Современная математика. Фундаментальные направления. Том 60 (2016). С. 102–113

УДК 517.929

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2016 г. **А. Б. МУРАВНИК**

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле в полуплоскости (с непрерывной и ограниченной граничной функцией) для модельного эллиптического дифференциально-разностного уравнения

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \ |a| < 1.$$

Доказывается ее разрешимость в смысле обобщенных функций, строится интегральное представление ее решения и доказывается, что вне граничной гиперплоскости построенное решение удовлетворяет уравнению и в классическом смысле.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Теория дифференциально-разностных эллиптических уравнений в частных производных в настоящее время активно развивается и находит многочисленные приложения. Для задач в ограниченных областях глубокое и полное изложение теории можно найти, например, в [5, 9, 10, 13] (см. также имеющуюся там библиографию). Задачи в неограниченных областях пока исследованы в меньшей степени.

Настоящая работа посвящена задаче Дирихле для модельного дифференциально-разностного сильно эллиптического уравнения в полуплоскости. Как известно, в классическом случае дифференциальных эллиптических уравнений такие задачи корректно разрешимы в естественных (и достаточно широких) классах краевых функций (см., например, [4, 8]), однако обладают и определенным своеобразием; в частности, в качественных свойствах их решений возникают эффекты, характерные, вообще говоря, для параболического случая (см. [7, 12]).

В настоящей работе доказывается разрешимость исследуемой задачи в смысле обобщенных функций, строится интегральное представление решения формулой пуассоновского типа, доказывается гладкость решения вне границы.

1. Основной результат

Рассмотрим задачу

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \ x \in (-\infty, +\infty), \ y \in (0, +\infty), \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{y=0} = u_0(x), \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{1.2}$$

где a и h — вещественные параметры, $|a| < 1$, а u_0 непрерывна и ограничена.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации НШ-4479.2014.1 и гранта РФФИ 14-01-00265.

Прежде всего отметим, что ограничение, наложенное на a, эквивалентно сильной эллиптичности рассматриваемого уравнения, т. е. положительной определенности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора, стоящего в левой части этого уравнения, взятой с обратным знаком (см. [13, § 9]). Действительно, указанный символ равен $-\xi^2 - a\xi^2 e^{-ih\xi} - \eta^2$, т. е. его вещественная часть, взятая с обратным знаком, равна $(1 + a\cos h\xi)\xi^2 + \eta^2$. Если $|a| < 1$, то существует такая положительная постоянная C, что

$$(1 + a\cos h\xi)\xi^2 + \eta^2 \geqslant C(\xi^2 + \eta^2)$$

для любой точки (ξ, η) плоскости; в противном случае, полагая $\eta = 0$ и выбирая такое отличное от нуля ξ, что левая часть последнего неравенства обращается в нуль, получаем, что указанное неравенство не выполнено в точке $(\xi, 0)$ ни при каком положительном C, а значит, уравнение (1.1) не является сильно эллиптическим.

Далее, следуя классической операционной схеме (см., например, [2, §10]), применим (формально) преобразование Фурье к задаче (1.1)-(1.2), используя тот факт, что в образах Фурье оператор сдвига действует как мультипликатор: $\widehat{f(x+h)} = e^{-ih\xi}\widehat{f(\xi)}$. Получим следующую начальную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2\widehat{u}}{dy^2} = \xi^2(1 + ae^{-ih\xi})\widehat{u}, \ x \in (-\infty, +\infty), \tag{1.3}$$

$$\widehat{u}(0;\xi) = \widehat{u}_0(\xi). \tag{1.4}$$

Отметим, что полученная задача не является задачей Коши, поскольку уравнение имеет второй порядок, а начальное условие только одно.

