\ \mathbb{B}^q \to g^q(int\ \mathbb{B}^q)$ является гомеоморфизмом. Заметим, что $\partial\mathbb{B}^q = \mathbb{S}^{q-1}$ для всех $q \geqslant 0$. В случае $q = 1$ граница $\mathbb{S}^0$ диска $\mathbb{B}^1$ — две точки. В случае $q = 0$ диск $\mathbb{B}^0$ — точка и его граница $\mathbb{S}^{-1}$ — пустое множество. *Конечным клеточным комплексом* называется хаусдорфово пространство X, которое можно представить в виде объединения попарно непересекающихся клеток (клеточного разбиения) $X = \bigcup\limits_{q=0}^{n} \Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{c_q(X)} e_j^q \Bigr)$ такого, что граница $Fr\ e_j^q$ каждой клетки e_j^q содержится в объединении клеток меньших размерностей. Размерность наибольшей входящей в клеточный комплекс клетки называется *размерностью клеточного комплекса*.

Частным случаем клеточного комплекса является *сферический букет*, который получается из сфер $X_1, \ldots, X_m$ (возможно, разной положительной размерности) с отмеченными точками после отождествления их отмеченных точек с одной точкой [41]. Изолированную точку мы будем считать тривиальным сферическим букетом.

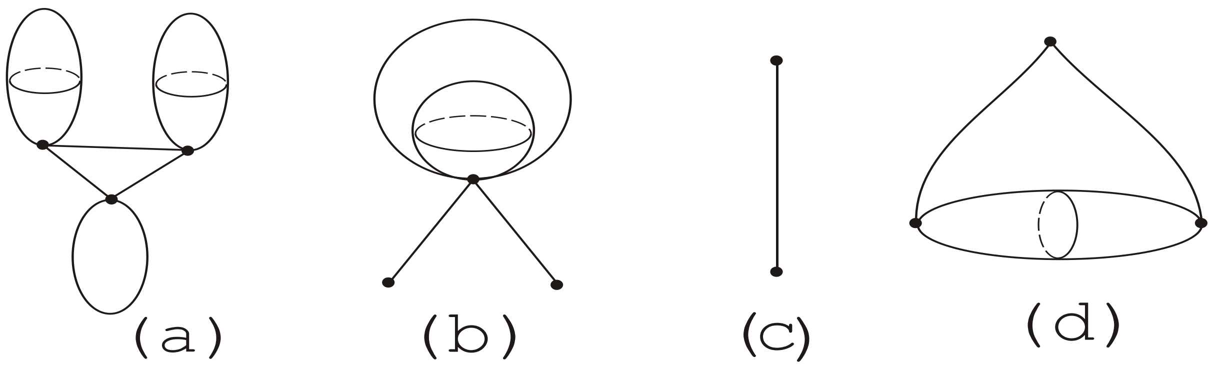

Рис. 8.1

Будем говорить, что два букета, вложенные в некоторое объемлющее пространство, *связаны дугой*, если к букетам добавляется дуга (топологическое вложение отрезка), соединяющая отмеченные точки букетов, внутренность которой не пересекается с букетами. Эту дугу будем называть *связывающей дугой*. Связное множество, состоящее из конечного числа сферических букетов и связывающих дуг назовем *связкой сферических букетов*. Например, на рис. 8.1 (a), (b), (c) изображены связки сферических букетов, в то время как множество, изображенное на рис. 8.1 (d) не является связкой сферических букетов, поскольку сфера букета должна иметь только одну отмеченную точку.

Теорема 8.4. *Пусть A_f (R_f) — глобальный аттрактор (репеллер) диффеоморфизма Морса—Смейла $f : M^n \to M^n$ такой, что A_f (R_f) не содержит гетероклинических пересечений. Тогда A_f (R_f) является конечным семейством связок сферических букетов.*

9. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на n-многообразиях для $n \geqslant 3$

Рассмотрим вопросы классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на замкнутых 3-многообразиях.

Топологическая классификация диффеоморфизмов из класса Пикстона свелась к изотопической классификации узлов в $S^2 \times S^1$, гомотопных узлам $\{\cdot\} \times S^1$, см. детали в [52]. Как следствие, доказывалось существование счетного множества классов топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса—Смейла на S^3 с тремя узлами и одним седлом.

Работа [52] ознаменовала прорыв в проблеме классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3-мерных многообразиях, поскольку в ней был найден принципиально новый инвариант сопряженности и на простейшем классе были проработаны основные этапы в доказательстве необходимых и достаточных условий сопряженности двух диффеоморфизмов из более широких классов. Эта работа послужила своеобразным катализатором, повлекшим поток работ по классификации различных классов диффеоморфизмов Морса—Смейла на замкнутых 3-мерных многообразиях [11–13, 54, 55] и др., приведший к полной топологической классификации в [35] сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из множества $\mathcal{MS}\,(M^3)$. Мы опишем конструкцию построения полного топологического инварианта для таких диффеоморфизмов.

