Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 164–183

УДК 517.9

ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ВОЗВРАТНО-ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© 2016 г. **А. ТЕСЕИ**

Аннотация. Изучается начально-краевая задача

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } \Omega\times(0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 \geqslant 0 & \text{в } \Omega\times\{0\} \end{cases}$$

с начальными данными, имеющими значениями меры Радона, при условии, что регуляризирующий член ψ возрастает и ограничен (случаи степенного и логарифмического ψ рассмотрены в [2, 3] для пространства любой размерности). Функция φ немонотонна и ограничена, а на бесконечности она либо убывает и обращается в нуль, либо возрастает. Для обоих случаев доказывается существование решений в пространстве положительных мер Радона. Кроме того, для первого случая устанавливается общий результат о спонтанном возникновении особенностей. Чтобы отметить влияние поведения функции φ на бесконечности на регулярность решений, рассматривается также и случай, когда φ ведет себя как кубическая функция.

Введение

В данной статье представлены недавние результаты для начально-краевой задачи

$$(P)\qquad \begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } Q := \Omega\times(0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}, \end{cases}$$

где ε и T — положительные постоянные, $\Omega \equiv (a,b)$ — ограниченный интервал, а u_0 — положительная конечная мера Радона на Ω (за доказательствами читатель отсылается к [4–6], а также к [17, 18]). Функции $\varphi, \psi : [0,\infty] \mapsto [0,\infty)$ удовлетворяют следующим условиям:

(a) $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$ и существует такое положительное α, что φ возрастает в интервале $(0,\alpha)$ и убывает в интервале (α,∞);

(b) $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = \gamma \in (0,\infty)$, ψ возрастает на полуоси $(0,\infty)$ и $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

(см. условия (H_1)-(H_2) пункта 3.1). Поскольку φ немонотонна, предельная задача

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} & \text{в } Q, \\ \varphi(u) = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}, \end{cases} \tag{0.1}$$

соответствующая задаче (P) при $\varepsilon \to 0^+$, некорректна. Первое уравнение в (0.1) называется *уравнением возвратно-поступательного типа,* а сама задача (P), возникающая как псевдопараболическая регуляризация задачи (0.1), является вырожденной, поскольку $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$.

Интерес к данной тематике обусловлен уравнением Пероны—Малика (см. [13]) с одной пространственной переменной:

$$z_t = [\varphi(z_x)]_x; \tag{0.2}$$

здесь, как правило, функция φ имеет вид

$$\varphi(u) = \frac{u}{u^2+\alpha} \quad \text{либо} \quad \varphi(u) = u\exp\left(-\frac{u}{\alpha}\right) \qquad (\alpha > 0). \tag{0.3}$$

Положим $u := z_x$. Тогда, формальное дифференцируя уравнение (0.2) по переменной x, получим дифференциальное уравнение из задачи (0.1). Задача (0.1) с φ, определенной формулами из (0.3), возникает в моделях агрегации популяций (см. [12]), а для φ, ведущей себя, как кубическая функция — в теории фазовых переходов (см. [7, 10]).

Уравнение

$$z_t = [\varphi(z_x)]_x + \varepsilon[\psi(z_x)]_{tx} \tag{0.4}$$

(где ψ — такая же, как и выше), являющееся вырожденной псевдопараболической регуляризацией уравнения (0.2), естественным образом возникает в одномерной модели формирования слоев постоянной температуры в океане (см. [1]). Здесь слагаемое $\varepsilon[\psi(z_x)]_{tx}$ уравнения (0.4) является формальным приближением первого порядка модифицированной версии уравнения (0.2), учитывающей эффекты запаздывания. Отметим, что, формально дифференцируя $\varepsilon[\psi(z_x)]_{tx}$ и полагая $u := z_x$, мы получаем слагаемое $\varepsilon[\psi(u)]_{txx}$ в первом уравнении задачи (P).

В работе [1] обнаружено, что решения уравнения (0.4) могут иметь особенности при положительных значениях t; более того, с ростом времени такие особенности не исчезают. Это означает, что решение z уравнения (0.4) может стать разрывным по переменной x; эвристически, в терминах неизвестной функции $u = z_x$, это показывает, что в решении задачи (P) возникают массы Дирака. Значения решений задачи (P) фактически являются внутренними мерами Радона, поскольку положительные меры Радона могут возникать спонтанно даже в том случае, когда функция u_0 ограничена (см. теорему 3.4 ниже).

Исследуя возникновение особенностей, естественно применить к задаче (P) преобразование $t \to T - t$, обращающее время (см. [1, 4]). Тогда возникновение особенностей в (P) соответствует исчезновению особенностей в следующей «обратной» задаче для неизвестной функции $z(\cdot, t) := u(\cdot, T - t)$:

$$(B) \qquad \begin{cases} z_t = [\chi(z)]_{xx} + \varepsilon[\psi(z)]_{txx} & \text{в } Q \\ \chi(z) + \varepsilon[\psi(z)]_t = \varphi(\alpha) & \text{в } \partial\Omega \times (0, T) \\ z = u(\cdot, T) & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

где $\chi(u) := \varphi(\alpha) - \varphi(u)$ $(u \in [0, \infty))$. Отметим, что перейти к задаче (B) означает исследовать задачу (P) при других условиях на φ, в частности, при предположении, что φ ограничена и возрастает на бесконечности (см. условие (H_3)). Поведение функции φ на бесконечности играет ключевую роль для определения качественных свойств (в частности, регулярности) решений задачи (P). В разделе 2 это будет подробно рассмотрено для случая, когда φ ведет себя как кубическая функция, где $\varphi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$ (см. условие (A)), сравнительно со случаем, когда φ задана формулами (0.3) (в более общем случае, удовлетворяет условию (H_1)).

Поведение ψ на бесконечности — это важное свойство задачи (P). Как сказано выше, первое уравнение в (P) является вырожденным псевдопараболическим, поскольку $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Этот случай существенно отличается от так называемой соболевской регуляризации, используемой в [12, 16], которая формально соответствует выбору $\psi(u) = u$. В [3] задача (P) рассмотрена в предположении, что ψ имеет степенной рост, а именно, $\psi(u) = (1+u)^\theta - 1$ $(\theta \in (0, 1])$. В этом случае сингулярная (относительно меры Лебега) часть u_s решения u не меняется со временем (в частности, не может возникать спонтанно). Напротив, в логарифмическом случае, т. е. при $\psi(u) = \ln(1 + u)$, сингулярная часть u_s может возрастать по переменной t, однако она никогда не возникает спонтанно (см. [2]). Отметим, что, хотя $\psi'(u) \to 0$ при $u \to \infty$ для $\theta \in (0, 1)$ в обоих случаях (в степенном и логарифмическом), в логарифмическом случае $\psi'(u)$ стремится к нулю быстрее, а значит, регуляризация является более слабой. Таким образом, упомянутый выше эффект спонтанного возникновения особенностей представляется естественным: он возникает при выполнении условия (H_2), т. е. когда ψ' обращается в нуль на бесконечности быстрее (а значит, регуляризация является более слабой), чем в логарифмическом или степенном случае (см. раздел 2).

В разделе 1 настоящей работы мы определяем рамки математического исследования. В разделе 2 рассматривается случай, когда φ ведет себя, как кубическая функция. В разделе 3 приводятся основные результаты для случая, когда функция φ ограничена и убывает на бесконечности, в разделе 5 — для случая, когда она ограничена и возрастает на бесконечности. Идея доказательства результатов о существовании приводится в разделе 3; для случая, когда u_0 — непрерывная функция с компактным носителем, ее можно найти в разделе 4.

1. Предварительные сведения

Через $\mathcal{M}(\Omega)$ обозначим пространство конечных мер Радона на Ω, а через $\mathcal{M}^+(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ — конус неотрицательных конечных мер Радона на Ω. *Носитель* меры μ из $\mathcal{M}^+(\Omega)$, обозначаемый через $\operatorname{supp}\mu$, определяется как дополнение максимального открытого подмножества E множества Ω, для которого $\mu(E) = 0$. Будем говорить, что $\mu \in \mathcal{M}^-(\Omega)$, если $-\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. По теореме Рисса—Маркова справедливо равенство $\mathcal{M}(\Omega) = (C_c(\Omega))^*$; таким образом, $\mathcal{M}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|\mu\|_{\mathcal{M}(\Omega)} := |\,\mu\,|(\Omega),$$

где $|\,\mu\,|$ обозначает полную вариацию меры μ. Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$, обозначающий отображение двойственности между пространством $\mathcal{M}(\Omega)$ и $C_c(\Omega)$, а именно

$$\langle\mu,\zeta\rangle_\Omega = \int\limits_\Omega \zeta(x)\,d\mu(x),$$

распространяется на любую μ-интегрируемую функцию ζ (в том числе на любую ζ из $C(\overline{\Omega})$).

Для любой μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ и любого борелевского множества $E \subseteq \Omega$ сужение $\mu \llcorner E$ меры μ на множество E определяется следующим образом:

$$(\mu \llcorner E)(A) := \mu(E \cap A) \quad \text{для любого борелевского множества } A \subseteq \Omega.$$

Если μ, ν — неотрицательные меры, то мера μ называется *сингулярной относительно* ν, если существует борелевское множество E, для которого $\mu = \mu \llcorner E$ и $\nu(E) = 0$.

