Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 114–163

УДК 517.9

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОЙ УПРУГОСТИ

© 2016 г. **А. П. СОЛДАТОВ**

Аннотация. Для системы Ламе плоской анизотропной теории упругости введены обобщенные потенциалы двойного слоя, связанные с теоретико-функциональным подходом. Эти потенциалы построены как для вектора смещений — решения системы Ламе, так и для сопряженных вектор-функций, описывающих тензор напряжений. Получено интегральное представление этих решений через указанные потенциалы. Как следствие, первая и вторая краевые задачи в различных классах (Гельдера, Харди, класса только непрерывных в замкнутой области функций) редуцированы к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма в соответствующих пространствах. Заметим, что подобный подход был развит [13, 14] для общих эллиптических систем второго порядка с постоянными (и только старшими) коэффициентами. Однако ввиду важного прикладного значения представляет интерес привести развернутое изложение непосредственно для системы Ламе. В качестве иллюстрации полученных результатов в последних двух разделах рассмотрена задача Дирихле с кусочно постоянными коэффициентами Ламе, когда на кривой раздела двух сред задаются контактные условия. Эта задача редуцирована к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма. Подробно исследован характер гладкости ядер полученных интегральных операторов в зависимости от гладкости граничных контуров.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Система Ламе

Рассмотрим систему Ламе [4, 5]

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a_{12}+a_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1.1}$$

с постоянными коэффициентами

$$a_{11} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_6 \\ \alpha_6 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \qquad a_{12} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_4 \\ \alpha_3 & \alpha_5 \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = \begin{pmatrix} \alpha_6 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \alpha_5 \end{pmatrix}, \qquad a_{22} = \begin{pmatrix} \alpha_3 & \alpha_5 \\ \alpha_5 & \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы α_j матричных коэффициентов, называемые модулями упругости, подчиняются требованию положительной определенности матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_6 \\ \alpha_4 & \alpha_2 & \alpha_5 \\ \alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_3 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Удобно наряду с этой матрицей ввести в рассмотрение и присоединенную к ней матрицу $\beta = \alpha^*$, записанную в том же виде:

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_4 & \beta_6 \\ \beta_4 & \beta_2 & \beta_5 \\ \beta_6 & \beta_5 & \beta_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{ll} \beta_1 = \alpha_2\alpha_3 - \alpha_5^2 & \beta_2 = \alpha_1\alpha_3 - \alpha_6^2, \\ \beta_3 = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 & \beta_4 = \alpha_5\alpha_6 - \alpha_3\alpha_4, \\ \beta_5 = \alpha_4\alpha_6 - \alpha_1\alpha_5, & \beta_6 = \alpha_4\alpha_5 - \alpha_2\alpha_6. \end{array} \tag{1.3}$$

Тогда критерий Сильвестра положительной определенности матрицы α можно выразить неравенствами $\det \alpha > 0$ и $\alpha_i > 0$, $\beta_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Из коэффициентов системы Ламе составим блочную матрицу $a = (a_{ij})_1^2$. Тогда из вида (1.2) непосредственно видно, что для любого вектора $\eta \in \mathbb{R}^4$ справедливо равенство

$$(a\eta)\eta = (\alpha\widetilde{\eta})\widetilde{\eta}, \quad \widetilde{\eta} = (\eta_1, \eta_4, \eta_2 + \eta_3), \tag{1.4}$$

по отношению к скалярным произведениям векторов в $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. В частности, для любых ненулевого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ и $\xi \in \mathbb{R}^2$, составляющих вектор $\eta = (\lambda_1\xi, \lambda_2\xi)$, имеем соотношение

$$\left[\left(\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j\right)\xi\right]\xi = (\alpha\widetilde{\eta})\widetilde{\eta}.$$

Поэтому равенство нулю левой части влечет $\widetilde{\eta} = 0$ или, что равносильно, $\xi = 0$. Таким образом, матрица в левой части этого выражения положительно определена:

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\lambda_i\lambda_j > 0 \tag{1.5}$$

и, следовательно, система Ламе (1.1) сильно эллиптична.

Рассмотрим матричный трехчлен $p(z) = a_{11} + (a_{12} + a_{21})z + a_{22}z^2$ системы (1.1), представляющий собой симметричную матрицу

$$p = \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} p_1(z) = \alpha_1 + 2\alpha_6 z + \alpha_3 z^2, \\ p_2(z) = \alpha_3 + 2\alpha_5 z + \alpha_2 z^2, \\ p_3(z) = \alpha_6 + (\alpha_3 + \alpha_4)z + \alpha_5 z^2. \end{array} \tag{1.6}$$

В силу (1.5) определитель $\det p(t) > 0$ для $t \in \mathbb{R}$, т. е. характеристический многочлен четвертой степени $\chi = \det p(z)$ системы Ламе не имеет вещественных корней. Соответственно, в верхней полуплоскости имеются два его корня ν_1, ν_2, для которых возможны два случая, когда (i) $\nu_1 \neq \nu_2$ и (ii) $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. В дальнейшем основную роль играют не сами по себе эти корни, а их симметричные комбинации

$$s = \nu_1 + \nu_2, \quad t = \nu_1\nu_2. \tag{1.7}$$

В случае (ii) кратных корней они принимают значения $s = 2\nu$ и $t = \nu^2$.

В обозначениях (1.3), (1.6) характеристический многочлен $\chi = p_1p_2 - p_3^2$ можно записать в виде

$$\chi(z) = \beta_2 - 2\beta_5 z + (\beta_3 + 2\beta_4)z^2 - 2\beta_6 z^3 + \beta_1 z^4. \tag{1.8}$$

Нетрудно описать условия на его коэффициенты, обеспечивающие случай (ii) кратных корней. В этом случае должно быть

$$\chi(z) = \beta_1(z - \nu)^2(z - \overline{\nu})^2, \quad (z - \nu)(z - \overline{\nu}) = \delta_0 + \delta_1 z + z^2,$$

где $\delta_1^2 < 4\delta_0$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим выражения

$$\delta_0 = \frac{\beta_2}{\beta_1}, \quad \delta_1 = -\frac{\beta_6}{\beta_1} = -\frac{\beta_5}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}$$

для коэффициентов δ_j и соотношения

$$\beta_5^2 < 4\beta_2^2, \quad \beta_5 = \beta_6\sqrt{\beta_2/\beta_1}, \quad \beta_5^2 + 2\beta_2^2 = \beta_2(\beta_3 + 2\beta_4), \tag{1.9}$$

необходимые и достаточные для кратности корней характеристического уравнения. В этом случае согласно (1.9) для корня ν имеем выражение

$$2\beta_1\nu = \beta_6 + i\sqrt{4\beta_1\sqrt{\beta_1\beta_2} - \beta_6^2}. \tag{1.10}$$

В классе $\mathcal{A}$ положительно определенных матриц вида (1.2) выделим подмножества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, которые определяются условием линейной независимости многочленов, соответственно, p_2, p_3 и p_1, p_3, фигурирующих в (1.6). Очевидно, дополнения к этим множествам можно описать условиями

$$\begin{aligned} &\alpha \notin \mathcal{A}_1 \Leftrightarrow \alpha_3\alpha_5 = \alpha_2\alpha_6,\ \alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) = 2\alpha_5^2 \Leftrightarrow \chi(\nu) = p_2(\nu) = 0, \\ &\alpha \notin \mathcal{A}_2 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_5 = \alpha_3\alpha_6,\ \alpha_1(\alpha_3 + \alpha_4) = 2\alpha_6^2 \Leftrightarrow \chi(\nu) = p_1(\nu) = 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

для одного из корней ν характеристического уравнения. Вторая эквивалентность вытекает из того, что $\chi = p_1p_2 - p_3^2$. Поэтому равенства $p_j(\nu) = p_3(\nu) = 0$ для одного из значений $j = 1, 2$ равносильны линейной зависимости многочленов p_j и p_3.

Заметим, что

$$\alpha_3^2 < \alpha_1\alpha_2 \quad \text{при} \quad \alpha \notin \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2. \tag{1.12}$$

В самом деле, пусть, например, выполнены условия $\alpha \notin \mathcal{A}_1$ в (1.11). Тогда $2\alpha_2\alpha_6^2 = \alpha_3^2(\alpha_3 + \alpha_4)$, $2\alpha_1\alpha_5^2 = \alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4)$. Подставляя эти выражения в формулу для определителя матрицы (1.2), получим

$$2\det\alpha = (\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2)(\alpha_3 - \alpha_4) > 0.$$

Остается заметить, что неравенства $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2 < 0$ и $\alpha_3 < \alpha_4$ противоречат неравенству $\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 > 0$. Случай $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ рассматривается аналогично.

Введем еще класс $\mathcal{A}_0$ матриц α, для которых $p_3 = 0$, т. е. $\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Очевидно, этот класс не пересекается с множествами $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Из (1.12) легко следует, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2. \tag{1.13}$$

Действительно, пусть $\alpha \notin \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$, так что соответствующие условия в (1.11) выполнены одновременно. Тогда из первых равенств (1.11) следует $\alpha_5\alpha_6(\alpha_1\alpha_2 - \alpha_3^2) = 0$, так что на основании (1.12) должно быть $\alpha_5\alpha_6 = 0$. Согласно (1.11) отсюда $\alpha \in \mathcal{A}_0$.

Аналогичные соображения показывают, что матрица $p(\nu)$ отлична от нулевой для всех ν:

$$p(\nu) \neq 0, \quad \nu \in \mathbb{C}. \tag{1.14}$$

В самом деле, если $p(\nu) = 0$, то $\operatorname{Im}\nu \neq 0$ и $\alpha \notin \mathcal{A}_j$ для обоих значений $j = 1, 2$. Поэтому $\alpha \in \mathcal{A}_0$, но в этом случае многочлены p_1 и p_2 линейно независимы.

В случаях, когда α принадлежит одному из исключительных множеств $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_j$, $j = 1, 2$, корни ν_j характеристического уравнения вычисляются в явном виде через квадратные уравнения.

При $\alpha \in \mathcal{A}_0$ система Ламе диагонализируется, т. е. распадается на два уравнения

$$\alpha_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \alpha_3\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \alpha_3\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \alpha_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0.$$

В этом случае $\chi = p_1p_2$ и можно считать $p_j(\nu_j) = 0$ или, в явной форме,

$$\nu_1 = i\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}, \quad \nu_2 = i\sqrt{\frac{\alpha_3}{\alpha_2}}. \tag{1.15}$$

В случае $\alpha \notin \mathcal{A}_j$ корни характеристического уравнения находятся из уравнений

$$\begin{aligned} &(\alpha_2^2p_1 - \alpha_5^2p_2)(\nu_1) = 0,\ p_2(\nu_2) = 0, \quad \alpha \notin \mathcal{A}_1; \\ &p_1(\nu_1) = 0,\ (\alpha_3^2p_2 - \alpha_5^2p_1)(\nu_2) = 0, \quad \alpha \notin \mathcal{A}_2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

В самом деле, пусть, например, $\alpha \notin \mathcal{A}_1$. Тогда $\alpha_2p_3 - \alpha_5p_2 = 0$ и имеем равенство $\alpha_2^2\chi = (\alpha_2^2p_1 - \alpha_5^2p_2)p_2$.

Случай $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ рассматривается аналогично. Заметим, что принятая в (1.16) нумерация корней согласуется со случаем $\alpha \in \mathcal{A}_0$ в (1.15).

Во всех отмеченных трех случаях корни ν_j различны. В случае (1.15) этот факт вытекает из (1.12). Если эти корни совпадают в случае (1.16), то $p_1(\nu) = p_2(\nu) = 0$ и, значит, $p(\nu) = 0$, что противоречит (1.14). В частности, в ситуации (ii) кратного корня матрица α обязательно принадлежит $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

Условимся ненулевой вектор $x \in \mathbb{C}^2$ называть *собственным вектором* многочлена p, отвечающим корню ν характеристического уравнения, если $p(\nu)x = 0$, и *присоединенным вектором*, если $p(\nu)x + p'(\nu)y = 0$, где $p(\nu)y = 0$ и $p'(\nu)y \neq 0$.

Лемма 1.1.

а). *Пусть корни ν_j различны. Тогда существует базис $e = \{e_1, e_2\}$ пространства $\mathbb{C}^2$, состоящий из собственных векторов, т. е. $p(\nu_j)e_j = 0$, $j = 1, 2$. Любой другой базис $\tilde{e}$ этого типа связан с e соотношением $\tilde{e}_j = \lambda_j e_j$, $j = 1, 2$.*

б). *Пусть корень ν кратен. Тогда существует базис $e = \{e_1, e_2\}$, состоящий из собственного и присоединенного векторов, т. е.*

$$p(\nu)e_1 = 0, \quad p(\nu)e_2 + p'(\nu)e_1 = 0. \tag{1.17}$$

Любой другой базис $\tilde{e}$ этого типа связан с e соотношением $\tilde{e}_1 = \lambda e_2$, $\tilde{e}_2 = \lambda e_2 + \lambda_0 e_1$, $\lambda \neq 0$.

Доказательство.

а). В силу (1.14) пространства $\{x \in \mathbb{C}^2,\ p(\nu_j)x = 0\}$, $j = 1, 2$, одномерны, поэтому достаточно убедиться, что для ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}^2$ совместные равенства $p(\nu_1)x = p(\nu_2)x = 0$ невозможны.

В самом деле, предположим, что такой вектор $x = (x_1, x_2)$ существует. Тогда обязательно $x_1 x_2 \neq 0$, поскольку многочлены p_1 и p_2 не могут иметь своими корнями оба числа ν_j. Таким образом, можно считать $x_1 = 1$, $x_2 = \lambda$. Тогда равенство $p(\nu_j)x = 0$ сводится к двум скалярным равенствам $(p_1 + \lambda p_3)(\nu_j) = 0$, $(p_3 + \lambda p_2)(\nu_j) = 0$. Следовательно, многочлены $p_1 + \lambda p_3$ и $p_3 + \lambda p_2$ нацело делятся на многочлен $q(z) = (z - \nu_1)(z - \nu_2)$, так что

$$p_1 + \lambda p_3 = c_1 q, \quad p_3 + \lambda p_2 = c_2 q$$

с некоторыми множителями $c_j \in \mathbb{C}$. Поскольку коэффициенты многочленов p_j вещественны, отсюда и

$$p_1 + \overline{\lambda} p_3 = \overline{c}_1 \overline{q}, \quad p_3 + \overline{\lambda} p_2 = \overline{c}_2 \overline{q},$$

где $\overline{q}(z) = (z - \overline{\nu}_1)(z - \overline{\nu}_2)$. Поскольку квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами не может быть кратен q, число λ не является вещественным. Поэтому из этих систем многочлены p_j можно выразить через q, $\overline{q}$ по формулам $p_j = d_j q + \overline{d}_j \overline{q}$, $1 \leqslant j \leqslant 3$, с соответствующими коэффициентами $d_j \in \mathbb{C}$. В частности,

$$p_1 p_2 - p_3^2 = (d_1 d_2 - d_3^2) q^2 + (d_1 \overline{d}_2 + \overline{d}_1 d_2 - 2 d_3 \overline{d}_3) q \overline{q} + (\overline{d}_1 \overline{d}_2 - \overline{d}_3^2) \overline{q}^2.$$

С другой стороны, согласно (1.6) в принятых обозначениях

$$p_1 p_2 - p_3^2 = c q \overline{q}, \quad c = \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_5^2 > 0.$$

Следовательно, должно быть $d_1 d_2 - d_3^2 = 0$ и $2\operatorname{Re}(d_1 \overline{d}_2) - 2 d_3 \overline{d}_3 = c$ (в противном случае многочлен $\overline{q}^2$ делится нацело на q, что невозможно). Но тогда $c = 2[\operatorname{Re}(d_1 \overline{d}_2) - |d_1 \overline{d}_2|]$, что противоречит неравенству $c > 0$.

б). Покажем прежде всего, что совместное равенство $p(\nu)x = p'(\nu)x = 0$ невозможно ни для какого ненулевого вектора $x \in \mathbb{C}$. В самом деле, предположим, что такой вектор $x = (x_1, x_2)$ существует. Тогда обязательно $x_1 x_2 \neq 0$, поскольку для вещественных многочленов p_j равенства $p_j(\nu) = p_j'(\nu) = 0$ невозможны. Как и в случае различных корней, отсюда приходим к соотношениям

$$p_1 + \lambda p_3 = c_1 q, \quad p_3 + \lambda p_2 = c_2 q,$$

где $q(z) = (z - \nu)^2$. Дальнейшие рассуждения аналогичны проведенным при доказательстве пункта а).

Таким образом, любая пара ненулевых векторов e_1, e_2 со свойством (1.17) является базисом. Существование такой пары будет показано ниже в лемме 1.2.

Остается установить связь между двумя базисами e и $\tilde{e}$, удовлетворяющими (1.17). Очевидно, $\tilde{e}_1 = \lambda e_1,\ \lambda \neq 0$, и $\tilde{e}_2 = \lambda_0 e_1 + \lambda' e_2,\ \lambda' \neq 0$. Следовательно,

$$p(\nu)\tilde{e}_2 + p'(\nu)\tilde{e}_1 = \lambda' p(\nu) e_2 + \lambda p'(\nu) e_1 = 0.$$

Вычитая из этого равенства второе равенство (1.17), умноженное на λ', получим $(\lambda - \lambda')p'(\nu)e_1 = 0$, откуда $\lambda' = \lambda$. $\square$

Рассмотрим присоединенную с p матрицу

$$p^* = \begin{pmatrix} p_2 & -p_3 \\ -p_3 & p_1 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Лемма 1.2.

(i) *В случае различных корней при $\alpha \in \mathcal{A}_k,\ k = 1, 2$, условию $p(\nu_j)e_j = 0$ предложения a) леммы* 1.1 *удовлетворяет k-й столбец $e_j = p^*_{(k)}(\nu_j)$. Если $\alpha \notin \mathcal{A}_1$, то в обозначениях* (1.16) *можно положить $e_j = p^*_{(j)}(\nu_j)$. Соответственно в случае $\alpha \notin \mathcal{A}_2$ аналогичным образом можно положить $e_1 = p^*_{(1)}(\nu_2),\ \ e_2 = p^*_{(2)}(\nu_1)$.*

(ii) *В случае кратного корня матрица $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ и условию* (1.17) *удовлетворяют векторы $e_1 = p^*_{(k)}(\nu)$ и $e_2 = (p^*)'_{(k)}(\nu)$ для любого значения $k = 1, 2$, где штрих означает производную матрицы* (1.18).

Доказательство. Проведем доказательство для каждого из случаев (i) и (ii) отдельно.

(i). Воспользуемся очевидным соотношением

$$p(z)p^*(z) = \chi(z), \tag{1.19}$$

где χ в правой части означает скалярную матрицу. Из этого соотношения следует, что $p(\nu_j)p^*_{(k)}(\nu_j) = 0$ для каждого из значений $k = 1, 2$. Другими словами, если столбец $p^*_{(k)}(\nu_j)$ матрицы $p^*(\nu_j)$ ненулевой, то он является собственным вектором, отвечающим ν_j. Согласно (1.18) при $k = 1$ ($k = 2$) нулевым он может быть только тогда, когда $\alpha \notin \mathcal{A}_1$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_2$). С учетом леммы 1.1 первое утверждение леммы получается отсюда непосредственно.

(ii). Поскольку по условию $\chi(\nu) = \chi'(\nu) = 0$, то

$$p(\nu)p^*(\nu) = p(\nu)(p^*)'(\nu) + p'(\nu)p^*(\nu) = 0.$$

Следовательно, векторы $e_1 = p^*_{(k)}(\nu)$ и $e_2 = (p^*)'_{(k)}(\nu)$ удовлетворяют (1.17). Поскольку, как было отмечено ранее, в рассматриваемом случае кратного корня ν матрица α принадлежит $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, эти векторы ненулевые. $\square$

Упругая среда называется *ортотропной*, если

$$\alpha_5 = \alpha_6 = 0, \tag{1.20}$$

в этом случае координатные прямые служат осями симметрии упругой среды и для многочленов (1.6) имеем более простые выражения

$$p_1(z) = \alpha_1 + \alpha_3 z^2,\ p_2(z) = \alpha_3 + \alpha_2 z^2,\ p_3(z) = (\alpha_3 + \alpha_4)z. \tag{1.21}$$

В частности, в ортотропной среде либо $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, либо $\alpha \in \mathcal{A}_0$.

Из (1.21) следует, что характеристическое уравнение $p_1 p_2 - p_3^2 = 0$ биквадратно и его корни ν в верхней полуплоскости можно выразить явно. С этой целью введем положительные ρ и ρ_0 по формулам

$$\rho^2 = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad \rho_0^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 - \alpha_4^2 + 2\alpha_3(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)}{\alpha_2\alpha_3}. \tag{1.22}$$

То, что выражение в правой части второго равенства положительно, следует из условия $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$. Из этих же соображений величина

$$\rho_0^2 - 4\rho^2 = \frac{(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3)}{\alpha_2\alpha_3} \tag{1.23}$$

имеет один и тот же знак с $\sqrt{\alpha_1\alpha_2} - \alpha_4 - 2\alpha_3$.

В этих обозначениях для корней ν имеем формулы

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm i\theta}, \quad 2\theta = \arccos\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 < 2\rho,$$

$$\nu_{1,2} = i\rho e^{\pm \tau}, \quad 2\tau = \operatorname{arch}\left[\frac{\rho_0^2 - 2\rho^2}{2\rho^2}\right], \text{ если } \rho_0 > 2\rho, \tag{1.24}$$

$$\nu_1 = \nu_2 = i\rho, \text{ если } \rho_0 = 2\rho.$$

В самом деле, пусть δ означает выражение в квадратных скобках (1.24), так что $\rho_0^2 = 2(\delta+1)\rho^2$. Тогда

$$p_1(z)p_2(z) - p_3^2(z) = \alpha_2\alpha_3(\rho^4 + 2\delta\rho^2 z^2 + z^4).$$

Следовательно, $\nu^2 = -\rho^2(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 1})$, что после элементарных преобразований приводит к (1.24).

Заметим, что случай $\alpha \in \mathcal{A}_0$ диагонализируемой системы Ламе соответствует первому равенству в (1.20) и в этом случае выражения для корней ν_j совпадают с (1.14). Случай (ii) кратных корней соответствует последнему равенству в (1.24). Заметим, что этот факт согласуется с критерием (1.9), (1.10) кратных корней.

Легко видеть, что независимо от трех возможных случаев в (1.24) для суммы и произведения (1.7) корней имеем единые выражения

$$s = i\rho_0, \ t = -\rho^2. \tag{1.25}$$

Ортотропная среда называется *изотропной*, если в дополнение к (1.20) выполнены соотношения

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 2\alpha_3 + \alpha_4. \tag{1.26}$$

Совместно с неравенством $\alpha_4^2 < \alpha_1\alpha_2$ отсюда вытекает, что $\alpha_1 > \alpha_3$, так что величина

$$\varkappa = \frac{\alpha_1 + \alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_3} > 1. \tag{1.27}$$

Легко видеть, что в рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет кратный корень $\nu = i$.

2. Представление решений системы Ламе

Соответственно двум случаям (i) и (ii) корней характеристического уравнения введем матрицы

$$(i)\ J = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ J = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

С этой матрицей свяжем эллиптическую систему первого порядка специального вида

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \tag{2.2}$$

при $J = i$ она соответствует системе Коши—Римана, определяющей аналитические функции. По этой причине решения $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ этой системы называем *J-аналитическими* функциями.

В исследованиях краевых задач плоской упругости классическими методами можно выделить два основных направления. Первое из них состоит в использовании аналитических функций по аналогии с формулами Колосова—Мусхелишвили [6] в изотропном случае. Это направление представлено работами С. Г. Лехницкого, Г. Н. Савина, С. Г. Михлина и др. (см., например, [5, 6, 20]). Второе заключается в применении вместо аналитических функций решений некоторых эллиптических систем первого порядка (см., например, [17, 18, 21]). Рассматриваемый ниже подход примыкает к этому направлению и базируется на системе (2.2), точнее, на представлении общего решения системы Ламе через J-аналитические функции. В основе этого представления лежит следующая структурная лемма.

Лемма 2.1. *Существует такая обратимая матрица* $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, *что*

$$a_{11}b + (a_{12}+a_{21})bJ + a_{22}bJ^2 = 0, \qquad (2.3)$$

при этом любая другая матрица $\tilde{b}$ *с теми же свойствами связана с* b *соотношением* $\tilde{b} = bd$ *с некоторой обратимой матрицей* d, *коммутирующей с* J.

Равенство (2.3) *равносильно соотношению*

$$AB = B\,\mathrm{diag}(J, \overline{J}) \qquad (2.4)$$

для блочных матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & \overline{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где положено $a_0 = -a_{22}^{-1}a_{11},\ a_1 = -a_{22}^{-1}(a_{12}+a_{21})$. *При этом матрица* B *обратима.*

Доказательство. Из (2.1) видно, что для любой матрицы $b \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ в случае (i) различных корней для j-го столбца имеем соотношения $(bJ)_{(j)} = \nu_j b_{(j)},\ (bJ^2)_{(j)} = \nu_j^2 b_{(j)}$ и, следовательно,

$$(a_{11} + (a_{12}+a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(j)} = p(\nu_j)b_{(j)} \quad (j = 1, 2).$$

Аналогично в случае (ii) кратного корня

$$(bJ)_{(1)} = \nu b_{(1)}, \qquad (bJ)_{(2)} = b_{(1)} + \nu b_{(2)},$$
$$(bJ^2)_{(1)} = \nu^2 b_{(1)}, \quad (bJ^2)_{(2)} = 2\nu b_{(1)} + \nu^2 b_{(2)},$$

откуда

$$(a_{11} + (a_{12}+a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(1)} = p(\nu)b_{(1)},$$
$$(a_{11} + (a_{12}+a_{21})bJ + a_{22}bJ^2)_{(2)} = p(\nu)b_{(2)} + p'(\nu)b_{(1)}.$$

Поэтому, выбирая в качестве столбцов $b_{(j)}$ вектора e_j леммы 1.1, приходим к справедливости первой части леммы. Нужно только принять во внимание, что матрицы d, коммутирующие с J, имеют вид

$$(i)\ d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ J = \begin{pmatrix} d_1 & d_0 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.6)$$

Равносильность соотношений (2.3) и (2.4) очевидна, поэтому остается установить обратимость матрицы B.