Пусть f сохраняющий ориентацию диффеоморфизм из класса $\mathcal{MS}\,(M^3)$. Обозначим через A_f (соответственно, R_f) объединение всех стоковых (соответственно, источниковых) периодических точек и всех одномерных неустойчивых (соответственно, устойчивых) многообразий седловых периодических точек диффеоморфизма f. Множество A_f является притягивающим и представляет собой объединение конечного числа дуг и окружностей, возможно, имеющих точки дикого заузления в стоковых периодических точках. Аналогичное описание имеет отталкивающее множество R_f. Также множества A_f и R_f могут содержать дуги, к которым, «осцилируя», стремятся одномерные сепаратрисы седловых периодических точек.

Положим $V_f = M^3 \setminus (A_f \bigcup R_f)$. Множество V_f является инвариантным открытым и связным подмножеством, принадлежащим блуждающему множеству диффеоморфизма f. Поскольку оно инвариантное, то можно рассмотреть пространство орбит $\hat{V}_f$, лежащих в V_f. Формально, $\hat{V}_f$ есть фактор-пространством по следующему отношению эквивалентности: две точки эквивалентны, если они принадлежат одной орбите. Обозначим через $p_f : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию. В силу теоремы 8.3, $\hat{V}_f$ является связным замкнутым ориентируемым трехмерным многообразием, а проекция p_f — накрытием с группой накрывающих преобразований, изоморфной $\mathbb{Z}$ (см., например, [19]). Поэтому p_f определяет эпиморфизм $\alpha_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$. Обозначим через $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ образы относительно p_f всех двумерных неустойчивых и устойчивых сепаратрис соответственно. Эти множества компактны и каждая из компонент линейной связности множеств $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ представляет собой двумерный тор или бутылку Клейна с пустым, конечным или счетным множеством выколотых точек (см. рис. 9.1). При этом множества $\hat{\Gamma}^u_f$, $\hat{\Gamma}^s_f$ могут трансверсально пересекаться.

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \alpha_f, \hat{\Gamma}^u_f, \hat{\Gamma}^s_f)$ назовем *схемой*. Две схемы $S_f = (\hat{V}_f, \alpha_f, \hat{\Gamma}^u_f, \hat{\Gamma}^u_f)$, $S_{f'} = (\hat{V}_{f'}, \alpha_{f'}, \hat{\Gamma}^u_{f'}, \hat{\Gamma}^s_{f'})$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ такой, что

1. $h(\hat{\Gamma}^u_f) = \hat{\Gamma}^u_{f'}$, $h(\hat{\Gamma}^u_f) = \hat{\Gamma}^u_{f'}$.
2. $h_*(\alpha_{f'}) = \alpha_f$, где изоморфизм $h_* : \pi_1(\hat{V}_{f'}, \mathbb{Z}) \to \pi_1(\hat{V}_f, \mathbb{Z})$ индуцируется гомеоморфизмом h.

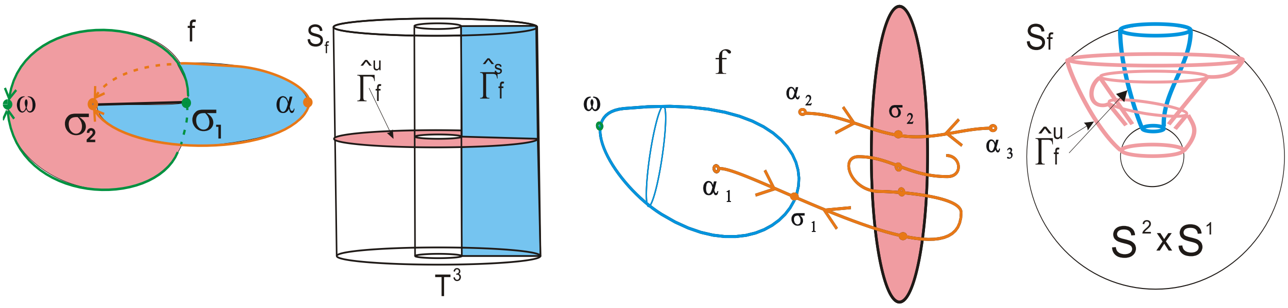

Рис. 9.1

Теорема 9.1. *Схема с точностью до эквивалентности является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из* $\mathcal{MS}\ (M^3)$.

Теорема 9.1 обобщена на класс $G^*\ (M^n)$ в работе [65], где для диффеоморфизма $f \in G^*\ (M^n)$ введена схема, подобная схеме 3-диффеоморфизма Морса—Смейла.

Теорема 9.2. *Схема с точностью до эквивалентности является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из* $G^*\ (M^n)$.

В работе [15] для диффеоморфизма f из класса $G(S^n)$ диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на n-сфере введен граф $G(f)$ с автоморфизмом на нем, аналогичный различающему графу Безденежных—Гринеса (напомним, что этот граф, в свою очередь, есть аналог различающего графа Пейшото), и доказана следующая теорема.

В [18] доказана следующая теорема.