Через $\mathcal{M}_s(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ и $\mathcal{M}_{ac}(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ обозначим множества мер, сингулярных и абсолютно непрерывных (соответственно) относительно меры Лебега (далее обозначаемой через $|\cdot|$). Напомним, что $\mathcal{M}_s(\Omega) \cap \mathcal{M}_{ac}(\Omega) = \{0\}$. Кроме того, в силу лебеговского разложения и теоремы Радона—Никодима следующие утверждения справедливы для любой μ из $\mathcal{M}(\Omega)$:

(i) существует и единственна пара мер $\mu_{ac} \in \mathcal{M}_{ac}(\Omega)$, $\mu_s \in \mathcal{M}_s(\Omega)$, для которой

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_s; \tag{1.1}$$

(ii) существует и единственна μ_r из $L^1(\Omega)$ (называемая *плотностью меры* μ_{ac}), для которой

$$\mu_{ac}(E) = \int\limits_E \mu_r(x)dx \quad \text{для любого борелевского множества } E \subseteq \Omega.$$

Если $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, то μ_{ac}, $\mu_s \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ и $\mu_r \geqslant 0$ п. в. в Ω.

Любая мера μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ может быть представлена единственным образом в виде разности $\mu = \mu^+ - \mu^-$ двух положительных взаимно сингулярных мер $\mu^\pm$ (называемых соответственно *положительной и отрицательной частями* меры μ.). Легко видеть, что

$$[\mu_{ac}]^\pm = [\mu^\pm]_{ac}, \quad [\mu_s]^\pm = [\mu^\pm]_s.$$

Мера μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ называется *дискретной*, если существует счетное борелевское множество $E \subseteq \Omega$, для которого $\mu = \mu \llcorner E$, и *непрерывной*, если $\mu(\{x\}) = 0$ для любого x из Ω. Согласно равенству (1.1) любая μ из $\mathcal{M}(\Omega)$ может быть представлена единственным образом в виде суммы

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_d,$$

где

(a) μ_{ac} абсолютно непрерывна, μ_{sc} и μ_d сингулярны относительно меры Лебега, μ_{sc} сингулярна относительно μ_d;

(b) μ_{ac} и μ_{sc} непрерывны, μ_d дискретна.

Меры μ_{sc} и μ_d называются *сингулярно непрерывной* и *дискретной* (соответственно) частями меры μ. Подобные замечания и обозначения остаются справедливыми (соответственно, неявно используются) для мер Радона и вещественных функций на $Q := \Omega\times(0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ и на $(0,T) \subset \mathbb{R}$.

Определение 1.1. Через $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$ обозначим множество неотрицательных мер Радона z из $\mathcal{M}^+(Q)$, обладающих следующим свойством: почти для любого t из $(0,T)$ существует мера $z(\cdot,t)$ из $\mathcal{M}^+(\Omega)$, для которой справедливы следующие утверждения:

(i) для любого $\zeta \in C_c(Q)$ отображение $t \mapsto \langle z(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega$ принадлежит $L^1(0,T)$ и

$$\langle z,\zeta\rangle_Q = \int_0^T \langle z(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt; \tag{1.2}$$

(ii) отображение $t \mapsto \|z(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}(\Omega)}$ принадлежит $L^\infty(0,T)$.

Аналогично, через $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}^+(0,T))$ обозначим множество таких мер Радона z из $\mathcal{M}^+(Q)$, что почти для любого x из Ω существует мера $z(x,\cdot)$ из $\mathcal{M}^+(0,T)$, обладающая следующими свойствами:

$(i)'$ для любого ζ из $C_c(Q)$ отображение $x \mapsto \langle z(x,\cdot),\zeta(x,\cdot)\rangle_{(0,T)}$ принадлежит $L^1(\Omega)$ и

$$\langle z,\zeta\rangle_Q = \int_\Omega \langle z(x,\cdot),\zeta(x,\cdot)\rangle_{(0,T)}\,dx;$$

$(ii)'$ отображение $x \mapsto \|z(x,\cdot)\|_{\mathcal{M}(0,T)}$ принадлежит $L^\infty(\Omega)$.

Через $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$ обозначим множество таких мер z из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, что след $z(\cdot,t)$ определен для любого t из $[0,T]$ и

$$\lim_{t\to t_0} \|z(\cdot,t) - z(\cdot,t_0)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = 0$$

для любого t_0 из $[0,T]$.

Согласно (ii) и $(ii)'$ используем обозначения

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} := \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \|z(\cdot,t)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < \infty,$$

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} \|z(x,\cdot)\|_{\mathcal{M}(0,T)} < \infty.$$

Если $z \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, то, очевидно, и z_{ac}, $z_s \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$, а $z_r \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ (аналогичное утверждение справедливо для z из $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$). Кроме того, из равенства (1.2) следует, что

$$\langle z_{ac},\zeta\rangle_Q = \iint_Q z_r\,\zeta\,dxdt$$

и

$$\langle z_s,\zeta\rangle_Q = \int_0^T \langle z_s(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt$$

для любой ζ из $C_c(Q)$

Через $[z(\cdot,t)]_{ac}$, $[z(\cdot,t)]_s \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ обозначим абсолютно непрерывную и сингулярную части (соответственно) меры $z(\cdot,t) \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Стандартными методами можно доказать, что для почти всех t из $(0,T)$ выполняются равенства

$$[z(\cdot,t)]_{ac} = z_{ac}(\cdot,t), \qquad [z(\cdot,t)]_s = z_s(\cdot,t). \tag{1.3}$$

Из первого из этих равенств следует, что

$$[z(\cdot,t)]_r = z_r(\cdot,t),$$

где $[z(\cdot,t)]_r$ обозначает плотность меры $[z(\cdot,t)]_{ac}$. Аналогичные соображения имеют место и в том случае, когда $z \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}^+(0,T))$.

Будем говорить, что конечная мера Радона z из $\mathcal{M}(Q)$ принадлежит $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, если ее положительная часть z^+ и отрицательная часть z^- принадлежат $L^\infty(0,T;\mathcal{M}^+(\Omega))$. Отметим, что условия (i) и (ii) определения 1.1 выполняются при

$$z(\cdot,t) := z^+(\cdot,t) - z^-(\cdot,t).$$

Более того, если $z \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, то
$$[z(\cdot,t)]^\pm = z^\pm(\cdot,t),$$
а равенства (1.3) по-прежнему справедливы для почти всех t из $(0,T)$. Аналогичные определения можно ввести и для множества мер Радона $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, причем соответствующие замечания будут верны.

Введем еще несколько обозначений, используемых ниже. Для п. в. определенной измеримой функции $z:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, $z\geqslant 0$, *существенный верхний предел* в точке x_0 из $\overline{\Omega}$ определяется (и обозначается) следующим образом:
$$\operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x) := \lim_{\delta\to 0^+}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x)\right) = \inf_{\delta>0}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x)\right),$$
где
$$I_\delta(x_0) := (x_0-\delta, x_0+\delta)\cap\overline{\Omega} \qquad (x_0\in\overline{\Omega},\ \delta>0).$$
Тогда для каждого x_0 из $\overline{\Omega}$ определена функция
$$\overline{\lim}\, z:\ \overline{\Omega}\to\mathbb{R}, \quad \big(\overline{\lim}\, z\big)(x_0) := \operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x).$$

Положим
$$\big\{\,\overline{\lim}\, z = \infty\big\} := \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid \operatorname{ess}\limsup_{x\to x_0} z(x) = \infty\right\} =$$
$$= \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid (\forall L>0)\ (\exists\bar{\delta}>0)\ (\forall\delta\in(0,\bar{\delta}))\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x) > L\right\} =$$
$$= \left\{x_0\in\overline{\Omega} \mid (\forall\delta>0)\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in I_\delta(x_0)} z(x) = \infty\right\}$$
и
$$\big\{\,\overline{\lim}\, z < \infty\big\} := \overline{\Omega}\setminus\big\{\,\overline{\lim}\, z = \infty\big\}.$$
Иными словами, имеем соотношение
$$\big\{\,\overline{\lim}\, z < \infty\big\} = \{x_0\in\overline{\Omega} \mid \exists\, I_\delta(x_0),\ \text{для которого } z\in L^\infty(I_\delta(x_0))\}.$$

2. Случай кубической функции φ

Одним из главных свойств задачи (P) является поведение функции φ на бесконечности. Изучим случай, когда φ удовлетворяет следующему условию:
$$(A)\qquad \begin{cases} (i)\ \ \varphi\in C^2(\mathbb{R}),\ \varphi(u)\to\pm\infty\ \text{ при } u\to\pm\infty, \\ (ii)\ \ \varphi'(u)>0\ \text{ в } (-\infty,a_1)\cup(a_2,\infty)\quad(-\infty<a_1<a_2<\infty), \\ (iii)\ \varphi'(u)<0\ \text{ в } (a_1,a_2). \end{cases}$$

Рассмотрим задачу
$$(C)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta[\varphi(u)] + \varepsilon\Delta u_t & \text{в } Q, \\ \varphi(u)+\varepsilon u_t = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}, \end{cases}$$
где $\varepsilon>0$, $T>0$, а $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geqslant 1)$ — ограниченная связная область с гладкой границей $\partial\Omega$ (если $N\geqslant 2$). Функция $v:=\varphi(u)+\varepsilon u_t$ называется *химическим потенциалом*. Задача (C) называется *соболевской регуляризацией* задачи
$$\begin{cases} u_t = \Delta[\varphi(u)] & \text{в } Q, \\ \varphi(u) = 0 & \text{в } \partial\Omega\times(0,T], \\ u = u_0 & \text{в } \Omega\times\{0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$
Если $N=1$, то задача (C) формально соответствует задаче (P) с $\psi(u)=u$; аналогично, задача (2.1) соответствует задаче (0.1).