Итак, (1.3) — это линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (зависящее от параметра ξ), характеристическое уравнение которого имеет два корня $\pm\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, где

$$\rho(\xi) = |\xi|\Big(2a\cos h\xi + a^2 + 1\Big)^{\frac{1}{4}}, \ \theta(\xi) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{a\sin h\xi}{1 + a\cos h\xi}. \tag{1.5}$$

Таким образом, любая функция вида

$$C_1(\xi)e^{y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi) + i\sin\theta(\xi)]} + C_2(\xi)e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi)]}, \tag{1.6}$$

в которой функции $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ удовлетворяют условию $C_1(\xi)+C_2(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$, является решением задачи (1.3)-(1.4). Положим $C_1(\xi) \equiv 0$, $C_2(\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$. Тогда решение задачи (1.3)-(1.4) равно

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\widehat{u}_0(\xi)e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi)]}d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi)]}d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)e^{-i\tau\xi}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)e^{i(x-\tau)\xi}e^{-y\rho(\xi)[\cos\theta(\xi)+i\sin\theta(\xi)]}d\xi d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}\Big(\cos[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)] + i\sin[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)]\Big)d\xi.$$

Воспользовавшись четностью функции ρ и нечетностью функции θ, приводим последнее выражение к виду

$$2\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\tau)\int\limits_{0}^{\infty} e^{-y\rho(\xi)\cos\theta(\xi)}\cos[(x-\tau)\xi - y\rho(\xi)\sin\theta(\xi)]d\xi d\tau.$$

Теперь представим $\cos\theta(\xi)$ и $\sin\theta(\xi)$ в виде $\sqrt{\dfrac{1 \pm \cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a\sin h\xi}{1 + a\cos h\xi}\right)}{2}}$. Тогда, воспользовавшись формулой $\operatorname{arctg} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, получаем, что

$$\cos\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2\sin^2 h\xi}{(1+a\cos h\xi)^2}}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1+a\cos h\xi}{\sqrt{(1+a\cos h\xi)^2+a^2\sin^2 h\xi}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+1+2a\cos h\xi}+1+a\cos h\xi}{\sqrt{a^2+1+2a\cos h\xi}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}+a\cos h\xi+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}},$$

$$\sin\theta(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}-a\cos h\xi-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac{1}{4}}}.$$

Обозначив $\left(2a\cos h\xi+a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$ через $\varphi(\xi)$, получаем, что $\rho(\xi)\cos\theta(\xi)=\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}$, а $\rho(\xi)\sin\theta(\xi)=\frac{|\xi|}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$, откуда следует, что

$$u(x,y)=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(\tau)\int\limits_{0}^{\infty}e^{-y\frac{\xi}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}}\cos\left[(x-\tau)\xi-y\frac{\xi}{\sqrt{2}}\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right]d\xi d\tau=$$

$$=2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u_0(x-\tau)\int\limits_{0}^{\infty}e^{-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}{2}}}\cos\left[\tau\xi-y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}\right]d\xi d\tau.$$

Отметим, что в предшествующих рассуждениях мы в соответствии с общей схемой [2, §10] не заботились об обосновании сходимости интегралов и законности перемены порядка интегрирования, поскольку речь шла о решениях в смысле обобщенных функций. В следующем утверждении речь пойдет и о гладких решениях.

Теорема 1.1. *Пусть функция $\mathcal{E}(x,y)$ определена следующим образом*:

$$\mathcal{E}(x,y)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi, \tag{1.7}$$

где $G_1(\xi)=\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1}{2}}$, $G_2(\xi)=\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}$.

Тогда функция

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(x-\xi,y)u_0(\xi)d\xi \tag{1.8}$$

является решением задачи (1.1)-(1.2) *в смысле обобщенных функций, а в полуплоскости* $\mathbb{R}^1\times(0,+\infty)$ *удовлетворяет уравнению* (1.1) *и в классическом смысле.*

Доказательство. Первое утверждение (о разрешимости в смысле обобщенных функций) вытекает из приведенного выше построения функции $\mathcal{E}(x,y)$ и [2, §10, Теорема 1]. Указанная теорема применима, несмотря на то что уравнение (1.1) имеет второй порядок по переменной y, потому что эта теорема верна не только для уравнений, но и для систем, а уравнение (1.1) можно свести к системе уравнений первого порядка по y аналогично [3, Гл. 2, §5, п. 2]. Отметим, что задача (1.1)-(1.2) не является эквивалентной указанному примеру из [3], поскольку в последнем задача имеет два краевых условия, а не одно, однако на разрешимость это различие не влияет.

Для доказательства утверждения о гладкости исследуем функцию (1.7).