Теорема 9.3. *Пусть f и g — сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы Морса—Смейла n-мерной сферы S^n ($n \geqslant 4$) такие, что неблуждающее множество каждого диффеоморфизма состоит из четырех неподвижных точек: одного седла коразмерности один и трех узлов. Тогда f, g сопряжены тогда и только тогда, когда индекс Морса их седел одинаков (либо 1, либо $n-1$).*

Этот результат контрастирует с тем, что на 3-мерной сфере имеется счетное семейство попарно несопряженных диффеоморфизмов Морса—Смейла с одним седлом и тремя узлами [52]. Более простая картина в многомерном случае объясняется тем, что одномерная сепаратриса и ее топологическое замыкание (плюс один из узлов) не может быть дико вложена. Это вытекает из работы [58], в которой доказано, что при $n \geqslant 4$ дико вложенная дуга должна иметь континуальное множество точек дикости. Поэтому в данном случае не требуется инвариантов заузления, как для размерности $n = 3$.

Теорема 9.4. *Пусть f и f' — сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы из класса $G(S^n)$. Для топологической сопряженности диффеоморфизмов f, f' необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм графов $G(f)$ и $G(f')$, сопрягающий автоморфизмы.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
3. *Аносов Д. В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 4. — С. 707–709.
4. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*.
5. *Арансон С. Х.* Траектории на неориентируемых двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1969. — *80*, № 3. — С. 314–333.
6. *Арансон С. Х., Медведев В. С.* Регулярные компоненты гомеоморфизмов n-мерной сферы// Мат. сб. — 1971. — *85*. — С. 3–17.
7. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Об особых множествах систем Морса—Смейла// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1973. — *28*. — С. 181–214.

8. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий// В сб.: «Дифференциальные и интегральные уравнения». — ГГУ: Горький, 1985. — С. 33–37.
9. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I// В сб.: «Методы КТДУ». — Горький, 1985. — С. 22–38.
10. *Безденежных А. Н., Гринес В. З.* Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. II// В сб.: «Методы КТДУ». — Горький, 1987. — С. 24–32.
11. *Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е.* О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях// Докл. РАН. — 2001. — *377*, № 2. — С. 151–155.
12. *Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях// Тр. МИАН. — 2002. — *236*. — С. 66–78.
13. *Бонатти Х., Гринес В. З., Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Тр. МИАН. — 2005. — *250*. — С. 5–53.
14. *Гринес В. З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях// Мат. заметки. — 1993. — *54*. — С. 3–17.
15. *Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О классификации диффеоморфизмов Морса—Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 20–35.
16. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* Новые соотношения для потоков и диффеоморфизмов Морса—Смейла// Докл. РАН. — 2002. — *382*, № 6. — С. 730–733.
17. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* Новые соотношения для систем Морса—Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 7. — С. 25–56.
18. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях// Мат. заметки. — 2003. — *74*, № 3. — С. 369–386.
19. *Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., Починка О. В.* Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса—Смейла// Тр. МИАН. — 2010. — *271*. — С. 111–133.
20. *Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В.* Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 2014. — *205*, № 10. — С. 19–46.
21. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — Москва—Ижевск, 2011.
22. *Гробман Д. М.* О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1959. — *128*, № 5. — С. 880–881.
23. *Гробман Д. М.* Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве// Мат. сб. — 1962. — *56*, № 1. — С. 77–94.
24. *Гуревич Е. Я.* О диффеоморфизмах Морса—Смейла на многообразиях размерности большей 3// Труды Средневолжского мат. об-ва. — 2003. — *5*, № 1. — С. 161–165.
25. *Гуревич Е. Я., Медведев В. С.* О многообразиях размерности n, допускающих диффеоморфизмы с седловыми точками индексов 1 и $n-1$// Труды Средневолжского мат. об-ва. — 2006. — *8*, № 1. — С. 204–208.
26. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* Системы Морса—Смейла с тремя неблуждающими точками// Докл. РАН. — 2011. — *440*, №1. — С. 11–14.
27. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 251–257.
28. *Леонтович Е. А., Майер А. Г.* О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории// Докл. АН СССР. — 1955. — *103*, № 4. — С. 557–560.
29. *Майер А. Г.* Грубое преобразование окружности в окружность// Ученые записки Горьк. гос. ун-та. — 1939. — *12*. — С. 215–229.
30. *Матвеев С. В.* Классификация достаточно больших трехмерных многообразий// Усп. мат. наук. — 1997. — *52*, № 5. — С. 147–174.
31. *Медведев В. С., Жужома Е. В.* Непрерывные потоки Морса—Смейла с тремя состояниями равновесия// Мат. сб. — принято к печати.
32. *Митрякова Т. М., Починка О. В.* О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания. Дифференциальные уравнения и динамические системы// Тр. МИАН. — 2010. — *270*. — С. 198–219.
33. *Ошемков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса—Смейла на двумерных многообразиях// Мат. сб. — 1998. — *189*, № 8. — С. 93–140.