Теорема 2.1. *Пусть* $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ *и выполняется условие* (A). *Тогда существует единственная* u *из* $C^1([0,T]; L^\infty(\Omega))$, *для которой* $v \in C([0,T]; C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega))$, $p > N$, $\Delta v \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, *удовлетворяющая задаче* (C) *в классическом смысле, и существует положительное* M, *зависящее только от* $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, *для которого*

$$||u||_{L^\infty(Q)} \leqslant M, \tag{2.2}$$

$$\|v\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))} + \sqrt{\varepsilon}\,\|u_t\|_{L^2(Q)} \leqslant M, \tag{2.3}$$

$$\|v\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Из определения химического потенциала и равенства $u_t = \Delta v$ следует, что $v(\cdot,t)$ удовлетворяет эллиптической задаче

$$\begin{cases} -\varepsilon\Delta v(\cdot,t) + v(\cdot,t) = \varphi(u)(\cdot,t) & \text{в } \Omega, \\ v(\cdot,t) = 0 & \text{на } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

для любого t из $(0,T]$

Отметим, что все неравенства (2.2)–(2.4) можно вывести из неравенства (2.7) (см. ниже), выбирая функцию g в (2.6) различным образом.

Предложение 2.1. *Пусть* u *удовлетворяет задаче* (C), $g \in C^1(\mathbb{R})$, $g' \geqslant 0$, $g(0) = 0$ *и*

$$G(u) := \int\limits_0^u g(\varphi(s))ds + K \qquad (K \in \mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Тогда

$$\int\limits_\Omega G(u)(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega G(u_0)(x)\,dx \tag{2.7}$$

для любого t *из* $[0,T]$.

Доказательство. Из [11] известно, что в Q справедливо равенство

$$\begin{aligned} \big[G(u)\big]_t &= g(\varphi(u))u_t = g(v)\,\Delta v + \big[g(\varphi(u)) - g(v)\big]\,\Delta v = \\ &= \operatorname{div}\big[g(v)\nabla v\big] - \underbrace{g'(v)|\nabla v|^2}_{\geqslant 0} + \underbrace{\big[g(\varphi(u)) - g(v)\big]\,\frac{v-\varphi(u)}{\varepsilon}}_{\leqslant 0}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Поскольку $v = 0$ на $\partial\Omega \times (0,T)$ и $g(0) = 0$, интегрируя это равенство по области $\Omega \times (0,t)$ $(t \in (0,T])$, получаем (2.7). □

Замечание 2.2. Аналогично доказывается, что для любых неотрицательных ζ из пространства $C^1([0,T]; C^1_c(\Omega))$ и любых t_1, t_2 из $[0,T]$, для которых $t_1 \leqslant t_2$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega G(u)(x,t_2)\zeta(x,t_2)\,dx - \int\limits_\Omega G(u)(x,t_1)\zeta(x,t_1)\,dx \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_\Omega \left\{G(u)\zeta_t - g(v)\nabla v\cdot\nabla\zeta - g'(v)|\nabla v|^2\zeta\right\}\,dxdt. \end{aligned}$$

Последнее неравенство называют *неравенством энтропии* для задачи (C), по аналогии с неравенством энтропии для вязкого закона сохранения (например, см. [15]).

Главное следствие из неравенства (2.7) — существование положительно инвариантных областей для задачи (C). Это является содержанием следующего утверждения.

Предложение 2.2. *Пусть существуют такие вещественные* u_1, u_2, *что* $u_1 < u_2$ *и*

$$\varphi(u_1) \leqslant \varphi(u) \leqslant \varphi(u_2) \quad \textit{для любой } u \textit{ из } [u_1,u_2]. \tag{2.9}$$

Пусть u *удовлетворяет задаче* (C) *с такой начальной функцией* u_0, *что* $u_1 \leqslant u_0 \leqslant u_2$ *п. в. в* Ω. *Тогда* $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$ *п. в. в* Q.

Доказательство. Не ограничивая общности, полагаем, что $\varphi(u) < \varphi(u_1)$ для $u < u_1$ и $\varphi(u) > \varphi(u_2)$ для $u > u_2$ (при необходимости можно доопределить φ вне отрезка $[u_1, u_2]$). Зафиксируем такое g из $C^1(\mathbb{R})$, что $g' \geqslant 0$, $g \equiv 0$ в $[\varphi(u_1), \varphi(u_2)]$, $g(z) < 0$ для $z < \varphi(u_1)$ и $g(z) > 0$ для $z > \varphi(u_2)$. Возьмем такую постоянную K в (2.6), что $G(u) = \int\limits_{u_1}^{u} g(\varphi(s))ds$. Тогда $G \equiv 0$ в $[u_1, u_2]$ и $G > 0$ в $(-\infty, u_1) \cup (u_2, \infty)$. Тогда доказываемое утверждение следует из неравенства (2.7). $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 2.1.

Доказательство теоремы 2.1. Существование и единственность решений доказывается стандартными методами теории полугрупп. Оценка (2.2) очевидно следует из предложения 2.2, условия которого в данном случае выполнены для всех достаточно больших $|u_1|$ и $|u_2|$, поскольку $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ и $\varphi(u) \to \pm\infty$ при $u \to \pm\infty$ в силу условия (A). Полагая $g(z) = z$ в (2.8), получаем равенство

$$[G(u)]_t = v\,\Delta v - \frac{|v - \phi(u)|^2}{\varepsilon} = v\,\Delta v - \varepsilon\,|u_t|^2,$$

откуда вытекает (2.3). Поскольку $v(\cdot, t)$ удовлетворяет эллиптической задаче (2.5) для любого t из $(0, T]$, неравенство (2.4) следует из (2.2) и принципа максимума. $\square$

Поскольку оценки (2.2)–(2.4) равномерны относительно ε, они позволяют исследовать предельные точки семейства решений задачи (C) при $\varepsilon \to 0^+$. В дальнейшем в этом разделе это семейство обозначается через $\{u_\varepsilon\}$, а соответствующий химический потенциал — через $\{v_\varepsilon\}$. В силу (2.2)–(2.4) имеет место *-слабая компактность семейств $\{u_\varepsilon\}$ и $\{v_\varepsilon\}$ в $L^\infty(Q)$ и слабая компактность семейства $\{v_\varepsilon\}$ в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Следовательно, существуют такие u из $L^\infty(Q)$ и v из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ и такие последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\} \subseteq \{u_\varepsilon\}$ и $\{v_{\varepsilon_n}\} \subseteq \{v_\varepsilon\}$, что

$$u_{\varepsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{в } L^\infty(Q), \tag{2.10}$$

$$v_{\varepsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{в } L^\infty(Q), \tag{2.11}$$

$$v_{\varepsilon_n} \rightharpoonup v \quad \text{в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.12}$$

Учитывая (2.10) и (2.12), перейдем к пределу при $n \to \infty$ в слабой формулировке задачи (C). Полагая $\varepsilon = \varepsilon_n$; получаем, что

$$\iint\limits_{Q} \{u\,\zeta_t - \nabla v \cdot \nabla\zeta\}\, dxdt + \int\limits_{\Omega} u_0(x)\,\zeta(x, 0)\, dx = 0. \tag{2.13}$$

Из последнего равенства можно получить решение задачи (2.1) в смысле мер Янга. Если последовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$ равномерно ограничена в $L^\infty(Q)$, то существует подпоследовательность (снова обозначаемая через $\{u_{\varepsilon_n}\}$) и семейство вероятностных мер $\nu_{(x,t)}$, определенных для п. в. (x, t) из Q, для которых

$$f(u_{\varepsilon_n}) \overset{*}{\rightharpoonup} \hat{f} \quad \text{в } L^\infty(Q) \tag{2.14}$$

для любой f из $C(\mathbb{R})$; здесь

$$\hat{f}(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}} f(\xi)\, d\nu_{(x,t)}(\xi) \quad \text{для п. в. } (x, t) \text{ из } Q \tag{2.15}$$

(см., например, [8]). Семейство $\nu_{(x,t)}$ называется *семейством мер Янга*, связанным с подпоследовательностью $\{u_{\varepsilon_n}\}$.

Как доказано в [14], для п. в. (x, t) из Q мера $\nu_{(x,t)}$ является суперпозицией мер Дирака, сосредоточенных на монотонных ветвях графика функции $v = \varphi(u)$. Иными словами, предположим, что

$$u := \beta_1(v),\ v \in (-\infty, \varphi(a_1)) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (-\infty, a_1),$$
$$u := \beta_0(v),\ v \in (\varphi(a_2), \varphi(a_1)) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (a_1, a_2).$$
$$u := \beta_2(v),\ v \in (\varphi(a_2), \infty) \quad \Leftrightarrow \quad v = \varphi(u),\ u \in (a_2, \infty).$$

Тогда справедливо следующее утверждение (см. [14]):

Теорема 2.2. *Пусть u из $L^\infty(Q)$, v из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ — функции из равенства* (2.13). *Тогда существуют $\lambda_i \in L^\infty(Q)$, $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2)$, обладающие следующими свойствами*:

(i) $\sum\limits_{i=0}^{2}\lambda_i(x,t)=1$, $\lambda_1(x,t)=1$ *при* $v(x,t)<\varphi(a_2)$, $\lambda_2(x,t)=1$ *при* $v(x,t)>\varphi(a_1)$ *для п. в.* (x,t) *из* Q;

(ii) *семейство мер Янга* $\nu_{(x,t)}$, *связанное с подпоследовательностью* $\{u_{\varepsilon_n}\}$ *из* (2.14), *имеет вид*

$$\nu_{(x,t)}(\xi)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i(x,t)\delta(\xi-\beta_i(v(x,t)) \tag{2.16}$$

для п. в. (x,t) *из* Q *и любого вещественного* ξ.