Рассмотрим обратимую матрицу B_1, приводящую A к жордановой форме. Поскольку матрица A вещественно, жорданову матрицу можно выбрать в виде $\mathrm{diag}(J_1, \overline{J_1})$, где собственные значения матрицы J_1 лежат в верхней полуплоскости, причем эта матрица либо диагональна, либо является клеткой Жордана. Соответственно B_1 можно подчинить блочной структуре

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & \overline{b_1} \\ b_2 & \overline{b_2} \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$AB_1 = B_1\mathrm{diag}(J_1, \overline{J_1}). \qquad (2.7)$$

В силу очевидного тождества

$$(z - A)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ -a_0 & z^2 - a_1 z - a_0 \end{pmatrix}$$

собственные значения матрицы A в верхней полуплоскости совпадают с корнями характеристического уравнения $\det p(z) = 0$. Следовательно, либо $J_1 = J$, либо матрица J_1 скалярна: $J_1 = \nu$. Покажем, что второй случай невозможен. В самом деле, если $J_1 = \nu$, то существуют два линейно независимых собственных вектора $\eta, \tilde{\eta} \in \mathbb{C}^4$ матрицы A, отвечающих собственному значению ν. Но тогда из вида (2.5) этой матрицы следует, что $\eta = (\eta_1, \eta_2)$, где векторы $\eta_j \in \mathbb{C}^2$ удовлетворяют соотношениям $\eta_2 = \nu\eta_1,\ \ p(\nu)\eta_1 = 0$ и аналогичным свойством обладает вектор $\tilde{\eta}$. Но тогда вектора η_1 и $\tilde{\eta}_1$, а вместе с ними и векторы $\eta, \tilde{\eta}$ должны быть линейно зависимыми, что противоречит принятому допущению.

Итак, матрица $J_1 = J$ и из (2.4) следует, что $b_2 = b_1 J$ и матрица b_1 удовлетворяет (2.3). Переходя к столбцам этих матриц, как и при доказательстве леммы 1.1, убеждаемся, что $b_1 = bd$ с некоторой матрицей d, коммутирующей с J. Но тогда $B_1 = B\mathrm{diag}(d, \overline{d})$, откуда $\det B_1 = \det B |\det d|^2$. Следовательно, матрицы B и d обратимы, что завершает доказательство леммы. $\square$

Обратимся к системе (2.2) в некоторой области D комплексной плоскости. Условимся записывать частные производные ее решений в виде

$$\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad J\phi' = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Тогда если с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу

$$z_J = x + yJ, \tag{2.8}$$

то можно записать

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = dz_J \phi'.$$

В частности, функция ϕ восстанавливается по своей производной $\psi = \phi'$ криволинейным интегралом

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \int_{z_0}^{z} dt_J \psi(t) \tag{2.9}$$

по некоторой гладкой дуге, соединяющей точки z и z_0 в области D.

Обратно, если J-аналитическая функция ψ задана, то эта формула определяет J-аналитическую функцию ϕ, производная которой совпадает с ψ. Если область D односвязна, то эта формула определяет однозначную функцию. Однако в случае многосвязной области функция ϕ, вообще говоря, многозначна и при обходе связных компонент границы ∂D может допускать ненулевые приращения. В дальнейшем под многозначными функциями понимаются функции, частные производные которой однозначны.

Теорема 2.1. *В обозначениях леммы* 2.1 *любое решение* u *системы Ламе* (1.1) *в области* D *представимо в виде*

$$u = \mathrm{Re}\, b\phi, \tag{2.10}$$

с некоторой (*вообще многозначной*) J*-аналитической функцией* ϕ *в этой области, причем ее производная* ϕ' *восстанавливается по градиенту* $\mathrm{grad}\, u$ *этого решения формулой*

$$\phi' = 2\left(d_1 \frac{\partial u}{\partial x} + d_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ \overline{d_1} & \overline{d_2} \end{pmatrix} = B^{-1}. \tag{2.11}$$

Доказательство. В обозначениях (2.5) по отношению к вектору $U = \mathrm{grad}\, u$ систему (1.1) можно записать в форме системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - A\frac{\partial U}{\partial x} = 0.$$

В силу (2.4) по отношению к $V = B^{-1}U$ эта система переходит в

$$\frac{\partial V}{\partial y} - \mathrm{diag}(J, \overline{J})\frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Поскольку вектор U вещественен, вектор $V = B^{-1}\mathrm{grad}\, u$ имеет блочную структуру $(\psi, \overline{\psi})$, так что функция ψ является J-аналитической и

$$\mathrm{grad}\, u = BV, \quad V = (\psi, \overline{\psi}). \tag{2.12}$$

Таким образом, в соответствии с видом (2.5) матрицы B имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\,\mathrm{Re}\, b\psi, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2\,\mathrm{Re}\, bJ\psi.$$

Отсюда аналогично (2.9) приходим к равенству

$$u = \mathrm{Re}\, b\phi + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где J-аналитическая функция ϕ имеет своей производной $\phi' = \psi$. В силу обратимости матрицы B найдется такой вектор $\eta \in \mathbb{C}^2$, что $\operatorname{Re} b\eta = \xi$. Поэтому, обозначая $\phi + \eta$ снова через ϕ, в результате приходим к представлению (2.10).

Что касается равенства (2.11), то оно равносильно (2.12) по отношению к $\psi = \phi'$. $\square$

Теорему 2.1 можно дополнить формулой представления и для тензора напряжений

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что вектор $u = (u_1, u_2)$ характеризует вектор смещения, он связан со столбцами $\sigma_{(1)}$, $\sigma_{(2)}$ тензора напряжений соотношениями

$$\sigma_{(i)} = a_{i1}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{i2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad i = 1, 2, \tag{2.13}$$

которые составляют содержание закона Гука.

При отсутствии массовых сил матрица σ удовлетворяет уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{(2)}}{\partial y} = 0,$$

которые совместно с (2.13) и приводят к системе Ламе.

Столбцы тензора напряжений удобно описывать в форме частных производных так называемой сопряженной функции v. Последняя определяется соотношением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.14}$$

Записывая (1.1) в форме

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

убеждаемся, что необходимое условие существования функции v выполнено. Поэтому с точностью до аддитивного постоянного слагаемого $\xi \in \mathbb{R}^l$ она однозначно определена в каждой односвязной подобласти $D_0 \subseteq D$. Во всей области эта функция может оказаться многозначной и допускать ветвление при обходе связных компонент границы ∂D.

Если сопряженная функция v постоянна, то (2.14) является однородной системой относительно вектора градиента η, поэтому на основании (1.4) отсюда

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0$$

тождественно в области D. Очевидно, эти соотношения равносильны

$$u_1(x, y) = \lambda_1 - \lambda_0 y, \quad u_2(x, y) = \lambda_1 + \lambda_0 x \tag{2.15}$$

с некоторыми $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Решения такого типа назовем *тривиальными*, они соответствуют перемещению упругой среды как целого.

Из (2.13), (2.14) приходим к выражениям

$$\sigma_{(1)} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_{(2)} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.16}$$

для столбцов тензора напряжений.

Теорема 2.2. *В условиях теоремы* 2.1 *сопряженная функция к решению* (2.10) *системы Ламе представима в виде*

$$v = \operatorname{Re} c\phi, \quad c = -(a_{21}b + a_{22}bJ). \tag{2.17}$$

При этом v постоянна тогда и только тогда, когда в этом представлении производная ϕ' постоянна.

Доказательство. Дифференцируя (2.10) и подставляя результат в формулы (2.14), получим:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{Re}(a_{21}b + a_{22}bJ)\phi', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re}(a_{11}b + a_{12}bJ)\phi'. \tag{2.18}$$

В силу (2.11) для матрицы c в (2.17) имеем соотношение $a_{11}b + a_{12}bJ = cJ$, так что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{Re} c\phi', \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \operatorname{Re} cJ\phi'.$$

Как и при доказательстве теоремы 2.1, отсюда приходим к формуле (2.17).

Если в представлении (2.17) функция v постоянна, то, как было отмечено выше, решение u системы Ламе тривиально и имеет вид (2.15). Совместно с (2.10) отсюда приходим к системе

$$\operatorname{Re} b\phi' = \xi, \quad \operatorname{Re} c\phi' = 0$$

с вектором $\xi = (0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^2$. Согласно лемме 2.1 матрица

$$\begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \bar{b} \\ bJ & \overline{bJ} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

обратима, так что предыдущая система дает постоянный вектор ϕ'. □

С помощью леммы 1.2 нетрудно дать явные выражения для матриц b и c, фигурирующих в теоремах 2.1, 2.2. Эти выражения введем отдельно для каждого из трех возможных случаев принадлежности матрицы α подмножествам в (1.13). С этой целью в обозначениях (1.3) введем многочлены

$$\begin{aligned} q_0(z) &= \beta_5 - \beta_3 z + \beta_6 z^2, \\ q_1(z) &= \beta_2 - \beta_5 z + \beta_4 z^2, \\ q_2(z) &= \beta_4 - \beta_6 z + \beta_1 z^2, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} q_3(z) &= z q_2(z), \\ q_4(z) &= q_0(z) - z q_2(z). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Непосредственно проверяется, что

$$-(a_{21} + a_{22}z) \begin{pmatrix} p_2(z) & -p_3(z) \\ -p_3(z) & p_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_3(z) & -q_1(z) \\ q_2(z) & q_4(z) \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Лемма 2.2. *В случае* (i) *различных корней можно положить*

$$\begin{gathered} b = \begin{pmatrix} p_2(\nu_1) & p_2(\nu_2) \\ -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -q_3(\nu_1) & -q_3(\nu_2) \\ q_2(\nu_1) & q_2(\nu_2) \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathcal{A}_1, \\ b = \begin{pmatrix} -p_3(\nu_1) & -p_3(\nu_2) \\ p_1(\nu_1) & p_1(\nu_2) \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -q_1(\nu_1) & -q_1(\nu_2) \\ q_4(\nu_1) & q_4(\nu_2) \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathcal{A}_2, \end{gathered} \tag{2.22}$$

$$b = 1, \quad c = \begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_1\alpha_3} & -\alpha_3 \\ \alpha_3 & -i\sqrt{\alpha_2\alpha_3} \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathcal{A}_0. \tag{2.23}$$

В случае (ii) *кратного корня можно положить*

$$b = \begin{pmatrix} p_2(\nu) & p_2'(\nu) \\ -p_3(\nu) & -p_3'(\nu) \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} -q_3(\nu) & -q_3'(\nu) \\ q_2(\nu) & q_2'(\nu) \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Во всех случаях матрица c *обратима и представима в виде*

$$c = c_0 d, \tag{2.25}$$

где

$$(i) \quad c_0 = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (ii) \quad c_0 = \begin{pmatrix} -\nu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и матрица d *коммутирует с* J.

Доказательство. Выражения (2.22) и (2.24) для матрицы b вытекают непосредственно из леммы 1.2. В том, что при $\alpha \in \mathcal{A}_0$ матрица $b = 1$ удовлетворяет (2.3), с учетом (1.15) можно убедиться прямой проверкой.

В случае (i) для столбцов матрицы c в (2.17) имеем выражения $c_{(j)} = -(a_{21}+a_{22}\nu_j)b_{(j)}$. Подставляя сюда столбцы матрицы b из (2.22) и пользуясь соотношением (2.20), получим соответствующие выражения для матриц c. Равенство (2.23) для c проверяется непосредственно.

В случае (ii) аналогичным образом соотношения

$$c_{(1)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(1)}, \quad c_{(2)} = -(a_{21} + a_{22}\nu)b_{(2)} - a_{22}b_{(1)},$$

совместно с (2.20) и выражением (2.24) для b приводят к нужному результату.

Остается установить вторую часть леммы. В силу (1.15) для матрицы c в (2.23) можно записать

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{\alpha_2\alpha_3} \end{pmatrix},$$

поэтому достаточно рассмотреть случаи $\alpha \in \mathcal{A}_j, \ j = 1, 2$.

В обозначениях (2.20) многочлен (1.8) можно записать в форме

$$\chi(z) = q_1(z) - zq_0(z) + z^2 q_2(z) = q_1(z) - zq_4(z). \tag{2.26}$$

В частности, $q_1(\nu) = \nu q_4(\nu)$ при $\chi(\nu) = 0$. Следовательно, в случае различных корней ν_j матрицу c в (2.22) можно записать в форме, соответственно,

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -p_2(\nu_1) & 0 \\ 0 & -p_2(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{A}_1,$$

и

$$c = \begin{pmatrix} -\nu_1 & -\nu_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_4(\nu_1) & 0 \\ 0 & p_4(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathcal{A}_2.$$

Если корень ν кратный, то $\alpha \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ и матрицу c в (2.24) можно представить в форме

$$c = \begin{pmatrix} -\nu & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3(\nu) & p_3'(\nu) \\ 0 & p_3(\nu) \end{pmatrix}.$$

Поэтому достаточно убедиться, что

$$\begin{aligned} \chi(\nu) = q_2(\nu) = 0 \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{A}_1, \\ \chi(\nu) = q_4(\nu) = 0 \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{A}_2. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Первые три равенства в (2.20) по отношению к векторам $q = (q_2, q_1, q_0)$ и $e = (z^2, 1, -z)$ можно записать в форме $q = \beta e$. В частности, вектор $q(z) \neq 0$ для любого z. Поскольку $\beta = (\det \alpha)\alpha^{-1}$, отсюда $(\det \alpha)e = \alpha q$, или, в явном виде,

$$\begin{gathered} (\det \alpha)z^2 = \alpha_1 q_2 + \alpha_4 q_1 + \alpha_6 q_0, \\ (\det \alpha) = \alpha_4 q_2 + \alpha_2 q_1 + \alpha_5 q_0, \\ -(\det \alpha)z = \alpha_6 q_2 + \alpha_5 q_1 + \alpha_3 q_0. \end{gathered}$$

В частности, многочлены q_j связаны двумя соотношениями

$$\begin{aligned} (\alpha_4 z + \alpha_6)q_2 + (\alpha_2 z + \alpha_5)q_1 + (\alpha_5 z + \alpha_3)q_2 = 0, \\ (\alpha_6 z + \alpha_1)q_2 + (\alpha_5 z + \alpha_4)q_1 + (\alpha_3 z + \alpha_6)q_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Предположим теперь, что $\chi(\nu) = q_2(\nu) = 0$. Тогда согласно (2.26) должно быть $q_1(\nu) = \nu q_0(\nu)$, $q_0(\nu) \neq 0$. Поэтому согласно (1.6) при $z = \nu$ левая часть первого равенства (2.28) совпадает с $p_2(\nu)q_0(\nu)$. Таким образом, $p_2(\nu) = 0$ и на основании (1.11) отсюда следует (2.27).

Рассуждения для второго случая аналогичны. Если $\chi(\nu) = q_4(\nu) = 0$, то в силу (2.26) должно быть $q_1(\nu) = 0$ и $q_0(\nu) = \nu q_2(\nu), \ q_2(\nu) \neq 0$. Поэтому из (1.6) и второго равенства (2.28) следует $p_1(\nu) = 0$, что означает линейную зависимость многочленов p_1 и p_3. □

Согласно теореме 2.2 пространство J-аналитических функций ϕ, для которых вещественная функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ тождественно равна нулю, трехмерно и состоит из многочленов

$$\phi(z) = \eta_0 + z_J\eta_1, \quad \operatorname{Re} c\eta_0 = 0, \ \operatorname{Re} c\eta_1 = \operatorname{Re} cJ\eta_1 = 0. \tag{2.29}$$

Этот факт можно несколько уточнить.

Лемма 2.3. *Пространство* $\{\eta \in \mathbb{C}^2 \mid \operatorname{Re} c\eta = \operatorname{Re} cJ\eta = 0\}$ *одномерно и натянуто на вектор* e, *определяемый системой*

$$ce = i\xi^0, \ cJe = i\xi^1, \tag{2.30}$$

где в обозначениях (1.7) *векторы* $\xi^k \in \mathbb{R}^2$ $(k = 0, 1)$ *определяются равенствами*

$$\xi^0 = (-\operatorname{Im} t, \operatorname{Im} s), \quad \xi^1 = (-\operatorname{Im}(\bar{s}t), \operatorname{Im} t).$$

В частности, в формуле (2.29) *можно положить* $\eta_1 = \lambda e,\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Совместные равенства $\operatorname{Re} c\eta = \operatorname{Re} cJ\eta = \operatorname{Re} cJ^2\eta = 0$ *возможны только для* $\eta = 0$.

Доказательство. Согласно (2.25) операция $\eta \to d\eta$ переводит подпространство $X_n \subseteq \mathbb{C}^2$, определяемое условиями $\operatorname{Re} cJ^k\eta = 0,\ 0 \leqslant k \leqslant n$, в аналогичное пространство, отвечающее c_0. А в случае $c = c_0$ равенства $\dim X_1 = 1$ и $\dim X_2 = 0$ проверяются непосредственно.

Заметим далее, что система уравнений (2.30) разрешима тогда и только тогда, когда

$$(cJc^{-1})\xi^0 = \xi^1. \tag{2.31}$$

Но в силу (2.25) в обоих случаях (i) и (ii) матрица

$$cJc^{-1} = c_0Jc_0^{-1} = \begin{pmatrix} s & t \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и равенство (2.31) для рассматриваемых векторов ξ^k проверяется непосредственно. □

Рассмотрим подробнее систему (2.1), (2.2). Если корни ν_j различны, то эта система распадается на два скалярных уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu_j \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

которые в переменных $\tilde{x} + i\tilde{y} = x + \nu_j y$ переходят в уравнение Коши—Римана. Поэтому подстановка

$$\phi_j(x, y) = \psi_j(x + \nu_j y), \quad j = 1, 2, \tag{2.32}$$

определяет аналитические функции ψ_j в областях $D(\nu_j) = \{\tilde{z} = x + \nu_j y,\ z \in D\}$.

Прямая проверка показывает, что и в случае кратного корня ν подстановка

$$\phi_1(x, y) = \psi_1(x + \nu y) + y\psi_2'(x + \nu y),\ \phi_2(x, y) = \psi_2(x + \nu y) \tag{2.33}$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между J-аналитической вектор-функцией ϕ и вектор-функцией ψ, аналитической в области $D(\nu)$. Обратное преобразование дается аналогичной формулой

$$\psi_1(x + \nu y) = \phi_1(x, y) - y\phi_2'(x, y),\ \psi_2(x + \nu y) = \phi_2(x, y).$$

Следует заметить, что в случае, когда область D является верхней полуплоскостью, функция ψ определена также в этой полуплоскости.

Подстановка формул (2.32), (2.33) в (2.10), (2.17) совместно с (2.13) приводит к классическим представлениям вектора смещения и тензора напряжений через пару аналитических функций. В случае кратных корней в этом представлении участвует и производная одной из этих функций. Хорошо известно [5, 6], что данное обстоятельство несколько затрудняет использование данных представлений при исследовании краевых задач.

В качестве иллюстрации обсудим связь представлений (2.12), (2.15) для изотропной среды с классическими формулами Колосова—Мусхелишвили, выражающими вектор перемещений u и тензор напряжений σ через аналитические функции. Согласно разделу 1 в рассматриваемом случае имеем кратный корень $\nu = i$ и матрица J представляет собой клетку Жордана, а матрицы b и c даются формулами (2.24). В силу (1.20), (1.26) эти формулы дают равенства

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_3 - \alpha_1 & 2\alpha_1 i \\ (\alpha_3 - \alpha_1)i & \alpha_3 - \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad c = 2\alpha_3 \begin{pmatrix} (\alpha_1 - \alpha_3)i & 2\alpha_1 - \alpha_3 \\ \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_1 i \end{pmatrix}.$$

Согласно лемме 2.1 в качестве b и c можно взять также матрицы, которые получаются умножением этих равенств справа на матрицу

$$d = (\alpha_3 - \alpha_1)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_3)^{-1} i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После элементарных вычислений в результате приходим к формулам

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & -\varkappa \end{pmatrix}, \quad c = \alpha_3 \begin{pmatrix} -2i & \varkappa - 1 \\ 2 & i(\varkappa + 1) \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

с положительной постоянной $\varkappa$ из (1.27).

С этими матрицами в покомпонентной записи представление (2.10) принимает вид

$$u_1 = \operatorname{Re} \phi_1, \quad u_2 = \operatorname{Re}(i\phi_1 - \varkappa\phi_2). \tag{2.35}$$

Подставляя в (2.17) выражение (2.34) матрицы c, для элементов матрицы σ в (2.16) получим представления

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \mathrm{Re}[2\phi_1' + i(\varkappa-3)\phi_2'],\\ \sigma_2 &= -\mathrm{Re}[2\phi_1' + i(\varkappa+1)\phi_2'],\\ \sigma_3 &= \mathrm{Re}[2i\phi_1' - (\varkappa-1)\phi_2')\end{aligned} \tag{2.36}$$

компонент тензора напряжений. Стоит отметить, что матрица c обладает свойством $(cJ)_{2k} = -c_{1k}$, согласно которому в покомпонентной записи (2.35) равенство, определяющее σ_3, встречается дважды.

Подставляя (2.33) в (2.34), (2.36), приходим к представлению

$$u_1 = \mathrm{Re}[\psi_1 + y\psi_2'],\ u_2 = \mathrm{Re}[i(\psi_1 + y\psi_2') - \varkappa\psi_2]$$

компонент вектора смещения и

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \alpha_3\,\mathrm{Re}[2(\psi_1' + y\psi_2'') + i(\varkappa-3)\psi_2'],\\ \sigma_2 &= -\alpha_3\,\mathrm{Re}[2(\psi_1' + y\psi_2'') + i(\varkappa+1)\psi_2'],\\ \sigma_3 &= \alpha_3\,\mathrm{Re}[2i(\psi_1' + y\psi_2'') - (\varkappa-1)\psi_2']\end{aligned}$$

элементов тензора напряжений через пару аналитических функций ψ_1, ψ_2 той же переменной z.

С помощью линейной подстановки

$$\chi_1(z) = -i\psi_2(z),\ \chi_2(z) = -2\psi_1(z) + i\varkappa\psi_2(z) + iz\psi_2'(z)$$

эти представления можно переписать в форме равенств

$$2(u_1 - iu_2)(z) = \varkappa\overline{\chi_1(z)} - z\chi_1'(z) - \chi_2(z),$$

$$(\sigma_1+\sigma_2)(z) = 4\alpha_3\,\mathrm{Re}\,\chi_1'(z), \quad (\sigma_2 - \sigma_1 + 2i\sigma_3)(z) = 2\alpha_3[\bar z\chi_1''(z) + \chi_1'(z)],$$

которые и составляют классические формулы Колосова—Мусхелишвили [6].

3. Функции, аналитические по Дуглису

Пусть область D ограничена гладким контуром Γ, который ориентирован положительно по отношению к D. Эта область может быть как конечной, т. е. лежать внутри некоторого круга, так и бесконечной, т. е. содержать внешность некоторого круга и, следовательно, являться окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ на плоскости. Удобно для краткости эти два возможных случая указывать обозначением, соответственно, $\sigma(D) = 1$ и $\sigma(D) = 0$.

Рассмотрим в области D систему (2.2) с произвольной матрицей $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, все собственные значения которой лежат в верхней полуплоскости. В случае, когда J является ганкелевой матрицей, эта система была изучена А. Дуглисом [19] в рамках гиперкомплексных чисел. Удобно с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу

$$z_J = x1 + yJ, \tag{3.1}$$

где $x = x1$ означает скалярную матрицу. Поскольку собственные значения J лежат в верхней полуплоскости, при $z \neq 0$ эта матрица обратима. Напомним, что решения ϕ системы (2.2) были названы J-аналитическими функциями, введение данного термина мотивируется тем, что эти решения можно описать как функции класса $C^1(D)$, допускающие в каждой точке $z \in D$ обобщенную производную

$$\phi'(z) = \lim_{t\to z}(t-z)_J^{-1}[\phi(t) - \phi(z)],$$

которая совпадает с частной производной по x. В случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области к этому определению добавляется условие ограниченности ϕ на ∞. В дальнейшем убедимся, что тогда ϕ имеет предел $\phi(\infty) = \lim\phi(z)$ при $z \to \infty$. Вообще условимся говорить, что ϕ имеет *порядок* $k \in \mathbb{Z}$ на ∞, если функция $|z|^{-k}\phi(z)$ ограничена в окрестности ∞.

Пусть l-вектор-функция $\phi \in C^1(D)$ удовлетворяет системе (2.2) в области D и в случае $\sigma(D) = 0$ имеет порядок -2 на бесконечности. Тогда, интегрируя равенство (2.2) и пользуясь формулой Грина, получим равенство

$$\int_\Gamma dt_J\phi^+(t) = 0, \tag{3.2}$$

которое играет роль теоремы Коши. Матричный дифференциал здесь определяется аналогично (3.1) и действует на вектор ϕ^+ по обычному правилу и потому стоит впереди этого вектора. Как и в случае классических аналитических функций, отсюда выводится и формула Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t-z)_J^{-1}dt_J\phi^+(t) = \begin{cases} \phi(z), & z\in D, \\ 0, & z\in \widetilde{D}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\widetilde{D} = \mathbb{C}\setminus\overline{D}$ и дополнительно предполагается, что в случае $\sigma(D)=0$ функция ϕ имеет порядок -1 на бесконечности. Из этой формулы, в частности, следует, что функция $\phi\in C^\infty(D)$. Обозначая $\phi^{(k)}$ последовательные частные производные по x, с учетом (2.2) для остальных частных производных имеем выражения

$$\frac{\partial^k\phi}{\partial x^{k-s}\partial y^s} = J^s\phi^{(k)}, \quad 0\leqslant s\leqslant k. \tag{3.4}$$

Из формулы Коши также вытекает, что функция, которая J-аналитична на всей плоскости и исчезает на бесконечности, тождественно равна нулю. Как и для обычных аналитических функций, из формул (3.2), (3.3) легко следует следующее предложение об аналитическом продолжении.