34. *Плисс В. А.* О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе// Вестн. ЛГУ. Сер. Мат. — 1960. — *13.* — С. 15–23.
35. *Починка О. В.* Классификация диффеоморфизмов Морса—Смейла на 3- многообразиях// Докл. АН СССР. — 2011. — *440*, № 6. — С. 34–37.
36. *Пришляк А.* Векторные поля Морса—Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях// Мат. заметки. — 2002. — *71*, № 2. — С. 230–235.
37. *Синай Я. Г.* Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 1. — С. 64–89.
38. *Синай Я. Г.* Построение марковских разбиений// Функц. анализ и его прилож. — 1968. — *2*, № 3. — С. 70–80.
39. *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 1. — С. 113–185.
40. *Уманский Я. Л.* Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса—Смейла с конечным числом особых траекторий// Мат. сб. — 1990. — *181*, № 2. — С. 212–239.
41. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.
42. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to qualitative theory of dynamical systems on closed surfaces. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
43. *Artin E., Fox R. H.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — *49.* — С. 979–990.
44. *Asimov D.* Round handles and non-singular Morse—Smale flows// Ann. Math. — 1975. — *102.* — С. 41–54.
45. *Asimov D.* Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones// Ann. Math. — 1975. — *102.* — С. 55–65.
46. *Batterson S.* The dynamics of Morse—Smale diffeomorphisms on the torus// Trans. Am. Math. Soc. — 1979. — *256.* — С. 395–403.
47. *Batterson S.* Orientation reversing Morse—Smale diffeomorphisms on the torus// Trans. Am. Math. Soc. — 1981. — *264.* — С. 29–37.
48. *Batterson S., Handel M., Narasimhan C.* Orientation reversing Morse—Smale diffeomorphisms of S^2// Invent. Math. — 1981. — *64.* — С. 345–356.
49. *Béguin F.* Smale diffeomorphisms of surfaces: an algorithm for the conjugacy problem. — Preprint, 1999.
50. *Bin Yu.* Behavior 0 nonsingular Morse—Smale flows on S^3// Discrete and Continuous Dynamical Systems. — 2016. — *36*, № 1. — С. 509–540.
51. *Blanchard P., Franks J.* The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces// Invent. Math. — 1980. — *62.* — С. 333–339.
52. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// Journal of Dynamical and Control Systems. — 2000. — *6*, № 4. — С. 579–602.
53. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Three-dimensional manifolds admitting Morse—Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves// Topology and Appl. — 2002. — *117.* — С. 335–344.
54. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — *43.* — С. 369–391.
55. *Bonatti Ch., Grines V., Pochinka O.* Classification of Morse—Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds// В сб.: «Foliations 2005». — Singapore: World Scientific, 2006. — С. 121-–147.
56. *Bonatti Ch., Langevin R.* Difféomorphismes de Smale des surfaces. — Société Mathématique de France, 1998.
57. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms// Transactions of the American. Math. Soc. — 1971. — *154.* — С. 337–397.
58. *Cantrell J. C., Edwards C. H.* Almost locally polyhedral curves in Euclidean n-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1963. — *107.* — С. 451–457.
59. *Cobham A.* The intrinsic computational difficulty of functions// International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science, North-Holland, Amsterdam. — 1964. — С. 24–30.
60. *Debrunner H., Fox R.* A mildly wild imbedding of an n-frame// Duke Math. Journal. — 1960. — *27.* — С. 425–429.
61. *Fleitas G.* Classification of gradient-like flows in dimension two and three// Bol. Soc. Mat. Brasil. — 1975. — *2*, № 6. — С. 155–183.
62. *Franks J.* Some maps with infinitely many hyperbolic periodic points// Trans. Am. Math. Soc. — 1977. — *226.* — С. 175–179.
63. *Franks J.* The periodic structure of non-singular Morse—Smale flows// Comment. Math. Helv. — 1978. — *53.* — С. 279–294.