Если в (2.10) и в (2.14)–(2.16) положить $f(\xi)=\xi$, а в (2.15) положить $f(\xi)=\varphi(\xi)$, то получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\xi\,d\nu_{(x,t)}(\xi)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i(x,t)\beta_i(v(x,t))=u(x,t) \tag{2.17}$$

и

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\,d\nu_{(x,t)}(\xi)=\sum_{i=0}^{2}\lambda_i(x,t)\varphi(\beta_i(v(x,t)))=v(x,t) \tag{2.18}$$

(соответственно) для п. в. (x,t) из Q (здесь мы используем теорему 2.2-(i)). Следовательно, из (2.13) мы получаем, что

$$\iint\limits_{Q}\big\{\zeta_t\int\limits_{\mathbb{R}}\xi\,d\nu_{(x,t)}(\xi)-\nabla\zeta\cdot\nabla\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\,d\nu_{(x,t)}(\xi)\big\}dxdt+\int\limits_{\Omega}u_0(x)\zeta(x,0)dx=0, \tag{2.19}$$

т. е. получаем решение задачи (P) в смысле мер Янга. Отметим, что, если φ монотонна, то такое решение сводится к слабому решению в обычном смысле.

Представляется естественным попытаться применить вышеприведенные рассуждения, справедливые при условии (A), к случаю, в котором φ имеет вид (0.3). Как и ранее, для любого u_0 из $L^\infty(\Omega)$ существует единственное сильное решение u_ε задачи (C). Однако L^∞-оценка (2.2) семейства $\{u_\varepsilon\}$, являющаяся главным инструментом приведенного выше анализа, в новой ситуации не имеет места. В самом деле, если φ удовлетворяет условию (A), то условие (2.9) выполняется для любого достаточно большого отрезка $[u_1,u_2]$, что и влечет за собой (2.2). Если же φ имеет форму (0.3), то условие (2.9) выполняется только при $[u_1,u_2]\subseteq[-\alpha,\alpha]$. Следовательно, L^∞-оценка семейства $\{u_\varepsilon\}$ выполняется только в том случае, когда $\{u_\varepsilon\}$ принимает значения из «устойчивой фазы», т. е. в тривиальном случае. Однако, можно доказать следующий результат (см. [16]):

Предложение 2.3. *Пусть* φ *имеет форму* (0.3), *а* $u_0\in L^\infty(\Omega)$, $u_0\geqslant 0$. *Пусть* u_ε *и* v_ε — *соответствующее решение задачи* (C) *и соответствующий химический потенциал. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(i) u_ε *неотрицательна*;

(ii) *существует положительное* M, *для которого*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\quad\text{для любого } t \text{ из } (0,T], \tag{2.20}$$

$$0\leqslant v_\varepsilon\leqslant\varphi(\alpha)\quad\text{п. в. в } Q, \tag{2.21}$$

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}\leqslant M. \tag{2.22}$$

Доказательство. Доказательство (i) аналогично доказательству предложения 2.2, поэтому мы опустим его (подробности см. в [16]). Чтобы доказать (ii), заметим, что из (i) и (0.3) следует, что $0\leqslant\varphi(u_\varepsilon)\leqslant\varphi(\alpha)$ в Q, откуда, применяя принцип максимума к эллиптической задаче (2.5), выводим неравенство (2.21). Поскольку $v_\varepsilon(\cdot,t)\geqslant 0$ в Ω, а $v_\varepsilon(\cdot,t)=0$ на $\partial\Omega\times(0,T)$ для любого t из $(0,T]$, интегрируя первое уравнение из (C) по x, получаем, что

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}u_\varepsilon(x,t)\,dx=\int\limits_{\Omega}\Delta v_\varepsilon(x,t)\,dx=\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\nu}(x,t)\,d\sigma<0\qquad(t\in(0,T]).$$

Тогда

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} = \int\limits_\Omega u_\varepsilon(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_\Omega u_0(x)\,dx = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}$$

для любого t из $(0,T]$, из чего следует (2.20). Неравенство (2.22) легко выводится из (2.5) и (2.21). □

Сравним данный случай с тем, что имеет место при выполнении условия (A). Для семейства $\{v_\varepsilon\}$ мы, как и ранее, из оценок (2.21)-(2.22) получаем равномерную ограниченность в $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))\cap L^\infty(Q)$, а значит, слабую *-компактность в $L^\infty(Q)$ и слабую компактность в $L^2(0,T;H^1_0(\Omega))$. Для семейства $\{u_\varepsilon\}$, вместо слабой *-компактности в $L^\infty(Q)$, вытекающей из (2.2), имеет место лишь слабая *-компактность в пространстве $\mathcal{M}(Q)$ мер Радона, вытекающая из равномерной оценки (2.20) в пространстве $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. Поэтому можно предположить, что последующая процедура получения равенств (2.13) и (2.19) даст решение задачи (2.1) со значениями в пространстве мер Радона.

Это предположение можно формализовать следующим образом. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — любая последовательность, для которой выполняется (2.12). По лемме захвата (см., например, [9]) последовательности $\{u_{\varepsilon_n}\}$ можно сопоставить равномерно интегрируемую подпоследовательность; тогда эта подпоследовательность слабо компактна в $L^1(Q)$ по теореме Витали. Точнее, можно найти подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_j}\}\equiv\left\{u_{\varepsilon_{n_j}}\right\}\subseteq\{u_{\varepsilon_n}\}$, убывающую последовательность измеримых множеств $A_j\subseteq Q$, $|A_j|\to 0$, и меру μ из $\mathcal{M}(Q)$, для которых

$$\iint\limits_Q u_{\varepsilon_j}\chi_{A_j}\zeta\,dxdt\ \to <\mu,\zeta>_Q \tag{2.23}$$

при $j\to\infty$ для любого ζ из $C(Q)$ и

$$u_{\varepsilon_j}\chi_{Q\setminus A_j}\rightharpoonup \hat u \quad \text{в } L^1(Q). \tag{2.24}$$

Здесь χ_E обозначает характеристическую функцию любого измеримого $E\subseteq Q$,

$$\hat u(x,t) := \int\limits_{[0,\infty)} \xi\,d\nu_{(x,t)}(\xi) \quad \text{для п. в. } (x,t) \text{ из } Q, \tag{2.25}$$

а $\nu_{(x,t)}$, как и ранее, обозначает семейство мер Янга, связанное с последовательностью $\{u_{\varepsilon_n}\}$.

В силу (2.12), (2.23) и (2.24), переходя к пределу при $j\to\infty$ в слабой постановке задачи (C), где $\varepsilon=\varepsilon_j$, получаем, что

$$\iint\limits_Q (\hat u\,\zeta_t - \nabla v\cdot\nabla\zeta)\,dxdt + \int\limits_\Omega u_0\,\zeta(x,0)\,dx = - <\mu,\zeta_t>_Q \tag{2.26}$$

для любого ζ из $C^1(Q)$, для которого $\zeta(.,T)=0$ в Ω. Далее можно исследовать связь между $\hat u$ и v подобно тому, как это сделано для u и v в равенстве (2.13). Теперь можно доказать, что для п. в. (x,t) из Q мера $\nu_{(x,t)}$ есть суперпозиция двух мер Дирака с носителем на ветвях сужения φ на $[0,\infty)$; таким образом, из (2.26) получаем равенство, обобщающее (2.19). Более подробно это изложено в [16, 18].

Если выполнено (2.2), то при $\mu=0$ равенство (2.26) сводится к (2.13), потому что равномерная L^∞-оценка влечет за собой равномерную интегрируемость семейства $\{u_\varepsilon\}$. Следовательно, возникновение меры μ связано с вырождением φ на бесконечности; в этом — принципиальное отличие случая функций вида (0.3) от случая кубических нелинейных членов.

Из последнего замечания ясно, что, если φ имеет вид (0.3) (или, в более общей постановке, удовлетворяет условию (H_1) ниже), то решения задачи (2.1) могут при положительных t иметь значения в $\mathcal{M}^+(\Omega)$ даже в том случае, когда начальная функция u_0 принадлежит $L^1(\Omega)$. Как указано во введении к настоящей работе, то же самое имеет место и для регуляризованной задачи (P) с вырождающейся псевдопараболической регуляризацией (отметим, что в данном разделе используется соболевская регуляризация, а она не является вырожденной). Таким образом, изучая задачу (P), нельзя пренебречь решениями со значениями в классе мер Радона.

3. Случай ограниченной φ, убывающей на бесконечности: результаты

3.1. Исходные допущения и определение решения. В этом разделе мы считаем, что функции φ и ψ удовлетворяют следующим условиям:

$$(H_1)\qquad \begin{cases} (i) & \text{существует такое } p \text{ из } [1,\infty), \text{ что } \varphi \in C^\infty([0,\infty)) \cap L^p((0,\infty)), \quad \varphi(0)=0,\\ (ii) & \text{существует такое положительное } \alpha, \text{ что } \varphi'>0 \text{ в } [0,\alpha),\ \varphi'<0 \text{ в } (\alpha,\infty),\\ (iii) & \varphi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j, \end{cases}$$

$$(H_2)\qquad \begin{cases} (i) & \psi \in C^\infty([0,\infty)),\ \psi(0)=0,\ \psi'>0 \text{ в } [0,\infty),\\ & \text{существует такое положительное } \gamma, \text{ что } \psi(u)\to\gamma \text{ при } u\to\infty,\\ (ii) & \psi'' \leqslant 0 \text{ в } [0,\infty),\\ (iii) & \text{существует такое положительное } k_1,\\ & \text{что } |\varphi'(u)| \leqslant k_1\,\psi'(u) \text{ для любого неотрицательного } u,\\ (iv) & \text{существуют такие положительные } k_2,\, k_3,\, \sigma,\\ & \text{что } k_2 \leqslant (1+u)^{1+\sigma}\psi'(u) \leqslant k_3 \text{ в } [0,\infty),\\ (v) & \psi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Здесь $\varphi^{(j)}$, $\psi^{(j)}$ обозначают производные порядка j от функций φ, ψ соответственно ($j \in \mathbb{N}$), но для первой и второй производных используются обычные обозначения φ', φ'', ψ', ψ''. Положим $\varphi(\infty) := 0$, $\psi(\infty) := \gamma$.