Пусть в области D проведен разрез L, т. е. гладкая дуга с концами в точках граничного контура Γ, которая за исключением этих концов лежит внутри D. Тогда, если функция ϕ непрерывна в D и J-аналитична в $D\setminus L$, то эта функция J-аналитична во всей области D.

Все основные результаты классической теории аналитических функций, основанные на интеграле Коши, сохраняют свою силу и для J-аналитических функций [11]. Для удобства приведем без доказательства основные положения этой теории.

В окрестности изолированной особой точки a для J-аналитической функции имеем разложение в ряд Лорана

$$\phi(z) = \sum(z-a)_J^k c_k, \quad c_k\in\mathbb{C}^l,$$

по целым степеням матрицы $(z-a)_J$. Если ϕ ограничена в окрестности этой точки, то она устранима и данное разложение переходит в соответствующий ряд Тейлора с коэффициентами $c_k = \phi^{(k)}/k!$. Соответствующие частичные суммы этого ряда представляют собой J-аналитические многочлены

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n}(z-a)_J^k c_k, \quad c_k\in\mathbb{C}^l.$$

Если область D бесконечна, то бесконечно удаленную точку ∞ можно рассматривать как изолированную. В этом случае справедливо разложение Лорана в окрестности ∞ по целым степеням z_J. Если ϕ имеет порядок k на бесконечности, то в этом разложении участвуют только степени z_J^i, $i\leqslant k$. В частности, функция $z_J^{-k}\phi(z)$ аналитична по Дуглису в окрестности ∞.

Если функция ψ задана и J-аналитична в односвязной области D, то интеграл

$$\phi(z) = \int\limits_{z_0}^{z} dt_J\psi(t) \tag{3.5}$$

не зависит от пути интегрирования и определяет J-аналитическую функцию с производной $\phi' = \psi$. В случае многосвязной области D первообразная ϕ функции ψ, вообще говоря, многозначна и допускает ветвление при обходе связных компонент границы области. Очевидно, формула (3.5) приводит к однозначной функции тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Gamma'} dt_J\psi(t) = 0 \tag{3.6}$$

для любого простого контура $\Gamma'\subseteq D$. В общем случае интеграл здесь можно трактовать как приращение функции ϕ вдоль контура Γ'.

Пусть область D конечна и ее граница состоит из конечного числа m связных компонент. Рассмотрим в D простые контуры Γ'_j, $1\leqslant j\leqslant m-1$, которые оставляют внутри себя соответствующие $m-1$ из этих компонент. Тогда в силу теоремы Коши условие (3.6) достаточно проверить для этих контуров. Аналогичное утверждение справедливо и для бесконечной области при условии, что ψ

имеет порядок -2 на бесконечности. В этом случае интегрирование в (3.5) можно вести от $z_0 = \infty$, а компоненты границы, связанные с Γ'_j, равноправны.

Аналогично (3.3) можно ввести обобщенный интеграл типа Коши

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t),$$

определяющий вне ориентируемого контура J-аналитическую функцию $\phi = I\varphi$ с порядком -1 на бесконечности, и соответствующий сингулярный интеграл Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma (t-t_0)_J^{-1} dt_J \varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

который понимается в смысле главного значения. Определяемый этим интегралом оператор I ограничен в пространствах Гельдера $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < 1$, где D — любая из связных компонент дополнения к Γ, и для ее граничных значений $\phi^\pm$ (знаки определяются ориентацией контура) справедливы формула Сохоцкого—Племеля [1]

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + S\varphi. \tag{3.7}$$

Пусть функция ϕ аналитична по Дуглису вне контура Γ, имеет конечный порядок на бесконечности и принадлежит $C^\mu(\overline{D})$, где D — любая из связных компонент дополнения к Γ. Тогда в силу (3.7) разность $\phi_0 = \phi - I\varphi$, где $\varphi = \phi^+ - \phi^-$, обладает свойством $\phi_0^+ = \phi_0^-$. С помощью формул Коши (3.2), (3.3), примененных к областям D, отсюда легко вывести, что ϕ_0 аналитична по Дуглису на всей плоскости и, следовательно, является J-аналитическим многочленом p.

Из формулы (3.7) также следует, что сингулярный оператор S ограничен в $C^\mu(\Gamma)$. Впрочем, с помощью следующей леммы этот факт легко сводится к аналогичному хорошо известному результату [7] для классического сингулярного оператора Коши

$$(S_0\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \Gamma,$$

отвечающему случаю $J = i$.

Лемма 3.1. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и*

$$k(t_0,t) \in C^\nu(\Gamma\times\Gamma), \quad k(t,t) \equiv 0. \tag{3.8}$$

Тогда интегральный оператор

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{k(t_0,t)}{t-t_0}\varphi(t)dt, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{3.9}$$

ограничен $C(\Gamma) \to C^\nu(\Gamma)$ и, в частности, компактен в пространствах $C(\Gamma)$ и $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$.

Если функция φ суммируема, то интеграл (3.9) *существует почти всюду на Γ и оператор K компактен в лебеговом пространстве $L^p(\Gamma)$ для любого $p \geqslant 1$.*

Доказательство. Существует такое $0 < \rho < 1/2$ (стандартный радиус контура), что для любой точки $a \in \Gamma$ и $0 < \delta < \rho$ множество $\Gamma \cap \{|t-a| \leqslant \delta\}$ является гладкой дугой. Тогда для функции $\psi = K\varphi$ имеем очевидную оценку

$$|\psi(t_0)| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \int\limits_\Gamma |t-t_0|^{\nu-1}|dt| \leqslant M_0 |k|_\nu |\varphi|_0, \tag{3.10}$$

где $|\ |_0$ и $|\ |_\nu$ означают нормы, соответственно, в C и C^ν, а постоянная $M_0 > 0$ зависит только от Γ. Воспользуемся далее оценкой

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{|t-a|\geqslant\delta\}} |t-a|^{\alpha-2}|dt| \leqslant M_1 \left\{ \begin{array}{ll} \delta^{\alpha-1}, & 0<\alpha<1, \\ \ln(1/\delta), & \alpha = 1, \end{array} \right. \tag{3.11}$$

где постоянная $M_1 > 0$ зависит только от Γ и α.

Зафиксируем точки $t_1, t_2 \in \Gamma$ и пусть $\delta = |t_1 - t_2| \leqslant \rho/3$. Запишем

$$\psi(t_1) - \psi(t_2) = \int\limits_\Gamma \left[\frac{k(t_1,t)}{t-t_1} - \frac{k(t_2,t)}{t-t_2}\right]\varphi(t)dt = \Delta_1 + \Delta_2,$$

где Δ_1 и Δ_2 означают интегралы по, соответственно, $\Gamma_1 = \Gamma\cap\{|t-t_1| \leqslant 2\delta\}$ и $\Gamma_2 = \Gamma\cap\{|t-t_1| \geqslant 2\delta\}$. Очевидно,

$$|\Delta_1| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \int\limits_{\Gamma_1} [|t-t_1|^{\nu-1} + |t-t_2|^{\nu-1}]|dt|.$$

Поскольку $|t-t_1| \leqslant 2\delta$ влечет $|t-t_2| \leqslant 3\delta$, аналогично (3.10) имеем:

$$|\Delta_1| \leqslant M_0[(2\delta)^\nu + (3\delta)^\nu]|k|_\nu |\varphi|_0.$$

Что касается Δ_2, то запишем

$$\Delta_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{k(t_1,t) - k(t_2,t)}{t-t_1}\varphi(t)dt + \int\limits_{\Gamma_2} \frac{(t_1-t_2)k(t_2,t)}{(t-t_1)(t-t_2)}\varphi(t)dt.$$

Тогда

$$|\Delta_2| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 \left[\delta^\nu \int\limits_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|dt| + \delta \int\limits_{\Gamma_2} |t-t_1|^{-1}|t-t_2|^{\nu-1}|dt|\right].$$

Поскольку $|t-t_1| \geqslant 2\delta$ влечет $|t-t_2| \geqslant |t-t_1| - \delta \geqslant |t-t_1| - |t-t_1|/2$, к выражению в квадратных скобках можно применить оценку (3.11). Тогда

$$|\Delta_2| \leqslant |k|_\nu |\varphi|_0 M_1[\delta^\nu \ln(1/\delta) + 2^{1-\nu}\delta^\nu].$$

Объединяя обе оценки для Δ_1 и Δ_2, в результате получим:

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \leqslant C|k|_\nu |\varphi|_0 |t_1 - t_2|^\mu \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| \leqslant \rho/3$$

с некоторой постоянной $C > 0$. С учетом (3.10) отсюда следует ограниченность оператора K из C в C^ν.

Обратимся ко второму утверждению леммы. Предполагая функцию φ суммируемой, в соответствии с (3.8) запишем (3.9) в форме

$$(K\varphi)(t_0) = \int\limits_\Gamma \frac{\tilde{k}(t_0,t)\varphi(t)|dt|}{|t-t_0|^\alpha},$$

где $1 - \nu < \alpha < 1$, а функция $\tilde{k}$ непрерывна и обращается в нуль при $t = t_0$. Тогда по теореме Фубини этот интеграл существует почти всюду и определяет суммируемую функцию $\psi = K\varphi$ с оценкой

$$\int\limits_\Gamma |\psi(t_0)||dt_0| \leqslant |\tilde{k}|_0 \int\limits_\Gamma |\varphi(t)||dt| \int\limits_\Gamma |t-t_0|^{-\alpha}|dt_0| \leqslant M|\tilde{k}|_0 \int\limits_\Gamma |\varphi(t)||dt|.$$

Если функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $p > 1$, то в силу неравенства Гельдера

$$|\psi(t_0)| \leqslant |\tilde{k}|_0 \left(\int\limits_\Gamma \frac{|\varphi(t)|^p|dt|}{|t-t_0|^\alpha}\right)^{1/p} \left(\int\limits_\Gamma \frac{|dt|}{|t-t_0|^\alpha}\right)^{1/q},$$

где $1/q = 1 - 1/p$. Возводя это неравенство в p-ую степень и интегрируя, совместно с предыдущим неравенством получим

$$\int\limits_\Gamma |\psi(t_0)|^p|dt_0| \leqslant |\tilde{k}|_0^p M^{p/q} \int\limits_\Gamma |\varphi(t)|^p|dt|.$$

Таким образом, оператор K ограничен в $L^p(\Gamma)$ с оценкой

$$|K|_{\mathcal{L}(L^p)} \leqslant M|\tilde{k}|_0 \tag{3.12}$$

для его нормы.

Очевидно, если для некоторого $\delta > 0$ функция $\tilde{k}(t_0, t)$ обращается в нуль при $|t - t_0| \leqslant \delta$, то оператор K компактен в $L^p(\Gamma)$. Выберем последовательность функций $\tilde{k}_n$ с этим свойством по отношению к $\delta = \delta_n$, сходящуюся к $\tilde{k}$ по sup-норме, и пусть K_n определяется по $\tilde{k}_n$ как выше. Тогда в силу оценки (3.12), примененной к разности $K - K_n$, последовательность компактных операторов K_n сходится к K по операторной норме, так что компактен и оператор K. □

Лемма 3.2. *Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и собственные значения матрицы J не лежат на вещественной прямой. Тогда оператор $S - S_0$ компактен в пространствах $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, и $L^p(\Gamma)$, $p > 1$.*

Если контур Γ служит границей области D и ориентирован положительно по отношению к ней, то $S^2 = S_0^2 = 1$.

Доказательство. Разность $S - S_0$ запишем в виде

$$[(S - S_0)\varphi)](t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{q(t; t - t_0)}{t - t_0} \varphi(t) dt$$

с матрицей-функцией $q(t, \xi) = [e(t)]_J \xi_J^{-1} \xi - e(t)$. Тогда остается воспользоваться леммой 3.1 и следующим общим свойством функций вида q.

Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и функция $q(t_0, t; \xi)$, заданная для $t_0, t \in \Gamma$ и $\xi = \xi_1 + i\xi_2 \in \mathbb{C}$, $\xi \neq 0$, четна, однородна степени нуль и непрерывно дифференцируема по ξ, причем вместе с частными производными по ξ непрерывна по всем переменным. Тогда, если $q(t_0, t; \xi) \in C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$ равномерно по $|\xi| = 1$, то функция $k(t_0, t) = q(t_0, t; t - t_0)$ принадлежит $C^\nu(\Gamma \times \Gamma)$, причем $k(t, t) = q(t, t; e(t)$, где $e(t)$ — единичный касательный вектор на Γ.

Доказательство этого предложения достаточно провести в окрестности фиксированной точки $(a, a) \in \Gamma \times \Gamma$. Запишем параметризацию контура в этой окрестности в форме $z = \gamma(s)$, $|s| \leqslant \delta$, где s — параметр длины дуги, отсчитываемый от точки a. Тогда функция

$$\alpha(s_0, s) = \frac{\gamma(s) - \gamma(s_0)}{s - s_0} = \int\limits_0^1 \gamma'[s\tau + s_0(1 - \tau)] d\tau$$

принадлежит классу C^ν в квадрате $|s_0|, |s| \leqslant \delta$, отграничена по модулю от нуля и принимает значение $\gamma'(s)$ при $s_0 = s$. Следовательно, функция $k[\gamma(s_0), \gamma(s)] = q[\gamma(s_0), \gamma(s); \alpha(s_0, s)]$ также принадлежит этому классу и ее значение при $s_0 = s$ совпадает с $q[\gamma(s_0), \gamma(s); \gamma'(s)]$. Отсюда следует справедливость сформулированного предложения для функции $q(t_0, t; t - t_1)$ в рассматриваемой окрестности контура.

Обратимся ко второму утверждению леммы. Для оператора S_0 оно хорошо известно [7], а для S его доказательство проходит по той же схеме, что и в [7]. Именно, пусть контур Γ ориентирован положительно по отношению к области D и для краткости $P = (1 + S)/2$. Тогда для граничного значения функции $\phi = I\varphi$ имеем равенство $\phi^+ = P\varphi$. С другой стороны, по формуле Коши $\phi = I\phi^+$, где учтено, что в случае бесконечной области D функция ϕ исчезает на ∞. Отсюда $P\phi^+ = \phi^+$ или $P^2\varphi = P\varphi$, что равносильно операторному равенству $S^2 = 1$. □

Граничные свойства интегралов типа Коши $I\varphi$ с плотностью из $\varphi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, изучались в [10]. В этом случае J-аналитическая функция $\phi = I\varphi$ принадлежит пространству Харди $H^p(D)$, которое можно ввести [12] следующим образом. Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится к Γ по метрике C^1. По определению это означает, что для некоторых диффеоморфизмов $\gamma_n : \Gamma \to \Gamma_n$ выполняется условие

$$\lim_{n \to \infty} |\gamma_n(t) - t|_{C^1(\Gamma)} = 0. \tag{3.13}$$

Тогда $H^p(D)$ состоит из всех J-аналитических в D функций, для которых конечна норма

$$|\phi| = \sup_n |\phi|_{L^p(\Gamma_n)}. \tag{3.14}$$

В этих обозначениях интеграл типа Коши как линейный оператор $\varphi \to \phi = I\varphi$ ограничен $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$, угловые предельные значения $\phi^\pm$ существуют почти всюду на Γ и справедлива формула Сохоцкого—Племеля [10]. Обратно, любая функция $\phi \in H^p$ представима интегралом типа Коши с плотностью $\varphi \in L^p(\Gamma)$.

В самом деле, пусть область $D_n \subseteq D$ ограничена контуром Γ_n. Тогда для фиксированной точки $z \in D$ и достаточно больших n можно записать формулу Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n} (t-z)_J^{-1} dt_J \phi(t).$$

Из (3.14) и слабой компактности [9] единичного шара в рефлексивном банаховом пространстве $L^p,\ p > 1$, следует, что найдется такая функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$, что некоторая подпоследовательность $\phi \circ \gamma_{n_k}$ слабо сходится к φ в L^p. Поэтому с учетом (3.13) в предыдущем равенстве для $n = n_k$ можно перейти к пределу при $k \to \infty$ и в результате представить ϕ интегралом типа Коши.

Отсюда, в частности, следует, что функция $\phi \in H^p(D)$ тогда и только тогда, когда существуют угловые предельные значения почти всюду на Γ, принадлежащие $L^p(\Gamma)$, и сохраняет свою силу формула Коши. Из этих же соображений пространство H^p можно определить как замыкание класса J-аналитических функций, непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$, по норме

$$|\phi| = |\phi^+|_{L^p(\Gamma)},$$

которая эквивалентна норме (3.14). Напомним, что в случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области J-аналитические функции предполагаются ограниченными на ∞, так что указанное равенство определяет норму и в этом случае.

Хорошо известно [7], что каждая аналитическая функция с точностью до постоянного слагаемого может быть представлена интегралом типа Коши. Этот факт справедлив [10] и для J-аналитических функциях в классах Гельдера. С помощью следующей леммы его легко распространить и на класс Харди.

Лемма 3.3. *Пусть область D ограничена простым ляпуновским контуром Γ и матрица J треугольна. Пусть J-аналитическая функция $\phi \in H^p(D)$ такова, что $\mathrm{Re}\phi^+$ постоянна на Γ. Тогда ϕ постоянна в области D.*

Доказательство. Проведем доказательство сначала для скалярного случая $l = 1$, когда $J = \nu \in \mathbb{C}$ и ϕ является решением уравнения

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} - \nu \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

При аффинном преобразовании $z = x + iy \to z_\nu = x + \nu y$ это уравнение переходит в уравнение Коши—Римана, определяющее аналитические функции. Очевидно, класс Харди инвариантен относительно этих преобразований, так что без ограничения общности функцию ϕ можно считать аналитической. В этом случае утверждение леммы хорошо известно [2].

Итак, в скалярном случае утверждение леммы установлено. В общем случае пусть для определенности матрица $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$ верхнетреугольна, т. е. $J_{ik} = 0$ при $i > k$. Тогда в покоординатной записи относительно вектора $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_l)$ систему Дуглиса можно переписать в виде

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \sum_{k=j}^{l} J_{kj} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant l.$$

В силу уже доказанного из последнего уравнения этой системы следует, что функция ϕ_l постоянна. Следовательно, $(l-1)$-ое уравнение этой системы переходит в рассмотренное выше скалярное уравнение по отношению к ϕ_{l-1} и $\nu = J_{l-1,l-1}$. Поэтому из тех же соображений функция ϕ_{l-1} постоянна. Повторяя эти рассуждения, в результате приходим к заключению, что постоянны все функции ϕ_k. □

Обратимся к вопросу о представимости J-аналитических функций $\phi \in H^p$ интегралами типа Коши с вещественной плотностью.

Теорема 3.1. *Пусть ляпуновский контур Γ ограничивает область D, ориентирован положительно по отношению к D и состоит из компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, $m \geqslant 1$, причем в случае* *конечной области контур Γ_m охватывает все остальные. Пусть матрица J треугольна. Тогда любая J-аналитическая функция $\phi \in H^p(D)$ представляется в виде*

$$\phi = I\varphi + \eta, \quad \eta \in \mathbb{C}^l, \tag{3.15}$$

где вещественная l-вектор-функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$ и $\operatorname{Re}\eta = 0$ в случае конечной области D.

В этом представлении $\phi = 0$ тогда и только тогда, когда $\eta = 0$ и функция φ постоянна на контурах Γ_j, причем в случае конечной области D она равна нулю на Γ_m.

Доказательство. Оно осуществляется по той же схеме, что и в случае функций, рассматриваемых в классах Гельдера [10]. Предположим сначала, что область D конечна и ограничена простым контуром (т. е. $m = 1$). Обозначим $\widetilde{D}$ дополнение к $\overline{D}$ на плоскости, и пусть $\widetilde{I}\varphi$ означает оператор типа Коши в области $\widetilde{D}$. Тогда на основании (3.7)

$$(I\varphi)^+ - (\widetilde{I}\varphi)^- = \varphi. \tag{3.16}$$

Утверждается, что

$$\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0, \tag{3.17}$$

$$\operatorname{Re}(\widetilde{I}\varphi)^- = \xi \in \mathbb{R}^l \;\Rightarrow\; \xi = 0,\ \varphi \in \mathbb{R}^l. \tag{3.18}$$

В самом деле, если $\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0$, то на основании леммы 3.3 функция $I\varphi$ постоянна и с учетом (3.16) функция $\operatorname{Im}(\widetilde{I}\varphi)^-$ также постоянна. Опять пользуясь леммой 3.3, отсюда выводим, что постоянна и функция $\widetilde{I}\varphi$, а вместе с ней и плотность $\varphi = \xi \in \mathbb{R}^l$. Но тогда $I\varphi = \xi$ и поскольку по условию $\operatorname{Re}(I\varphi)^+ = 0$, отсюда следует (3.17). Рассуждения для интеграла $\widetilde{I}\varphi$ аналогичны. Как и выше, убеждаемся, что функции $\widetilde{I}\varphi$ и φ постоянны. Поскольку первая из них исчезает на бесконечности, отсюда вытекает (3.18).

Рассмотрим операторы $M\varphi = \operatorname{Re}(I\varphi)^+$ и $\widetilde{M}\varphi = \operatorname{Re}(\widetilde{I}\varphi)^-$, действующие в $L^p(\Gamma)$. Согласно (3.7) имеем:

$$M\varphi = \operatorname{Re}(\varphi + S\varphi)/2, \quad \widetilde{M}\varphi = \operatorname{Re}(-\varphi + S\varphi)/2.$$

Операция комплексного сопряжения $\varphi \to \overline{\varphi}$ функций индуцирует соответствующую операторную инволюцию $N \to \overline{N}$ по правилу $\overline{N}\varphi = \overline{N\overline{\varphi}}$. В этих обозначениях

$$M = 1 + (S + \overline{S})/2, \quad \widetilde{M} = -1 + (S + \overline{S})/2. \tag{3.19}$$

Если зависимость оператора S от матрицы J указывать обозначением $S = S(J)$, то $\overline{S(J)} = -S(\overline{J})$ (знак минус возник из-за множителя $1/\pi i$ перед сингулярным интегралом). Согласно лемме 3.2 операторы $S(J) - S_0$ и $S(\overline{J}) - S_0$ компактны в пространстве $L^p(\Gamma)$. Но тогда этим свойством обладает и оператор $S + \overline{S} = S(J) - S(\overline{J})$. Поэтому по теореме Рисса [9] операторы M и $\widetilde{M}$ в (3.19) фредгольмовы индекса нуль. В соединении с (3.17), (3.18) отсюда заключаем, что оператор M обратим и

$$\ker \widetilde{M} = 0, \quad \mathbb{R}^l \cap \operatorname{im} \widetilde{M} = 0. \tag{3.20}$$

Пусть теперь $\phi \in H^p(D)$ и $f = \operatorname{Re}\phi^+$. Полагая $\varphi = M^{-1}\varphi$, получим $(\phi - I\varphi)^+ = 0$ и по лемме 3.2 функция $\phi = I\varphi + i\xi$ с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^l$. Если в этом равенстве $\phi = 0$, то $M\varphi = 0$ и, значит, $\varphi = 0$. Тем самым утверждение теоремы в рассматриваемом случае установлено.

Пусть далее $\widetilde{\phi} \in H^p(\widetilde{D})$ и $\widetilde{\phi}_0(z) = \widetilde{\phi}(z) - \widetilde{\phi}(\infty)$. Напомним, что оператор $\widetilde{M}$ фредгольмов индекса нуль. Поэтому с учетом (3.20) функцию $f = \operatorname{Re}\widetilde{\phi}_0$ можно представить в виде $\widetilde{M}\varphi + \xi$ с некоторыми $\varphi \in L^p$ и $\xi \in \mathbb{R}^l$. Тогда $\operatorname{Re}(\widetilde{\phi}_0 - \widetilde{I}\varphi) = \xi$ и на основании леммы 3.2 функция $\widetilde{\phi}_0 - \widetilde{I}\varphi$ постоянна. Поскольку она исчезает на ∞, то в действительности $\widetilde{\phi} = \widetilde{I}\varphi$, что приводит к разложению (3.15) для $\widetilde{\phi}$ с $\eta = \widetilde{\phi}(\infty)$. То, что $\widetilde{\phi} = 0$ в этом разложении влечет $\eta = 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}^l$, доказывается аналогично. Таким образом, утверждение теоремы установлено и для случая бесконечной области, ограниченной простым контуром.