64. *Franks J. M.* Homology and dynamical systems. — Am. Math. Soc., 1982.
65. *Grines V., Gurevich E., Pochinka O.* Topological classification of Morse—Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2015. — *208*, № 1. — C. 81–91.
66. *Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S.* Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms// Regul. Chaotic Dyn. — 2016. — *21*, No 2. — C. 189–203.
67. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O., Zhuzhoma E.* On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids// Phys. D. — 2015. — *294*. — C. 1–5.
68. *Gutierrez C.* Structural stability for flows on the torus with a cross-cap// Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — *241*. — C. 311–320.
69. *Handel M.* The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces// Topology. — 1982. — *21*. — C. 291–296.
70. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — *79*. — C. 12–34.
71. *Hartman P.* On the local linearization of differential equations// Proc. Am. Math. Soc. — 1963. — *14*, № 4. — C. 568–573.
72. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1977.
73. *Markley N. G.* The Poincare—Bendixon theorem for the Klein bottle// Trans. Am. Math. Soc. — 1969. — *135*. — C. 159–165.
74. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* Morse—Smale systems with few non-wandering points// Topology Appl. — 2013. — *160*, № 3. — C. 498–507.
75. *Morgan J. W.* Non-singular Morse—Smale flows on 3-dimensional manifolds// Topology. — 1979. — *18*. — C. 41–53.
76. *Morse M.* Calculus of variations in the large. — New York: Interscience Publ., 1934.
77. *Narasimhan C.* The periodic behavior of Morse—Smale diffeomorphisms on compact surfaces// Trans. Am. Math. Soc. — 1979. — *248*. — C. 145–169.
78. *Nikolaev I.* Graphs and flows on surfaces// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1998. — *18*. — C. 207–220.
79. *Nikolaev I., Zhuzhoma E.* Flows on 2-dimensional manifolds. — Berlin: Springer, 1999.
80. *Palis J.* On Morse—Smale dynamical systems// Topology. — 1969. — *8*, № 4. — C. 385–404.
81. *Palis J., Smale S.* Structural stability theorems// Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math. — 1970. — *14*. — C. 223–231.
82. *Peixoto M. M.* On structural stability// Ann. Math. — 1959. — *69*. — C. 199–222.
83. *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds// Topology. — 1962. — *1*. — C. 101–120.
84. *Peixoto M. M.* Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark// Topology. — 1963. — *2*. — C. 179-180.
85. *Peixoto M. M.* On a classification of flows on 2-manifolds// Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador. — 1973. — C. 389–492.
86. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*. — C. 167–172.
87. *Sasano K.* Links of closed orbits of non-singular Morse—Smale flows// Proc. Am. Math. Soc. — 1983. — *88*. — C. 727–734.
88. *Shub M.* Morse—Smale diffeomorphisms are unipotent on homology// Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia, Salvador, 1971. — 1973. — C. 489–491.
89. *Shub M., Sullivan D.* Homology theory and dynamical systems// Topology. — 1975. — *4*. — C. 109–132.
90. *Smale S.* Morse inequalities for a dynamical system// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — C. 43–49.
91. *Smale S.* Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four// Bull. Am. Math. Soc. — 1960. — *66*. — C. 485–488.
92. *Smale S.* On gradient dynamical systems// Ann. Math. — 1961. — *74*. — C. 199–206.
93. *Smale S.* Generalized Poincare's conjecture in dimensions greater than four// Ann. Math. — 1961. — *74*. — C. 391–406.
94. *Smale S.* Diffeomorphisms with many periodic points// Differ. and Combinat. Topology, Sympos. Marston Morse, Princeton. — 1965. — C. 63–80.
95. *Wada M.* Closed orbits of non-singular Morse—Smale flows on S^3// J. Math. Soc. Jpn. — 1989. — *41*. — C. 405–413.
96. *Wang X.* The C^*-algebras of Morse—Smale flows on two-manifolds// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1990. — *10*. — C. 565–597.
97. *Yano K.* A note on non-singular Morse—Smale flows on S^3// Proc. Jpn Acad. Ser. A Math. Sci. — 1982. — *58*. — C. 447–450.

В. З. Гринес
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12; ННГУ, 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Е. В. Жужома
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: `zhuzhoma.ev@mail.ru`

О. В. Починка
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, Б. Печерская, 25/12
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

UDC 517.938

Morse–Smale Systems and Topological Structure of Supporting Manifolds

© 2016 **V. Z. Grines, Ye. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka**

Abstract. In this paper, we review the results describing the connection between the global dynamics of Morse–Smale systems on closed manifolds and the topology of supporting manifolds. Also we consider the results related to topological classification of Morse–Smale systems.

REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. A. A. Andponov and L. S. Pontpyagin, "Grubye sistemy" [Rough systems], *Dokl. AN SSSP* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 247–250 (in Russian).
3. D. V. Anosov, "Grubost' geodezicheskikh potokov na kompaktnykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Roughness of geodesic flows on compact Riemann manifolds of negative curvature], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **145**, No. 4, 707–709 (in Russian).
4. D. V. Anosov, "Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Geodesic flows on close Riemann manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **90** (in Russian).
5. S. Kh. Apanson, "Tpaektopii na neopientipuemykh dvumepnykh mnogoobpaziyakh" [Trajectories on nonoriented two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1969, **80**, No. 3, 314–333 (in Russian).
6. S. Kh. Aranson and V. S. Medvedev, "Regulyarnye komponenty gomeomorfizmov n-mernoy sfery" [Regular components of homeomorphisms of n-dimensional sphere], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **85**, 3–17 (in Russian).
7. V. S. Afraymovich and L. P. Shil'nikov, "Ob osobykh mnozhestvakh sistem Morsa—Smeyla" [On singular sets of Morse–Smale systems] *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1973, **28**, 181–214 (in Russian).
8. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Realizatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov dvumernykh mnogoobraziy" [Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds], In: *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya* [Differential and Integral Equations], Gor'kiy, GGU, 1985, 33–37 (in Russian).
9. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Dinamicheskie svoystva i topologicheskaya klassifikatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov na dvumernykh mnogoobraziyakh. I" [Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. I], In: *Metody KTDU* [KTDU Methods], Gor'kiy, 1985, 22–38 (in Russian).
10. A. N. Bezdenezhnykh and V. Z. Grines, "Dinamicheskie svoystva i topologicheskaya klassifikatsiya gradientnopodobnykh diffeomorfizmov na dvumernykh mnogoobraziyakh. II" [Dynamical properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds. II], In: *Metody KTDU* [KTDU Methods], Gor'kiy, 1987, 24–32 (in Russian).
11. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. Peku, "O topologicheskoy klassifikatsii gradientnopodobnykh diffeomorfizmov bez geteroklinicheskikh krivykh na trekhmernykh mnogoobraziyakh" [On topological classification of gradient-like diffeomorphisms without heteroclinic curves on three-dimensional manifolds] *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2001, **377**, No. 2, 151–155 (in Russian).
12. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, and E. Peku, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla bez geteroklinicheskikh peresecheniy na trekhmernykh mnogoobraziyakh" [On Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections on three-dimensional manifolds], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2002, **236**, 66–78 (in Russian).
13. Kh. Bonatti, V. Z. Grines, and O. V. Pochinka, "Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom geteroklinicheskikh orbit na 3-mnogoobraziyakh" [Classification of Morse–Smale