Введем следующее определение.

Определение 3.1. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Пара (u, v) называется *решением* задачи (P) с *химическим потенциалом* v, если выполняются следующие условия:

(i) $u \in C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$, $v \in L^\infty((0,T);C_0(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}((0,T)))$, $v_x \in L^\infty(Q)$, $v_{xx} \in L^\infty((0,T);\mathcal{M}(\Omega))$,

$$v(x,t) = \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to t^+} v(x,\tau) & \text{при } t\in[0,T)\\ \lim\limits_{\tau\to T^-} v(x,\tau) & \text{при } t=T \end{cases} \qquad (x\in\overline{\Omega}), \tag{3.1}$$

$$v(\cdot,t)=0 \text{ на } \partial\Omega \quad \text{для любого } t \text{ из } (0,T).$$

(ii) Множество

$$\mathcal{N} := \{(x,t)\in\overline{Q} \mid v(x,t)=0\}$$

замкнуто и

$$u_s = u_s \llcorner \mathcal{N}. \tag{3.2}$$

(iii) $[\psi(u_r)]_t \in L^\infty_{loc}(Q\setminus\mathcal{N})$, $\dfrac{[\psi(u_r)]_t}{\psi'(u_r)} \in L^\infty_{loc}(Q\setminus\mathcal{N})$ и

$$v = \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t \quad \text{п. в. в } Q\setminus\mathcal{N}.$$

(iv) Для любого ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которого $\zeta(\cdot,T)=0$ в Ω, имеет место равенство

$$\int\limits_0^T \langle u(\cdot,t),\zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt + \int\limits_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t),\zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt = -\langle u_0,\zeta(\cdot,0)\rangle_\Omega\,. \tag{3.3}$$

Замечание 3.1. Легко видеть, что отображение $v(x,\cdot)$ принадлежит пространству $BV(0,T)$ для любого x из Ω. Таким образом, пределы в правой части формулы (3.1) существуют и конечны. Из стандартных свойств одномерных функций ограниченной вариации следует существование такого множества меры нуль $E\subset[0,T]$, что равенство (3.1) справедливо для любого t из $[0,T]\setminus E$. Требуя выполнения формулы (3.1) для любого t из $[0,T]$, мы подразумеваем, что $v(x,\cdot)$ определена формулой (3.1) для любого t из E.

Легко доказать, что, если $t\in[0,T]$, то $v(\cdot,t)\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $[v(\cdot,t)]_{xx}\in\mathcal{M}(\Omega)$ и справедливы следующие утверждения:

(i)

$$[v(x,\cdot)]_t = v_t(x,\cdot) \quad \text{в } \mathcal{M}(0,T)$$

для п. в. x из Ω,

(ii)
$$[v(\cdot,t)]_x = v_x(\cdot,t) \quad \text{п. в. в } \Omega$$
для п. в. t из $(0,T)$,

(iii)
$$[v(\cdot,t)]_{xx} = v_{xx}(\cdot,t) \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega)$$
для п. в. t из $(0,T)$.

Кроме того, v принадлежит $BV(Q)$.

Отметим, что требование замкнутости множества $\mathcal{N}$ накладывается не только для того, чтобы определение 3.1 имело смысл; это требование является необходимым условием единственности решения задачи (P). В работе [6] приводится пример, где бесконечно много пар (u,v) обладают всеми свойствами, перечисленными в определении 3.1 (с одной и той же начальной функцией u_0), кроме замкнутости множества $\mathcal{N}$.

3.2. Существование: случай непрерывной начальной функции. Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. Положим
$$\psi_n(u) := \psi(u) + \frac{u}{n} \qquad (u \in [0,\infty), n \in \mathbb{N})$$
и рассмотрим нелинейную аппроксимирующую задачу
$$(P_n) \qquad \begin{cases} u_{nt} = v_{nxx} & \text{в } Q, \\ v_n = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n = u_0 \geqslant 0 & \text{в } \Omega \times \{0\} \qquad (n \in \mathbb{N}), \end{cases}$$
где
$$v_n := \varphi(u_n) + \varepsilon[\psi_n(u_n)]_t. \tag{3.4}$$
Изучая предельные точки последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, можно доказать следующие результаты о существовании (см. [4]).

Теорема 3.1. *Пусть выполняются* (H_1)-(H_2) *и* $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. *Тогда существует решение* (u,v) *задачи* (P), *удовлетворяющее неравенству*
$$\|u\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)}, \tag{3.5}$$
и справедливы следующие утверждения:

(i) *мера множества* $\mathcal{N}$ *равна нулю,*

(ii) $\psi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $\varphi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $u_r \in C(Q \setminus \mathcal{N})$,
$$\lim_{\operatorname{dist}((x,t),\mathcal{N}) \to 0} u_r(x,t) = \infty$$
и $\psi(u_r) = \gamma$, $\varphi(u_r) = 0$ *на* $\mathcal{N}$,

(iii) *для всех* t_1, t_2 *из* $[0,T]$, *удовлетворяющих неравенству* $t_1 \leqslant t_2$, *имеем* $\mathcal{N}(t_2) \supseteq \mathcal{N}(t_1)$ *и*
$$u_r(x,t_2) \geqslant e^{-\frac{k_2}{\varepsilon}(t_2-t_1)} u_r(x,t_1) \quad \text{для п. в. } x \text{ из } Q \setminus \mathcal{N}(t_2). \tag{3.6}$$

Приведем несколько оценок решения, существование которого установлено теоремой 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются* (H_1)-(H_2), $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, *а* (u,v) — *решение задачи* (P), *существование которого установлено теоремой* 3.1. *Тогда*
$$0 \leqslant v \leqslant \varphi(\alpha) \quad \text{п. в. в } Q, \tag{3.7}$$
$$\|[\psi(u_r)]_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon} \tag{3.8}$$
и существует такая положительная постоянная M, *зависящая только от* $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$, *что*
$$\left\| \frac{v}{\psi'(u_r)} \right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M, \tag{3.9}$$
$$\|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M, \tag{3.10}$$
$$\|u_t\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} = \|v_{xx}\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))} \leqslant M,$$
$$\|v_x\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M,$$

$$\|v_t\|_{L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))} \leqslant M.$$

Кроме того, положительная часть v_t^+ функции v_t абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, а ее плотность $\left(v_t^+\right)_r$ удовлетворяет неравенству

$$\|\left(v_t^+\right)_r\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M. \tag{3.11}$$

3.3. Существование: случай начальной функции общего вида. Опираясь на результат о существовании, полученный в теореме 3.1, докажем существование решений задачи (P) для случая начальной функции общего вида, т. е. для $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Подберем для этого удобную процедуру аппроксимации. Вначале аппроксимируем u_0 из $\mathcal{M}^+(\Omega)$ следующим образом:

Лемма 3.1. *Если $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, то существует такое $\{u_{0n}\} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, $u_{0n} \geqslant 0$, что*

$$\|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \quad \textit{для } \ n \in \mathbb{N},$$

$$u_{0n} \overset{*}{\rightharpoonup} u_0 \ \textit{в}\ \mathcal{M}(\Omega) \quad \textit{и} \quad u_{0n} \to u_{0r} \ \textit{п. в. в}\ \Omega \quad \textit{при}\ n \to \infty.$$

Кроме того, если существуют x_0 из Ω и $I_\delta(x_0)$, для которых

$$u_{0s}\left(I_\delta(x_0)\right) = 0, \quad u_{0r} \in L^\infty(I_\delta(x_0)),$$

то для любого $\hat{\delta}$ из $(0,\delta)$ существует такое натуральное $\hat{n}$, что

$$\|u_{0n}\|_{L^\infty(I_{\hat{\delta}}(x_0))} \leqslant \|u_{0r}\|_{L^\infty(I_\delta(x_0))} \quad \textit{для любого } n \geqslant \hat{n}.$$

Выберем $\{u_{0n}\}$ согласно лемме 3.1. Пусть (u_n, v_n) — решение задачи

$$(P_n')\qquad \begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{в } Q, \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u = u_{0n} & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

разрешимость которого установлена теоремой 3.1. Отметим, что в этой процедуре аппроксимации ψ не заменяется на ψ_n. В частности, v_n удовлетворяет соотношению

$$v_n = \varphi(u_{nr}) + \varepsilon[\psi(u_{nr})]_t \quad \text{п. в. в } Q \setminus \mathcal{N}_n,$$

где

$$\mathcal{N}_n := \{(x,t) \in \overline{Q} \mid v_n(x,t) = 0\} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

что отличается от (3.4). В [4] доказан следующий результат о существовании.

Теорема 3.3. *Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ и выполнены условия (H_1)-(H_2). Тогда существует такое решение (u,v) задачи (P), что и удовлетворяет неравенству* (3.5).