Рассмотрим общий случай контура Γ, предполагая для определенности область D конечной. Пусть область D_j ограничена контуром Γ_j, причем эта область бесконечна при $1 \leqslant j \leqslant m-1$ и конечна при $j = m$, так что $D = D_1 \cap \ldots \cap D_m$. В соответствии с формулой Коши функцию $\phi \in H^p(D)$ можно представить в виде суммы

$$\phi(z) = \phi_1(z) + \ldots + \phi_m(z), \quad z \in D, \tag{3.21}$$

где $\phi_j \in H^p(D_j)$ определяются интегралом типа Коши

$$\phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j}(t-z)_J^{-1}dt_J\phi^+(t), \quad z \in D_j.$$

К функциям ϕ_j утверждение теоремы уже применимо, так что

$$\phi_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_j}(t-z)_J^{-1}dt_J\varphi_j(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1,$$

$$\phi_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_m}(t-z)_J^{-1}dt_J\varphi_m(t) + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l.$$

Подставляя эти выражения в (3.21), приходим к требуемому разложению (3.15). Если в этом разложении $\phi = 0$ и функции $\phi_j \in H^p(D_j)$ определяются интегралом типа Коши с плотностью $\varphi|_{\Gamma_j}$, то равенство $-\phi_m = \phi_1 + \ldots + \phi_{m-1}$ позволяет продолжить $-\phi_m$ до функции, аналитической по Дуглису на всей плоскости и исчезающей на ∞. Следовательно, $\phi_m = 0$. Аналогично показывается, что $\phi_j = 0$ для всех j. Применяя к ϕ_j утверждение теоремы, убеждаемся, что $\varphi|_{\Gamma_j} \in \mathbb{R}^l$ при $1 \leqslant j \leqslant m-1$ и $\xi = 0$, $\varphi|_{\Gamma_m} = 0$. □

4. Задача Римана—Гильберта

Как и в случае обычных аналитических функций, для функций, аналитических по Дуглису, можно рассмотреть задачу Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} G\phi\big|_\Gamma = f, \tag{4.1}$$

где $l\times l$-матрица-функция $G \in C(\Gamma)$ обратима всюду на Γ. Эта задача рассматривается в пространстве $H^p(D)$, $p > 1$ с правой частью $f \in L^p(\Gamma)$. Фредгольмовость и индекс задачи понимается по отношению к $\mathbb{R}$-линейному оператору $\phi \to \operatorname{Re} G\phi$ ее краевого условия.

Теорема 4.1. *Пусть ляпуновский контур Γ составлен из m связных компонент и определитель матрицы-функции $G \in C(\Gamma)$ отличен от нуля всюду на Γ. Тогда задача (4.1) фредгольмова и ее индекс $\varkappa$ дается формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\arg\det G\big|_\Gamma + (2-m)l, \tag{4.2}$$

где приращение непрерывной ветви аргумента на Γ берется в направлении, оставляющем область D слева.

Если $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и $G \in C^\nu(\Gamma)$, то любое решение $\phi \in H^p(D)$ этой задачи с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, принадлежит классу $C^\mu(\overline{D})$. При дополнительном предположении $G \in C^{1,\nu}(\Gamma)$ аналогичное утверждение справедливо и по отношению к классам $C^{1,\mu}$.

Доказательство. Без ограничения общности матрицу J можно считать жордановой и, в частности, треугольной. В самом деле, пусть матрица $b \in \mathbb{C}^{l\times l}$ приводит J к жордановой форме J_0, т. е. $J_0 = b^{-1}Jb$. Тогда подстановка $\phi = b\phi_0$ переводит J-аналитические функции в J_0-аналитические. Остается заметить, что при этой подстановке задача (4.1) переходит в аналогичную задачу для J_0-аналитической функции ϕ_0 с матрицей $G_0 = Gb$.

Таким образом, можно воспользоваться теоремой 3.1. Из этой теоремы следует, что интегральный оператор I, действующий из пространства $L^p(\Gamma)$ вещественных l-вектор-функций в $H^p(D)$, фредгольмов и его индекс $\operatorname{ind} I = l(m-2)$. С другой стороны, согласно (3.7) для композиции $N = 2RI$ оператора R задачи (4.1) с I имеем равенство $N\varphi = \operatorname{Re}(\varphi + S\varphi)$. В терминах операторной инволюции сопряжения, введенной при доказательстве теоремы 3.1, можно записать

$$N = G(1+S)/2 + \overline{G}(1+\overline{S})/2 = G(1+S_0)/2 + \overline{G}(1-S_0)/2 + K \tag{4.3}$$

с интегральным оператором $2K = G(S-S_0) + \overline{G}(\overline{S}+S_0)$, который в силу леммы 3.2 компактен в $L^p(\Gamma)$. Согласно классической теории сингулярных операторов с ядром Коши [3, 7] отсюда заключаем, что оператор N фредгольмов в L^p и его индекс определяется первым слагаемым в правой части (4.2). Поскольку $S_0^2 = 1$, с помощью леммы 3.2 аналогичным образом проверяется, что оператор $N^{(-1)} = G^{-1}(1+S_0)/2 + \overline{G}^{-1}(1-S_0)/2$ является регуляризатором N, т. е. операторы $1 - NN^{(-1)}$ и $1 - N^{(-1)}N$ компактны в $L^p(\Gamma)$.

Вторая часть теоремы опирается на лемму 4.1, которую докажем чуть ниже. Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $G \in C^{\nu}(\Gamma)$ и $0 < \mu < \nu$. Тогда на основании леммы 3.1 оператор K в (4.4) компактен в пространстве $C^{\mu}(\Gamma)$ и оператор $N^{(-1)}$ является регуляризатором N в этом пространстве. Поэтому утверждение теоремы вытекает из леммы 4.1.

Пусть далее $G \in C^{1,\nu}(\Gamma)$. Рассмотрим операцию дифференцирования на Γ по формуле

$$(D\varphi)(t_0) = \lim_{t\to t_0,\, t\in\Gamma} (t-t_0)_J^{-1}[\varphi(t) - \varphi(t_0)].$$

С аналогичной операцией D_0 по отношению к $J = i$ она связана соотношением $D = dD_0$, где $d = e_J^{-1}e \in C^{\nu}(\Gamma)$. Интегрированием по частям непосредственно проверяется, что

$$(I\varphi)'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J (D\varphi)(t).$$

В частности, оператор типа Коши I ограничен $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому утверждение теоремы о гладкости достаточно установить по отношению к уравнению $N\varphi = f$, определяемому оператором (4.3).

Применяя к предыдущему равенству формулу Сохоцкого—Племеля (3.7) и сравнивая результат с продифференцированной формулой (3.7), получим равенство $DS = SD$ или $dD_0S = SdD_0$. Аналогичным образом и $D_0S_0 = S_0D_0$, так что

$$D_0(S - S_0) = [d^{-1}(S-S_0)d + (d^{-1}S_0 - S_0d^{-1})d]D_0.$$

В результате для оператора K в (4.3) имеем соотношение $D_0K = K_0 + K_1D_0$, где K_j $(j = 0,1)$ определяются аналогично (3.9) с некоторыми функциями $k_j(t_0,t)$ со свойством (3.8). Следовательно, оператор K компактен в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$. Аналогично проверяется, что оператор $N^{(-1)}$ является регуляризатором N и в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$, так что остается воспользоваться леммой 4.1. □

Лемма 4.1. *Пусть оператор N фредгольмов в пространстве $L^p(\Gamma)$, $p > 1$, и вместе со своим регуляризатором $N^{(-1)}$ ограничен в некотором банаховом пространстве X, вложенном в $L^p(\Gamma)$. Тогда если $N^{(-1)}$ является регуляризатором N и по отношению к X, то любое решение $\varphi \in L^p(\Gamma)$ уравнения $N\varphi = f$ с правой частью $f \in X$ также принадлежит X.*

Доказательство. Достаточно провести доказательство по отношению к уравнению $\varphi + K\varphi = f$, где $K = 1 - N^{(-1)}N$. По условию оператор K компактен как в L^p, так и в X. Пространстве $L^q(\Gamma)$, $q = p/(p-1)$, является сопряженным к $L^p(\Gamma)$ по отношению к билинейной форме

$$(\varphi,\psi) = \int_\Gamma \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Соответственно, сопряженный оператор K', связанный с K тождеством $(K\varphi,\psi) = (\varphi, K'\psi)$, компактен в пространстве L^q. по теореме Рисса [9] размерность ядра $n = \dim[\ker(1+K)]$ оператора $1+K$ конечна и совпадает с $\dim[\ker(1+K')]$, а уравнение $N\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $(f,\psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$. Пусть n_0 имеет аналогичный смысл по отношению к оператору $K_0 = K|X$, действующему в X. Тогда, очевидно, условие $(f,\psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$ необходимо для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в пространстве X. Таким образом,

$$n_0 \leqslant n, \quad \dim[X/\mathrm{Im}\,(1+K_0)] \geqslant n_0,$$

так что $\mathrm{ind}(1+K_0) \leqslant \mathrm{ind}(1+K) = 0$. Поскольку в действительности $\mathrm{ind}(1+K_0) = 0$, то и предыдущие два неравенства являются точными равенствами. Таким образом, $\ker(1+K_0) = \ker(1+K)$, а условие $(f,\psi) = 0$, $\psi \in \ker(1+K')$ необходимо и достаточно для разрешимости уравнения $N\varphi = f$ в пространстве X. Отсюда утверждение леммы получается непосредственно. □

Особо остановимся на задаче Римана—Гильберта с постоянной матрицей G. В этом случае формула индекса (4.2) переходит в $\varkappa = l(2-m)$. Для более подробного рассмотрения этой задачи удобно ввести пространство Харди и для класса вещественных вектор-функций

$$u = \operatorname{Re} G\phi, \tag{4.4}$$

которое обозначим здесь $h^p(D)$. Оно вводится аналогично случаю J-аналитических функций с той разницей, что последовательность контуров $\Gamma_n \subseteq D$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится к Γ по метрике этого класса. Другими словами, область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$ и условие (3.13) выполнено по отношению к норме пространства $C^{1,\nu}(\Gamma)$. Тогда пространство $h^p(D)$ функций $u = \operatorname{Re} G\phi$ определяется условием конечности нормы

$$|u| = \sup_n |u|_{L^p(\Gamma_n)}. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Пусть область D ограничена контуром Γ класса $C^{1,\nu}$, тогда $u \in h^p(D)$ тогда и только тогда, когда в представлении* (4.4) *функция $\phi \in H^p(D)$.*

Доказательство. Без ограничения общности матрицу J можно считать треугольной, что обосновывается также, как и в случае теоремы 4.1. Поскольку утверждение теоремы связано с поведением ϕ вблизи связных компонент контура, область D можно считать конечной, а контур Γ — состоящим из двух компонент. В этом случае удобно слегка видоизменить оператор I интеграла типа Коши, полагая

$$(I\varphi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma (t-z)_J^{-1} dt_J \varphi(t) + \int_\Gamma \varphi(t)|dt|\right], \quad z \in D, \tag{4.6}$$

Тогда в силу теоремы 3.1 этот оператор обратим $L^p(\Gamma) \to H^p(D)$.

В принятых обозначениях формуле (3.7) соответствует равенство

$$2(I\varphi)^+ = \varphi + S\varphi, \quad (S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma [(t-t_0)_J^{-1} e_J(t) + 1]\varphi(t)|dt|. \tag{4.7}$$

и для оператора $N\varphi = \operatorname{Re} G(I\varphi)^+$ имеем аналогичное (4.5) выражение

$$N = G(1+S)/2 + \overline{G}(1+\overline{S})/2. \tag{4.8}$$

Таким образом, задача (4.1) равносильна уравнению $N\varphi = 2f$, решение φ которого определяет решение $\phi = I\varphi$ задачи. Согласно теореме 4.1 эта задача и, соответственно, оператор N фредгольмовы индекса нуль. Пусть $\phi_1, \ldots, \phi_k \in H^p(D)$ образуют базис пространства решений однородной задачи (4.1). Не ограничивая общности, можно считать, что некоторая подобласть D_0 вместе со своей границей лежит внутри всех контуров Γ_n. Вещественные l-вектор-функции $\operatorname{Re}\phi_j$ как элементы $C(\overline{D_0})$ линейно независимы. В самом деле, если $\operatorname{Re}\phi \equiv 0$ в области D_0 для некоторой J-аналитической функции ϕ, то и $\phi \equiv 0$, что доказывается аналогично лемме 3.2. Выберем систему вещественных l-вектор-функций $\psi_1, \ldots, \psi_k$, биортогональную к функциям $\operatorname{Re}\phi_j(z)$, $z \in D_0$. Другими словами,

$$\int_{D_0} (\operatorname{Re}\phi_i)\psi_j dxdy = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Тогда однородная задача (4.1), дополненная условиями

$$\int_{D_0} \psi_j \operatorname{Re}\phi\, dxdy = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

имеет только нулевое решение. Рассмотрим оператор $L:\ L^p(\Gamma) \to \mathbb{R}^k$ по формуле

$$(L\varphi)_j = \int_{D_0} \operatorname{Re}\psi_j \operatorname{Re}(I\varphi) dxdy, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

С учетом (4.6) его можно записать в более явной форме скалярного произведения

$$(L\varphi)_j = \int\limits_{\Gamma} g_j(t)\varphi(t)|dt|, \quad 1 \leqslant j \leqslant k, \tag{4.9}$$

с функциями

$$g_j(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{D_0} \mathrm{Im}[e_J(t)(t-z)_J^{-1} + 1]\psi_j(z)dxdy.$$

В этих обозначениях оператор $(N, L) : L^p(\Gamma) \to L^p(\Gamma) \times \mathbb{R}^k$ фредгольмов и его ядро нулевое. Зависимость операторов (4.7)–(4.9) и определяющих их функций от Γ указываем обозначениями S_Γ, L_Γ и т. д.

Обратимся к последовательности контуров Γ_n, о которых идет речь в теореме. По условию найдутся такие гомеоморфизмы $\gamma_n : \Gamma \to \Gamma_n$ класса $C^{1,\nu}(\Gamma)$, что выполнено условие (3.12) в норме $C^{1,\nu}$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} |\gamma_n(t) - t|_{C^{1,\nu}} = 0. \tag{4.10}$$

Операция суперпозиции $\varphi \to \varphi\circ\gamma_n$ функций индуцирует операторное преобразование $M \to M\circ\alpha_n$ по правилу $(M\circ\gamma_n)(\varphi\circ\gamma_n) = (M\varphi)\circ\gamma_n$, которое переводит банахово пространство $\mathcal{L}[L^p(\Gamma_n)]$ операторов, ограниченных в $L^p(\Gamma_n)$, на $\mathcal{L}[L^p(\Gamma)]$. Аналогичный смысл имеет обозначение $(M\circ\gamma_n)(\varphi\circ\gamma_n) = M\varphi$ для оператора $M : L^p(\Gamma_n) \to \mathbb{R}^k$. Утверждается, что в этих обозначениях

$$|S_{\Gamma_n}\circ\gamma_n - S_\Gamma|_{\mathcal{L}} \to 0, \quad |L_{\Gamma_n}\circ\gamma_n - L_\Gamma|_{\mathcal{L}} \to 0 \tag{4.11}$$

при $n \to \infty$ по операторной норме соответствующих пространств. В самом деле, положим

$$q_n(t_0, t) = [\gamma_n(t) - \gamma_n(t_0)]_J^{-1} e_J[\gamma_n(t)] e_J^{-1}(t)(t - t_0)_J.$$

Тогда в силу (4.10) последовательность матриц-функций $q_n \to 1$ по норме $C^\nu(\Gamma\times\Gamma)$. Остается заметить, что в этих обозначениях

$$[(S\circ\gamma_n)\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}[q_n(t_0,t)(t-t_0)_J^{-1}e_J(t) + 1]\varphi(t)|\gamma_n'(t)||dt|,$$

$$[(L_{\Gamma_n}\circ\gamma_n)\varphi]_j = \int\limits_{\Gamma} g_{\Gamma_n,j}[\gamma_n(t)]|\gamma_n'(t)|\varphi(t)|dt|,$$

и воспользоваться оценкой для операторной нормы оператора K в $L^p(\Gamma)$, установленной при доказательстве леммы 3.1.

Пусть теперь задана J-аналитическая в D функция ϕ, для которой норма (4.5) конечна, т. е. вещественные функции $f_n = \mathrm{Re}\,\phi|_{\Gamma_n}$ равномерно ограничены по норме пространств $L^p(\Gamma_n)$. Положим

$$\xi_j = \int\limits_{D_0} \psi_j \,\mathrm{Re}\,\phi\, dxdy, \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Пусть $\varphi_n \in L^p(\Gamma_n)$ определяются равенством $\phi = I_{\Gamma_n}\varphi_n$ в области $D_n \subseteq D$, ограниченной контуром Γ_n. Тогда $N_{\Gamma_n}\varphi_n = 2f_n$ и $(L_{\Gamma_n}\varphi_n)_j = \xi_j$, или, что равносильно,

$$(N_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n = 2f_n, \quad [(L_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n]_j = \xi_j,$$

где положено $\widetilde{\varphi}_n = \varphi_n\circ\alpha_n$. Согласно (4.8) соотношение (4.11) справедливо и для оператора N, поэтому на основании нижеследующей леммы 4.2 последовательность $\widetilde{\varphi}_n$ ограничена в $L^p(\Gamma)$. С учетом (4.7), (4.11) отсюда следует, что последовательность функций $(S_{\Gamma_n}\circ\alpha_n)\widetilde{\varphi}_n$, а вместе с ней и $\phi\circ\alpha_n$ ограничены в $L^p(\Gamma)$, что завершает доказательство теоремы. □

Лемма 4.2. *Пусть заданы банаховы пространства X, Y и фредгольмовый оператор $N \in \mathcal{L}(X, Y)$ с нулевым ядром. Пусть последовательность $N_n \to N$ при $n \to \infty$ по норме пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. Тогда если последовательность векторов $N_n x_n$ ограничена в Y, то x_n ограничены в X.*

Доказательство. Предположим сначала, что образ $\operatorname{im} N$ оператора совпадает с Y, т. е. оператор N обратим. Тогда операторы N_n также обратимы для достаточно больших n и последовательность N_n^{-1} сходится к N^{-1} в $\mathcal{L}(Y, X)$, так что последовательность $x_n = N_n^{-1} y_n$ ограничена. В общем случае по условию образ $\operatorname{im} N$ замкнут и $Y = Y_0 \oplus \operatorname{im} N$ для некоторого конечномерного подпространства Y_0. Рассмотрим операторы $\widetilde{N}, \widetilde{N}_n \in \mathcal{L}(X \times Y_0, Y)$ по формуле

$$\widetilde{N}(x, y_0) = Nx + y_0, \quad \widetilde{N}_n(x, y_0) = N_n x + y_0.$$

Тогда оператор $\widetilde{N}$ обратим и последовательность $\widetilde{N}_n \to \widetilde{N}$ по операторной норме. Поскольку $\widetilde{N}_n(x_n, 0) = y_n$, отсюда следует ограниченность последовательности x_n. □

Заметим, что аналог теоремы 4.2 справедлив и по отношению к классам Гельдера $C^\mu(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$.

В заключение обсудим многозначные J-аналитические функции, т. е. функции ϕ, производные ϕ' которых однозначны в области D. При этом в случае бесконечной области предполагается, что эта производная имеет порядок -2 на ∞. Указанные функции легко свести к однозначным с помощью специальной матрицы-функции $L(z)$, производная которой совпадает с $(2\pi i)^{-1} z_J^{-1}$. Нетрудно показать [11], что ее можно определить как значение аналитической функции $(2\pi i)^{-1} \ln \zeta$ от матрицы z_J. Тогда при любом $\eta \in \mathbb{C}^l$ многозначная вектор-функция $\phi(z) = L(z)\eta$ будет J-аналитической функцией, приращение которой при обходе точки $z = 0$ против часовой стрелки дает вектор η. В случае матрицы (2.1) эта функция дается формулой

$$\begin{aligned} &(i)\ L(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \ln(x + \nu_1 y) & 0 \\ 0 & \ln(x + \nu_2 y) \end{pmatrix}, \\ &(ii)\ L(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} \ln(x + \nu y) & y(x + \nu y)^{-1} \\ 0 & \ln(x + \nu y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

Исходя из $L(z)$, построим семейство многозначных функций, имеющих аналогичное поведение по отношению к связным компонентам контура $\Gamma = \partial D$. Пусть этот контур состоит из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области D контур Γ_m охватывает все остальные. Очевидно, дополнение к замкнутой области $\overline{D}$ на плоскости состоит из m областей $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_m$, каждая из которых ограничена простым контуром. При $1 \leqslant j \leqslant m-1$ все области $\widetilde{D}_j$ конечны, а области $\widetilde{D}_m$ и D имеют противоположный тип. Выберем внутри каждой области $\widetilde{D}_j$ по точке a_j и положим

$$L_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} L(z - a_j), & \sigma(D) = 1, \\ L(z - a_j) - L(z - a_m), & \sigma(D) = 0, \end{cases} \quad 1 \leqslant j \leqslant m - 1. \tag{4.13}$$

Заметим, что в случае бесконечной области производная $L_j'(z)$ имеет порядок -2 на ∞.

Нетрудно видеть, что в этих обозначениях любая многозначная функция единственным образом представима в виде

$$\phi(z) = \phi_0(z) + \sum_{j=1}^{m-1} L_j(z)\eta_j, \quad \eta_j \in \mathbb{C}^l, \tag{4.14}$$

где ϕ_0 однозначна. В соответствии с этим запись $\phi \in h^p(D)$ по определению означает, что в этом представлении $\phi_0 \in h^p(D)$. Аналогичным образом вводятся и другие классы многозначных функций.

Постановку задачи Римана—Гильберта (4.1) можно расширить на допустимые многозначные функции, т. е. функции ϕ, для которых вещественная l-вектор-функция $\operatorname{Re} G\phi$ однозначна. Они определяются разложением (4.14), в котором $\operatorname{Re} G\eta_j = 0$. Соответственно данную задачу можно рассматривать как задачу

$$\operatorname{Re} G\phi_0\big|_\Gamma + \sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re}[GL_j\eta_j]\big|_\Gamma = f$$

относительно $(\phi_0, \eta_1, \ldots, \eta_{m-1})$, где ϕ_0 однозначна, а вектора η_j $(j = 1, \ldots, m-1)$ принадлежат конечномерному пространству $\{\eta \in \mathbb{C}^l,\ \operatorname{Re} G\eta = 0\}$ размерности l. Хорошо известно [8], что расширение фредгольмового оператора на n измерений увеличивает его индекс на n. Следовательно, с учетом (4.2) индекс задачи (4.1) в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных функций равен l.

5. Первая и вторая краевые задачи для системы Ламе

Рассмотрим систему Ламе в области D, ограниченной ляпуновским контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$. Как известно [6], основные краевые условия для этой системы состоят в задании на граничном контуре либо вектора смещений

$$u^+ = f, \tag{5.1}$$

либо нормальной компоненты $\sigma^+ n = \sigma^+_{(1)} n_1 + \sigma^+_{(2)} n_2$ тензора напряжения σ, где $n = (n_1, n_2)$ — единичная внешняя нормаль на Γ и верхний знак $+$ указывает на граничное значение функций. Согласно (1.1), (2.13) последнее краевое условие можно записать в форме

$$n_1\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^+ + n_2\left(a_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)^+ = g, \tag{5.2}$$

где положено $x_1 = x,\ x_2 = y$. Таким образом, (5.1) отвечает задаче Дирихле для системы Ламе, а (5.2) — задаче Неймана. Эти задачи носят также название первой и второй краевых задач.

В случае $\sigma(D) = 0$ бесконечной области на градиент решения u этой системы накладывается условие

$$\operatorname{grad} u(z) = O(|z|^{-2}) \quad \text{при} \quad z \to \infty, \tag{5.3}$$

в частности, существует предел $u(\infty) = \lim u(z)$ на бесконечности. Из теоремы 2.1 тогда следует, что в представлении (2.10) функция $\phi'(z)$ имеет порядок -2 на ∞.

С точки зрения общих сильно эллиптических систем вопросы разрешимости задач Дирихле и Неймана для системы Ламе в гельдеровских и соболевских пространствах хорошо изучены [16]. В данном разделе рассмотрим эти задачи в классах Харди $h^p(D)$ для решений системы Ламе и сопряженных к ним функций, которые в соответствии с теоремами 2.1, 2.2 определяются как в разделе 4 по отношению к $G = b$ и $G = c$ соответственно.

В классе $C^1(\overline{D})$ единственность решения задачи Дирихле для системы (1.1) легко следует из формулы Грина:

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Gamma \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i\right)u|dt|, \tag{5.4}$$

где для единообразия положено $x_1 = x, x_2 = y$. Если u удовлетворяет однородному краевому условию (5.1), то интеграл по Γ в этом равенстве выпадает, и на основании (1.4) решение u должно быть тривиальным, т. е. иметь вид (2.15). Совместно с (1.4) отсюда $u = 0$.

Из тех же соображений заключаем, что однородная задача (5.2) допускает только тривиальные решения. С другой стороны, для двух решений $u, u_0 \in C^1(\overline{D})$ можно написать аналогичное (5.4) тождество

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_\Gamma \left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_i\right)u_0|dt|.$$

Если u_0 является тривиальным решением, то

$$\sum_{i,j=1}^{2}\int_D a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u_0}{\partial x_i}dx_1dx_2 = \sum_{i,j=1}^{2}\int_D a_{ij}\frac{\partial u_0}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_1dx_2 = 0,$$

так что условие ортогональности

$$\int_\Gamma g(t)u_0(t)|dt| = 0 \tag{5.5}$$

правой части задачи (5.2) тривиальным решениям u_0 необходимо для ее разрешимости.

Теорема 5.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда задача Дирихле однозначно разрешима в классе $h^p(D)$, $p > 1$.*

Если правая часть $f \in C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, то любое решение $u \in h^p(D)$ этой задачи принадлежит $C^\mu(\overline{D})$. Аналогично $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $u \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. В силу теорем 2.1 и 3.3 задача Дирихле равносильна задаче Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} b\phi^+ = f \tag{5.6}$$

в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных решений. Как отмечено в конце раздела 3, в рассматриваемом классе эта задача фредгольмова и ее индекс равен 2. Если $f = 0$, то по теореме 4.1 функция $\phi \in C^1(\overline{D})$ и, соответственно, $u = \operatorname{Re} b\phi$ является решением однородной задачи Дирихле системы Ламе. Как отмечено выше, отсюда $u = 0$, так что по теореме 2.1 функция ϕ постоянна. Итак, размерность пространства решений однородной задачи (5.6) равна 2 и, поскольку ее индекс равен 2, эта задача безусловно разрешима. Тем самым первое утверждение теоремы установлено. Вторая часть теоремы является следствием второй части теоремы 4.1. □

Обратимся к постановке задачи (5.2) в классе Харди. Если $u \in C^1(\overline{D})$, то в силу (2.14) равенство (5.2) можно записать по отношению к сопряженной функции v в форме

$$(v^+)' = g, \tag{5.7}$$

где штрих означает производную по параметру длины дуги, отсчитываемой в направлении, положительном по отношению к D.