Положительность подкоренного выражения в G_1 очевидна. Чтобы доказать ее для G_2, возведем в квадрат дробь $\dfrac{\varphi(\xi)}{a\cos h\xi+1}$; получим $\dfrac{a^2+2a\cos h\xi+1}{a^2\cos^2 h\xi+2a\cos h\xi+1}$. Последняя дробь больше единицы, поэтому и исходная дробь больше единицы, а значит, $\varphi(\xi)>a\cos h\xi+1$, т. е. G_2 определена корректно.

Подынтегральная функция в (1.7) ограничена сверху функцией $e^{-\nu\xi}$, где $\nu=y\sqrt{\dfrac{1-|a|}{2}}$ — положительная константа; значит, функция (1.7) корректно определена в полуплоскости $\{y>0\}$.

Подставим функцию (1.7) в уравнение (1.1). Получим, что

$$\mathcal{E}_{xx}(x,y)=-\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{xx}(x+h,y)=-\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x+h)\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{y}(x,y)=-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi+\int\limits_0^\infty G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_{yy}(x,y)=\int\limits_0^\infty G_1^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-$$

$$-\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-\int\limits_0^\infty G_2^2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$=\int\limits_0^\infty\left[G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)\right]e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-2\int\limits_0^\infty G_1(\xi)G_2(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi.$$

Вычислим

$$G_1^2(\xi)-G_2^2(\xi)=\frac{\xi^2}{2}\left[\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1-\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1\right]=\xi^2(a\cos h\xi+1),$$

$$G_1(\xi)G_2(\xi)=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{\left[\varphi(\xi)+a\cos h\xi+1\right]\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]}=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{\varphi^2(\xi)-(a\cos h\xi+1)^2}=$$
$$=\frac{\xi^2}{2}\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1-a^2\cos^2 h\xi-2a\cos h\xi-1}=\frac{a\xi^2}{2}\sqrt{1-\cos^2 h\xi}=\frac{a\xi^2}{2}\sin h\xi.$$

Таким образом,

$$\mathcal{E}_{yy}(x,y)=\int\limits_0^\infty \xi^2(a\cos h\xi+1)e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi-$$

$$-a\int\limits_0^\infty \xi^2\sin h\xi e^{-yG_1(\xi)}\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$=a\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\Big(\cos h\xi\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]-\sin h\xi\sin\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]\Big)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi-yG_2(\xi)\right]d\xi=$$

$$= a\int_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[(x+h)\xi - yG_2(\xi)\right] + \int_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos\left[x\xi - yG_2(\xi)\right]d\xi =$$
$$= -a\mathcal{E}_{xx}(x+h,y) - \mathcal{E}_{xx}(x,y),$$

т. е. функция (1.7) действительно удовлетворяет уравнению (1.1).

Теперь, чтобы исследовать функцию (1.8), оценим поведение функции (1.7) при $x \to \infty$ (при фиксированном положительном y). Для этого разобьем ее на четное и нечетное (по x) слагаемые $\mathcal{E}_1(x,y)$ и $\mathcal{E}_2(x,y)$:

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \int_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\cos x\xi\,\cos[yG_2(\xi)]d\xi,$$

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \int_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\sin x\xi\,\sin[yG_2(\xi)]d\xi.$$

После замены переменной $\eta = x\xi$ получаем, что

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-yG_1(\frac{\eta}{x})}\cos\left[yG_2\left(\frac{\eta}{x}\right)\right]\cos\eta\, d\eta = \frac{1}{x}\int_0^\infty \psi\Big(\frac{\eta}{x}\Big)f(\eta)d\eta,$$

где

$$f(\tau) = \cos\tau \in L_\infty(\mathbb{R}^1_+),$$
$$\psi(\tau) = e^{-yG_1(\tau)}\cos\left[yG_2(\tau)\right] \in L_1(\mathbb{R}^1_+).$$

Теперь обозначим $e^{-y\tau^2}$ через $\psi_0(\tau)$. Очевидно, $\psi_0(\tau) \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, кроме того, преобразование Меллина функции $\psi_0(\tau)$ определено на всей вещественной оси и не имеет вещественных нулей; действительно,

$$\int_0^\infty \tau^{ix}\psi_0(\tau)d\tau = \frac{1}{2y^{\frac{1+ix}{2}}}\int_0^\infty z^{\frac{ix-1}{2}}e^{-z}dz = \frac{\Gamma(\frac{1+ix}{2})}{2y^{\frac{1+ix}{2}}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi_0\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}e^{-\frac{r^2}{4t}} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Тогда в силу тауберовой теоремы Винера (см. [6, с. 163])

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

т. е. $\mathcal{E}_1(x,y)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ для любых фиксированных $y > 0,\ a \in (-1,1),\ h \in \mathbb{R}^1$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{E}_2(x,y)$.