3.4. Возникновение особенностей. Как указано выше, исходя из [1, Theorem 3.4], мы предполагаем, что существует такая начальная функция u_0 из $L^\infty_{loc}(\Omega)$, что в соответствующем решении задачи (P) при $t > 0$ возникают массы Дирака. Обращаясь к доказательству в [1], можно доказать следующий более общий результат (см. [6]).

Теорема 3.4. *Пусть $\Omega = (-3,3)$, (H_1)-(H_2) выполняются, а p_0 из $\mathcal{M}^+(\Omega)$ обладает следующими свойствами*:

(i) *p_0 четно,*
(ii) *$p_{0r} \geqslant \alpha$ п. в. в Ω,*
(iii) *p_{0s} сосредоточена на множестве $(-2,-1) \cup (1,2)$,*
(iv) $\operatorname{supp} u_{0s} \subseteq \left\{\overline{\lim}\, u_{0r} = \infty\right\}$.

Тогда существует такое положительное ξ_0, что, если

$$6\alpha \leqslant p_0(\Omega) \leqslant 6\alpha + \xi_0,$$

то существует такое u_0 из $L^\infty_{loc}(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, и такое соответствующее решение (u,v) задачи (P) с $T \geqslant 1$, что

$$u(\cdot,1) = p_0.$$

Применяя указанный результат, можно показать, что спонтанно может возникнуть гораздо больше особенностей, чем рассмотрено в [1]. Можно построить такие примеры меры p_0, что условия теоремы 3.4 выполняются, а сингулярная часть p_{0s} содержит счетное либо канторово множество мер Дирака (а именно, сингулярно непрерывна). В работе [6] содержится подробное исследование этого явления.

4. Случай ограниченной φ, убывающей на бесконечности: идеи доказательств

В этом разделе приводятся идеи доказательств результатов существования, сформулированных в предыдущем разделе. Для простоты мы ограничиваемся случаем непрерывной начальной функции (см. пункт 3.2).

Для решения аппроксимирующей задачи (P_n) и соответствующего химического потенциала можно доказать следующие априорные оценки:

Предложение 4.1. *Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, u_n — решение задачи (P_n), а v_n — соответствующий химический потенциал, определенный формулой* (3.4). *Тогда*

$$\|u_n\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \tag{4.1}$$

$$\|[\psi_n(u_n)]_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon}$$

и существует такое положительное M, зависящее только от $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$, что

$$\begin{gathered}\left\|\frac{v_n}{\psi_n'(u_n)}\right\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M,\\ \|v_n\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leqslant M,\\ \|u_{nt}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} = \|v_{nxx}\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \leqslant M,\\ \|v_{nx}\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M,\\ \|v_{nt}^+\|_{L^\infty(Q)} \leqslant M\end{gathered} \tag{4.2}$$

(v_{nt}^+ — *положительная часть функции* v_{nt}),

$$\|v_{nt}\|_{L^\infty(\Omega;L^1(0,T))} \leqslant M,$$

$$\|v_n\|_{BV(Q)} \leqslant M.$$

Из этих оценок вытекают следующие результаты о сходимости.

Предложение 4.2. *Пусть $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$. Пусть u_n — решение задачи (P_n), а v_n определена формулой* (3.4) ($n \in \mathbb{N}$). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(*i*) *Существуют такие подпоследовательности последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ (для простоты мы снова обозначаем их через $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$) и такие функции u из $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$ и v из $L^\infty(0,T;C_0(\overline{\Omega}))$ с u_t из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, v_t из $L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, v_x из $L^\infty(Q)$ и v_{xx} из $L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$, что*

$$\begin{gathered}u_n(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} u(\cdot,t) \text{ в } \mathcal{M}(\Omega),\\ u_{nt}(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} u_t(\cdot,t) \ \text{ в } \mathcal{M}(\Omega)\end{gathered} \tag{4.3}$$

для п. в. t из $(0,T)$,

$$\begin{gathered}v_n \to v \ \text{ в } \ L^1(Q),\\ v_n \to v \quad \text{п. в. в } Q,\\ v_n \rightharpoonup v \text{ в } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \qquad (p\in(1,\infty)),\\ v_n(\cdot,t) \rightharpoonup v(\cdot,t) \text{ в } W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (p\in(1,\infty)),\\ v_{nxx}(\cdot,t) \overset{*}{\rightharpoonup} v_{xx}(\cdot,t) \ \text{ в } \mathcal{M}(\Omega)\end{gathered} \tag{4.4}$$

для п. в. t из $(0,T)$,

$$\begin{gathered}v_{nx} \overset{*}{\rightharpoonup} v_x \ \text{ в } L^\infty(Q),\\ v_{nt} \overset{*}{\rightharpoonup} v_t \ \text{ в } \mathcal{M}(Q).\end{gathered}$$

(*ii*) *Существует такая* w *из* $C(\overline{Q})$, *что* $0 \leqslant w \leqslant \gamma$ *в* $\overline{Q}$, $w_t \in L^\infty(Q)$ *и* (*с точностью до подпоследовательности*)

$$\psi_n(u_n) \to w \text{ в } C(\overline{Q}),$$
$$\psi(u_n) \to w \quad \text{п. в. в } Q$$

и

$$u_n \to \psi^{-1}(w) \text{ в } C(K) \text{ для любого компактного } K \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} := \big\{(x,t) \in \overline{Q} \mid w(x,t) = \gamma\big\}. \tag{4.5}$$

Кроме того, справедливо предельное соотношение

$$[\psi_n(u_n)]_t \overset{*}{\rightharpoonup} w_t \text{ в } L^\infty(Q).$$

Приведенные ниже предложения 4.3–4.6 показывают, что предельные точки u, v и w предложения 4.2 можно использовать для построения решения задачи (P).

Предложение 4.3. *Пусть* u, v *и* w — *такие же, как в предложении* 4.2. *Тогда выполняются неравенства* (3.5) *и* (3.7)–(3.11),

$$v = \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t \quad \text{п. в. в } Q$$

и

$$\|w_t\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \frac{\varphi(\alpha)}{\varepsilon}.$$

Предложение 4.4. *Пусть* u *и* w — *такие же, как в предложении* 4.2. *Тогда множество* $\mathcal{S}$, *определенное формулой* (4.5), *замкнуто, его мера Лебега равна нулю,* $\psi^{-1}(w) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$,

$$u_s = u_s \llcorner (\mathcal{S} \cap Q)$$

и

$$u_r = \psi^{-1}(w) \quad \text{п. в. в } Q. \tag{4.6}$$

Из равенства (4.6) следует, что

$$w = \psi(u_r) \quad \text{п. в. в } Q.$$

Будем отождествлять w из $C(\overline{Q})$ с непрерывным представителем элемента $\psi(u_r)$. В частности, из предложения 4.2 следует, что

$$\psi_n(u_n) \to \psi(u_r) \text{ в } C(\overline{Q}),$$
$$u_n \to u_r \quad \text{п. в. в } Q,$$
$$u_n \to u_r \text{ в } C(K) \text{ для любого компактного } K \subset \overline{Q} \setminus \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} = \big\{(x,t) \in \overline{Q} \mid \psi(u_r)(x,t) = \gamma\big\}, \tag{4.7}$$

и

$$[\psi_n(u_n)]_t \overset{*}{\rightharpoonup} [\psi(u_r)]_t \text{ в } L^\infty(Q).$$

Предложение 4.5. *Пусть* u — *такая же, как в предложении* 4.2, *а* $\mathcal{S}$ — *множество, определенное равенством* (4.7). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(*i*) $\varphi(u_r) \in C(\overline{Q})$, $u_r \in C(\overline{Q} \setminus \mathcal{S})$, $\varphi(u_r) = 0$ *на* $\mathcal{S}$ *и*

$$\lim_{\operatorname{dist}((x,t),\mathcal{S}) \to 0} u_r(x,t) = \infty. \tag{4.8}$$

(*ii*) $\mathcal{S}(t_1) \subseteq \mathcal{S}(t_2)$ *для любых* $0 < t_1 \leqslant t_2 < T$, *где*

$$\mathcal{S}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid \psi(u_r)(x,t) = \gamma\} \qquad (t \in (0,T)), \tag{4.9}$$

и неравенство (3.6) *выполняется для любых* $0 < t_1 \leqslant t_2 < T$ *и любого* x *из* $\Omega \setminus \mathcal{S}(t_2)$.

Предложение 4.6. *Пусть* $u_0 \in C_c(\Omega)$, $u_0 \geqslant 0$, u *и* v — *такие же, как в предложении* 4.2, $t \in [0,T]$ *и* $\mathcal{S}(t)$ *определена формулой* (4.9). *Тогда*

$$-\varepsilon v_{xx}(\cdot,t) + \frac{v(\cdot,t)}{\psi'(u_r)(\cdot,t)} = \frac{\varphi(u_r)(\cdot,t)}{\psi'(u_r)(\cdot,t)} \quad \textit{в} \;\; \mathcal{D}'(\Omega \setminus \mathcal{S}(t))$$

и

$$\mathcal{S}(t) \cap \Omega = \mathcal{N}(t) \cap \Omega \quad \textit{для п. в. } t \textit{ из } (0,T),$$

где

$$\mathcal{N}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid v(x,t) = 0\}.$$

Теперь мы можем доказать теоремы 3.1 и 3.2.