Пусть Γ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, — простые контуры, составляющие Γ. В силу (2.19) существуют единственные $\eta_j \in \mathbb{C}^2$, удовлетворяющие системе

$$\operatorname{Re} b\eta_j = 0,\ \operatorname{Re} c\eta_j = \int\limits_{\Gamma_j} g(t)|dt|, \quad 1 \leqslant j \leqslant m-1. \tag{5.8}$$

Рассмотрим многозначное решение системы Ламе

$$u_1(z) = u(z) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m-1} bL_j(z)\eta_j, \tag{5.9}$$

сопряженная функция к которому согласно теореме 2.2 дается равенством

$$v_1(z) = v(z) - \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{m-1} cL_j(z)\eta_j.$$

Очевидно, она удовлетворяет аналогичному (5.7) краевому условию

$$(v_1^+)' = g_1 \tag{5.10}$$

с правой частью

$$g_1 = g - \left[\left(\sum_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j\right)^+\right]'.$$

В силу (5.8) функция g_1 удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Gamma_j} g_1(t)|dt| = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{5.11}$$

Пусть необходимое условие разрешимости (5.5) задачи Неймана выполнено. Тогда, выбирая в качестве u_0 постоянные вектор-функции, приходим к аналогичному (5.11) равенству и на Γ_m. Таким образом, существует первообразная $f_1 \in C^1(\Gamma)$ функции g_1. При этом функция v_1 однозначна и (5.9) переходит в задачу Дирихле

$$v_1^+ = f_1 \tag{5.12}$$

для сопряженной функции v.

Последнюю задачу уже можно рассматривать как в классе Гельдера $C^\mu(\overline{D})$, так и в классе Харди $h^p(D)$ сопряженных функций. Если однозначная сопряженная функция $v_1 \in h^p(D)$ к решению u_1 системы Ламе, удовлетворяющая краевому условию (5.12), найдена, то однозначную функцию u, определяемую равенством (5.9), будем называть решением задачи Неймана. Приведенная процедура устанавливает соответствие между задачей (5.2) решения системы Ламе, для которого сопряженная функция многозначна, и задачей (5.12) для однозначных сопряженных функций к многозначным решениям системы Ламе.

В случае $v_1 \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ так определенная функция u принадлежит тому же классу и удовлетворяет классическому краевому условию (5.2). В частности, тогда условие (5.5) для g_1 необходимо должно быть выполнено, поскольку оно имеет место для g и для сужения на Γ функции $\sum \operatorname{Re} cL_j\eta_j$. Напомним, что в случае бесконечной области тривиальными решениями являются только постоянные векторы.

Таким образом, после интегрирования по частям условие ортогональности (5.5) в случае бесконечной области выпадает, а в случае конечной области D переходит в одно условие

$$\int\limits_{\Gamma} f_1(t)n(t)|dt| = 0, \tag{5.13}$$

где подынтегральное выражение понимается как скалярное произведение $f_1(t)$ и вектора нормали $n = (n_1, n_2)$ в точке $t \in \Gamma$ в $\mathbb{R}^2$.

Итак, если область D конечна и $f_1 \in C^{\mu}(\Gamma)$, то условие (5.13) необходимо для разрешимости задачи (5.12). В силу соображений плотности отсюда заключаем, что оно необходимо и для любой правой части $f_1 \in L^p(\Gamma)$.

Теорема 5.2. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда однородная задача Дирихле для сопряженных функций в классе $h^p(D)$, $p > 1$, имеет только нулевое решение, а неоднородная задача безусловно разрешима в случае $\sigma(D) = 0$, а при $\sigma(D) = 1$ она разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условию ортогональности* (5.13). *В частности, эта задача фредгольмова и ее индекс равен $-\sigma(D)$.*

Если правая часть $f_1 \in C^{\mu}(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, то любое решение $v_1 \in h^p(D)$ этой задачи принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$. Аналогично $f_1 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ влечет $v_1 \in C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы 5.1. В силу теорем 2.2 и 4.1 задача Дирихле (5.12) равносильна задаче Римана—Гильберта

$$\operatorname{Re} c\phi^+ = f_1 \tag{5.14}$$

в классе $h^p(D)$ допустимых многозначных решений. В частности, на основании теоремы 4.1 последняя задача фредгольмова индекса 2. Отсюда же следует и вторая часть доказываемой теоремы, в частности, любое решение v однородной задачи принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Аналогичным свойством обладает и многозначное решение u системы Ламе, сопряженная функция которого есть v.

Условимся под *разрезом* области D понимать гладкую дугу, которая соединяет различные контуры Γ_j. Рассмотрим конечное число попарно непересекающихся разрезов $L_1, \dots, L_n$, разбивающих область D на подобласти $D_1, \dots, D_l$, каждая из которых ограничена простым кусочно-гладким контуром. Тогда в каждой области D_k любая многозначная J-аналитическая функция ϕ допускает однозначную ветвь ϕ_k, при этом если $L_s \subseteq \partial D_k \cap \partial D_r$, то разность $\phi_k - \phi_r$ постоянна на L_s.

Рассмотрим теперь многозначное решение ϕ однородной задачи (5.14), которое по теореме 4.1 принадлежит классу $C^1(\overline{D})$. По определению для этого решения функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ однозначна в области D и обращается в нуль на Γ. Тогда к функциям $u_r = \operatorname{Re} b\phi_r$ в области D_k можно применить тождество (5.4):

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D_k} \left(a_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int\limits_{\partial D_k} v_k' u_k |dt|,$$

где $v_k = \operatorname{Re} c\phi_k$ и штрих означает касательную производную в направлении, оставляющем область D_k слева. Сумма правых частей этого равенства по всем k обращается в нуль. В самом деле, интегралы по $\Gamma \cap \partial D_k$ обращаются в нуль в силу краевого условия для v. С другой стороны, если $L_s \subseteq \partial D_k \cap \partial D_r$, то на L_s имеем равенства $v_k = v_r$ и $v_k' = -v_r'$, поскольку касательные производные берутся по противоположным направлениям. С другой стороны, разность $u_k - u_r$

на L_s равна постоянному вектору $\xi_s \in \mathbb{R}^2$. Поэтому с точностью до знака

$$\int\limits_{\partial D_k} v_k' u_k |dt| + \int\limits_{\partial D_r} v_r' u_k |dt| = \int\limits_{\partial D_k} v_k' \xi_s |dt| = 0,$$

где учтено, что на концах L_s функция v_k обращается в нуль.

Таким образом, интеграл от левой части (5.4) равен нулю и, следовательно, $u = \operatorname{Re} b\phi$ является тривиальным решением системы Ламе и, соответственно, $v = 0$.

Как отмечено в разделе 2, функции ϕ с этим свойством в случае $\sigma(D) = 1$ являются многочленами первой степени и образуют трехмерное пространство, а при $\sigma(D) = 1$ являются постоянными векторами и образуют двумерное пространство. Поскольку индекс задачи равен 2, отсюда следует, что в случае $\sigma(D) = 1$ неоднородная задача безусловно разрешима, а при $\sigma(D) = 0$ эта задача разрешима при выполнении одного условия ортогональности, которым, очевидно, и является условие (5.13). □

В качестве следствия теоремы 5.2 приходим к следующему классическому результату о разрешимости задачи Неймана.

Теорема 5.3. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Тогда однородная задача Неймана для системы Ламе в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$, имеет только тривиальные решения, а неоднородная разрешима тогда и только тогда, когда ее правая часть удовлетворяет условиям ортогональности* (5.5) *этим тривиальным решениям.*

Проиллюстрируем также применение теоремы 5.2 в следующей ситуации.

Лемма 5.1. *Пусть область D бесконечна и ограничена простым контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Пусть f есть сужение многочлена $p(x,y) = x\xi^0 + y\xi^1$ на Γ, где ξ^k $(k = 0,1)$ фигурируют в* (2.30). *Тогда существует единственная J-аналитическая функция ϕ_0, которая принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ при любом $\mu < \nu$, исчезает на бесконечности и удовлетворяет краевому условию*

$$\operatorname{Re} c\phi_0^+ = \xi + f_1 \tag{5.15}$$

с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Доказательство. Оно требует только единственность. Пусть функция $\phi \in H^p(D)$ исчезает на бесконечности и удовлетворяет краевому условию $\operatorname{Re} c\phi^+ = \xi$ с некоторым $\xi \in \mathbb{R}^2$. Тогда по теореме 5.2 функция $v = \operatorname{Re} c\phi$ тождественно равна нулю, так что на основании теоремы 4.2 функция ϕ является многочленом второй степени. Поскольку по условию $\phi(z) \to 0$ при $z \to \infty$, этот многочлен равен нулю. Таким образом, единственность функции ϕ_0 леммы установлена. □

6. Потенциалы двойного слоя

Исходя из единичной внешней нормали $n = n_1 + in_2$ на ляпуновском контуре Γ, рассмотрим в области D интегралы

$$(P\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} \varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{6.1}$$

$$(Q\varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Gamma} \frac{\operatorname{Im}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} \varphi(t)|dt| \quad z \in D, \tag{6.2}$$

с вещественной плотностью φ.

Интегралы (6.1) и (6.2) можно также рассматривать и для $z = t_0 \in \Gamma$, в этом случае их обозначаем $P^*\varphi$ и $Q^*\varphi$ соответственно. Поскольку контур Γ ляпуновский, аналогично лемме 3.1 проверяется, что ядро интегрального оператора P имеет слабую особенность. Что касается интеграла (6.2), то, как и соответствующий интеграл Коши, он является сингулярным.

Поскольку $dt = in|dt|$, эти интегралы связаны с интегралом типа Коши соотношением

$$(P\varphi)(z) - i(Q\varphi)(z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(t)dt}{t-z}. \tag{6.3}$$

Поэтому функции $P\varphi$ и $Q\varphi$ являются гармоническими в области D. Из равенства (6.3) непосредственно следует, что операторы P, Q ограничены $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, $p > 1$, и справедливы формулы

$$(P\varphi)^+ = \varphi + P^*\varphi, \quad (Q\varphi)^+ = Q^*\varphi \tag{6.4}$$

для их граничных значений. Из этих же соображений в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ эти операторы ограничены $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ и $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$, $0 < \mu < \nu$. Хорошо известно также, что оператор P ограничен $C(\Gamma) \to C(\overline{D})$.

Интеграл (6.1) представляет собой классический потенциал двойного слоя. Обобщенные потенциалы двойного слоя для решений системы Ламе и сопряженных к ним функций построим по аналогичной схеме, исходя из матрицы (2.1), интеграла типа Коши для J-аналитических функций и матриц b, c, фигурирующих в теоремах 2.1 и 2.2. С этой целью в обозначениях (3.1) введем однородные степени -1 матрицы-функции переменной $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ по формулам

$$\begin{aligned} H_{11}(\xi) &= \operatorname{Im}[b\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}b^{-1}], \quad H_{22}(\xi) = \operatorname{Im}[c\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}c^{-1}], \\ H_{21}(\xi) &= \operatorname{Im}[c\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}b^{-1}], \quad H_{12}(\xi) = \operatorname{Im}[b\,(i\xi)_J\xi_J^{-1}c^{-1}]. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Заметим, что в явном виде $(i\xi)_J\xi_J^{-1} = (-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}$. Очевидно, матрицы $H(\xi)$ однородны степени нуль и в силу леммы 2.1 не зависят от выбора b. Эти матрицы определяют интегральные операторы

$$(P_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\operatorname{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2} H_{kr}(t-z)\varphi(t)|dt|, \quad z \in D, \tag{6.6}$$

$$(P^*_{kr}\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\operatorname{Re}[\overline{n(t)}(t-t_0)]}{|t-t_0|^2} H_{kr}(t-t_0)\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma. \tag{6.7}$$

Как и в случае P^*, ядро операторов P^*_{kr} имеет слабую особенность, что с учетом четности матриц-функций $H(\xi)$ устанавливается совершенно аналогично доказательству леммы 3.2. Поэтому на основании леммы 3.1 операторы P^*_{kr} компактны в $L^p(\Gamma)$.

Следующая лемма описывает связь функций $P_{kr}\varphi$ с интегралом типа Коши $I\varphi$, введенном в разделе 3. Удобно класс h^p ввести и для функций $w = P_{kr}\varphi$ условием конечности соответствующего выражения в правой части (3.8).

Лемма 6.1. *Имеет место равенство*

$$[\operatorname{Im}(b_k b_r^{-1})]Q\varphi + P_{kr}\varphi = 2\operatorname{Re}[b_k I(b_r^{-1}\varphi)], \quad k, r = 1, 2, \tag{6.8}$$

где для единообразия положено $b_1 = b$, $b_2 = c$. В частности, операторы P_{kr} ограничены $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$, $p > 1$, и имеют место формулы

$$\begin{aligned} &(P_{kk}\varphi)^+ = \varphi + P^*_{kk}\varphi, \ k = 1, 2, \\ &(P_{21}\varphi)^+ = [\operatorname{Re}(cb^{-1})]\varphi + P^*_{21}\varphi, \\ &(P_{12}\varphi)^+ = [\operatorname{Re}(bc^{-1})]\varphi + P^*_{12}\varphi \end{aligned} \tag{6.9}$$

для угловых граничных значений.

Доказательство. По отношению к единичному касательному вектору $e = in$ можно записать $e\xi^{-1} = |\xi|^{-2}[\operatorname{Re}(\overline{n}\xi) - i\operatorname{Im}(\overline{n}\xi)]$ или

$$|\xi|^2(e_1 + ie_2) = [\operatorname{Im}(\overline{n}\xi)]\xi + [\operatorname{Re}(\overline{n}\xi)]i\xi.$$

Поскольку выражения в квадратных скобках вещественны, отсюда

$$|\xi|^2 e_J = [\operatorname{Im}(\overline{n}\xi)]\xi_J + [\operatorname{Re}(\overline{n}\xi)](i\xi)_J.$$

что с учетом определения (6.5) приводит к равенству

$$|\xi|^2\operatorname{Im}[b_k\xi_J^{-1}e_J)b_r^{-1}] = [\operatorname{Im}(\overline{n}\xi)]\operatorname{Im}(b_k b_r^{-1}) + [\operatorname{Re}(\overline{n}\xi)]H_{kr}(\xi).$$

На основании (6.2), (6.6) отсюда следует (6.8).

Аналогичное равенство справедливо и для интегральных операторов со «звездой» в обозначениях:

$$[\operatorname{Im}(b_k b_r^{-1})]Q_0^*\varphi + P^*_{kr}\varphi = \operatorname{Re}[b_k S(b_r^{-1}\varphi)]. \tag{6.10}$$

С другой стороны, формулы (3.7) и (6.4), примененные к (6.8), дают соотношение

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]Q_0^*\varphi + (P_{kr}\varphi)^+ = [\mathrm{Re}(b_k b_r^{-1})]\varphi + \mathrm{Re}[b_k S(b_r^{-1}\varphi].$$

Совместно с предыдущим равенством отсюда следует (6.9). □

С учетом (6.5) из (6.8) и теорем 2.1, 2.2 непосредственно вытекает, что следующие пары являются решением u системы Ламе и сопряженной к ним функцией v:

$$\begin{aligned} u = P_{11}\varphi, \quad v = [\mathrm{Im}(cb^{-1})]Q_0\varphi + P_{21}\varphi;\\ v = P_{22}\varphi, \quad u = [\mathrm{Im}(bc^{-1})]Q_0\varphi + P_{12}\varphi. \end{aligned} \tag{6.11}$$

В соответствии с этим интегралы $P_{11}\varphi$ и $P_{22}\varphi$ естественно назвать *обобщенными потенциалами двойного слоя* для, соответственно, решений системы Ламе и сопряженных к ним функций.

Предыдущие результаты распространяются и на пространства непрерывных функций.

Лемма 6.2. *Пусть $\Gamma \in C^{1,\nu}$, $0 < \mu < \nu$ и X означает любой из символов C, $C^\mu, C^{1,\mu}$. Тогда оператор P_{kr} ограничен $X(\Gamma) \to X(\overline{D})$, а оператор P_{kr}^* компактен в $X(\Gamma)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала операторы P_{kr}. Ограниченность этих операторов $C^\mu(\Gamma) \to C^\mu(\overline{D})$ вытекает из равенства (6.8) и аналогичного свойства операторов Q и I. По отношению к классам $C^{1,\mu}$ доказательство основывается на формуле дифференцирования интеграла типа Коши $\phi = I\varphi$. Пусть $\varphi \in C^1(\Gamma)$ и $D\varphi$ означает производную φ по параметру длины дуги на Γ, отсчитываемой в положительном направлении. Тогда

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [(t-z)_J^{-2} e_J(t)\varphi(t)|dt| = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [D(t-z)_J^{-1}]\varphi(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [J(t-z)_J^{-2} e_J(t)\varphi(t)|dt| = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [DJ(t-z)_J^{-1}]\varphi(t)|dt|,$$

откуда после интегрирования по частям приходим к формулам дифференцирования

$$\frac{\partial(I\varphi)}{\partial x} = I(e_J^{-1}D\varphi), \quad \frac{\partial(I\varphi)}{\partial y} = I(Je_J^{-1}D\varphi). \tag{6.12}$$

С учетом (6.4) аналогичные формулы имеем и для оператора Q_0:

$$\frac{\partial(Q\varphi)}{\partial x} = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{(D\varphi(t)|dt|}{t-z}\right], \quad \frac{\partial(Q\varphi)}{\partial y} = -\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{(D\varphi(t)|dt|}{t-z}\right]. \tag{6.13}$$

Применяя эти формулы к (6.8), приходим к ограниченности операторов $P_{kr} : C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Доказательство рассматриваемого утверждения леммы для пространств C опирается на оценку

$$\sup_{z\in D}\int_\Gamma \frac{|\,\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]|}{|t-z|^2}|dt| < \infty,$$

хорошо известную для классических потенциалов двойного слоя. Поскольку элементы однородной степени 0 матрицы-функции H по модулю не превосходят некоторой постоянной, отсюда и

$$\sup_{z\in D}\int_\Gamma \frac{|\,\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]|}{|t-z|^2}|H_{kr}(t-z)||dt| < \infty, \tag{6.14}$$

где под $|H(t-z)|$ понимается какая-либо норма в $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Поэтому рассматриваемое утверждение будет установлено, если покажем, что для $\varphi \in C(\Gamma)$ функция $(P_{kr}\varphi)(z)$, $z \in D$, допускает предел в фиксированной граничной точке $t_0 \in \Gamma$. Согласно (6.8) оператор P_{kr} переводит постоянные вектор-функции в постоянные. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(t_0) = 0$. Если $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ — некоторая окрестность точки t_0, то, очевидно,

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^2}H(t-z)\varphi(t)|dt| \to \int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-t_0)]}{|t-t_0|^2}H(t-t_0)\varphi(t)|dt|$$

при $t \to t_0$. С другой стороны, в силу (6.14) при надлежащем выборе Γ_0 аналогичный интеграл по Γ_0 можно сделать сколь угодно малым по модулю равномерно по z.

Обратимся к операторам P^*_{kr}. В предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ их компактность в пространствах $C^\mu(\Gamma)$ и $C^\mu(\Gamma)$, $0 < \mu < \nu$, устанавливается с помощью леммы 3.1 совершенно аналогично доказательству леммы 3.2. Нужно только учесть, что однородная степени нуль матрица функция $H_{kr}(\xi)$ четна. Что касается последнего случая пространства $C^{1,\mu}$, то установим предварительно формулу дифференцирования

$$DP^*_{kr}\varphi = \widetilde{P}^*_{kr}D\varphi, \quad \varphi \in C^{1,\mu}(\Gamma), \tag{6.15}$$

где оператор $\widetilde{P}^*_{kr}$ получается заменой $n(t)$ на $n(t_0)$ под интегралом в левой части (6.7).

Доказательство основывается на использовании формул дифференцирования (6.12) и (6.13). Пусть оператор $\widetilde{Q}^*$ получается из Q^* аналогичным образом заменой $n(t)$ на $n(t_0)$ под знаком интеграла. Положим еще $\widetilde{S} = e_J S e_J^{-1}$ или, в явной форме,

$$(\widetilde{S}\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma e_J(t_0)(t-t_0)_J^{-1}\varphi(t)|dt|, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Тогда, как и при доказательстве леммы 6.1, убеждаемся, что аналогичное (6.10) равенство справедливо и для рассматриваемых операторов:

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]\widetilde{Q}^*_0\varphi + \widetilde{P}^*_{kr}\varphi = \mathrm{Re}[b_k\widetilde{S}(b_r^{-1}\varphi)]. \tag{6.16}$$

Зафиксируем далее точку $t_0 \in \Gamma$ и подставим в выражение

$$e_1(t_0)\frac{\partial(I\varphi)}{\partial x}(z) + e_2(t_0)\frac{\partial(I\varphi)}{\partial y}(z)$$

частные производные (6.12). Тогда в пределе при $z \to t_0$ с учетом формул Сохоцкого—Племеля (3.7) получим $2D(I\varphi)^+ = D\varphi + \widetilde{S}D\varphi$. С другой стороны, дифференцирование формулы Сохоцкого—Племеля дает аналогичное равенство $2D(I\varphi)^+ = D\varphi + DS\varphi$. Сравнивая его с предыдущим, получим формулу дифференцирования $DS = \widetilde{S}D$ сингулярного оператора S. Совершенно аналогично с использованием (6.13) получим равенство $DQ = \widetilde{Q}_0 D$ для оператора Q. Действуя на равенство (6.10) оператором D и применяя эти формулы, получим

$$[\mathrm{Im}(b_k b_r^{-1})]\widetilde{Q}D\varphi + DP^*_{kr}\varphi = \mathrm{Re}[b_k\widetilde{S}(b_r^{-1}\varphi)].$$

Совместно с (6.16) отсюда следует (6.15).

Как и выше убеждаемся, что оператор $\widetilde{P}^*_{kr}$ компактен в пространстве $C^\mu(\Gamma)$. На основании (6.15) отсюда следует компактность оператора P^*_{kr} в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Если сопряженная функция представлена одним из двух способов (6.11), то по формулам (2.16) можно определить элементы тензора напряжений σ. Поэтому важную роль играют явные формулы дифференцирования функции v в представлениях (6.11). Они непосредственно получаются из соотношения (6.8) леммы 6.1 и формул дифференцирования (6.12) интеграла типа Коши.

Лемма 6.3. *Пусть $\varphi \in C^1(\Gamma)$ и $D\varphi$ означает производную φ по касательному направлению $e = in$ на Γ. Тогда*

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mathrm{Im}[c(t-z)_J^{-1}c^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mathrm{Im}[cJ(t-z)_J^{-1}c^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

если $v = P_{22}\varphi$, и

$$\frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mathrm{Im}[c(t-z)_J^{-1}b^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \mathrm{Im}[cJ(t-z)_J^{-1}b^{-1}](D\varphi)(t)|dt|,$$

если функция v сопряжена к $u = P_{11}\varphi$.

7. Интегральные представления потенциалами двойного слоя

Рассмотрим вопрос о представлении решений системы Ламе и сопряженных к ним функций обобщенными потенциалами двойного слоя. Предварительно опишем ядро $\ker P_{11} = \{\varphi \in L^p(\Gamma) \mid P_{11}\varphi = 0\}$ оператора P_{11}. Согласно теореме 3.1 аналогичное ядро оператора I состоит из комплексных функций, которые постоянны на простых контурах, составляющих Γ (и обращаются в нуль на внешнем контуре в случае $\sigma(D) = 1$ конечной области). Поэтому с учетом (6.8) аналогичные вещественные вектор-функции входят в ядро $\ker P_{11}$. В действительности они полностью описывают это ядро.

Лемма 7.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из связных компонент $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области контур Γ_m охватывает все остальные компоненты.*

Тогда ядро оператора P_{11} состоит из функций, которые постоянны на связных компонентах Γ и обращаются в нуль на Γ_m в случае конечной области. В частности, $\dim(\ker P_{11}) = 2[m - \sigma(D)]$.

Доказательство. Запишем равенство (6.8) для рассматриваемого оператора:

$$P_{11}\varphi = 2\,\mathrm{Re}[bI(b^{-1}\varphi)]. \tag{7.1}$$

Предполагая $P_{11}\varphi = 0$, рассмотрим в области D интеграл типа Коши $\phi = I(b^{-1}\varphi)$ и аналогичный интеграл в дополнении $\widetilde{D} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, который обозначим $\psi = \widetilde{I}(b^{-1}\varphi)$. Для граничных значений этих функций в силу (3.7) можно записать:

$$\phi^+ - \psi^- = b^{-1}\varphi, \tag{7.2}$$

где учтено, что контур Γ ориентирован отрицательно по отношению к $\widetilde{D}$.