diffeomorphisms with finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 5–53 (in Russian).

14. V. Z. Grines, "Topologicheskaya klassifikatsiya diffeomopfizmov Mopsa—Smeyla s konechnym mnozhestvom getepoklinicheskikh traektopiy na poverkhnostyakh" [Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces] *Mat. zametki* [Math. Notes], 1993, **54**, 3–17 (in Russian).
15. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, and V. S. Medvedev, "O klassifikatsii diffeomorfizmov Morsa—Smeyla s odnomernym mnozhestvom neustoychivykh separatris" [On classification of Morse–Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of nonstable separatrices], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 20–35 (in Russian).
16. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "Novye sootnosheniya dlya potokov i diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [New relations for Morse–Smale flows and diffeomorphisms], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 730–733 (in Russian).
17. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "Novye sootnosheniya dlya sistem Morsa—Smeyla s trivial'no vlozhennymi odnomernymi separatrisami" [New relations for Morse–Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2003, **194**, No. 7, 25–56 (in Russian).
18. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, and V. S. Medvedev, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla s chetyr'mya periodicheskimi tochkami na zamknutykh orientiruemykh mnogoobraziyakh" [On Morse–Smale diffeomorphisms with four periodic points on closed oriented manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2003, **74**, No. 3, 369–386 (in Russian).
19. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, and O. V. Pochinka, "Global'nye attraktor i repeller diffeomorfizmov Morsa—Smeyla" [Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **271**, 111–133 (in Russian).
20. V. Z. Grines, S. Kh. Kapkaeva, and O. V. Pochinka, "Trekhtsvetnyy graf kak polnyy topologicheskiy invariant dlya gradientno-podobnykh diffeomorfizmov poverkhnostey" [Three-colored graph as complete topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2014, **205**, No. 10, 19–46 (in Russian).
21. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu diffeomorfizmov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to Topological Classification of Diffeomorphisms on Two- and Three-Dimensional Manifolds], Moscow—Izhevsk, 2011 (in Russian).
22. D. M. Grobman, "O gomeomorfizme sistem differentsial'nykh uravneniy" [On the diffeomorphism of systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1959, **128**, No. 5, 880–881 (in Russian).
23. D. M. Grobman, "Topologicheskaya klassifikatsiya okrestnostey osoboy tochki v n-mernom prostranstve" [Topological classification of neighborhoods of a singular point in n-dimensional space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **56**, No. 1, 77–94 (in Russian).
24. E. Ya. Gurevich, "O diffeomorfizmakh Morsa—Smeyla na mnogoobraziyakh razmernosti bol'shey 3" [On Morse–Smale diffeomorphisms on manifolds of dimension greater than 3], *Trudy Srednevolzhskogo mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhskoe Math. Soc.], 2003, **5**, No. 1, 161–165 (in Russian).
25. E. Ya. Gurevich and V. S. Medvedev, "O mnogoobraziyakh razmernosti n, dopuskayushchikh diffeomorfizmy s sedlovymi tochkami indeksov 1 i $n-1$" [On n-dimensional manifolds allowing diffeomorphisms with saddle points of indices 1 and $n-1$], *Trudy Srednevolzhskogo mat. ob-va* [Proc. Srednevolzhskoe Math. Soc.], 2006, **8**, No. 1, 204–208 (in Russian).
26. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "Sistemy Morsa—Smeyla s tremya nebluzhdayushchimi tochkami" [Morse–Smale systems with three nonwandering points], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2011, **440**, No. 1, 11–14 (in Russian).
27. E. A. Leontovich and A. G. Mayep, "O traektoriyakh, opredelyayushchikh kachestvennuyu strukturu razbieniya sfery na traektorii" [On trajectories determining qualitative structure of partition of a sphere into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1937, **14**, No. 5, 251–257 (in Russian).
28. E. A. Leontovich and A. G. Mayep, "O skheme, opredelyayushchey topologicheskuyu strukturu razbieniya na traektorii" [On the scheme determining topological structure of partition into trajectories], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **103**, No. 4, 557–560 (in Russian).
29. A. G. Mayer, "Gruboe preobrazovanie okruzhnosti v okruzhnost'" [Rough transformation of a circle to a circle] *Uchenye zapiski Gor'k. gos. un-ta* [Sci. Notes Gor'kiy State Univ.], 1939, **12**, 215–229 (in Russian).