Доказательство теорем 3.1 *и* 3.2. Покажем, что пара (u,v), где u и v — такие, как в предложении 4.2, является решением задачи (P). В силу предложений 4.2–4.6 свойства (i)–(iii) определения 3.1 и пункты (i)–(iii) теоремы 3.1 выполнены. Чтобы доказать равенство (3.3), рассмотрим слабую постановку задачи (P_n):

$$\iint_Q \{u_n\zeta_t - v_{nxx}\,\zeta\}\,dxdt = -\int\limits_\Omega u_0\,\zeta(x,0)\,dx \tag{4.10}$$

для любой ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которой $\zeta(\cdot,T) = 0$ в Ω. Из (4.3) следует, что для любого ρ из $C_c(\Omega)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u_n(x,t)\rho(x)\,dx = \langle u(\cdot,t), \rho\rangle_\Omega \;\text{ для п. в. } t \text{ из } (0,T)\,.$$

Следовательно, поскольку

$$\left|\int\limits_\Omega u_n(x,t)\zeta_t(x,t)\,dx\right| \leqslant \|u_0\|_{L^1(\Omega)}\|\zeta_t\|_{C(\overline{Q})}$$

для п. в. t из $(0,T)$ в силу неравенства (4.1), из теоремы о мажорируемой сходимости вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_Q u_n(x,t)\zeta_t(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T \langle u(\cdot,t), \zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt. \tag{4.11}$$

Аналогично, из (4.2), (4.4) и теоремы о мажорируемой сходимости следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Omega v_{nxx}(x,t)\zeta(x,t)\,dxdt = \int\limits_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t), \zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega\,dt. \tag{4.12}$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (4.10) и используя (4.11)-(4.12), получаем (3.3). Этим завершается доказательство теоремы 3.1. Теорема 3.2 следует из предложений 4.1 и 4.2. □

5. Случай ограниченной φ, возрастающей на бесконечности

5.1. Исходные допущения и определение решения. В этом разделе предполагается, что функция φ удовлетворяет следующим условиям:

$$(H_3) \qquad \begin{cases} (i) & \varphi \in C^\infty([0,\infty)),\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(u) \geqslant 0, \\ (ii) & \varphi' > 0 \text{ в } [0,\alpha),\ \varphi' < 0 \text{ в } (\alpha,\beta),\ \varphi' > 0 \text{ в } (\beta,\infty) \quad (0 < \alpha < \beta), \\ (iii) & \varphi(u) \to \gamma^* \text{ при } u \to \infty,\ \ 0 \leqslant \varphi(u) \leqslant \gamma^* \text{ для любого неотрицательного } u \\ & (0 < \gamma^* < \infty), \\ (iv) & \varphi^{(j)} \in L^\infty((0,\infty)) \text{ для любого натурального } j. \end{cases}$$

Кроме того, полагаем $\varphi(\infty) := \gamma^*$.

Введем следующее определение (ср. определение 3.1).

Определение 5.1. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. *Решением* задачи (P) мы называем любую u из пространства $C([0,T];\mathcal{M}^+(\Omega))$, обладающую следующими свойствами:

(i) $[\psi(u_r)]_t \in L^\infty(Q)$ и $\dfrac{[\psi(u_r)]_t}{\psi'(u_r)} \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.

(ii) *Химический потенциал*

$$v := \varphi(u_r) + \varepsilon[\psi(u_r)]_t$$

принадлежит $L^\infty(0,T;C(\overline{\Omega}))$, $v_t \in L^\infty(\Omega;\mathcal{M}(0,T))$, $v_x \in L^\infty(Q)$, $v_{xx} \in L^\infty(0,T;\mathcal{M}(\Omega))$,

$$v(x,t) = \begin{cases} \lim\limits_{\tau\to t^-} v(x,\tau) & \text{при } t \in (0,T] \\ \lim\limits_{\tau\to 0^+} v(x,\tau) & \text{при } t = 0 \end{cases} \qquad (x \in \overline{\Omega}),$$

$$v(\cdot,t) = \gamma^* \text{ на } \partial\Omega \quad \text{для любого } t \text{ из } (0,T).$$

(iii) Для любого t из $(0,T)$ имеем

$$u_s(\cdot,t) = u_s(\cdot,t) \llcorner \mathcal{N}(t), \tag{5.1}$$

где

$$\mathcal{N}(t) := \{x \in \overline{\Omega} \mid v(x,t) = \gamma^*\}. \tag{5.2}$$

(iv) Для любого ζ из $C^1([0,T];C_c(\Omega))$, для которого $\zeta(\cdot,T) = 0$ в Ω, справедливо равенство

$$\int\limits_0^T \langle u(\cdot,t), \zeta_t(\cdot,t)\rangle_\Omega \, dt + \int\limits_0^T \langle v_{xx}(\cdot,t), \zeta(\cdot,t)\rangle_\Omega \, dt = -\langle u_0, \zeta(\cdot,0)\rangle_\Omega \,.$$

Отметим, что из равенства (5.1) следует, что

$$\operatorname{supp} u_s(\cdot,t) \subseteq \mathcal{N}(t) \text{ для любого } t \text{ из } (0,T).$$

5.2. Существование решений и их свойства. Как и в случае убывающей на бесконечности φ, существование решения доказывается с помощью процедуры аппроксимации. Пусть $u_0 \in \mathcal{M}^+(\Omega)$, а последовательность $\{u_{0n}\} \subseteq C(\overline{\Omega})$ такова, что $u_{0n} \geqslant 0$ в Ω,

$$\|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|u_0\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

$$u_{0n} \overset{*}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega), \quad u_{0n} \to u_{0r} \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Для любого натурального n рассмотрим регуляризованную задачу

$$(P_n'') \qquad \begin{cases} u_{nt} = v_{nxx} & \text{в } Q, \\ v_n = \gamma^* & \text{на } \partial\Omega \times (0,T), \\ u_n = u_{0n} & \text{в } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

где

$$v_n := \varphi(u_n) + \varepsilon[\psi(u_n)]_t.$$

Изучая сходимость последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ и рассуждая, как в разделе 4, доказываем следующий результат (см. [5]):

Теорема 5.1. *Если условия (H_2)-(H_3) выполнены, то существует решение и задачи (P).*

Приведем некоторые свойства решений задачи (P), имеющие место в рассматриваемом случае (см. доказательства в [5]). Химический потенциал обладает следующими свойствами.

Предложение 5.1. *Если условия (H_2)-(H_3) выполнены, то для любого решения и задачи (P) справедливы следующие утверждения*:

(i) *для любого t из $(0,T)$ химический потенциал $v(\cdot,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$-\varepsilon\,[v(\cdot,t)]_{xx} + \frac{v(\cdot,t)}{\psi'(u_r(\cdot,t))} = \frac{\varphi(u_r(\cdot,t))}{\psi'(u_r(\cdot,t))} \quad \text{в } \mathcal{M}\big(\Omega \setminus \operatorname{supp} u_s(\cdot,t)\big),$$

(ii) *неравенство $0 \leqslant v(x,t) \leqslant \gamma^*$ выполняется для любого (x,t) из $\overline{Q}$,*

(iii) *для любого t из $(0,T)$ сингулярная мера $\big[v_{xx}(\cdot,t)\big]_s$ дискретна и принадлежит $\mathcal{M}^-(\Omega)$.*

Следующая теорема устанавливает свойства монотонности решений по переменной t.

Теорема 5.2. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены, а* u — *любое решение задачи* (P). *Тогда для любых* t_1, t_2 *из* $(0,T)$, *для которых* $t_1 \leqslant t_2$, *выполняются следующие неравенства*:

$$\|u(\cdot,t_2)\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \geqslant \|u(\cdot,t_1)\|_{\mathcal{M}(\Omega)},$$

$$[1+u_r(x,t_2)] \leqslant e^{\frac{k_0(t_2-t_1)}{\varepsilon}}\,[1+u_r(x,t_1)] \quad \text{для п. в. } x \text{ из } \Omega,$$

$$u_s(\cdot,t_2) \leqslant u_s(\cdot,t_1) \quad \text{в } \mathcal{M}(\Omega). \tag{5.3}$$

По условию (H_3)-(ii) промежутки $[0,\alpha)$ и (β,∞) соответствуют «устойчивым фазам» функции φ, а интервал (α,β) — ее «неустойчивой фазе». Следующее предложение показывает, что при подходящих условиях на химический потенциал v «устойчивые фазы не могут убывать по переменной t».

Предложение 5.2. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены,* $\Omega_0 \subseteq \Omega$, $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T$ *и* $Q_0 := \Omega_0 \times (t_1,t_2)$. *Тогда для любого решения* u *задачи* (P) *выполняются следующие утверждения*:

(i) *если* $v \leqslant \varphi(\alpha)$ *в* Q_0 *и* $0 \leqslant u_r(x,t_1) \leqslant \alpha$ *для п. в.* x *из* Ω_0, *то* $0 \leqslant u_r \leqslant \alpha$ *п. в. в* Q_0,

(ii) *если* $v \geqslant \varphi(\beta)$ *в* Q_0 *и* $u_r(x,t_1) \geqslant \beta$ *для п. в.* x *из* Ω_0, *то* $u_r \geqslant \beta$ *п. в. в* Q_0.

5.3. Регуляризация. Следующее предложение показывает, что для п. в. t из $(0,T)$ множество $\Omega \cap \mathcal{N}(t)$ (где $\mathcal{N}(t)$ определен формулой (5.2)) — «плохое», поскольку оно содержит все такие точки x_0 из Ω, что

$$u_s(\cdot,t)(I_\delta(x_0)) > 0 \quad \text{и (или)} \quad \|u_r(\cdot,t)\|_{L^\infty(I_\delta(x_0))} = \infty,$$

где $I_\delta(x_0)$ — любая окрестность точки x_0.