В соответствии с (7.1) предположение $P_{11}\varphi = 0$ означает, что $\mathrm{Re}\, b\phi = 0$. Следовательно, функция ϕ постоянна в области D, более точно,

$$b\phi = i\xi,\ \xi \in \mathbb{R}^2.$$

На основании (7.2) и вещественности φ отсюда

$$\mathrm{Im}\, b\psi^- = \xi, \quad \varphi = -\,\mathrm{Re}\, b\psi^-. \tag{7.3}$$

Следовательно, функция $u_0 = (\mathrm{Im}\, b\psi) - \xi$ является решением однородной задачи Дирихле для системы Ламе в связных компонентах открытого множества $\widetilde{D}$, и по теореме 5.1 она тождественно равна нулю. Поэтому функция ψ постоянна в связных компонентах $\widetilde{D}$. Если область D конечна, то область $\widetilde{D}_m$ бесконечна, и поскольку $\psi(\infty) = 0$, функция $\psi = 0$ в $\widetilde{D}_m$. Совместно со вторым равенством (7.3) отсюда следует, что функция φ постоянна на контурах Γ_j и в случае $\sigma(D) = 1$ обращается в нуль на Γ_m. □

Следующая основная теорема аналогично теореме 3.1 решает вопрос о представлении решений системы Ламе обобщенными потенциалами двойного слоя. Согласно (7.1) функцию $u = P_{11}\varphi$ можно записать в виде $u = \mathrm{Re}\, b\phi$, где J-аналитическая функция $\phi = I(b^{-1}\varphi)$ однозначна в области D. Таким образом, функция, сопряженная к $u = P_{11}\varphi$, однозначна в области D. Кроме того, в случае $\sigma(D) = 0$ функция $P_{11}\varphi$ исчезает на бесконечности. Поэтому в обозначениях (4.12), (4.13) функции вида

$$u = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mathrm{Re}\, bL_j\eta_j, & \sigma(D) = 1, \\ \xi + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mathrm{Re}\, bL_j\eta_j, & \sigma(D) = 0, \end{cases} \qquad \mathrm{Re}\, b\eta_j = 0, \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{7.4}$$

не могут быть представлены потенциалом $P_{11}\varphi$. Заметим, что эти функции образуют пространство размерности $2[m - \sigma(D)]$. В действительности дополнение к этому пространству дает образ оператора P_{11}.

Теорема 7.1. *Пусть область D ограничена контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$, состоящим из связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем в случае конечной области контур Γ_m охватывает все остальные компоненты. Тогда любое решение $u \in h^p(D)$, $1 < p < \infty$, системы Ламе представимо в виде*

$$u = P_{11}\varphi + u_0 \tag{7.5}$$

с некоторыми $\varphi \in L^p(\Gamma)$ и функцией u_0 вида (7.4)*, причем последняя функция определяется однозначно по u.*

Если $u \in X(\overline{D})$, где X означает любой из символов C, C^μ, $C^{1,\mu}$, $\mu < \nu$, то и $\varphi \in X(\Gamma)$.

Доказательство. Для первого утверждения доказательство почти очевидно. В силу леммы 6.1 композиция P_{11} с оператором задачи Дирихле (2.1) представляет собой фредгольмовый оператор $1 + P_{11}^*$ индекса нуль, поэтому на основании теоремы 4.2 и известных свойств фредгольмовых операторов [8] оператор P_{11} также фредгольмов и его индекс равен 1. В частности, образ $\operatorname{im} P_{11}$ замкнут и его коразмерность совпадает с размерностью $2[m - \sigma(D)$ ядра $\ker P_{11}$. Поскольку пространство функций (7.4) также имеет эту размерность и не пересекается с образом $\Im P_{11}$, откуда следует справедливость первой части теоремы.

Второе утверждение является следствием леммы 4.1. В самом деле, если $u \in X(\overline{D})$? то согласно (7.5) функция $\varphi \in L^p(\Gamma)$ является решением уравнения $\varphi + P_{11}^*\varphi = f_1$ с правой частью $f_1 = u^+ - u_0^+ \in X(\Gamma)$. Согласно лемме 6.2 оператор P_{11}^* компактен как в $L^p(\Gamma)$, так и в $X(\Gamma)$, так что регуляризатором оператора $1+P_{11}^*$ может служить единичный оператор. Поэтому на основании леммы 4.1 функция $\varphi \in X(\Gamma)$. □

Теорема 7.1 позволяет свести задачу Дирихле в пространстве $h^p(D)$ к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма в $L^p(\Gamma)$. Пусть $k = 2[m - \sigma(D)$ и $g_1, \ldots, g_k$ есть базис пространства $\ker P_{11}$. Пусть также $u_1, \ldots, u_k$ образуют базис пространства функций вида (7.4). Тогда в силу теоремы 7.1 оператор

$$\widetilde{P}\varphi = P_{11}\varphi + \sum_1^k (\varphi, g_j)u_j, \quad (\varphi, g) = \int_\Gamma \varphi(t)g(t)|dt|,$$

обратим $L^p(\Gamma) \to h^p(D)$ и задача Дирихле $u^+ = f$ редуцируется к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода

$$\varphi + P_{11}^*\varphi + \sum_1^k (\varphi, g_j)u_j^+ = f. \tag{7.6}$$

Если φ есть решение этого уравнения, то первая пара в (6.11) определяет решение u задачи Дирихле и отвечающее ему сопряженную функцию.

Как видно из доказательства теорем 3.1 и 5.1, разрешимость задачи Дирихле для системы Ламе сводится к сингулярному интегральному уравнению на Γ, что не позволяет в рамках этого подхода рассматривать эту задачу в классе $C(\overline{D})$. Классические потенциалы двойного слоя, как известно [5], строятся исходя из фундаментальной матрицы решений для исходной эллиптической системы. Для системы Ламе варианты матриц этого типа были предложены в [4], однако построенные с их помощью потенциалы двойного слоя также редуцируют основные краевые задачи для системы Ламе к сингулярным интегральным уравнениям на границе. Достоинством рассматриваемых обобщенных потенциалов двойного слоя $u = P_{11}\varphi$ является то, что они дают возможность свести задачу к уравнению Фредгольма (7.6), которое свободно от указанного недостатка. Заметим, что эти потенциалы связаны с вариантом $\operatorname{Re}[(2\pi i)^{-1} b \ln z_J]$ фундаментальной матрицы системы Ламе.

Обратимся к оператору P_{22} и аналогично предыдущему опишем сначала все его ядро.

Лемма 7.2. *В условиях леммы* 7.1 *ядро* $\ker P_{22}$ *оператора* P_{22} *состоит из функций* φ, *для которых в обозначениях* (2.30)

$$\varphi\big|_{\Gamma_j} = \xi_j + \lambda_j(x\xi^0 + y\xi^1)\big|_{\Gamma_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant m - \sigma(D), \tag{7.7}$$

$$\varphi\big|_{\Gamma_m} = \lambda_m \operatorname{Im}\left(c\psi_0\big|_{\Gamma_m}\right), \quad \sigma(D) = 1, \tag{7.8}$$

где $\xi_j \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ и функция ψ_0 определена, как в лемме 5.1, *по отношению к $\widetilde{D}_m$.*

В частности, $\ker P_{22} \supseteq \ker P_{11}$ *и* $\dim \ker P_{22} = 3m - 2\sigma(D)$.

Доказательство. Оно осуществляется аналогично лемме 7.1. Пусть $P_{22}\varphi = 0$, так что для интегралов типа Коши $\phi = I(c^{-1}\varphi)$ и $\psi = \widetilde{I}(c^{-1}\varphi)$ в D и $\widetilde{D}$, соответственно, имеем соотношения

$$\operatorname{Re} c\phi = 0 \tag{7.9}$$

и $\phi^+ - \psi^- = c^{-1}\varphi$. Последнее комплексное равенство с учетом (7.9) равносильно двум вещественным:

$$\operatorname{Im} c\psi^- = \operatorname{Im} c\phi^+, \tag{7.10}$$

$$\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-. \tag{7.11}$$

Верно и обратное: если некоторые функции ϕ и ψ из класса H^p удовлетворяют (7.9) и (7.10), то $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^- \in \ker P_{22}$. В самом деле, тогда $\phi^+ - \psi^- = c^{-1}\varphi$ и формула Коши (3.3), примененная к ϕ в области D и к ψ в связных компонентах $\widetilde{D}$, дает равенства

$$\phi = I(c^{-1}\varphi), \quad \psi = \widetilde{I}(c^{-1}\varphi),$$

первое из которых совместно с (7.9) означает $P_{22}\varphi = 0$.

Дальнейшие рассуждения проведем отдельно для двух случаев конечной и бесконечной областей.

1) Пусть область D бесконечна. Тогда с учетом теоремы 2.2 из (7.9) следует $\phi = 0$ и (7.10) переходит в равенство $\operatorname{Im} c\psi^- = 0$. Поэтому на основании теоремы 5.2 в каждой компоненте $\widetilde{D}_j$ открытого множества $\widetilde{D}$ функция $\operatorname{Im} c\psi$ тождественно равна нулю. С учетом теоремы 2.2 отсюда заключаем, что в области $\widetilde{D}_j$ функция $i\psi(z)$ является многочленом вида (2.29), т. е. в обозначениях леммы 2.3

$$\psi(z) = i(\eta_j + \lambda_j z_J e), \quad z \in \widetilde{D}_j, \tag{7.12}$$

с некоторыми $\eta_j \in \mathbb{C}^2$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Остается заметить, что $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ для функций вида (7.11) описываются на Γ_j равенством (7.7).

2) Пусть область D конечна. Тогда уравнение (7.9) определяет многочлен $\phi = p$ вида (7.12):

$$p(z) = \eta + \lambda z_J e, \quad z \in D.$$

В случае $j \leqslant m-1$ задачу (7.10) для функции ψ в конечной области $\widetilde{D}_j$ можно переписать в форме $\operatorname{Re} ci(\psi - p)^- = 0$, так что $\psi - p$ определяется правой частью (7.12). Поскольку $\operatorname{Re} cp = 0$, для функции $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ имеем выражение (7.7).

Что касается бесконечной области $\widetilde{D}_m$, то по отношению к $\phi_0 = -i\psi$ уравнение (7.10) в этой области можно записать в форме

$$\operatorname{Re} c\phi_0^- = \operatorname{Re} c(-ip)\big|_{\Gamma_m}.$$

В силу леммы 2.3 к рассматриваемой задаче можно применить лемму 5.1, согласно которой существует единственная функция $\psi = i\phi_0$, удовлетворяющая этому краевому условию. Соответственно $\varphi = -\operatorname{Re} c\psi^-$ на Γ_m определяется формулой (7.8). □

Заметим, что в предположении $\Gamma \in C^{1,\nu}$ функция (7.8) принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$ для любого $\mu < \nu$. Класс функций этого типа обозначаем кратко $C^{1,\nu-0}(\Gamma)$.

Обратимся к вопросу о представлении сопряженных функций потенциалами $P_{22}\varphi$. Как и в случае решений (7.4) системы Ламе убеждаемся, что функции вида

$$v = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j, & \sigma(D) = 1, \\ \xi + \sum\limits_{j=1}^{m-1} \operatorname{Re} cL_j\eta_j, & \sigma(D) = 0, \end{cases} \qquad \operatorname{Re} c\eta_j = 0, \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{7.13}$$

не могут быть представлены потенциалом $P_{22}\varphi$.

Теорема 7.2. *В условиях теоремы* 7.1 *существует такое конечномерное пространство* $V \subseteq C^{1,\nu-0}(\overline{D})$ *размерности* $3m - 2\sigma(D) - 1$, *содержащее функции вида* (7.13), *что любая функция* $v \in h^p(D)$, *сопряженная к некоторому* (*вообще многозначному*) *решению системы Ламе, представима в виде*

$$v = P_{22}\varphi + v_0 \tag{7.14}$$

с некоторыми $\varphi \in L^p(\Gamma)$ *и* $v_0 \in V$, *причем* v_0 *в этом представлении определяется по* v *однозначно.*

Если $v \in X(\overline{D})$, *где* X *означает любой из символов* C, C^μ, $C^{1,\mu}$, $\mu < \nu$, *то и* $\varphi \in X(\Gamma)$.

Доказательство. Оно совершенно аналогично доказательству теоремы 7.1. Поскольку композиция P_{22} с оператором задачи Дирихле (5.12) есть фредгольмов оператор $1 + P^*_{22}$ индекса нуль, с учетом теоремы 5.2 отсюда заключаем, что оператор P_{22} фредгольмов и его индекс равен $\sigma(D)$. Следовательно, его образ $\operatorname{im} P_{22}$ замкнут и имеет коразмерность, равную $k = \dim(ker P_{22}) - \sigma(D)$. С учетом леммы 6.2 аналогичные рассуждения можно провести и для оператора P_{22}, действующего из $X(\overline{D})$ в $X(\Gamma)$. В частности, в $C^{1,\mu}(\overline{D})$ существует подпространство V размерности k, которое содержит функции (7.13) и для которого справедливо разложение (7.14) функций $v \in (\overline{D})$. В силу соображений размерности это разложение имеет место и в $h^p(D)$.

Второе утверждение теоремы доказывается с помощью леммы 4.1 совершенно аналогично предыдущему. □

Как и выше, теорема 7.2 позволяет свести задачу Дирихле для сопряженных функций к эквивалентной системе граничных уравнений Фредгольма. Некоторых изменений требует только случай $\sigma(D) = 1$ конечной области D, на котором и остановимся. Положим $k = \dim(ker P_{22}) - 1$ и рассмотрим в пространствах $ker P_{22}$ и V базисы, соответственно, $g_1, \dots, g_{k+1}$ и $v_1, \dots, v_k$. Рассмотрим оператор

$$N\varphi = \varphi + P^*_{22}\varphi + \sum_1^k (g_j, \varphi) v_j^+ + (g_{k+1}, \varphi) n,$$

где, напомним, функция $n = (n_1, n_2)$ означает единичную внешнюю нормаль. Очевидно, функции $\varphi + P^*_{22}\varphi = (P_{22}\varphi)^+$ и v_j^+ удовлетворяют условию ортогональности n. Поэтому если $N\varphi = 0$, то $(g_{k+1}, \varphi) = 0$, с учетом теоремы 7.2 имеем также соотношения $N_{22}\varphi = 0$ и $(g_j, \varphi) = 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$, откуда $\varphi = 0$. Таким образом, оператор N обратим, причем функция $N\varphi$ ортогональна n тогда и только тогда, когда $(g_{k+1}, \varphi) = 0$. Поэтому в предположении $(f, n) = 0$ решение φ уравнения $N\varphi = f$ будет давать решение задачи Дирихле по формуле

$$v = P_{22}\varphi + \sum_1^k (g_j, \varphi) v_j.$$

8. Структура матриц $H_{kr}(\xi)$

В обозначениях (1.7) введем квадратичные формы

$$\begin{gathered} \omega(\xi) = (\xi_1 + \nu_1\xi_2)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) = \xi_1^2 + s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2, \\ 2\omega_1(\xi) = s\xi_1^2 + 2t\xi_1\xi_2 + \bar{s}t\xi_2^2, \\ \Omega(\xi) = \begin{pmatrix} [(t-1)\xi_1\xi_2 + s\xi_1^2] & t|\xi|^2 \\ -|\xi|^2 & (t-1)\xi_1\xi_2 - s\xi_2^2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Очевидно, достаточно описать матрицу-функцию

$$G_{kr}(\xi) = |\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2 H_{kr}(\xi), \tag{8.2}$$

однородную степени 2.

Теорема 8.1. *Матрицы* G_{kr} *определяются формулами*

$$G_{11}(\xi) = \operatorname{Im}[\omega_1(\xi) + \overline{\omega}(\xi)(b\Delta b^{-1})], \tag{8.3}$$

где параллельно двум случаям (i) *и* (ii) *положено*

$$(i)\ \Delta = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \nu_1 - \nu_2 & 0 \\ 0 & \nu_2 - \nu_1 \end{pmatrix}, \quad (ii)\ \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$G_{22}(\xi) = \operatorname{Im}\begin{pmatrix} s\xi_1^2 + t\xi_1\xi_2 & t\xi_1^2 + \bar{s}t\xi_1\xi_2 \\ s\xi_1\xi_2 + t\xi_2^2 & t\xi_1\xi_2 + \bar{s}t\xi_2^2 \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} G_{21}(\xi) &= |\xi|^{-2}\operatorname{Re}[\overline{\omega}(\xi)\Omega(\xi)]\operatorname{Im}(cb^{-1}) + G_{22}(\xi)\operatorname{Re}(cb^{-1}), \\ G_{12}(\xi) &= |\xi|^{-2}\operatorname{Im}(bc^{-1})\operatorname{Re}[\overline{\omega}(\xi)\Omega(\xi)] + \operatorname{Re}(bc^{-1})G_{22}(\xi). \end{aligned} \tag{8.5}$$

Доказательство. Доказательство первого равенства (8.3) проведем для случаев (i) и (ii) отдельно.

(i). Положим

$$h(\xi,\nu) = \frac{-\xi_2 + \nu\xi_1}{\xi_1 + \nu\xi_2},$$

тогда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \operatorname{diag}[h(\xi,\nu_1), h(\xi,\nu_2)]. \tag{8.6}$$

По определению матрицы Δ отсюда

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = \frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} + \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2}\Delta.$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)}{2} = \frac{\omega_0(\xi)}{2\omega(\xi)}, \quad \frac{h(\xi,\nu_1) - h(\xi,\nu_2)}{\nu_1 - \nu_2} = \frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)}, \tag{8.7}$$

где $\omega_0(\xi) = (-\xi_2 + \nu_1\xi_1)(\xi_1 + \nu_2\xi_2) + (-\xi_2 + \nu_2\xi_1)(\xi_1 + \nu_1\xi_2)$.

Следовательно,

$$2|\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2 b[(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1}]b^{-1} = |\xi|^{-2}\omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)} + 2\overline{\omega(\xi)}(b\Delta b^{-1}). \tag{8.8}$$

Как легко проверить,

$$\operatorname{Im} h(\xi,\nu) = \frac{|\xi|^2 \operatorname{Im}\nu}{|\xi_1 + \nu\xi_2|^2}, \tag{8.9}$$

так что по определению (8.1)

$$\operatorname{Im}[h(\xi,\nu_1) + h(\xi,\nu_2)] = \frac{|\xi|^2\omega_1(\xi)}{|\omega(\xi)|^2}.$$

Совместно с первым равенством (8.7) отсюда приходим к соотношению

$$\operatorname{Im}[(\omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)}] = |\xi|^2 \operatorname{Im}[\omega_1(\xi)]$$

для квадратичных форм. Поэтому в соответствии с определениями (6.5), (8.2) мнимая часть равенства (8.8) совпадает с (8.3).

(ii). По определению матрицы Δ в этом случае

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = h(\xi,\nu)\left(1 + \frac{\xi_1}{-\xi_2 + \nu\xi_1}\Delta\right)\left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_1 + \nu\xi_2}\Delta\right)^{-1},$$

так что

$$(-\xi_2 + \xi_1 J)(\xi_1 + \xi_2 J)^{-1} = h(\xi,\nu) + \frac{|\xi|^2}{\omega(\xi)^2}\Delta.$$

Полагая $\nu_k = \nu$ в первом соотношении (8.7), получим равенство

$$h(\xi,\nu) = \frac{\omega^1(\xi)}{2\omega(\xi)},$$

которое аналогично предыдущему случаю (i) приводит к (8.3).

Обратимся к доказательству остальных формул теоремы. Равенство (8.8) справедливо и по отношению к матрице c. Поскольку матрица d, фигурирующая в (2.25), коммутирует с Δ, матрицу $c\Delta c^{-1}$ в правой части этого равенства можно заменить на матрицу c_0. Прямая проверка показывает, что в обоих случаях (i) и (ii) произведение

$$c_0\Delta c_0^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s & 2t \\ -2 & -s \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$2|\omega(\xi)|^2 c[(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}]c^{-1} = \omega_0(\xi)\overline{\omega(\xi)} + 2\overline{\omega(\xi)}(c_0\Delta c_0^{-1}).$$

Из определения квадратичной формы ω_0 в (8.7) видно, что в обозначениях (1.7) ее можно записать в виде $\omega_0(\xi) = 2(t-1)\xi_1\xi_2 + s(\xi_1^2 - \xi_2^2)$. Как показывает прямая проверка, выражение $\omega_0(\xi) + 2|\xi|^2 c_0\Delta c_0^{-1}$ совпадает с матрицей $2\Omega(\xi)$ в (8.1), так что

$$|\omega(\xi)|^2 c[(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}]c^{-1} = \Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}. \tag{8.10}$$

С учетом (6.5), (8.2) отсюда

$$G_{22}(\xi) = |\xi|^{-2}\,\mathrm{Im}[\Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}], \tag{8.11}$$

что непосредственно приводит к (8.4). Точно так же в силу (8.10) равенство

$$G_{21}(\xi) = |\xi|^{-2}|\omega(\xi)|^2\,\mathrm{Im}[c(-\xi_2+\xi_1 J)(\xi_1+\xi_2 J)^{-1}c^{-1}(cb^{-1})]$$

можно переписать в форме

$$G_{21}(\xi) = |\xi|^{-2}\,\mathrm{Im}[\Omega(\xi)\overline{\omega(\xi)}(cb^{-1})],$$

откуда с учетом (8.11) следует первая формула (8.5). Вторая формула доказывается аналогично. □

Подставляя в (8.3)–(8.5) соответствующие выражения леммы 2.2 для матриц b и c, можно вычислить элементы матриц G_{kr}. Проще всего это сделать с помощью следующих билинейных форм от многочленов, которые вводятся для каждого из двух случаев корней ν_j характеристического уравнения системы Ламе:

$$\begin{aligned}&(i)\ [f,g] = \frac{f(\nu_1)g(\nu_2) - f(\nu_2)g(\nu_1)}{\nu_1-\nu_2}, \quad (ii)\ [f,g] = f'(\nu)g(\nu) - f(\nu)g'(\nu),\\ &(i)\ \{f,g\} = \frac{f(\nu_1)g(\nu_2) + f(\nu_2)g(\nu_1)}{2}, \quad (ii)\ \{f,g\} = f(\nu)g(\nu).\end{aligned} \tag{8.12}$$

В принятых обозначениях лемма 2.2 приводит к следующим выражениям для рассматриваемых матриц.

Лемма 8.1. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}_1$, *то*

$$\begin{aligned} b\Delta b^{-1} &= \frac{1}{[p_3,p_2]}\begin{pmatrix} -\{p_2,p_3\} & -\{p_2,p_2\} \\ \{p_3,p_3\} & \{p_2,p_3\}\end{pmatrix},\\ cb^{-1} &= \frac{1}{[p_3,p_2]}\begin{pmatrix} -[p_3,q_3] & -[p_2,q_3] \\ [p_3,q_2] & [p_2,q_2]\end{pmatrix},\\ bc^{-1} &= \frac{1}{[q_3,q_2]}\begin{pmatrix} -[p_2,q_2] & -[p_2,q_3] \\ [p_3,q_2] & [p_3,q_3]\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.13}$$

Если $\alpha \in \mathcal{A}_2$, *то*

$$\begin{aligned} b\Delta b^{-1} &= \frac{1}{[p_1,p_3]}\begin{pmatrix} -\{p_1,p_3\} & -\{p_3,p_3\} \\ \{p_1,p_1\} & \{p_1,p_3\}\end{pmatrix},\\ cb^{-1} &= \frac{1}{[p_1,p_3]}\begin{pmatrix} [p_1,q_1] & [p_3,q_1] \\ -[p_1,q_4] & -[p_3,q_4]\end{pmatrix},\\ bc^{-1} &= \frac{1}{[q_1,q_4]}\begin{pmatrix} [p_3,q_4] & [p_3,q_1] \\ -[p_1,q_4] & -[p_1,q_1]\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.14}$$

Наконец, в случае $\alpha \in \mathcal{A}_0$

$$\begin{aligned} &b\Delta b^{-1} = \frac{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2\alpha_3}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i\end{pmatrix}, \quad cb^{-1} = \alpha_3\begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_1/\alpha_3} & -1 \\ 1 & -i\sqrt{\alpha_2/\alpha_3}\end{pmatrix},\\ &bc^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_3}\begin{pmatrix} -i\sqrt{\alpha_2/\alpha_3} & 1 \\ -1 & -i\sqrt{\alpha_1/\alpha_3}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Доказательство. С парой многочленов f_1, f_2 соответственно двум случаям корней свяжем матрицу

$$(i)\; W(f_1,f_2) = \begin{pmatrix} f_1(\nu_1) & f_1(\nu_2) \\ f_2(\nu_1) & f_2(\nu_2) \end{pmatrix}, \quad (ii)\; W(f_1,f_2) = \begin{pmatrix} f_1(\nu) & f_1'(\nu) \\ f_2(\nu) & f_2'(\nu) \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что для ее определителя имеем выражение

$$(i)\; \det W(f_1,f_2) = (\nu_1-\nu_2)[f_1,f_2], \quad (ii)\; \det W(f_1,f_2) = -[f_1,f_2],$$

так что обратимость этой матрицы обеспечивается условием $[f_1,f_2]\neq 0$.

Согласно лемме 2.2 в этих обозначениях можно записать

$$\begin{aligned} &b = W(p_2,-p_3), \quad c = W(-q_3,q_2), \quad \alpha\in\mathcal{A}_1, \\ &b = W(-p_3,p_1), \quad c = W(-q_1,q_4), \quad \alpha\in\mathcal{A}_2. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Как показывает простая проверка, одинаково для обоих случаев (i) и (ii) имеют место равенства

$$W(f_1,f_2)\Delta[W(g_1,g_2)]^{-1} = \frac{1}{[g_1,g_2]}\begin{pmatrix} \{f_1,g_2\} & -\{f_1,g_1\} \\ \{f_2,g_2\} & -\{f_2,g_1\} \end{pmatrix},$$

$$W(f_1,f_2)[W(g_1,g_2)]^{-1} = \frac{1}{[g_1,g_2]}\begin{pmatrix} [f_1,g_2] & -[f_1,g_1] \\ [f_2,g_2] & -[f_2,g_1] \end{pmatrix}.$$

Подставляя в эти формулы выражения (8.16), приходим к справедливости формул (8.13) и (8.14).