Обозначим функцию $e^{-yG_1(\tau)}\sin\left[yG_2(\tau)\right]$ через $\psi(\tau) \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, а $\sin\tau$ — через $f(\tau) \in L_\infty(\mathbb{R}^1_+)$. Получим, что

$$\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi_0\Big(\frac{\tau}{r}\Big)f(\tau)d\tau = \frac{r}{2y}F\Big(1,\frac{3}{2},-\frac{r^2}{4y}\Big) \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(здесь через F обозначена вырожденная гипергеометрическая функция второго рода).

Таким образом, условия тауберовой теоремы Винера выполнены, следовательно, для любых фиксированных $y > 0,\ a \in (-1,1),\ h \in \mathbb{R}^1$

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{1}{x}\int_0^\infty \psi\Big(\frac{\tau}{x}\Big)f(\tau)d\tau \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Итак, для любого положительного y и любых $a \in (-1,1)$, $h \in \mathbb{R}^1$

$$\lim_{x\to\infty} \mathcal{E}(x,y) = 0.$$

Чтобы оценить скорость этого стремления, проинтегрируем слагаемое $\mathcal{E}_1(x,y)$ по частям:

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)](\sin x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\sin x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi\right].$$

Выше установлено, что $e^{-yG_1(\xi)} \leqslant e^{-\nu\xi}$, следовательно, внеинтегральный член обращается в нуль. Таким образом,

$$\mathcal{E}_1(x,y) = \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty \Big(G_1'(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\Big)\sin x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\Big(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\Big)\sin x\xi d\xi. \quad (1.9)$$

В дальнейшем будем учитывать, что подкоренное выражение в $G_1(\xi)$ ограничено сверху и снизу положительными константами, поэтому производные любых порядков от $G_1(\xi)$ не имеют особенностей, а на бесконечности растут не быстрее степенной функции. Подкоренное выражение в $G_2(\xi)$ ограничено положительной константой только сверху, а снизу ограничено нулем и обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых $\cos h\xi = \pm 1$. Значит, производные функции $G_2(\xi)$ могут иметь особенности в указанных точках. Проанализируем поведение этих производных более детально. Для этого достаточно рассмотреть не всю функцию $G_2(\xi)$, а только ее сомножитель $\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}$. Его производная равна

$$\frac{\varphi'(\xi) + ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}} = \frac{\frac{-ah\sin h\xi}{\sqrt{2a\cos h\xi + a^2+1}} + ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}} =$$

$$= \frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi) - a\cos h\xi - 1}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi + a^2 + 1}}\right).$$

Второй сомножитель ограничен сверху и снизу, значит, нас интересует только первый. Его знаменатель обращается в нуль в тех и только тех точках, в которых $\cos h\xi = \pm 1$, однако числитель имеет в тех же точках нули не менее высокого порядка, из чего следует, что последний интеграл сходится. Проинтегрируем его по частям. Получим, что

$$\mathcal{E}_1(x,y) = -\frac{y}{x^2}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\Big(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\Big)(\cos x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{y}{x^2}\left(\int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\cos x\xi d\xi - \right.$$

$$\left. - \left[e^{-yG_1(\xi)}\Big(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\Big)\cos x\xi\right]\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}\right) =$$

$$= \frac{y}{x^2}\left(\int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] + G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\cos x\xi d\xi + \sqrt{a+1}\right).$$

Обозначая $\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_1'(\xi)\cos[yG_2(\xi)]+G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'$ через $\psi(\xi)$, получаем, что

$$x^2\mathcal{E}_1(x,y)=y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\cos x\xi d\xi+y\sqrt{a+1}. \tag{1.10}$$

Чтобы убедиться в сходимости последнего интеграла, исследуем особенности функции

$$\Big(G_2'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\Big)'=G_2''(\xi)\sin[yG_2(\xi)]+y(G_2'(\xi))^2\cos[yG_2(\xi)].$$

Как мы только что выяснили, первая производная функции $\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$ (а значит, и функции $G_2(\xi)$) особенностей не имеет, поэтому достаточно рассмотреть первое слагаемое.