Предложение 5.3. *Пусть условия* (H_2)-(H_3) *выполнены, а* u — *любое решение задачи* (P). *Тогда для п. в.* $t \in (0,T)$

$$\Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot,t) \cup \left\{\overline{\lim}\, u_r(\cdot,t) = \infty\right\}\right] \subseteq \Omega \cap \mathcal{N}(t)$$

для п. в. t *из* $(0,T)$ *и справедливы следующие утверждения*:

(i) *Если* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$, *то*

$$\Omega \cap \mathcal{N}(t) = \Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot,t) \cup \left\{\overline{\lim}\, u_r(\cdot,t) = \infty\right\}\right].$$

(ii) *Если* $\varphi(\alpha) = \gamma^*$, *то для любого* x_0 *из* $\Omega \cap \mathcal{N}(t)$ *либо* $x_0 \in \Omega \cap \left[\operatorname{supp} u_s(\cdot,t) \cup \left\{\overline{\lim}\, u_r(\cdot,t)\right\}\right]$, *либо существует такой интервал* $I \equiv (x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ $(\delta_1,\delta_2 > 0)$, *что*

$$u_s(\cdot,t) \llcorner I = 0, \quad v(\cdot,t) = \gamma^* \text{ в } I, \quad u_r(\cdot,t) = \alpha \ \text{ п. в. в } I.$$

Отметим, что из свойств монотонности, установленных в теореме 5.2, следует, что при $\varphi(\alpha) < \gamma^*$ «плохое множество» не растет с течением времени; более того, для п. в. положительных t его мера равна нулю. Это доказывается в следующей теореме:

Теорема 5.3. *Пусть* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$. *Тогда для любого решения задачи* (P) *справедливы следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{N}(t_2) \subseteq \mathcal{N}(t_1)$ *для п. в.* t_1, t_2 *из* $(0,T)$, *для которых* $t_1 \leqslant t_2$,

(ii) $|\mathcal{N}(t)| = 0$ *для п. в.* t *из* $(0,T)$.

Исходя из неравенства (5.3), можно предположить, что сингулярная часть $u_s(\cdot,t)$ решения (P) может обращаться в нуль для некоторых τ из $(0,T)$ (а значит, и для некоторых t из (τ,T)) даже в том случае, когда $u_{0s}(\Omega) > 0$. Например, это имеет место при $\Omega = (-1,1)$,

$$\psi(u) = \gamma\left[1-(1+u)^{-\sigma}\right] \qquad (\gamma,\,\sigma > 0) \tag{5.4}$$

и

$$\begin{cases} (i) \quad u_0 = u_{0ac} + A\delta_0, \\ (ii) \quad x \mapsto \dfrac{|x|}{\psi'(1+u_{0r}(x))} \in L^1_{loc}(\Omega) \end{cases} \tag{5.5}$$

для некоторой положительной постоянной A (здесь δ_0 обозначает меру Дирака в начале координат). Можно доказать следующую теорему (см. [5]):

Теорема 5.4. *Пусть* $\varphi(\alpha) < \gamma^*$ *и выполняется* (5.4). *Тогда существует такое положительное* m, *что, если* u_0 *удовлетворяет условию* (5.5) *при* $A < mT$, *то*

$$u_s(\cdot, t) = 0 \ \text{ для любого } t \text{ из } \left[\frac{A}{m}, T\right]$$

для любого решения u *задачи* (P).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barenblatt G. I., Bertsch M., Dal Passo R., Ughi M.* A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow// SIAM J. Math. Anal. — 1993. — *24*. — С. 1414–1439.
2. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: a logarithmic nonlinearity// Anal. PDE. — 2013. — *6*. — С. 1719–1754.
3. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: power-type nonlinearities// J. Reine Angew. Math. — 2016. — *712*. — С. 51–80.
4. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: existence of solutions. — 2015, препринт.
5. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: bounded nonlinearities increasing at infinity. — 2015, препринт.
6. *Bertsch M., Smarrazzo F., Tesei A.* Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: qualitative properties of solutions. — в печати.
7. *Brokate M., Sprekels J.* Hysteresis and phase transitions. — Berlin: Springer, 1996.
8. *Evans L. C.* Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations. — Providence: AMS, 1990.
9. *Giaquinta M., Modica G., Souček J.* Cartesian currents in the calculus of variations. — Berlin: Springer, 1998.
10. *Mascia C., Terracina A., Tesei A.* Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — *194*. — С. 887–925.
11. *Novick-Cohen A., Pego L.* Stable patterns in a viscous diffusion equation// Trans. Amer. Math. Soc. — 1991. — *324*. — С. 331–351.
12. *Padròn V.* Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations// Comm. Partial Differential Equations. — 1998. — *23*. — С. 457–486.
13. *Perona P., Malik J.* Scale space and edge detection using anisotropic diffusion// IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. — 1990. — *12*. — С. 629–639.
14. *Plotnikov P. I.* Passing to the limit with respect to viscosity in an equation with variable parabolicity direction// Differ. Equ. — 1994. — *30*. — С. 614–622.
15. *Serre D.* Systems of conservation laws. Vol. 1: hyperbolicity, entropies, shock waves. — Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
16. *Smarrazzo F.* On a class of equations with variable parabolicity direction// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2008. — *22*. — С. 729–758.
17. *Smarrazzo F., Tesei A.* Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: the regularized problem// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2012. — *204*. — С. 85–139.
18. *Smarrazzo F., Tesei A.* Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: the vanishing viscosity limit// Math. Ann. — 2013. — *355*. — С. 551–584.

Alberto Tesei
Istituto per le Applicazioni del Calcolo «M. Picone»
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via dei Taurini 19
I-00185 Rome, Italy
E-mail: `albertotesei@gmail.com`

UDC 517.9

Pseudo-Parabolic Regularization of Forward-Backward Parabolic Equations with Bounded Nonlinearities

© 2016 **A. Tesei**

Abstract. We study the initial-boundary value problem

$$\begin{cases} u_t = [\varphi(u)]_{xx} + \varepsilon[\psi(u)]_{txx} & \text{in } \Omega \times (0,T], \\ \varphi(u) + \varepsilon[\psi(u)]_t = 0 & \text{in } \partial\Omega \times (0,T], \\ u = u_0 \geqslant 0 & \text{in } \Omega \times \{0\}, \end{cases}$$

with *Radon measure-valued initial data*, by assuming that the regularizing term ψ is increasing and bounded (the cases of power-type or logarithmic ψ were dealt with in [2, 3] in any space dimension). The function φ is *nonmonotone* and bounded, and either (i) decreasing and vanishing at infinity, or (ii) increasing at infinity. Existence of solutions in a space of positive Radon measures is proven in both cases. Moreover, a general result proving *spontaneous appearance of singularities* in case (i) is given. The case of a cubic-like φ is also discussed, to point out the influence of the behavior at infinity of φ on the regularity of solutions.

REFERENCES

1. G. I. Barenblatt, M. Bertsch, R. Dal Passo, and M. Ughi, "A degenerate pseudoparabolic regularization of a nonlinear forward-backward heat equation arising in the theory of heat and mass exchange in stably stratified turbulent shear flow," *SIAM J. Math. Anal.*, 1993, **24**, 1414–1439.
2. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, "Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: A logarithmic nonlinearity," *Anal. PDE*, 2013, **6**, 1719–1754.
3. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, "Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Power-type nonlinearities," *J. Reine Angew. Math.*, 2014, **712**, 51–80.
4. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, "Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: Existence of solutions," preprint, 2015.
5. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, "Pseudo-parabolic regularization of forward-backward parabolic equations: Bounded nonlinearities increasing at infinity," preprint, 2015.
6. M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei, "Forward-backward parabolic equations with pseudo-parabolic regularization and bounded nonlinearities decreasing at infinity: Qualitative properties of solutions," in preparation.
7. M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transitions*, Springer, Berlin, 1996.
8. L. C. Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 1990.
9. M. Giaquinta, G. Modica, and J. Souček, *Cartesian Currents in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1998.
10. C. Mascia, A. Terracina, and A. Tesei, "Two-phase entropy solutions of a forward-backward parabolic equation," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **194**, 887–925.
11. A. Novick-Cohen and R. L. Pego, "Stable patterns in a viscous diffusion equation," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1991, **324**, 331–351.
12. V. Padròn, "Sobolev regularization of a nonlinear ill-posed parabolic problem as a model for aggregating populations," *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1998, **23**, 457–486.
13. P. Perona and J. Malik, "Scale space and edge detection using anisotropic diffusion," *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 1990, **12**, 629–639.
14. P. I. Plotnikov, "Passing to the limit with respect to viscosity in an equation with variable parabolicity direction," *Differ. Equ.*, 1994, **30**, 614–622.
15. D. Serre, *Systems of conservation laws, Vol. 1: Hyperbolicity, Entropies, Shock Waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
16. F. Smarrazzo, "On a class of equations with variable parabolicity direction," *Discr. Contin. Dyn. Syst.*, 2008, **22**, 729–758.

17. F. Smarrazzo and A. Tesei, "Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The regularized problem," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2012, **204**, 85–139.
18. F. Smarrazzo and A. Tesei, "Degenerate regularization of forward-backward parabolic equations: The vanishing viscosity limit," *Math. Ann.*, 2013, **355**, 551–584.

Alberto Tesei
Istituto per le Applicazioni del Calcolo "M. Picone"
Consiglio Nazionale delle Ricerche
Via dei Taurini 19
I-00185 Rome, Italy
E-mail: albertotesei@gmail.com