Что касается (8.15), то эти равенства получаются непосредственно, исходя из (1.15) и (2.23). □

Важно отметить, что в силу леммы 2.1 при $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$ соответствующие матрицы в (8.13) и (8.14) совпадают. Явные выражения для элементов этих матриц получаются при вычислении форм (8.12) для многочленов (1.6) и (2.20). В частности, формулы (8.3)–(8.5) совместно с (8.13) показывают, что ядра $P_{kr}(n,\xi)$ зависят только от $\alpha\in\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ и являются непрерывными функциями от переменных α_j.

Исходя из конкретных выражений многочленов (1.6) и (2.20), элементы матриц в правой части (8.13) и (8.14) легко вычисляются. Поскольку форма $[\,,\,]$ кососимметрична, а форма $\{\,,\,\}$ — симметрична, достаточно знать значения этих форм от базисных элементов z^i, $0\leqslant i\leqslant 3$. Эти значения зависят только от простейших симметричных комбинаций (1.7). В частности, элементы матриц (8.13) вычисляются с помощью формул

$$\begin{aligned}
&[p_3,p_2] = \alpha_3(\alpha_3+\alpha_4) - 2\alpha_5\alpha_6 + (\alpha_3\alpha_5-\alpha_2\alpha_6)s + [2\alpha_5^2 - \alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)]t, \\
&[q_3,q_2] = \beta_4^2 - \beta_4\beta_6 s + (\beta_6^2 - 2\beta_1\beta_4)t + \beta_1\beta_4 s^2 - \beta_1\beta_6 st + \beta_1^2t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[p_2,q_2] = 2\alpha_5\beta_4 + \alpha_3\beta_6 + (\alpha_2\beta_4 - \alpha_3\beta_1)s - (\alpha_2\beta_6 + 2\alpha_5\beta_1)t, \\
&[p_2,q_3] = -\alpha_3\beta_4 + \alpha_3\beta_6 s - \alpha_3\beta_1(s^2-t) + (\alpha_2\beta_4 + 2\alpha_5\beta_6)t - 2\alpha_5\beta_1 st - \alpha_2\beta_1t^2, \\
&[p_3,q_2] = (\alpha_3+\alpha_4)\beta_4 + \alpha_6\beta_6 + (\alpha_5\beta_4 - \alpha_6\beta_1)s - [\alpha_5\beta_6 + (\alpha_3+\alpha_4)\beta_1]t, \\
&[p_3,q_3] = -\alpha_6\beta_4 + \alpha_6\beta_6 s - \alpha_6\beta_1(s^2-t) + [\alpha_5\beta_4 + (\alpha_3+\alpha_4)\beta_6]t - \\
&-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 st - \alpha_5\beta_1t^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{p_2,p_2\} = \alpha_3^2 + 4\alpha_5^2t + \alpha_2^2t^2 + 2\alpha_3\alpha_5 s + \alpha_2\alpha_3(s^2-2t) + 2\alpha_2\alpha_5 st, \\
&\{p_3,p_3\} = \alpha_6^2 + (\alpha_3+\alpha_4)^2t + \alpha_5^2t^2 + (\alpha_3+\alpha_4)\alpha_6 s + \alpha_5\alpha_6(s^2-2t) + \\
&+(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 st, \\
&2\{p_2,p_3\} = 2\alpha_3\alpha_6 + [2\alpha_5\alpha_6 + \alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)]s + 4(\alpha_3+\alpha_4)\alpha_5 t + \\
&+(\alpha_2\alpha_6 + \alpha_3\alpha_5)(s^2-2t) + [\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4) + 2\alpha_5^2]st + 2\alpha_2\alpha_5t^2.
\end{aligned}$$

В случае ортотропной среды приведенные выше формулы для матриц $G(\xi)$ существенно упрощаются. В этом случае либо $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$ и можно пользоваться любой из двух групп равенств (8.13), (8.14), либо $\alpha\in\mathcal{A}_0$. Пусть $\alpha\in\mathcal{A}_1\cap\mathcal{A}_2$, т. е. $\alpha_5=\alpha_6=0$ и $\alpha_3+\alpha_4\neq 0$. Тогда и $\beta_5=\beta_6=0$, так что предыдущие формулы принимают вид

$$[p_3,p_2] = \alpha_3(\alpha_3+\alpha_4) - \alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)t, \quad [q_3,q_2] = \beta_4^2 + \beta_1\beta_4(s^2-t) - \beta_1\beta_4 t + \beta_1^2t^2,$$

$$
\begin{aligned}
&[p_2,q_2]=(\alpha_2\beta_4-\alpha_3\beta_1)s, \\
&[p_3,q_3]=-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 st, && 2\{p_2,p_3\}=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)s+\alpha_2(\alpha_3+\alpha_4)st, \\
&[p_2,q_3]=-\alpha_3\beta_4-\alpha_3\beta_1(s^2-t)+ && \{p_2,p_2\}=\alpha_3^2+\alpha_2^2t^2+\alpha_2\alpha_3(s^2-2t), \\
&+\alpha_2\beta_4 t-\alpha_2\beta_1 t^2, && \{p_3,p_3\}=(\alpha_3+\alpha_4)^2 t. \\
&[p_3,q_2]=(\alpha_3+\alpha_4)\beta_4-(\alpha_3+\alpha_4)\beta_1 t,
\end{aligned}
$$

Поскольку $\beta_1=\alpha_2\alpha_3,\ \beta_4=-\alpha_3\alpha_4$, с учетом (1.22), (1.25) отсюда после элементарных преобразований получим:

$$
[p_3,p_2]=(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}),\quad [q_3,q_2]=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2),
$$

$$
\begin{aligned}
&[p_2,q_2]=-i\rho_0\alpha_2\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4), && 2\{p_2,p_3\}=i\rho_0(\alpha_3+\alpha_4)(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}), \\
&[p_3,q_3]=i\rho_0\alpha_2\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)\rho^2, && \{p_2,p_2\}=(\alpha_3+\alpha_4)^2, \\
&[p_2,q_3]=[p_3,q_2]= && \{p_3,p_3\}=-(\alpha_3+\alpha_4)^2\rho^2. \\
&=\alpha_3(\alpha_3+\alpha_4)(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4),
\end{aligned}
$$

В результате для матриц, фигурирующих в (8.13) и (8.13), получаем следующие выражения:

$$
b\Delta b^{-1}=\frac{1}{2(\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2})}\begin{pmatrix} -i\rho_0(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) & -2(\alpha_3+\alpha_4) \\ -2\rho^2(\alpha_3+\alpha_4) & i\rho_0(\alpha_3-\sqrt{\alpha_1\alpha_2}) \end{pmatrix},
$$

$$
cb^{-1}=\frac{\alpha_3}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix} -i\rho_0\alpha_2\rho^2 & -(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4 & -i\rho_0\alpha_2 \end{pmatrix},
$$

$$
bc^{-1}=\frac{1}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2}\begin{pmatrix} i\rho_0\alpha_2 & -(\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4 & i\rho_0\alpha_2\rho^2 \end{pmatrix}.
$$

Отсюда после элементарных вычислений

$$
G_{11}(\xi)=\frac{\rho_0}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix} \rho^2(\alpha_2\xi_1^2+\alpha_3\xi_2^2) & (\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2 \\ \rho^2(\alpha_3+\alpha_4)\xi_1\xi_2 & \alpha_3\xi_1^2+\alpha_1\xi_2^2 \end{pmatrix},
$$

$$
G_{22}(\xi)=\rho_0\begin{pmatrix} \xi_1^2 & \rho^2\xi_1\xi_2 \\ \xi_1\xi_2 & \rho^2\xi_2^2 \end{pmatrix},
$$

$$
G_{21}(\xi)=\frac{\alpha_3\rho_0}{\alpha_3+\sqrt{\alpha_1\alpha_2}}\begin{pmatrix} \rho^2\xi_1\xi_2 g_1(\xi) & -\rho^4\alpha_2\widehat{\xi}^2-\delta\xi_1^2 \\ \rho^2[\alpha_2\widehat{\xi}^2+\delta\xi_2^2] & \xi_1\xi_2 g_2(\xi) \end{pmatrix},
$$

$$
G_{12}(\xi)=\frac{\rho_0}{\alpha_1\alpha_2-\alpha_4^2}\begin{pmatrix} -\xi_1\xi_2 g_1(\xi) & \rho^2[\rho^2\alpha_2\widehat{\xi}^2-\delta\xi_2^2] \\ -\rho^2\alpha_2\widehat{\xi}^2+\delta\xi_1^2 & -\rho^2\xi_1\xi_2 g_2(\xi) \end{pmatrix},
$$

где для краткости $\delta=\sqrt{\alpha_1\alpha_2}-\alpha_4$, $\widehat{\xi}^2=\xi_1^2-\rho^2\xi_2^2$ и положено

$$
g_j(\xi)=\alpha_2(\rho^2+1)\widehat{\xi}^2|\xi|^{-2}+(-1)^j[\alpha_2\rho_0^2\xi_j^2|\xi|^{-2}-\delta],\ j=1,2.
$$

Эти формулы еще более упрощаются в случае изотропной среды, когда соотношения (1.26): $\alpha_1=\alpha_2=2\alpha_3+\alpha_4$ или, что равносильно, $\rho=1,\ \rho_0=2$. В частности, $\delta=2\alpha_3$, $g_j(\xi)=2(-1)^j(\alpha_1-\alpha_3)$, $\widehat{\xi}^2=\xi_1^2-\xi_2^2$. В этом случае имеем кратный корень $\nu=i$ и неравенство $\alpha_1>\alpha_3$. По отношению к положительной постоянной $\varkappa=(\alpha_1+\alpha_3)/(\alpha_1-\alpha_3)$ отсюда

$$
cb^{-1}=\frac{\alpha_3}{\varkappa}\begin{pmatrix} -i(\varkappa+1) & -(\varkappa-1) \\ \varkappa-1 & -i(\varkappa+1) \end{pmatrix},\quad bc^{-1}=\frac{1}{4\alpha_3}\begin{pmatrix} i(\varkappa+1) & -(\varkappa-1) \\ \varkappa-1 & i(\varkappa+1) \end{pmatrix},
$$

$$
G_{11}(\xi)=|\xi|^2+\frac{1}{\varkappa}G_1(\xi),\quad G_{22}(\xi)=|\xi|^2+G_1(\xi),
$$

$$
G_{21}(\xi)=\frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa-1)|\xi|^2+2G_2(\xi)]E,\quad G_{12}(\xi)=\frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa-1)|\xi|^2-2G_2(\xi)]E,
$$

где положено

$$
G_1(\xi)=\begin{pmatrix} \xi_1^2-\xi_2^2 & 2\xi_1\xi_2 \\ 2\xi_1\xi_2 & \xi_2^2-\xi_1^2 \end{pmatrix},\ G_2(\xi)=\begin{pmatrix} \varkappa(\xi_1^2-\xi_2^2) & -2\xi_1\xi_2 \\ -2\xi_1\xi_2 & \xi_1^2-\xi_2^2 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Таким образом, в соответствии с определениями (6.5), (6.6) и (8.2) операторы P_{kr} $(k,r=1,2)$ можно записать в виде

$$
P_{11}=P+\frac{1}{\varkappa}P_1,\quad P_{22}=P+P_1,
$$

$$P_{21} = \frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa - 1)P + 2P_2]E, \quad P_{12} = \frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa - 1)P - 2P_2]E,$$

где

$$P_j\varphi)(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathrm{Re}[\overline{n(t)}(t-z)]}{|t-z|^4} G_j(t-z)\varphi(t)|dt|.$$

Соответственно согласно (6.11) каждая пара равенств

$$u = P\varphi + \frac{1}{\varkappa}P_1\varphi, \quad v = \frac{\alpha_3}{\varkappa}(\varkappa + 1)Q\varphi + \frac{\alpha_3}{\varkappa}[(\varkappa - 1)P + 2P_2]E\varphi,$$

$$u = \frac{1}{4\alpha_3}(\varkappa + 1)Q\varphi + \frac{1}{4\alpha_3}[(\varkappa - 1)P - 2P_2]E\varphi, \quad v = P\varphi + P_1\varphi$$

определяет решение u системы Ламе и сопряженную к ней функцию v.

9. Задача Дирихле в кусочно однородной среде

Проиллюстрируем предыдущие результаты на задаче Дирихле для системы Ламе с кусочно постоянными коэффициентами. Пусть конечная односвязная область D на плоскости ограничена гладким контуром $\Gamma_1 \in C^{1,\nu}$, $0 < \nu < 1$, и содержит простой гладкий контур Γ_0 того же класса, разбивающий эту область на односвязную D^0 и двусвязную D^1 подобласти. Рассмотрим в D систему Ламе (1.1) с кусочно постоянными коэффициентами, принимающими в области D^k постоянное значение $a_{ij} = a_{ij}^k$, $k = 0, 1$. Аналогичный смысл имеют записи $\alpha_j = \alpha_j^k$, а также $u = u^k$, $v = v^k$ для векторов u, v и $\sigma = \sigma^k$ для тензора напряжений.

Пусть $n^k = (n_1^k, n_2^k)$ означает единичный вектор внешней нормали на ∂D^k (по отношению к области D^k), в частности, на контуре $\Gamma_0 = \partial D^0 \cap \partial D^1$ векторы n^0 и n^1 противоположны. Условимся под решением u системы (1.1) в области D понимать функцию u, сужение u^k которой принадлежит классу $C^1(D^k \cap \Gamma_0)$, $k = 0, 1$, и является классическим решением (1.1) в каждой из областей D^k, а на Γ_0 удовлетворяет контактным условиям

$$(u^0 - u^1)\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (\sigma^0 n^0 + \sigma^1 n^1)\big|_{\Gamma_0} = 0. \tag{9.1}$$

В частности, функция u непрерывна в области D.

Смысл контактных условий заключается в том, что при дополнительном предположении интегрируемости частных производных $\partial u/\partial x_j$, где $x_1 = x$, $x_2 = y$, функция u удовлетворяет тождеству

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{D} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = 0, \quad \varphi \in C_0^\infty(D).$$

Другими словами, функция u является обобщенным решением системы (1.1) в области D, записанной в дивергентной форме

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0.$$

Этот факт получается непосредственно из (2.13), (9.1) интегрированием по частям.

В терминах сопряженной функции v второе контактное условие в (9.1) можно проинтегрировать. Пусть $(v^k)'_s$ означает производную на Γ_0 вдоль направления против часовой стрелки. Тогда, полагая $n = n^0 = -n^1$ на Γ_0, в силу (2.13), (2.14) будем иметь соотношение $\sigma^k n = (v^k)'_s$, и в результате (9.1) перейдет в

$$(u^0 - u^1)\big|_{\Gamma_0} = 0, \quad (v^0 - v^1)\big|_{\Gamma_0} = \xi \tag{9.2}$$

с некоторой постоянной $\xi \in \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим в области D для решения $u \in C(\overline{D})$ системы (1.1) в указанном выше смысле задачу Дирихле

$$u\big|_{\Gamma_1} = f. \tag{9.3}$$

Хорошо известно [16], что в соболевском классе $W_1^2(D)$ эта задача однозначно разрешима. Единственность решения доказывается непосредственно. В самом деле, в предположении $u \in C^1(\overline{D^k})$ по формуле Грина имеем:

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{D^k} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\partial D^k} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i^k \right) u ds.$$

Если u удовлетворяет однородному краевому условию (9.3), то интеграл по Γ_1 в этом равенстве для $k = 1$ выпадает, и после сложения этих равенств с учетом (2.13), (9.1) получим соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{2} \int_{D} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = 0. \tag{9.4}$$

Следовательно, в каждой из областей D^k функция u^k является тривиальным решением, т. е. существуют такие постоянные $c_j^k,\ k = 0, 1,\ j = 1, 2, 3$, что

$$u_1^k(x, y) = c_3^k y + c_1^k, \quad u_2^k(x, y) = -c_3^k x + c_2^k.$$

Подставляя эти выражения в (9.2) и однородное краевое условие (9.3), получим $c_j^k = 0$.

Заметим, что в двусвязной области D^1 сопряженная функция v^1, вообще говоря, многозначна и при обходе Γ_0 может получать ненулевое приращение. С другой стороны, в односвязной области D^0 функция v^0 всегда однозначна. Поэтому при выполнении контактных условий (9.2) однозначной будет и функция v^1.

Основная цель данного раздела состоит в эквивалентной редукции задачи (1.1), (9.3) к системе интегральных уравнений Фредгольма на $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$, которая в силу единственности будет однозначно разрешимой.

Отметим, что в каждой из областей D^k матрица (2.19) обратима. Этот факт можно распространить на случай двух пар матриц b и c.

Лемма 9.1. *Пусть матрицы* $\alpha^k,\ \ k = 0, 1$, *вида* (1.2) *положительно определены и матрицы* b^k, c^k *отвечают* α^k. *Тогда*

$$\det \begin{pmatrix} b^0 & \overline{b^1} \\ c^0 & \overline{c^1} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{9.5}$$

Доказательство. Предположим противное, тогда найдется ненулевой вектор $\eta = (\eta^0, \overline{\eta^1}) \in \mathbb{C}^4$ такой, что

$$b^0 \eta^0 + \overline{b^1 \eta^1} = 0, \quad c^0 \eta^0 + \overline{c^1 \eta^1} = 0.$$

В частности,

$$\operatorname{Re} \left(b^0 \frac{\eta^0}{t + i} + b^1 \frac{\eta^1}{t - i} \right) = \operatorname{Re} \left(c^0 \frac{\eta^0}{t + i} + c^1 \frac{\eta^1}{t - i} \right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть G^0 и G^1 означают, соответственно, верхнюю и нижнюю полуплоскости. Рассмотрим в $G = G^0 \cup G^1$ аналитическую вектор-функцию

$$\psi(z) = \begin{cases} \eta^0 (z + i)^{-1}, & z \in D^0, \\ \eta^1 (z - i)^{-1}, & z \in D^1, \end{cases}$$

по отношению к которой предыдущее равенство переходит в

$$\operatorname{Re}(b^0 \psi^0 + b^1 \psi^1)\big|_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(b^0 \psi^0 + b^1 \psi^1)\big|_{\mathbb{R}} = 0. \tag{9.6}$$

Пусть $\nu_j^k,\ j = 1, 2$ — корни характеристического уравнения $p_1^k p_2^k - (p_3^k)^2 = 0$, отвечающие матрице α^k. Рассмотрим J^k-аналитические функции $\phi^k(x, y)$ в области D^k, связанные с ψ^k соотношениями (2.32), (2.33). Здесь учтено, что для $\operatorname{Im} \nu > 0$ преобразование $x + iy \to x + \nu y$ переводит полуплоскость D^k на себя и оставляет ее граничные точки $x \in \mathbb{R}$ неподвижными. При этом $\phi^k(x) = \psi^k(x)$. Поэтому соотношение (9.6) справедливо и для функций ϕ^k. Но тогда для функции $u = \operatorname{Re} b\varphi$, удовлетворяющей системе Ламе в области D^k с матрицей упругости α^k, и сопряженной к ней функции $v = \operatorname{Re} c\phi$ имеют место контактные соотношения

$$(u^0 + u^1)\big|_{\mathbb{R}} = (v^0 + v^1)\big|_{\mathbb{R}} = 0$$

на прямой $\mathbb{R}$. Как и выше, отсюда заключаем, что для функции u справедливо равенство (9.4) во всей плоскости $D = \mathbb{C}$. В свою очередь, оно возможно только для $u = 0$, что приводит к противоречию. Тем самым утверждение (9.5) установлено. $\square$

Обратимся к постановке задачи Дирихле (9.2), (9.3). Условимся снабжать верхним индексом k операторы P, Q и P_{ij} из раздела 6 по отношению к области D^k, $k = 0, 1$, внешней нормали n^k на ∂D^k и матрице упругости α^k. Аналогичный смысл имеют и обозначения P^{k*}, Q^{k*} и P_{ij}^{k*} для граничных операторов. Согласно теореме 7.1 любые решения $u^k \in C(\overline{D^k})$ системы Ламе в области D^k, такие, что при $k = 1$ сопряженная функция v^1 однозначна, представимы в виде

$$u^0 = P_{11}^0 \varphi^0, \quad u^1 = P_{11}^1 \varphi^1 \tag{9.7}$$

с некоторыми вектор-функциями $\varphi^0 \in C(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, причем $u^0 = u^1 = 0$ в этих представлениях влечет

$$\varphi^0 = \varphi^1\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \varphi^1\big|_{\Gamma_0} \in \mathbb{R}^2. \tag{9.8}$$

Положим для краткости $d = cb^{-1}$. Тогда на основании (6.11)

$$v^k = -\operatorname{Im} d^k Q^k \varphi^k + P_{21}^k \varphi^k, \quad k = 0, 1. \tag{9.9}$$

Поэтому с учетом леммы 6.2 краевые условия (9.2), (9.3) сводятся к эквивалентной системе уравнений относительно $(\varphi^0, \varphi^1, \xi)$, определяемой равенствами

$$\begin{gathered} \varphi^0 - \varphi^1 + P_{11}^{0*}\varphi^0 - P_{11}^{1*}\varphi^1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ -(\operatorname{Im} d^0) Q^{0*}\varphi^0 + (\operatorname{Im} d^1) Q^{1*}\varphi^1 + (\operatorname{Re} d^0)\varphi^0 - (\operatorname{Re} d^1)\varphi^1 + \\ +P_{21}^{0*}\varphi^0 - P_{21}^{1*}\varphi^1 = \xi \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \varphi^1 + P_{11}^{1*}\varphi^1 = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1. \end{gathered} \tag{9.10}$$

С точки зрения разрешимости удобно вместо этой системы рассматривать систему относительно только пары (φ^0, φ^1), определяемую равенствами

$$\begin{gathered} \varphi^0 - \varphi^1 + P_{11}^{0*}\varphi^0 - P_{11}^{1*}\varphi^1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ -(\operatorname{Im} d^0) Q^{0*}\varphi^0 + (\operatorname{Im} d^1) Q^{1*}\varphi^1 + (\operatorname{Re} d^0)\varphi^0 - (\operatorname{Re} d^1)\varphi^1 + \\ +P_{21}^{0*}\varphi^0 - P_{21}^{1*}\varphi^1 + \sum_{j=1,2} l_j \int_{\Gamma_0} \varphi^1(t) l_j |dt| = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \\ \varphi^1 + P_{11}^{1*}\varphi^1 = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \end{gathered} \tag{9.11}$$

где $\varphi^1(t) l_j$ означает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$ с базисными элементами $l_1 = (1, 0)$ и $l_2 = (0, 1)$.

Лемма 9.2. *В классе $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, $0 < \mu < \nu$, система уравнений* (9.11) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Функции $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0)$ и $\varphi^1 \in C^{1,\mu}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$, $0 < \mu < \nu$, удовлетворяют системе (9.10) с $f = 0$ тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (9.8) и $\xi = 0$.

В самом деле, в силу леммы 6.2 функции $u^k = P_{11}^k \varphi^k$ принадлежат $C^{1,\mu}(\overline{D^k})$ и определяют в области D решение однородной задачи Дирихле. Поэтому, как показано выше, эти функции равны нулю. Следовательно, по теореме 7.1 имеют место соотношения (9.8). С учетом лемм 7.1, 7.2 отсюда заключаем также, что и $v^1 = P_{21}\varphi^1 = 0$. Поэтому постоянная ξ в (9.10) также равна нулю. Обратное утверждение очевидно, поскольку из (9.8) следует $P_{11}^k \varphi^k = 0$.

Пусть теперь пара (φ^0, φ^1) является решением однородной системы (9.11). Тогда в силу предыдущего предложения имеют место соотношения (9.8) и $\eta l_1 = \eta l_2 = 0$, где $\eta \in \mathbb{R}^2$ означает сужение φ^1 на Γ_0. Следовательно, $\varphi^0 = \varphi^1 = 0$. $\square$

Положим для определенности $n = n^0 = -n^1$ на Γ_0 и пусть для краткости

$$p(n, \xi) = |\xi|^{-2} \operatorname{Re}(\overline{n}\xi), \; q(n, \xi) = |\xi|^{-2} \operatorname{Im}(\overline{n}\xi), \quad n, \xi \in \mathbb{C}.$$

Тогда с учетом (6.1)–(6.3) и принятых обозначений систему (9.11) можно представить в следующем явном виде:

$$\varphi^0(t_0)-\varphi^1(t_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{11}(t-t_0)\varphi^k(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}p[n^1(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|=0,\quad t_0\in\Gamma_0,$$
$$\mathrm{Re}[d^0\varphi^0(t_0)-d^1\varphi^1(t_0)]-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}q[n(t),t-t_0]\,\mathrm{Im}[d^0\varphi^0(t)+d^1\varphi^1(t)]|dt|+$$
$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{21}(t-t_0)\varphi^k(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}[p(n^1(t),t-t_0)H^1_{21}(t-t_0)-q(n^1(t),t-t_0)](\mathrm{Im}\,d^1)\varphi^1(t)|dt|+$$
$$+l_1\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1(t)l_1|dt|+l_2\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1(t)l_2|dt|=0,\quad t_0\in\Gamma_0,$$
$$\varphi^1(t_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}p[n^1(t),t-t_0]H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1(t)|dt|=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma_1.$$

Эту систему можно переписать кратко в операторной форме. С этой целью положим

$$\varphi_0=(\varphi^0,\varphi^1)\big|_{\Gamma_0},\quad \varphi_1=\varphi^1\big|_{\Gamma_1},$$

и пусть операторы P_0^* и Q_0^* определяются как в (6.1), (6.2) по отношению к Γ_0, в пространстве вектор-функций φ_0 они действуют покомпонентно. Таким образом, аналогично (6.3) можно написать

$$P_0^*-iQ_0^*=S_0 \tag{9.12}$$

с соответствующим сингулярным оператором Коши S_0. Введем далее интегральные операторы K_0,K_1 и K_{01},K_{10} по формулам

$$\begin{aligned}
&(K_0\varphi_0)^0(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{11}(t-t_0)\varphi^k_0(t)|dt|,\\
&(K_0\varphi_0)^1(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0]\sum_{k=0,1}H^k_{21}(t-t_0)\varphi^k_0(t)|dt|+\\
&+l_1\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1_0(t)l_1|dt|+l_2\int\limits_{\Gamma_0}\varphi^1_0(t)l_2|dt|,\\
&(K_{01}\varphi_1)^0(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}p[n^1(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)-q(n^1(t),t-t_0)](\mathrm{Im}\,d^1)\varphi_1(t)|dt|,\\
&(K_{01}\varphi_1)^1(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}p[n^1(t),t-t_0]H^1_{21}(t-t_0)\varphi_1(t)|dt|,\quad t_0\in\Gamma_0
\end{aligned}\tag{9.13}$$

и

$$\begin{aligned}
&(K_1\varphi_1)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_1}p[n^1(t),t-t_0]H^1_{11}(t-t_0)\varphi_1(t)|dt|,\\
&(K_{10}\varphi_0)(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Gamma_0}p[n(t),t-t_0][H^1_{11}(t-t_0)\varphi^1_0(t)|dt|,\quad t_0\in\Gamma_1.
\end{aligned}\tag{9.14}$$

В этих обозначениях система (9.11) запишется в форме

$$(\mathrm{Re}\,D)\varphi_0-(\mathrm{Im}\,D)Q_0^*\varphi_0+K_0\varphi_0-K_{01}\varphi_1=0,\quad \varphi_1+K_1\varphi_1-K_{10}\varphi_0=f \tag{9.15}$$

с матрицей

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ d^0 & -\overline{d^1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^0 & \overline{b^1} \\ c^0 & \overline{c^1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b^0)^{-1} & 0 \\ 0 & -(\overline{b^1})^{-1} \end{pmatrix},$$

которая в силу леммы 9.1 обратима.