Поскольку производная функции $\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}$ особенностей не имеет, достаточно рассмотреть функцию $\xi\left(\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right)''\sin[yG_2(\xi)]$, равную

$$\xi\left(\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)'\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)\sin[yG_2(\xi)]+$$
$$+\xi\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)'\sin[yG_2(\xi)].$$

Как мы выяснили выше, второе слагаемое последней суммы особенностей не имеет. Осталось рассмотреть

$$\left(\frac{ah\sin h\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)'\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}-ah\sin h\xi\left(\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\right)'}{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}-ah\sin h\xi\frac{ah\sin h\xi}{2\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)}{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{2ah^2\cos h\xi\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]-a^2h^2\sin^2 h\xi\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)}{2\left[\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1\right]^{\frac{3}{2}}}\sin[yG_2(\xi)]=$$
$$=\frac{ah^2\cos h\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\sin[yG_2(\xi)]-$$
$$-\frac{a^2h^2}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2a\cos h\xi+a^2+1}}\right)\left(\frac{\sinh\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}\right)^2\sin[yG_2(\xi)]\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}}.$$

Как установлено выше, второе слагаемое последнего выражения имеет особенности только в последнем сомножителе, однако сомножитель

$$\sin[yG_2(\xi)]=\sin\left[y\xi\sqrt{\frac{\varphi(\xi)-a\cos h\xi-1}{2}}\right]$$

имеет в этих точках нули того же самого порядка, что и доказывает сходимость интеграла в правой части формулы (1.10).

Итак, первое слагаемое в правой части равенства (1.10) равно $\dfrac{y}{x}\displaystyle\int\limits_0^\infty\psi\left(\frac{\eta}{x}\right)\cos\eta d\eta$, где $\psi\in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, поэтому условия тауберовой теоремы Винера для этого слагаемого выполнены, следовательно, оно стремится к нулю при $x\to\infty$ для любого фиксированного положительного y.

Таким образом, $x^{2-\varepsilon}\mathcal{E}_1(x,y)\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ для любых положительных y и ε.

Проанализируем таким же образом второе слагаемое функции $\mathcal{E}(x, y)$:

$$\mathcal{E}_2(x,y) = -\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)](\cos x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi d\xi - e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\cos x\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty}\right].$$

Внеинтегральный член обращается в нуль, поскольку $G_2(0) = 0$, значит,

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \left(e^{-yG_1(\xi)}\sin[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\cos x\xi d\xi =$$

$$= \frac{y}{x^2}\int\limits_0^\infty e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)(\sin x\xi)'d\xi.$$

Снова применим формулу интегрирования по частям. Получим, что

$$\mathcal{E}_2(x,y) = \frac{y}{x^2}\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\sin x\xi\Bigg|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_0^\infty \left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'\sin x\xi d\xi\right].$$

Учитывая, что $G_2'(0) = 0$, поскольку $G_2(0) = 0$, мы видим, что внеинтегральный член обращается в нуль, поэтому $x^2\mathcal{E}_1(x,y) = y\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\sin x\xi d\xi$, где через ψ обозначена суммируемая на положительной полуоси функция $\left[e^{-yG_1(\xi)}\left(G_2'(\xi)\cos[yG_2(\xi)] - G_1'(\xi)\sin[yG_2(\xi)]\right)\right]'$. Снова применив тауберову теоремы Винера, мы видим, что $x^2\mathcal{E}_2(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Таким образом, $x^{2-\varepsilon}\mathcal{E}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любых положительных y и ε, а это значит, что свертка $\mathcal{E}(x,y)$ с любой непрерывной ограниченной функцией корректно определена в полуплоскости $\{y > 0\}$.

Теперь оценим поведение производных этой функции на бесконечности.