30. S. V. Matveev, “Klassifikatsiya dostatochno bol’shikh trekhmernykh mnogoobraziy” [Classification of sufficiently large three-dimensional manifolds], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1997, **52**, No. 5, 147–174 (in Russian).
31. V. S. Medvedev and E. V. Zhuzhoma, “Nepreryvnye potoki Morsa—Smeyla s tremya sostoyaniyami ravnovesiya” [Continuous Morse–Smale flows with three equilibrium states], *Mat. sb.* [Math. Digest], accepted (in Russian).
32. T. M. Mitryakova and O. V. Pochinka, “O neobkhodimykh i dostatochnykh usloviyakh topologicheskoy sopryazhennosti diffeomorfizmov poverkhnostey s konechnym chislom orbit geteroklinicheskogo kasaniya. Differentsial’nye uravneniya i dinamicheskie sistemy” [On necessary and sufficient conditions of topological conjugacy of diffeomorphisms of surfaces with finite number of orbits of heteroclinic tangency], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 198–219 (in Russian).
33. A. A. Oshemkov and V. V. Sharko, “O klassifikatsii potokov Morsa—Smeyla na dvumernykh mnogoobraziyakh” [On classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 8, 93–140 (in Russian).
34. V. A. Pliss, “O grubosti differentsial’nykh uravneniy, zadannykh na tore” [On roughness of differential equations set on a torus], *Vestn. LGU. Ser. Mat.* [Bull. Leningrad State Univ. Ser. Math.], 1960, **13**, 15–23 (in Russian).
35. O. V. Pochinka, “Klassifikatsiya diffeomorfizmov Morsa—Smeyla na 3- mnogoobraziyakh” [Classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2011, **440**, No. 6, 34–37 (in Russian).
36. A. Prishlyak, “Vektornye polya Morsa—Smeyla bez zamknutykh traektoriy na trekhmernykh mnogoobraziyakh” [Morse–Smale vector fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 2, 230–235 (in Russian).
37. Ya. G. Sinay, “Markovskie razbieniya i U-diffeomorfizmy” [Markov partitions and U-diffeomorphisms], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 1, 64–89 (in Russian).
38. Ya. G. Sinay, “Postroenie markovskikh razbieniy” [Construction of Markov partitions], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1968, **2**, No. 3, 70–80 (in Russian).
39. S. Smeyl, “Differentsiruemye dinamicheskie sistemy” [Differentiable dynamical systems], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, No. 1, 113–185 (in Russian).
40. Ya. L. Umanskiy, “Neobkhodimye i dostatochnye usloviya topologicheskoy ekvivalentnosti trekhmernykh dinamicheskikh sistem Morsa—Smeyla s konechnym chislom osobykh traektoriy” [Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional Morse–Smale dynamical systems with finite number of singular trajectories], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1990, **181**, No. 2, 212–239 (in Russian).
41. A. T. Fomenko and D. B. Fuks, *Kurs gomotopicheskoy topologii* [Course in Homotopical Topology], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
42. S. Aranson, G. Belitsky, and E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
43. E. Artin and R. H. Fox, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space,” *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
44. D. Asimov, “Round handles and non-singular Morse–Smale flows,” *Ann. Math.*, 1975, **102**, 41–54.
45. D. Asimov, “Homotopy of non-singular vector fields to structurally stable ones,” *Ann. Math.*, 1975, **102**, 55–65.
46. S. Batterson, “The dynamics of Morse–Smale diffeomorphisms on the torus,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1979, **256**, 395–403.
47. S. Batterson, “Orientation reversing Morse–Smale diffeomorphisms on the torus,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1981, **264**, 29–37.
48. S. Batterson, M. Handel, and C. Narasimhan, “Orientation reversing Morse–Smale diffeomorphisms of S^2,” *Invent. Math.*, 1981, **64**, 345–356.
49. F. Béguin, *Smale Diffeomorphisms of Surfaces: an Algorithm for the Conjugacy Problem*, Preprint, 1999.
50. Yu. Bin, “Behavior 0 nonsingular Morse—Smale flows on S^3,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2016, **36**, No. 1, 509–540.
51. P. Blanchard and J. Franks, “The dynamical complexity of orientation reversing homeomorphisms of surfaces,” *Invent. Math.*, 1980, **62**, 333–339.
52. Ch. Bonatti and V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, No. 4, 579–602.

53. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Three-dimensional manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves," *Topology Appl.*, 2002, **117**, 335–344.
54. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, "Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds," *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
55. Ch. Bonatti, V. Grines, and O. Pochinka, "Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds," In: *Foliations 2005*, World Scientific, Singapore, 2006, 121-–147.
56. Ch. Bonatti and R. Langevin, *Difféomorphismes de Smale des Surfaces*, Société Mathématique de France, 1998.
57. R. Bowen, "Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **154**, 337–397.
58. J. C. Cantrell and C. H. Edwards, "Almost locally polyhedral curves in Euclidean n-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1963, **107**, 451–457.
59. A. Cobham, "The intrinsic computational difficulty of functions," *International Congress for Logic, Methodology, and Philosophy of Science*, North-Holland, Amsterdam, 1964, 24–30.
60. H. Debrunner and R. Fox, "A mildly wild imbedding of an n-frame," *Duke Math. J.*, 1960, **27**, 425–429.
61. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three," *Bol. Soc. Mat. Brasil.*, 1975, **2**, No. 6, 155–183.
62. J. Franks, "Some maps with infinitely many hyperbolic periodic points," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1977, **226**, 175–179.
63. J. Franks, "The periodic structure of non-singular Morse–Smale flows," *Comment. Math. Helv.*, 1978, **53**, 279–294.
64. J. M. Franks, *Homology and Dynamical Systems*, Am. Math. Soc., 1982.
65. V. Grines, E. Gurevich, and O. Pochinka, "Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **208**, No. 1, 81–91.
66. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, and S. Zinina, "Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2016, **21**, No 2, 189–203.
67. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, and E. Zhuzhoma, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids," *Phys. D.*, 2015, **294**, 1–5.
68. C. Gutierrez, "Structural stability for flows on the torus with a cross-cap," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **241**, 311–320.
69. M. Handel, "The entropy of orientation reversing homeomorphisms of surfaces," *Topology*, 1982, **21**, 291–296.
70. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, "A characterization of tame curves in three-space," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
71. P. Hartman, "On the local linearization of differential equations," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1963, **14**, No. 4, 568–573.
72. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant Manifolds*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
73. N. G. Markley , "The Poincare–Bendixon theorem for the Klein bottle," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1969, **135**, 159–165.
74. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, "Morse–Smale systems with few non-wandering points," *Topology Appl.*, 2013, **160**, No. 3, 498–507.
75. J. W. Morgan, "Non-singular Morse–Smale flows on 3-dimensional manifolds," *Topology*, 1979, **18**, 41–53.
76. M. Morse, *Calculus of Variations in the Large*, Interscience Publ., New York, 1934.
77. C. Narasimhan, "The periodic behavior of Morse–Smale diffeomorphisms on compact surfaces," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1979, **248**, 145–169.
78. I. Nikolaev, "Graphs and flows on surfaces," *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1998, **18**, 207–220.
79. I. Nikolaev and E. Zhuzhoma, *Flows on 2-Dimensional Manifolds*, Springer, Berlin, 1999.
80. J. Palis, "On Morse–Smale dynamical systems," *Topology*, 1969, **8**, No. 4, 385–404.
81. J. Palis and S. Smale, "Structural stability theorems," *Global Analysis. Proc. Sympos. Pure Math.*, 1970, **14**, 223–231.
82. M. M. Peixoto, "On structural stability," *Ann. Math.*, 1959, **69**, 199–222.
83. M. M. Peixoto, "Structural stability on two-dimensional manifolds," *Topology*, 1962, **1**, 101–120.
84. M. M. Peixoto, "Structural stability on two-dimensional manifolds. A further remark," *Topology*, 1963, **2**, 179-180.
85. M. M. Peixoto, "On a classification of flows on 2-manifolds," *Proc. Symp. Dyn. Syst. Salvador*, 1973, 389–492.

86. D. Pixton, “Wild unstable manifolds,” *Topology*, 1977, **16**, 167–172.
87. K. Sasano, “Links of closed orbits of non-singular Morse–Smale flows,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1983, **88**, 727–734.
88. M. Shub, “Morse–Smale diffeomorphisms are unipotent on homology,” *Dynamical Syst., Proc. Sympos. Univ. Bahia*, Salvador, 1971, 1973, 489–491.
89. M. Shub and D. Sullivan, “Homology theory and dynamical systems,” *Topology*, 1975, **4**, 109–132.
90. S. Smale, “Morse inequalities for a dynamical system,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.
91. S. Smale, “Generalized Poincare’s conjecture in dimensions greater than four,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 485–488.
92. S. Smale, “On gradient dynamical systems,” *Ann. Math.*, 1961, **74**, 199–206.
93. S. Smale, “Generalized Poincare’s conjecture in dimensions greater than four,” *Ann. Math.*, 1961, **74**, 391–406.
94. S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points,” *Differ. and Combinat. Topology, Sympos. Marston Morse*, Princeton, 1965, 63–80.
95. M. Wada, “Closed orbits of non-singular Morse–Smale flows on S^3,” *J. Math. Soc. Jpn.*, 1989, **41**, 405–413.
96. X. Wang, “The C^*-algebras of Morse–Smale flows on two-manifolds,” *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 1990, **10**, 565–597.
97. K. Yano, “A note on non-singular Morse–Smale flows on S^3,” *Proc. Jpn Acad. Ser. A Math. Sci.*, 1982, **58**, 447–450.

V. Z. Grines

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12; NNSU, 603950, Nizhniy Novgorod, pr. Gagarina, 23

E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Ye. V. Zhuzhoma

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12

E-mail: `zhuzhoma.ev@mail.ru`

O. V. Pochinka

NRU HSE, 603155, Nizhniy Novgorod, ul. Bolshaya Pecherskaya, 25/12

E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`