Согласно [7] оператор S_0 в (9.12) обладает свойством $S_0^2 = 1$. Поскольку он коммутирует с оператором умножения на постоянные матрицы, отсюда заключаем, что оператор

$$(\operatorname{Re} D)\varphi_0 + i(\operatorname{Im} D)S_0 = [D(1+S_0) + \overline{D}(1-S_0)]/2$$

обратим и обратным к нему служит

$$(\operatorname{Re} D^{-1})\varphi_0 + i(\operatorname{Im} D^{-1})S_0 = [D^{-1}(1+S_0) + \overline{D}^{-1}(1-S_0)]/2.$$

Поэтому, записывая первое уравнение системы (9.15) в форме

$$[(\operatorname{Re} D) + i(\operatorname{Im} D)S_0 - i(\operatorname{Im} D)P_0^* + K_0]\varphi_0 - K_{01}\varphi_1 - \xi_0 = 0,$$

получим

$$\varphi_0 + [(\operatorname{Re} D^{-1}) + i(\operatorname{Im} D^{-1})S_0][-i(\operatorname{Im} D)P_0^*\varphi_0 + K_0\varphi_0 - K_{01}\varphi_1] = 0,$$

или, после выделения действительной части,

$$\varphi_0 + [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*][K_0\varphi_0 - K_{01}\varphi_1] + (\operatorname{Im} D^{-1})(\operatorname{Im} D)(P_0^*)^2\varphi_0 = 0.$$

В результате приходим к эквивалентной (9.14) системе уравнений Фредгольма

$$\varphi_0 + \widetilde{K}_0\varphi_0 - \widetilde{K}_{01}\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 + K_1\varphi_1 - K_{10}\varphi_0 = f \tag{9.16}$$

с операторами

$$\widetilde{K}_0 = [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*]K_0 + (\operatorname{Im} D^{-1})(\operatorname{Im} D)(P_0^*)^2,$$
$$\widetilde{K}_{01} = [(\operatorname{Re} D^{-1}) - (\operatorname{Im} D^{-1})Q_0^*]K_{01}.$$

10. Гладкость матричных ядер интегральных операторов

Рассмотрим подробнее структуру матричных ядер операторов в (9.16), включая зависимость их гладкости от гладкости контуров Γ_j. С этой целью запишем операторы P_0 и S_0 в комплексной форме, полагая

$$\begin{aligned} (P_0^*\varphi_0)(t_0) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{p_0^*(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad p_0^*(t_0,t) = \frac{\operatorname{Im}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)}, \\ (Q_0^*\varphi_0)(t_0) &= \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{q_0^*(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad q_0^*(t_0,t) = \frac{\operatorname{Im}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

где $dt = i(n_1 + in_2)|dt|$ — комплексный дифференциал, отвечающий ориентации контура против часовой стрелки, и положено $n = n_1 + in_2$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Аналогичным образом поступим и по отношению к операторам (9.13):

$$\begin{gathered} (K_0\varphi_0)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{k_0(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt, \quad k_0(t_0,t) = \\ = \frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)} \begin{pmatrix} H_{11}^0(t-t_0) & H_{11}^1(t-t_0) \\ H_{21}^0(t-t_0) & H_{21}^1(t-t_0) \end{pmatrix} + \frac{t-t_0}{n(t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_1 & E_2 \end{pmatrix}, \\ (K_1\varphi_1)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{k_1(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_1(t)dt, \\ k_1(t_0,t) = \frac{\operatorname{Re}[n(t)(\bar t - \bar t_0)]}{n(t)(\bar t - \bar t_0)} H_{11}^1(t-t_0), \quad t_0, t \in \Gamma_1, \end{gathered} \tag{10.2}$$

где матрицы $E_j \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ определяются равенствами

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$
\begin{gathered}
(K_{01}\varphi_1)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} \frac{k_{01}(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_1(t)dt,\\
k_{01}(t_0,t) == \frac{\mathrm{Re}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}\begin{pmatrix} H^1_{11}(t-t_0)\\ H^1_{21}(t-t_0)\end{pmatrix} - \frac{\mathrm{Im}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}\begin{pmatrix} \mathrm{Im}\, d^1\\ 0\end{pmatrix},\\
(K_{10}\varphi_0)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0} \frac{k_{10}(t_0,t)}{t-t_0}\varphi_0(t)dt,\\
k_{10}(t_0,t) = \frac{\mathrm{Re}[n(t)(\bar t-\bar t_0)]}{n(t)(\bar t-\bar t_0)}H^1_{11}(t-t_0), \quad t_0\in\Gamma_1,\ t\in\Gamma_0.
\end{gathered}
\tag{10.3}
$$

Далее воспользуемся следующим вспомогательным результатом.

Лемма 10.1. *Пусть функция $h(\xi)$, $\xi=\xi_1+i\xi_2$, бесконечно дифференцируема при $\xi\neq 0$, однородна степени нуль и четна. Тогда на гладком контуре Γ класса $C^{m,\nu}$, где m — натуральное число и $0<\nu<1$, функция $k(t_1,t)=h(t_1-t)$ принадлежит классу $C^{m-1,\nu}(\Gamma\times\Gamma)$ и при $t_1=t$ принимает значение $h[in(t)]$, где $n(t)=n_1(t)+in_2(t)$ — единичная нормаль к Γ.*

Доказательство. Его достаточно провести в окрестности фиксированной точки $(t_0,t_0)\in\Gamma\times\Gamma$. Запишем параметризацию контура в этой окрестности в форме $z=z(s)$, $|s|\leqslant\delta$, где s — параметр длины дуги, отсчитываемый от точки t_0. Тогда функция

$$
\alpha(s_1,s) = \frac{z(s)-z(s_1)}{s-s_1} = \int\limits_0^1 z'[s\tau+s_1(1-\tau)]d\tau
$$

принадлежит классу $C^{m-1,\nu}$ в квадрате $|s_1|,|s|\leqslant\delta$, отграничена по модулю от нуля и принимает значение $z'(s)$ при $s_1=s$. Следовательно, функция $k[z(s_1),z(s)]=h[\alpha(s_1,s)]$ также принадлежит этому классу и ее значение при $s_1=s$ совпадает с $h[z'(s)]=h[in(s)]$. Отсюда следует и утверждение леммы для функции $k(t_1,t)$ в рассматриваемой окрестности контура. ☐

Из этой леммы и (10.1)–(10.3) следует, что в предположении $\Gamma_j\in C^{m,\nu}$, $m\geqslant 1$, функции

$$
p_0^*,\ q_0^*,\ k_0\in C^{m-1,\nu}(\Gamma_0\times\Gamma_0), \quad k_1\in C^{m-1,\nu}(\Gamma_1\times\Gamma_1), \tag{10.4}
$$

причем

$$
p_0^*(t,t)=0, \quad q_0^*(t,t)=-i, \quad k_j(t,t)=0,\ j=0,1. \tag{10.5}
$$

Что касается непрерывных функций $k_{0,1}(t_0,t)$ и $k_{1,0}(t_0,t)$, то по переменной t_0 они принадлежат, соответственно, $C^{m,\nu}(\Gamma_0)$ и $C^{m,\nu}(\Gamma_1)$ равномерно по t.

Рассмотрим теперь операторные произведения $Q_0^*K_0$ и $(P_0^*)^2$, фигурирующие в выражении (9.16) для оператора $\widetilde K_0$. Согласно (10.1), (10.2) имеем:

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{q_0^*(t_1,t_0)dt_0}{t_0-t_1}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{k_0(t_0,t)\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_1\in\Gamma_0.
$$

С учетом (10.5) перестановка двух фигурирующих здесь интегралов, первый из которых сингулярный, возможна [7], так что

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\varphi(t)dt\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{q_0^*(t_1,t_0)k_0(t_0,t)dt_0}{(t_0-t_1)(t-t_0)}.
$$

Поскольку

$$
\frac{t-t_1}{(t_0-t_1)(t-t_0)} = \frac{1}{t_0-t_1} - \frac{1}{t_0-t},
$$

отсюда окончательно

$$
(Q_0^*K_0\varphi)(t_1) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{[k^*(t_1,t,t_1)-k^*(t_1,t,t)]\varphi(t)dt}{t-t_1}, \quad t_1\in\Gamma_0, \tag{10.6}
$$

где
$$k^*(t_1,t,t_2)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{q_0^*(t_1,t_0)k_0(t_0,t)dt_0}{t_0-t_2}.$$

Лемма 10.2. *Пусть* $\Gamma_0\in C^{m+1,\nu}$, *где* m — *неотрицательное целое число и* $0<\nu<1$. *Тогда функция* $k^*(t_1,t,t_2)$ *по всем трем переменным принадлежит классу* $C^{m,\nu-\varepsilon}$ *для любого* $\varepsilon>0$, *т. е.*
$$k^*(t_1,t,t_2)\in C^{m,\nu-0}(\Gamma_0\times\Gamma_0\times\Gamma_0). \tag{10.7}$$

Доказательство. Согласно (10.4) функция $k(t_1,t,t_0)=q^*(t_1,t_0)k_0(t_0,t)$ принадлежит классу $C^{m,\nu-0}(\Gamma_0\times\Gamma_0\times\Gamma_0)$, поэтому при $m=0$ утверждение леммы вытекает из хорошо известных свойств [7] сингулярных интегралов, зависящих от параметра.

В общем случае $m\geqslant 1$ воспользуемся формулой дифференцирования сингулярного интеграла k^* по всем переменным. Удобно осуществлять дифференцирование функции φ на Γ_0 по комплексному параметру контура, т. е. как предел
$$\varphi'(t_0)=\lim_{t\to t_0,\,t\in\Gamma_0}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}.$$

Аналогично понимаются и частные производные. Хорошо известно [7], что сингулярный интеграл p^* можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла:
$$\frac{\partial k^*}{\partial t_1}(t_1,t,t_2)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial k}{\partial t_1}(t_1,t,t_0)\frac{dt_0}{t_0-t_2},\quad \frac{\partial k^*}{\partial t}(t_1,t,t_2)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial k}{\partial t}(t_1,t,t_0)\frac{dt_0}{t_0-t_2}.$$

Утверждается, что аналогичная формула справедлива и по последней переменной:
$$\frac{\partial k^*}{\partial t_2}(t_1,t,t_2)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1,t,t_0)\frac{dt_0}{t_0-t_2}. \tag{10.8}$$

В самом деле, рассмотрим внутри контура Γ_0 аналитическую по переменной z функцию
$$\phi(t_1,t,z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{k(t_1,t,t_0)dt_0}{t_0-z}.$$

Интегрированием по частям убеждаемся, что
$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(t_1,t,z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1,t,t_0)\frac{dt_0}{t_0-z}.$$

По формуле Сохоцкого—Племеля [7] для граничных значений этих функций имеем:
$$\phi^+(t_1,t,t_2)=k(t_1,t,t_2)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{k(t_1,t,t_0)dt_0}{t_0-t_2},$$
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^+(t_1,t,t_2)=\frac{\partial k}{\partial t_2}(t_1,t,t_2)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{\partial k}{\partial t_0}(t_1,t,t_0)\frac{dt_0}{t_0-t_2}.$$

Дифференцируя первое равенство по t_0 и сравнивая результат со вторым равенством, приходим к справедливости (10.8).

Утверждение (10.7) леммы теперь получается непосредственно индукцией по m из формул дифференцирования. □

Совершенно аналогично устанавливается и аналогичный результат для оператора $(P_0^*)^2$:
$$[(P_0^*)^2\varphi](t_1)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\frac{[k_0^*(t_1,t,t_1)-k_0^*(t_1,t,t)]\varphi(t)dt}{t-t_1},\quad t_1\in\Gamma_0, \tag{10.9}$$

где по лемме 10.2 функция

$$k_0^*(t_1, t, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{p_0^*(t_1, t_0) p_0^*(t_0, t) dt_0}{t_0 - t_2}$$

принадлежит классу $C^{m,\nu-0}(\Gamma_0 \times \Gamma_0 \times \Gamma_0)$.

Поэтому на основании (10.2) и (10.6), (10.9) оператор $\widetilde{K}_0$ в (9.16) действует по формуле

$$(\widetilde{K}_0 \varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{\widetilde{k}_0(t_0, t) \varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma_0, \tag{10.10}$$

где в предположении $\Gamma \in C^{m+1,\nu}$ функция

$$\widetilde{k}_0(t_0, t) \in C^{m,\nu-0}(\Gamma_0 \times \Gamma_0), \quad \widetilde{k}_0(t, t) = 0. \tag{10.11}$$

Аналогичным свойством обладает и оператор K_1 по отношению к контуру Γ. Таким образом, (4.10) является системой уравнений Фредгольма. Прежде чем сформулировать для нее центральный результат, рассмотрим следующую типичную ситуацию, связанную с этой системой, для аналогичного (10.10) интегрального оператора

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{k(t_0, t) \varphi(t) dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma, \tag{10.12}$$

Лемма 10.3. *Пусть в условиях леммы* 3.1 *оператор K компактен в пространстве $C^{m,\mu}(\Gamma)$, $m \geqslant 1$. Тогда любое решение $\varphi \in C(\Gamma)$ уравнения $\varphi + K\varphi = f$ с правой частью $f \in C^{m,\mu}(\Gamma)$ также принадлежит $f \in C^{m,\mu}(\Gamma)$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1 оператор K компактен в каждом из пространств $C(\Gamma)$, $C^\mu(\Gamma)$, причем любое решение $\varphi \in C(\Gamma)$ уравнения $\varphi + K\varphi = f$ с правой частью $f \in C^\mu(\Gamma)$ также принадлежит $f \in C^\mu(\Gamma)$. Кроме того, для этого уравнения справедливы следующие альтернативы Фредгольма:

1. однородное уравнение $\varphi + K\varphi = 0$ имеет конечное число n линейно независимых решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C(\Gamma)$;
2. однородное союзное уравнение $\psi + K'\psi = 0$, где оператор K' получается из (10.10) заменой $k(t_0, t)$ на $-k(t, t_0)$ под знаком интеграла, имеет то же число n линейно независимых решений $\psi_1, \ldots, \psi_n \in C(\Gamma)$;
3. неоднородное уравнение $\varphi + K\varphi = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Gamma} f(t) \psi_j(t) |dt| = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{10.13}$$

Заметим, что в действительности функции φ_j и ψ_j принадлежат $C^\mu(\Gamma)$.

Пусть теперь оператор K компактен в $C^{m\mu}(\Gamma)$. Тогда по теореме Рисса для уравнения $\varphi + K\varphi = f$ в классе $C^{m,\mu}(\Gamma)$ также справедливы альтернативы Фредгольма, т. е. однородное уравнение в этом классе имеет $n_0 \leqslant n$ линейно независимых решений и найдутся такие n_0 линейно независимых функционалов над $C^{m,\mu}(\Gamma)$, что обращение их в нуль на функции f необходимо и достаточно для разрешимости неоднородного уравнения $\varphi + K\varphi = f$. Но поскольку условия (10.13) необходимы для разрешимости этого уравнения и в классе $C^{m,\mu}(\Gamma)$, отсюда следует неравенство $n \leqslant n_0$. Таким образом, $n_0 = n$, так что утверждения 1–3 справедливы и по отношению к классу $C^{m,\mu}$. В свою очередь отсюда вторая часть леммы получается непосредственно. □

Теорема 10.1. *Пусть $\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^{1,\nu}$. Тогда система уравнений* (9.16) *однозначно разрешима в классе $\varphi_0 \in C(\Gamma_0)$ $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, причем $f \in C^{m,\mu}(\Gamma_1)$, $m = 0, 1$, $0 < \mu < \nu$, влечет и $\varphi_0 \in C^{m,\mu}(\Gamma_0)$ $\varphi_1 \in C^{m,\mu}(\Gamma_1)$. Если дополнительно $\Gamma_j \in C^{m+1,\nu}$, $m \geqslant 2$, то предыдущее утверждение справедливо и для $m \geqslant 2$.*

Доказательство. Согласно (10.10) оператор $\widetilde{K}_0$ удовлетворяет условиям первой части леммы 10.3 и это же верно по отношению к оператору K_1 на контуре Γ_1. Кроме того, в силу леммы 6.2 эти операторы компактны и в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma_1)$. Поэтому первое утверждение теоремы вытекает из леммы 10.3, примененной к системе уравнений на контурах Γ_j, и леммы 9.1. Предположим далее, что $\Gamma_j \in C^{m+1,\nu}$. Тогда функция $\widetilde{k}(t_0,t)$, определяющая оператор $\widetilde{K}_0$ в (10.10), обладает свойством (10.11). Поэтому оператор $\widetilde{K}_0$ компактен в пространстве $C^{n,\mu}(\Gamma_1)$, что легко показывается индукцией по m с помощью формулы дифференцирования, установленной при доказательстве леммы 10.2. Ситуация с оператором K_1 совершенно аналогична, и нужный результат теперь следует из леммы 10.3. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А. В., Солдатов А. П.* Граничные свойства интегралов типа Коши. L_p-случай// Дифф. уравн. — 1991. — *27*, № 1. — С. 3–8.
2. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1972.
3. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. — Кишинев: Штиинца, 1973.
4. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. — М.: Физматгиз, 1963.
5. *Лехницкий Г. Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966.
7. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968.
8. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи—Зингера об индексе. — М.: Мир, 1970.
9. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1991.
10. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1991. — *55*, № 5. — С. 1070–1100.
11. *Солдатов А. П.* Гипераналитические функции и их приложения// Соврем. мат. и ее прилож. — 2004. — *15*. — С. 142–199.
12. *Солдатов А. П.* Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка// Докл. РАН. — 2007. — *416*, № 1. — С. 26–30.
13. *Солдатов А. П.* Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем на плоскости// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 6. — С. 734–745.
14. *Солдатов А. П.* Задача Неймана для эллиптических систем на плоскости// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *48*. — С. 120–133.
15. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана—Гильберта для эллиптической системы первого порядка в классах Гельдера// Науч. ведом. БелГУ. — 2009. — *13*, вып. 17/2. — С. 115–121.
16. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. — М.: Мир, 1974.
17. *Begehr H., Lin W.* A mixed-contact problem in orthotropic elasticity// В сб.: «Partial diifferential equations with real analysis». — Harlow: Longman Scientific & Technical, 1992. — С. 219–239.
18. *Begehr H., Lin W.* A mixed-contact problem in orthotropic elasticity// В сб.: «Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text». — Singapore, World Scientific, 1994.
19. *Douglis A.* A function-theoretical approach to elliptic systems of equations in two variables// Commun. Pure Appl. Math. — 1953. — *6*. — С. 259–289.
20. *England A. H.* Complex variable methods in elasticity. — London etc.: Wiley-Interscience, 1971.
21. *Gilbert R. P., Wendland W. L.* Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1975. — *73A*. — С. 317–371.

Александр Павлович Солдатов
Национальный исследовательский университет «Белгородский государственный университет»
308015, г. Белгород, ул. Победы, д. 85
E-mail: soldatov48@gmail.com

UDC 517.9

On the Theory of Anisotropic Flat Elasticity

© 2016 **A. P. Soldatov**

Abstract. For the Lamé system from the flat anisotropic theory of elasticity, we introduce generalized double-layer potentials in connection with the function-theory approach. These potentials are built both for the translation vector (the solution of the Lamé system) and for the adjoint vector functions describing the stress tensor. The integral representation of these solutions is obtained using the potentials. As a corolary, the first and the second boundary-value problems in various spaces (Hölder, Hardy, and the class of functions just continuous in a closed domain) are reduced to the equivalent system of the Fredholm boundary equations in corresponding spaces. Note that such an approach was developed in [13, 14] for common second-order elliptic systems with constant (higher-order only) coefficients. However, due to important applications, it makes sense to consider this approach in detail directly for the Lamé system. To illustrate these results, in the last two sections we consider the Dirichlet problem with piecewise-constant Lamé coefficients when contact conditions are given on the boundary between two media. This problem is reduced to the equivalent system of the Fredholm boundary equations. The smoothness of kernels of the obtained integral operators is investigated in detail depending on the smoothness of the boundary contours.

REFERENCES

1. A. V. Aleksandrov and A. P. Soldatov, "Granichnye svoystva integralov tipa Koshi. L_p-sluchay" [Boundary properties of integrals of the Cauchy type] *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 3–8 (in Russian).
2. G. M. Goluzin, *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of Complex Argument], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
3. I. Ts. Gokhberg and N. I. Krupnik, *Vvedenie v teoriyu odnomernykh singulyarnykh uravneniy* [Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Equations], Shtiintsa, Kishinev, 1973 (in Russian).
4. V. D. Kupradze, *Metody potentsiala v teorii uprugosti* [Methods of Potential in the Theory of Elasticity], Fizmatgiz, Moscow, 1963 (in Russian).
5. G. G. Lekhnitskiy, *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Elasticity Theory of Anisotropic Body], GITTL, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
6. N. I. Muskhelishvili, *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some General Problems of the Mathematical Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
7. N. I. Muskhelishvili, *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular Integral Equations], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
8. R. Pale, *Seminar po teoreme At'i—Zingera ob indekse* [Seminar on the Atiyah—Singer Index Theorem], Mir, Moscow, 1970 (in Russian).
9. U. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis]. — M.: Mir, 1991 (in Russian).
10. A. P. Soldatov, "Metod teorii funktsiy v kraevykh zadachakh na ploskosti. I. Gladkiy sluchay" [Function theory method for boundary-value problems on the plane. I. Smooth case], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1991, **55**, No. 5, 1070–1100 (in Russian).
11. A. P. Soldatov, "Giperanaliticheskie funktsii i ikh prilozheniya" [Hyper-analytic functions and their applications], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2004, **15**, 142–199 (in Russian).
12. A. P. Soldatov, "Prostranstvo Khardi resheniy ellipticheskikh sistem pervogo poryadka" [The Hardy space of solutions of first-order elliptic systems], *Dokl. RAN.* [Proc. Russian Acad. Sci.], 2007, **416**, No. 1, 26–30 (in Russian).
13. A. P. Soldatov, "Zadacha Dirikhle dlya slabo svyazannykh ellipticheskikh sistem na ploskosti" [The Dirichlet problem for weakly connected elliptic systems on the plane], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 6, 734–745 (in Russian).
14. A. P. Soldatov, "Zadacha Neymana dlya ellipticheskikh sistem na ploskosti" [The Neumann problem for elliptic systems on the plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Comtemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **48**, 120–133 (in Russian).
15. A. P. Soldatov and O. V. Chernova, "Zadacha Rimana—Gil'berta dlya ellipticheskoy sistemy pervogo poryadka v klassakh Gel'dera" [The Riemann—Hilbert problem for first-order elliptic system in the Hölder classes] *Nauch. vedom. BelGU* [Sci. Bull. Uni. Belgorod], 2009, **13**, No. 17/2, 115–121 (in Russian).
16. G. Fikera, *Teoremy sushchestvovaniya v teorii uprugosti* [Existence Theorems in the Elasticity Theory], Mir, Moscow, 1974 (in Russian).
17. H. Begehr and W. Lin, "A mixed-contact problem in orthotropic elasticity," In: «Partial differential equations with real analysis», Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992, 219–239.

18. H. Begehr and W. Lin, “A mixed-contact problem in orthotropic elasticity”, In: «Complex analytic methods for partial differential equations. An introductory text», World Scientific, Singapore, 1994.
19. A. Douglis, “A function-theoretical approach to elliptic systems of equations in two variables,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1953, **6**, 259–289.
20. A. H. England, Complex variable methods in elasticity. — London etc.: Wiley-Interscience, 1971.
21. R. P. Gilbert and W. L. Wendland, “Analytic, generalized, hyper-analytic function theory and an application to elasticity,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.*, 1975, **73A**, 317–371.

Alexandre P. Soldatov
National Research University "Belgorod State University", Belgorod, Russia
E-mail: soldatov48@gmail.com