Разобьем $-\mathcal{E}_{xx}(x,y)$ на четное и нечетное слагаемые

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos x\xi\ \cos[yG_2(\xi)]d\xi$$

и

$$\mathcal{E}_{xx,2}(x,y) = \int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\sin x\xi\ \sin[yG_2(\xi)]d\xi.$$

Применяя к первому слагаемому формулу интегрирования по частям, видим, что оно равно

$$\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\ \cos[yG_2(\xi)](\sin x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\sin x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi\right] =$$

$$= -\frac{1}{x}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\sin x\xi d\xi.$$

Сходимость последнего интеграла доказывается точно так же, как и сходимость интеграла в (1.9). Применив формулу интегрирования по частям еще раз, получаем, что

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'(\cos x\xi)'d\xi =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[\left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)'\cos x\xi\Big|_{\xi=0}^{\xi=+\infty} - \int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''\cos x\xi d\xi\right] =$$

$$= -\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''\cos x\xi d\xi.$$

Суммируемость функции $\left(e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''$ на положительной полуоси доказана выше, поэтому функция $\left(\xi^2 e^{-yG_1(\xi)}\cos[yG_2(\xi)]\right)''$ суммируема на той же полуоси. Таким образом,

$$\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) = \frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \psi(\xi)\cos x\xi d\xi,$$

где $\psi \in L_1(\mathbb{R}^1_+)$, поэтому тауберова теорема Винера применима: $x^2\mathcal{E}_{xx,1}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Для функции $\mathcal{E}_{xx,2}(x,y)$ это предельное соотношение доказывается точно так же.

Итак, $x^2\mathcal{E}_{xx}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Поскольку h — константа, $x^2\mathcal{E}_{xx}(x+h,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Поскольку $\mathcal{E}(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то $x^2\mathcal{E}_{yy}(x,y) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любого положительного y.

Тем самым обосновывается дифференцирование и применение оператора сдвига под знаком интеграла в (1.8), а значит, функция (1.8) обладает в полуплоскости $\{y > 0\}$ всеми производными (в классическом смысле), входящими в уравнение (1.1), и удовлетворяет этому уравнению в классическом смысле, что и завершает доказательство теоремы. □

2. Замечания о природе обобщенного решения

Функция (1.8) удовлетворяет задаче (1.1)-(1.2) в смысле Гельфанда—Шилова (см. [2, §10]): она является обобщенной функцией переменной x, зависящей от вещественного параметра y и дифференцируемой по этому параметру на положительной полуоси (см., например, [11, §9, п. 5]), уравнение (1.1) понимается в смысле равенства обобщенных функцией переменной x, выполняемого для каждого положительного значения параметра y, а краевое условие (1.2) понимается как предельное соотношение в топологии обобщенных функций переменной x при стремящемся к нулю справа вещественном параметре y (см., например, [11, §9, п. 4]).

Для задач в полупространстве (в данном случае — в полуплоскости) хорошо известно и другое определение решений в смысле обобщенных функций — в смысле Владимирова. Проиллюстрируем это определение на примерах задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = u_{xx}$ и уравнения теплопроводности $u_t = u_{xx}$ (см. [1, §13, §16]). В обоих случаях под решением понимается обобщенная функция переменной (x,t), обращающаяся в нуль в полуплоскости $\{t < 0\}$ и удовлетворяющая уравнению в смысле равенства обобщенных функций переменной (x,t), однако вместо исходного уравнения должно выполняться другое: $u_{tt} = u_{xx} + u_0(x)\delta'(t) + u_1(x)\delta(t)$ вместо волнового уравнения и $u_t = u_{xx} + u_0(x)\delta(t)$ вместо уравнения теплопроводности. Это определение корректно: можно показать (см. [1, §13, §16]), что для каждой из указанных задач Коши классическое решение, продолженное в нижнюю полуплоскость тождественным нулем, является и обобщенным решением в смысле Владимирова. Однако в данной статье мы имеем дело не с задачей Коши, а с задачей Дирихле, что меняет ситуацию принципиальным образом: уравнение имеет второй порядок по переменной y, но задача имеет всего одно краевое условие. В этом случае автору не известно, как корректно определить по Владимирову решение задачи в смысле обобщенных функций не только для уравнения (1.1), но даже и для классического уравнения Лапласа.

В связи с этим уместно отметить, что функция $\mathcal{E}(x, y)$, определенная формулой (1.7), представляет собой ядро пуассоновского интегрального представления решения исследуемой задачи, однако нет оснований утверждать, что она же является и фундаментальным решением исследуемого уравнения. Такое совпадение (ядра формулы Пуассона и фундаментального решения) характерно для задачи Коши, однако в случае задачи Дирихле ситуация иная даже в классической теории. Так, даже для задачи Дирихле в полуплоскости для уравнения Лапласа ядром формулы Пуассона является функция $\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ (с точностью до константы), не говоря уже об областях с более сложными границами. Фундаментальное решение уравнения (1.1) могло бы представлять самостоятельный исследовательский интерес, однако это выходит за пределы настоящей работы, а интегральное представление решения строится непосредственным переходом к двойственной задаче в образах Фурье.

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за постоянное внимание к работе.

Автор выражает благодарность В. Н. Денисову и А. И. Назарову за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши// Усп. мат. наук. — 1953. — *8*, № 6. — С. 3–54.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3: Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1958.
4. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические уравнения второго порядка. — М.: Мир, 1989.
5. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *38*. — С. 3–173.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
7. *Денисов В. Н., Муравник А. Б.* Об асимптотике решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в полупространстве// В сб.: «Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения». — М.: Физматлит, 2003. — С. 397–417.
8. *Кондратьев В. А., Ландис Е. М.* Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1988. — *32*. — С. 99–218.
9. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — *26*. — С. 3–132.
10. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
11. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: МГУ, 1984.
12. *Denisov V. N., Muravnik A. B.* On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations// Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. — 2003. — *9*. — С. 88–93.
13. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Андрей Борисович Муравник
E-mail: amuravnik@yandex.ru

АО «Концерн «Созвездие», Воронеж
Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

UDC 517.929

On the Dirichlet Problem for Differential-Difference Elliptic Equations in a Half-plane

© 2016 **A. B. Muravnik**

Abstract. The Dirichlet problem is considered in a half-plane (with continuous and bounded boundary-value function) for the model elliptic differential-difference equation

$$u_{xx} + au_{xx}(x+h, y) + u_{yy} = 0, \ |a| < 1.$$

Its solvability is proved in the sense of generalized functions, the integral representation of the solution is constructed, and it is proved that everywhere but the boundary hyperplane this solution satisfies the equation in the classic sense as well.

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
2. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, "Preobrazovaniya Fur'e bystro rastushchikh funktsiy i voprosy edinstvennosti resheniya zadachi Koshi" [Fourier transformations of rapidly growing functions and questions of unique solvability of the Cauchy problem], *Usp. mat. nauk.* [Progr. Math. Sci.], 1953, **8**, No. 6, 3–54 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii. Vyp.* 3: *Nekotorye voprosy teorii differentsial'nykh uravneniy* [Generalized Functions. Vol. 3: Some Questions of the Theory of Differential Equations], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
4. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Ellipticheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Second-Order Elliptic Equations], Mir, Moscow, 1989 (in Russian).
5. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary-value conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
6. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Spektral'naya teoriya* [Linear Operators. Spectral Theory], Mir, Moscow, 1966 (in Russian).
7. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "Ob asimptotike resheniya zadachi Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya v poluprostranstve" [On asymptotic form of solution of the Dirichlet problem for an elliptic equation in a halfspace], In: "Nelineynyy analiz i nelineynye differentsial'nye uravneniya" [Nonlinear Analysis and Nonlinear Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003, 397–417 (in Russian).
8. V. A. Kondrat'ev and E. M. Landis, "Kachestvennaya teoriya lineynykh differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh vtorogo poryadka" [Qualitative theory of second-order linear partial differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Results Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1988, **32**, 99–218 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. I" [Nonclassic Boundary-Value Problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "Neklassicheskie kraevye zadachi. II" [Nonclassic Boundary-Value Problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
11. G. E. Shilov, *Matematicheskiy analiz. Vtoroy spetsial'nyy kurs* [Analysis. The Second Special Course], MGU, Moscow, 1984 (in Russian).
12. V. N. Denisov and A. B. Muravnik, "On asymptotic behavior of solutions of the Dirichlet problem in half-space for linear and quasi-linear elliptic equations," *Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc.*, 2003, **9**, 88–93.

13. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

Andrey B. Muravnik
E-mail: amuravnik@yandex.ru

JSC Concern "Sozvezdie", Voronezh, Russia
RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., Moscow, 117198 Russia